

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАРШИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
им. В.И. РОМАНОВСКОГО АН РУЗ

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
(ИТММ-2022)**

**МАТЕРИАЛЫ
XXI Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
25–29 октября 2022 г.**

ТОМСК
Издательство Томского
государственного университета
2023

УДК 519
ББК 22.17

И74

Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2022): Материалы XXI Международной конференции имени А. Ф. Терпугова (25–29 октября 2022 г.). — Томск: Издательство Томского государственного университета, 2023. — 442 с.

ISBN 978–5–907572–98–0

Сборник содержит избранные материалы XXI Международной конференции имени А.Ф. Терпугова по следующим направлениям: теория массового обслуживания и ее приложения, интеллектуальный анализ данных и визуализация, информационные технологии и программная инженерия, математическое и компьютерное моделирование технологических процессов. Также в сборник вошли материалы международного симпозиума "Современные стохастические модели и проблемы актуарной математики" (МАМОНТ-2022).

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

УДК 519
ББК 22.17

Р е д к о л л е г и я:

А.А. Назаров, доктор технических наук, профессор

С.П. Моисеева, доктор физико-математических наук, профессор

А.Н. Моисеев, доктор физико-математических наук, доцент

Д.В. Семенова, кандидат физико-математических наук, доцент

ISBN 978–5–907572–98–0

© Авторы. Текст, 2023

© Томский государственный
университет. Оформление.
Дизайн, 2023

NATIONAL RESEARCH TOMSK STATE UNIVERSITY
KARSHI STATE UNIVERSITY
PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA
V.A. TRAPEZNIKOV INSTITUTE OF CONTROL
SCIENCES OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
V.I. ROMANOVSKY INSTITUTE OF MATHEMATICS
OF THE ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN

**INFORMATIONAL TECHNOLOGIES
AND MATHEMATICAL MODELLING
(ITMM-2022)**

**PROCEEDINGS
of the 21th International Conference
named after A. F. Terpugov
2022 October, 25–29**

TOMSK
Tomsk State
University Publishing
2023

UDC 519
LBC 22.17
I60

Informational technologies and mathematical modelling (ITMM-2022):
Proceedings of the 21th International Conference named after A. F.
Terpugov (2022 October, 25–29). — Tomsk: Tomsk State University
Publishing, 2022. — 442 p.

ISBN 978–5–907572–98–0

This volume presents selected papers from the XXI International Conference named after A.F. Terpugov. The papers are devoted to new results in the following areas: queuing theory and its applications, data mining and visualization, information technology and software engineering, mathematical and computer modeling of technological processes. The collection also presents the proceedings of symposium "Modern Stochastic Models and Problem of Actuarial Mathematics"(MAMMOTH-2022).

UDC 519
LBC 22.17

E d i t o r s:

A.A. Nazarov, Doctor of Technical Sciences, Professor,

S.P. Moiseeva, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor,

A.N. Moiseev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor.

D.V. Semenova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor.

ISBN 978–5–907572–98–0

© Authors. Text, 2023
© Tomsk State University
Publishing. Design, 2023

Моделирование
телекоммуникационных
сетей связи

ANALYSIS OF END-TO-END REQUEST TIME FOR QUIC SERVER IN PROXY MODE COMPARING TO HTTP

G. Kindra¹, V. Bogatyrev^{1,2}, S. Bogatyrev¹, A. Moshnikov¹

¹*ITMO University, Saint Petersburg, Russian Federation*

²*Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Saint Petersburg, Russian Federation*

The paper considers an experimental analysis of the performance of network connections implementation based on the QUIC protocol (Quick UDP Internet Connections) in comparison with the HTTPS protocol. To implement a QUIC connection, it is used the implementation of a QUIC server running in reverse proxy mode to interact with a test HTTP echo server. As part of the testing, launches were made in an environment with emulation of network delays, transmission rate limits and packet losses. The results of the evaluation show that this mechanism allows to reduce the request execution time for configurations with 2G and 3G network parameters, however, in high-speed networks with low signal delay, the QUIC connection increases the execution time compared to the HTTPS protocol due to the overhead costs of proxy requests.

Keywords: *quick UDP connections (QUIC), HTTP-over-QUIC, HTTP proxy mode, networks delay emulation.*

Introduction

The QUIC protocol is an experimental transport protocol that was created by Google in 2012. This protocol was developed in order to reduce network delays in data transfer compared to data transfer via the HTTP protocol. This task is solved by providing network interaction based on the UDP protocol (rather than TCP), the implementation of a mechanism for fast connection initialization (0-RTT), multiplexing of data streams, as well as improved error correction mechanisms. Based on QUIC, a new version of the HTTP protocol, HTTP/3, is being designed. In May 2021, the RFC 9000 standard was adopted, which represents the official specification for the first version of the QUIC protocol.

The purpose of this work is to study ways to migrate the network interaction of information systems from the HTTP protocol to the QUIC protocol, to analyze the change in the end-to-end time of requests execution during client-server interaction in networks with different levels of packet losses.

1. QUIC server implementations overview

Despite the presence of an approved specification for the QUIC protocol in open source, there is no project with default implementation. The Quic Work Group team takes into account existing implementations and checks for code compliance with the current protocol standard. The most popular implementations are Chromium (implementation from Google), nginx-quit modules for the NGINX web server (solutions from F5, CloudFlare, VKontakte), AppleQUIC, MsQuic and others. Existing implementations allows to create servers that will have APIs that work only by the QUIC protocol, or work as a server for distributing static files using the QUIC protocol, or as proxy servers for HTTP servers.

Let's take a closer look at how to start the QUIC server in the proxy mode. If we have an implementation of some server that has an HTTP API, then we can take this server without changing its code base, create a client that implements the QUIC protocol, and install a QUIC server in proxy mode "in front" of the existing HTTP server.

2. Test environment overview

A test environment was developed to check the difference in query execution end-to-end time on the QUIC server comparing to HTTP. The main requirements for it were: the presence of two interfaces – HTTP and QUIC for single application server; having a client capable of running queries against both servers; having automation to run queries multiple times; having the ability to simulate various network parameters.

So as it is pointed at Figure 1 our testbed consists of:

1. Chromium implementation of QUIC server with proxy mode[4]
2. Simple echo server on NodeJS
3. Nginx HTTPS proxy server
4. Java client app, with QUIC implementation in flupke[5] library
5. tc-netem bash scripts to emulate network losses

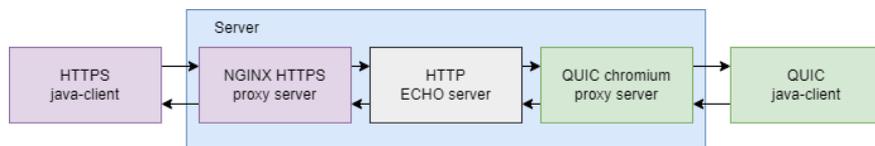


Figure 1. Testbed structure elements

Running the QUIC server from the Chromium project in proxy mode is used in test environment. The launch is carried out using the command:

```
1 quic_server --quic_mode=proxy --
   quic_proxy_backend_url=$BACKEND_URL #...cert
   options
```

Application server is a regular echo service with an HTTP API which was developed with NodeJS. This test service implements the "echo" function and also contains static content (files from 1Kb to 2Mb). We decided to create a proxy layer similar to the quic-server with nginx to redirect traffic via HTTPS in order to ensure the transparency of the experiment and create an equivalent load for secure requests via HTTP and QUIC. This interaction had to be configured due to the fact that the connection via the QUIC protocol can only be carried out through a secure connection.

The client application is a console application developed in Java. To execute QUIC requests, the flupke library is used, which has an implementation of the HttpClient interface as HTTP3 interaction. Thus, the source code of the client application allows you to make QUIC and HTTP requests through one interface. Also, the java client implements a query repetition mechanism to ensure the statistical significance of the results.

Simulation of network problems on the client interface is implemented using the netem module of the tc utility. With the help of automation scripts, during test runs, such parameters are transferred to the system: delay (5ms, 10ms, 25ms, 50ms, 100ms), bandwidth (256Kbit/s, 2Mbit/s, 30Mbit/s, 100Mbit/s, 1Gbit/s); loss probability (0%, 5%, 10%).

3. Test evaluation results

Let's consider the obtained results. When a set of repeated requests is executed in an environment with the same network settings for a set of consecutive requests, the query execution time for each of the protocols under the same conditions is displayed. Figures 2-4 show the request execution time (blue – HTTP, red – QUIC) for a set of consecutive requests. As a result of the runs, there are 3 situations: HTTP requests are always slower (Fig. 4), always faster (Fig. 2), or the difference is within the measurement error (Fig. 3). The results of all runs was collected in a single summary table for further analysis.

Let's take a look at summary table of our experiment at Table 1. In this table the value Δt_{abs} shows how many milliseconds the execution time of a client request via the QUIC protocol is less than the execution of exactly the same request in a network with similar parameters via the HTTP protocol. It is worth noting that a value with a "+" sign means that a QUIC request is faster than an HTTP request, and a value with a "-" sign means that it is slower. The Δt_{rel} value shows a similar value of the change in the query

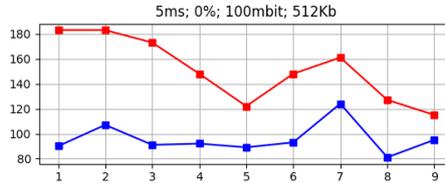


Figure 2. Response times distribution for HTTP(blue) and QUIC(red) times in network with low delays

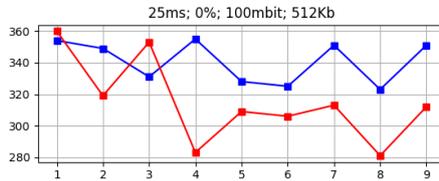


Figure 3. Response times distribution for HTTP(blue) and QUIC(red) times in network with medium delays

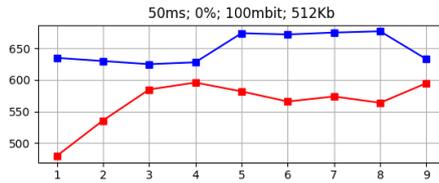


Figure 4. Response times distribution for HTTP(blue) and QUIC(red) times in network with high delays

execution time, but in percentage terms. Since the test runs use different request sizes and network latency, we will use the relative value for further summary analysis.

Let's consider the value of Δt_{rel} when aggregating the results of all runs by network parameters (delay, loss, throughput) in Figure 5. In networks with low latency, low error rate and high throughput, the query execution time difference takes a negative result, which indicates system slowdown when using the QUIC protocol. However, as the quality parameters of the network deteriorate, the delays in the QUIC protocol take on a proportional gain. If we roughly approximate the parameters of 2G/3G/4G/5G networks

Table 1

A fragment of summary table with evaluation results

$\Delta t_{abs}, ms$	$\Delta t_{rel}, \%$	delay, ms	error rate, %	Bandwidth, Mbit/s	response size, bytes
142.4	21.9	50	5	100	512
97.2	13.1	50	5	100	1024
21.2	6.1	25	5	100	512
63.2	14.5	25	5	100	1024
-24.2	-14.0	10	5	100	512
-66.9	-27.4	10	5	100	1024
-42.0	-31.8	5	5	100	512
-83.9	-45.4	5	5	100	1024

and correlate them with the network parameters used in the tests, then we can find that the QUIC protocol works the better, the smaller the network generation used.

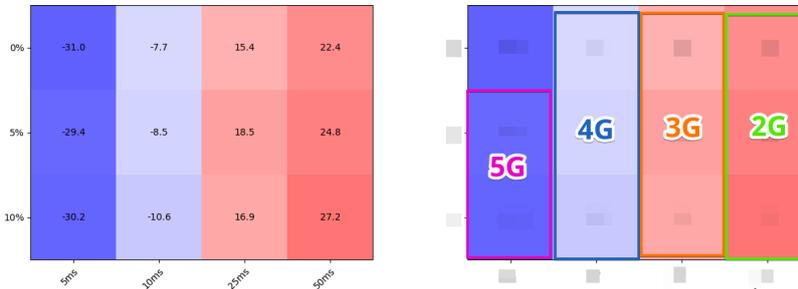


Figure 5. Heat maps of: 1) improvement indicators of request execution end-to-end time from network quality parameters (delay/throughput on the X-axis, noise level on the Y-axis); 2) compliance of network generation with network quality parameters

Conclusion

We obtained the results, from which it follows that replacing the HTTP communication protocol with QUIC using a proxy mode justifies itself in networks with high latency, low bandwidth and high loss. However, in high-speed networks, this mechanism has the opposite effect – the costs of

proxying requests do not pay off and lead to a slower system response time compared to basic HTTP communication.

REFERENCES

1. *Roskind J.* QUIC(Quick UDP Internet Connections): Multiplexed Stream Transport Over UDP. // Technical report, Google. 2013.
2. *Coninck Q., Bonaventure O.* Multipath QUIC: Design and Evaluation // Proc. Conext'2017, Seoul, Korea. 2017.
3. *Arash Molavi Kakhki, Samuel Jero, David Choffnes, Cristina Nita-Rotaru, and Alan Mislove.* Taking a Long Look at QUIC // In Proceedings of IMC'17, London, United Kingdom, November 1–3, 2017.
4. *Bogatyrev V.A., Bogatyrev A.V., Bogatyrev S.* Redundant Servicing of a Flow of Heterogeneous Requests Critical to the Total Waiting Time During the Multi-path Passage of a Sequence of Info-Communication Nodes // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2020. Vol. 12563. P.100–112.
5. *Bogatyrev V.A., Bogatyrev A.V., Bogatyrev S.V.* Redundant multi-path service of a flow heterogeneous in delay criticality with defined node passage paths // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol.1864. № 1. P.012094.
6. <https://www.chromium.org/quic/>—QUIC, a multiplexed transport over UDP. 2022.
7. <https://bitbucket.org/pjtr/flupke/src/master/>—HTTP3 Java. 2022.

Georgii Kindra — PhD Student, ITMO University. E-mail: *idyadyajora@yandex.ru*

Vladimir Bogatyrev — Doctor of Technical Sciences, ITMO University, Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation. E-mail: *vladimir.bogatyrev@gmail.com*

Stanislav Bogatyrev — PhD Student, ITMO University. E-mail: *realloc@realloc.spb.ru*

Aleksandr Moshnikov — PhD Student, ITMO University. E-mail: *moshnikov-as@yandex.ru*

SIMULATION OF RETRIAL QUEUEING SYSTEM WITH TWO-WAY COMMUNICATION IN DIFFERENT SCENARIOS

Á. Tóth¹, J. Sztrik¹

¹*University of Debrecen, Debrecen, Hungary*

The aim of this paper is to examine a finite-source retrial queueing system with two-way communication. The customers arrive from a finite-source (primary customers) according to an exponential distribution. The service of these customers starts if the service unit is idle, otherwise, they are forwarded to the orbit, and after a random time, they try to reach the server. The main feature of this system is that when the server becomes idle, an outgoing call (secondary customer) is performed to the orbit and to the source with different parameters. The service time of the primary and secondary customers is exponentially distributed with different rates. The novelty of this investigation is to carry out a sensitivity analysis using different distributions of retrial time of the customers on the main performance measures in two different cases. The different comparisons and the results are presented graphically.

Keywords: *finite-source queueing system, retrial queues, two-way communication, sensitivity analysis, simulation.*

Introduction

The two-way communication scheme is quite a popular topic because those systems can be modeled with the help of retrial queueing systems in many areas of life. One outstanding example is the operation of call centres where agents perform other particular activities during an idle period such as selling, advertising, and promoting products apart from handling the calls of the customers. One of the most important measures is utilization, and how to optimize the efficiency of the service units or agents which is always a key issue, see for example [1], [2], [10]. The characteristic of two-way communication relies on performing calls inside and outside of the system when the server is idle. In our model, it can perform outgoing calls to the source or to the orbit. In the past, researchers investigated infinite source retrial queueing systems with two-way communication, and here are some examples: [4], [9]. Dragieva and Phung-Duc [5] have investigated the scenario when a secondary outgoing call returns to the source after the service. This paper is the natural continuation of [7] where a more realistic

scenario was considered. Instead of sending back the secondary outgoing customers to the source, they will be sent back to the orbit where the call has the opportunity to retry his request for servicing the original incoming call. The novelty of this work is to accomplish a sensitivity analysis to check the effect of various distributions of retrial time on several performance measures. The results are generated by our stochastic simulation program using the basics of SimPack ([6]). This is a collection of C/C++ libraries and executable programs for computer simulation to support discrete event simulation, continuous simulation, and combined (multi-model) simulation. It gives the freedom to model any type of queueing system and any type of simulation model calculating any performance measure using arbitrary random number generators for the desired random variable. The table of input parameters and graphical illustrations of the results of the comparison of the operation modes and different distributions are presented.

1. System model

In this section, the considered finite-source retrial queueing model with one server is introduced. Altogether N requests are located in the source, and each of them is capable of generating a primary incoming call toward the server, and the inter-request times are exponentially distributed random variables with parameter λ_1 . In the case of an idle server, the service of an incoming customer begins instantaneously that follows an exponential distribution with parameter μ_1 . After the successful service, the customers go back to the source. When the incoming customer finds the service unit busy, those customers will not be lost and they are transmitted to the orbit. These will be the secondary incoming jobs from the orbit that may retry to reach the service unit after a random waiting time. The distribution of this period follows gamma, hyper-exponential, Pareto, and lognormal distribution with different parameters but with the same mean value. However, the idle server can make outgoing calls from the source and the orbit as well. We differentiate two types of outgoing calls:

- the service unit may call a job from the source to be served (primary outgoing call) after an exponentially distributed period λ_2 ,
- the service unit may perform a call from the orbit (secondary outgoing call) after an exponentially distributed period ν_2 .

The service time of the outgoing customers is exponentially distributed with parameter μ_2 . Two scenarios are distinguished when an outgoing call comes from the orbit:

- Case 1: The call has an unserved incoming request so that call is sent back to the orbit after the outgoing service is finished to have its incoming call be served,
- Case 2: Here, the call has also got an unserved incoming request but after the outgoing service is done the service unit serves the incoming request right away. This will result in a two-phase service, first the outgoing call then the incoming one is executed. The call returns to the source after both service phases are finished.

It is assumed that the arrivals of primary incoming calls, retrial intervals of secondary incoming calls, service times of incoming and outgoing calls, and the time to make outgoing calls are mutually independent.

2. Simulation results

SimPack is used to obtain the results as a basic block of our program and it was extended with the desired features. We used a statistical package that can estimate the desired measures. It utilizes the batch means method which is a quite popular method. Briefly, the running period is divided into batches (altogether T) and in every batch, $s = R - M/T$ are executed. M denotes the warm-up period observations at the beginning of the simulation which are rejected, and R is the length of the simulation. After the initial phase, the sample average of the whole run is calculated. To have appraisable outcome batches should be long enough and the sample averages of the batches should be independent. More detailed information about the used process you can find in these papers: [3], [8].

The confidence level of 99.9% is employed throughout the simulations, and 0.00001 is the amount of the relative half-width of the confidence interval to pause the actual simulation sequence. The size of a batch in the initial transient period can not be too small, therefore, its value is set to 1000.

In Table 1 the used values of input parameters are presented.

Table 1

Numerical values of model parameters

N	μ_1	μ_2	λ_2	ν_2
10	1	1	0.2	0.2

The next table (Table 2) contains the parameters of the retrial time of the customers, to achieve a valid comparison parameters are chosen according to have the same mean and variance value. The simulation program was tested by many parameter values, and in this paper, the most inter-

esting ones will be revealed. As seen in the table the squared coefficient of variation is more than one in this scenario to check the influence of peculiar random variables. In the extended version, we plan to show results under a different parameter setting when the squared coefficient of variation is less than one.

Table 2

Parameters of the retrial time of the customers

Distribution	Gamma	Hyper-exponential	Pareto	Lognormal
Parameters	$\alpha = 0.02$ $\beta = 0.2$	$p = 0.489$ $\lambda_1 = 9.798$ $\lambda_2 = 10.202$	$\alpha = 2.01$ $k = 0.05$	$m = -4.258$ $\sigma = 1.978$
Mean	0.1			
Variance	0.49			
Squared coefficient of variation	49			

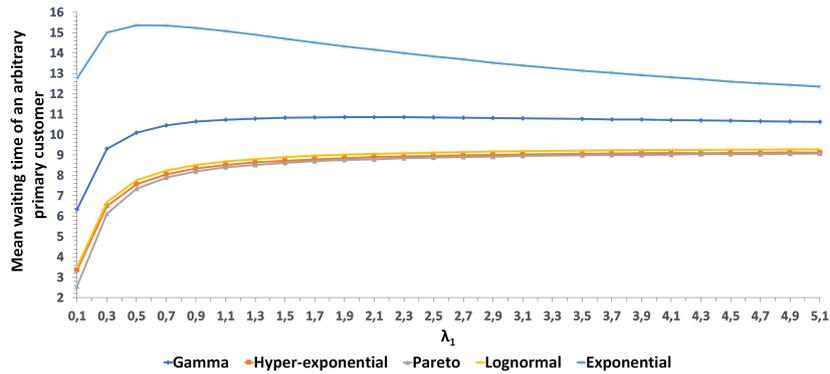


Figure 1. Mean waiting time of an arbitrary primary customer vs. arrival intensity

On Figs. 1 and 2 the mean waiting time of the calls is represented in the function of the incoming generation rate for Case 2 and comparing the different cases. Fig. 1 demonstrates five cases, the four different distributions and the exponential case. In the case of the exponential distribution, the maximum feature can be observed which is a general characteristic of the retrial queues under a suitable parameter setting. Greater mean waiting time appears in the cases of gamma and exponential distribution among the applied ones.

On Figure 2 the comparison of the scenarios is shown using gamma distributed retrial time. There is a “No outgoing” label that means, that there are only incoming calls in the system representing a common finite source

retrial system. This figure reflects and ensures the expected behaviour of Case 1 and 2, finding lower mean waiting time in Case 2, but the lowest values are experienced when there are no outgoing calls at all. However, the utilization of the service unit will be higher when outgoing calls are produced as can be seen in the extended version of the paper.

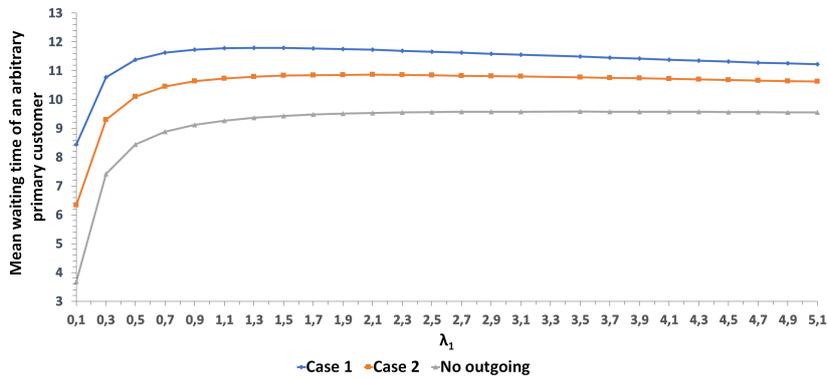


Figure 2. Comparison of the mean waiting times of the different scenarios

3. Conclusion

A finite-source retrial queueing system is introduced with a two-way communication scheme applying different distributions of retrial times. We investigated several scenarios where different parameters are used to carry out a sensitivity analysis to figure out focusing on the mean waiting time of the customers and the utilization of the service unit. The results are gathered by using our simulation program, and several graphical figures demonstrate the effect of using various distributions of retrial time on the operation of the system. In our figures, slight differences are observed among the values of several performance measures when the squared coefficient of variation is greater than one showing how pivotal applying a distribution can be. The curves also reveal the impact of outgoing calls and in Case 2 we obtain better values in the most important performance measures (waiting time, utilization) than in Case 1. In the future, we plan to continue our research work, examining other types of finite-source retrial queueing systems with two-way communication or adding another service unit for backup purposes.

REFERENCES

1. *Aguir S., Karaesmen F., Aksin O.Z., Chauvet F.* The impact of retrials on call center performance // *OR Spectr.* 2004. Vol. 26. № 3. P. 353–376.
2. *Artalejo J., Corral A.G.* Retrial Queueing Systems: A Computational Approach // Springer, Heidelberg. 2008. 320 p.
3. *Chen J.E., Kelton D.W.* A Procedure for Generating Batch-Means Confidence Intervals for Simulation: Checking Independence and Normality // *SIMULATION.* 2007. Vol. 83. № 10. P. 683–694.
4. *Dragieva V., Phung-Duc T.* Two-way communication M/M/1 retrial queue with server-orbit interaction // In: *Proceedings of the 11th International Conference on Queueing Theory and Network Applications.* 2016. Vol. 11. P. 1–7.
5. *Dragieva V., Phung-Duc T.* Two-way communication M/M/1//N retrial queue // In: *Thomas, N., Forshaw, M. (eds.) ASMTA 2017. LNCS.* 2017. Vol. 10378. P. 81–94.
6. *Fishwick P.A.* SimPack: Getting Started With Simulation Programming In C And C++ // In *1992 Winter Simulation Conference, New York: Association for Computing Machinery, 1992.* P. 154–162.
7. *Kuki A., Sztrik J., Tóth Á., Bérczes T.* A Contribution to Modeling Two-Way Communication with Retrial Queueing Systems // *Communications in Computer and Information Science, Springer, Cham.* 2018. Vol. 912. P. 236–247.
8. *Law M.A., Kelton W.D.* *Simulation Modeling and Analysis.* New York: McGraw-Hill Education, 1991. 800 p.
9. *Nazarov A., Phung-Duc T., Paul S.* Heavy outgoing call asymptotics for MMPP/M/1/1 retrial queue with two-way communication // *ITMM 2017. CCIS.* 2017. Vol. 800. P. 28–41.
10. *Pustova S.* Investigation of call centers as retrial queueing systems // *Cybern. Syst. Anal.* 2010. Vol. 46. № 3. P. 494–499.

Ádám Tóth — PhD, assistant professor, Department of Informatics Systems and Networks. E-mail: toth.adam@inf.unideb.hu

János Sztrik — Doctor of the Hungarian Academy of Sciences, full professor, Department of Informatics Systems and Networks. E-mail: sztrik.janos@inf.unideb.hu

ДВУХФАЗНАЯ СМО С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ПРИБОРОВ И ДЕГРАДАЦИЕЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ

А. А. Назаров, Е. А. Фёдорова, О. Д. Лизюра, С. В. Пауль,
А. Н. Моисеев

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В работе предлагается математическая модель облачного узла в виде системы массового обслуживания с деградацией обслуживания, возникающей с увеличением числа заявок в системе. Рассматривается СМО с неограниченным числом приборов и двумя фазами обслуживания заявок, при этом характер переходов между фазами и выхода из системы носит случайный характер. Исследуется случайный процесс количества заявок на каждой фазе. Найдено решение уравнений локального баланса и условия их эквивалентности уравнениям глобального баланса.

Ключевые слова: *система массового обслуживания, деградация обслуживания, локальный баланс.*

Введение

В качестве математической модели использования ресурсов облачных узлов, потребляемых виртуальными машинами, в работе предлагается двухфазная система массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом приборов и деградацией обслуживания, где моменты появления виртуальных машин (VM) образуют входящий поток, нахождение VM в узле характеризуется двумя фазами, условно можно их называть "активной" и "пассивной". Активной считается фаза, требующая большие вычислительные и ёмкостные ресурсы. В активной фазе VM выполняет некоторые запросы, а следовательно, скорость обслуживания зависит от текущего состояния узла (наличия других VM). Скорость выполнения запросов падает при увеличении числа VM в узле, а следовательно имеет место "деградация" обслуживания. Эффект деградации обслуживания в облачном узле подтвержден во многих работах, например в [1, 2]. Однако деградация в системах массового обслуживания исследована слабо. Наиболее частовстречающаяся модель

Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030)

с "деградацией" имеет ступенчатый вид времени обслуживания [3]. В других источниках деградацией называется модель с изнашивающимся прибором [4].

1. Математическая модель

В работе исследуется двухфазная система массового обслуживания с неограниченным числом приборов и деградацией обслуживания. Входящий поток заявок - простейший с интенсивностью λ . В момент поступления заявка с вероятностью r_{0n} начинает свою работу на n -й фазе, где $n = 1, 2$ (1 - активная фаза, 2 - пассивная). Пусть $i_1(t)$ и $i_2(t)$ - число заявок, находящихся в узле в активной и пассивной фазах в момент времени t . Обслуживание заявки на n -й фазе распределено экспоненциально с переменной интенсивностью

$$\mu_n f_n(i_1, i_2),$$

где $n = 1, 2$, μ_n^{-1} - среднее время обслуживания на n -й фазе в пустой СМО, а $f_n(i_1, i_2)$ - это функции деградации обслуживания.

После окончания обслуживания на n -й фазе заявка с вероятностью r_{nj} переходит на фазу j или с вероятностью v_n покидает систему. Очевидно, что для введенных обозначений справедливы следующие равенства:

$$\begin{cases} r_{01} + r_{02} = 1, \\ r_{12} + v_1 = 1, \\ r_{21} + v_2 = 1. \end{cases}$$

Структура описанной системы изображена на Рисунке 1.

Обозначим:

- $\mathbf{r}_0 = (r_{01}, r_{02})$ - вектор вероятностей выбора активной или пассивной фаз в момент прихода заявки;
- $\mathbf{v}_0 = (v_1, v_2)$ - вектор вероятностей выхода заявки из системы после окончания соответствующей фазы;
- $\mathbf{R} = [r_{nj}]$ - матрица вероятностей переходов между фазами:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & r_{12} \\ r_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Решается задача нахождения стационарного распределения вероятностей двумерного случайного процесса $\{i_1(t), i_2(t)\}$.

Обозначим $P(i_1, i_2, t) = P(i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2)$ - вероятность того, что в момент времени t на первой фазе i_1 заявок, а на второй - i_2 . Для

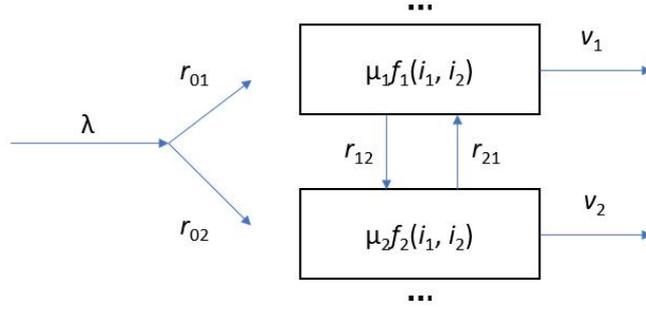


Рис. 1. Двухфазная СМО с деградацией обслуживания

распределения вероятностей $P(i_1, i_2, t)$ несложно записать следующее уравнение Колмогорова (для $i_1 \geq 0, i_2 \geq 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(i_1, i_2, t)}{\partial t} = & -(\lambda + i_1\mu_1f_1(i_1, i_2) + i_2\mu_2f_2(i_1, i_2))P(i_1, i_2, t) \\ & + \lambda r_{01}P(i_1 - 1, i_2, t) + \lambda r_{02}P(i_1, i_2 - 1, t) + \\ & + v_1(i_1 + 1)\mu_1f_1(i_1 + 1, i_2)P(i_1 + 1, i_2, t) + \\ & + v_2(i_2 + 1)\mu_2f_2(i_1, i_2 + 1)P(i_1, i_2 + 1, t) \\ & + r_{12}(i_1 + 1)\mu_1f_1(i_1 + 1, i_2 - 1)P(i_1 + 1, i_2 - 1, t) + \\ & + r_{21}(i_2 + 1)\mu_2f_2(i_1 - 1, i_2 + 1)P(i_1 - 1, i_2 + 1, t). \end{aligned} \quad (1)$$

В стационарном режиме система (1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & -(\lambda + i_1\mu_1f_1(i_1, i_2) + i_2\mu_2f_2(i_1, i_2))P(i_1, i_2) + \lambda r_{01}P(i_1 - 1, i_2) + \\ & + \lambda r_{02}P(i_1, i_2 - 1, t) + v_1(i_1 + 1)\mu_1f_1(i_1 + 1, i_2)P(i_1 + 1, i_2) + \\ & + v_2(i_2 + 1)\mu_2f_2(i_1, i_2 + 1)P(i_1, i_2 + 1) + \\ & + r_{12}(i_1 + 1)\mu_1f_1(i_1 + 1, i_2 - 1)P(i_1 + 1, i_2 - 1) + \\ & + r_{21}(i_2 + 1)\mu_2f_2(i_1 - 1, i_2 + 1)P(i_1 - 1, i_2 + 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Так как аналитическое решение уравнения (1) не представляется возможным, перейдем к уравнениям локального баланса для исследуемой СМО.

2. Уравнения локального баланса

Изобразим граф переходов между состояниями двумерного случайного процесса $\{i_1(t), i_2(t)\}$ (Рисунок 2).

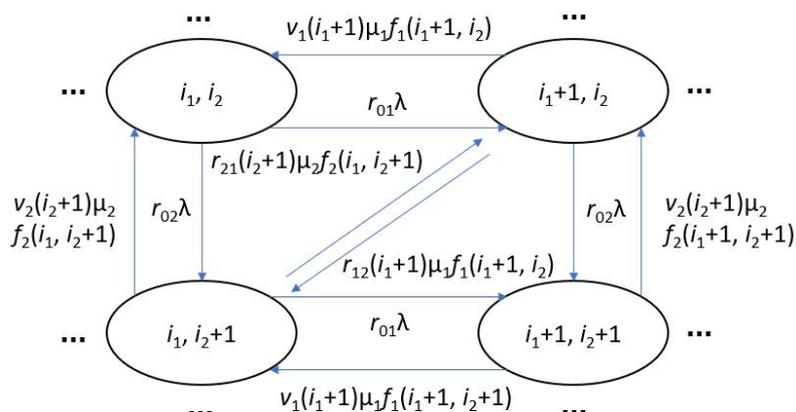


Рис. 2. Граф переходов

Для эквивалентности уравнений локального и глобального баланса необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} r_{01}r_{12}v_2 &= r_{02}r_{21}v_1, \\ \frac{f_1(i_1 + 1, i_2)}{f_1(i_1 + 1, i_2 + 1)} &= \frac{f_2(i_1, i_2)}{f_2(i_1 + 1, i_2 + 1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

При выполнении (3) решение уравнения глобального баланса (1) можно свести к решению более легкой системы уравнений локального баланса:

$$\begin{cases} P(i_1, i_2)r_{01}\lambda = P(i_1 + 1, i_2)v_1\mu_1(i_1 + 1)f_1(i_1 + 1, i_2), \\ P(i_1, i_2)r_{02}\lambda = P(i_1, i_2 + 1)v_2\mu_2(i_2 + 1)f_2(i_1, i_2 + 1), \\ P(i_1, i_2 + 1)r_{21}\mu_2(i_2 + 1)f_2(i_1, i_2 + 1) = \\ = P(i_1 + 1, i_2)r_{12}\mu_1(i_1 + 1)f_1(i_1 + 1, i_2). \end{cases}$$

Отсюда преобразований были получены следующие формулы:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(i_1, i_2) = P(i_1 - 1, i_2) \frac{\rho_1}{i_1 f_1(i_1, i_2)} = \frac{\rho_1^{i_1}}{i_1! \prod_{k=1}^{i_1} f_1(k, i_2)} P(0, i_2), \\ P(i_1, i_2) = P(i_1, i_2 - 1) \frac{\rho_2}{i_2 f_2(i_1, i_2)} = \frac{\rho_2^{i_2}}{i_2! \prod_{k=1}^{i_2} f_1(i_1, k)} P(i_1, 0), \end{array} \right.$$

где

$$\rho_1 = \frac{r_{01}\lambda}{v_1\mu_1}, \quad \rho_2 = \frac{r_{02}\lambda}{v_2\mu_2}.$$

Окончательно получаем следующую формулу для стационарного распределения вероятностей двумерного случайного процесса $i_1(t), i_2(t)$:

$$P(i_1, i_2) = \frac{\rho_1^{i_1} \rho_2^{i_2}}{i_1! i_2! \prod_{k=1}^{i_1} f_1(k, i_2) \prod_{m=1}^{i_2} f_2(i_1, m)} P(0, 0), \quad (4)$$

где вероятность $P(0, 0)$ находится из условия нормировки.

Заключение

Таким образом, в работе предложена двухфазная СМО с неограниченным числом приборов с деградацией обслуживания как математическая модель облачного узла. Найдено двумерное стационарное распределение числа заявок на каждой фазе как решение уравнений локального баланса, а также приведены условия эквивалентности уравнений локального и глобального баланса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Huber N., Quast M. V., Brosig F., Hauck M., Kounev S.* A method for experimental analysis and modeling of virtualization performance overhead // In International Conference on Cloud Computing and Services Science New York: Springer, 2011. P. 353–370.
2. *Bermejo B., Juiz C.* A general method for evaluating the overhead when consolidating servers: performance degradation in virtual machines and containers // The Journal of Supercomputing. 2022. Vol. 78. P. 11345–11372.
3. *Liu X., Li S., Tong W.* A queuing model considering resources sharing for cloud service performance. // The Journal of Supercomputing. 2015. Vol. 71. № 11. P. 4042–4055.

-
4. *Choudhary A., Chakravarthy S. R., Sharma D. C.* Analysis of MAP/PH/1 Queueing System with Degrading Service Rate and Phase Type Vacation // *Mathematics*. 2021. Vol. 9. № 19. Art.Num. 2387.

Назаров Анатолий Андреевич — доктор технических наук, профессор кафедры Теории вероятностей и математической статистики ИПМКН ТГУ. E-mail: *nazarov.tsu@gmail.com*

Фёдорова Екатерина Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Теории вероятностей и математической статистики ИПМКН ТГУ. E-mail: *moiskate@mail.ru*

Лизюра Ольга Дмитриевна — аспирант, ассистент кафедры Теории вероятностей и математической статистики ИПМКН ТГУ. E-mail: *oliztsu@mail.ru*

Пауль Светлана Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Теории вероятностей и математической статистики ИПМКН ТГУ. E-mail: *paulsv82@mail.ru*

Моисеев Александр Николаевич — доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой Программной инженерии ИПМКН ТГУ. E-mail: *moiseev.tsu@gmail.com*

ИССЛЕДОВАНИЕ ТАНДЕМНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДВУМЯ ОРБИТАМИ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

А. А. Назаров¹, С. В. Пауль¹, Т. Фунг-Дук², М. А. Морозова¹

¹ *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

² *Университет Цукуба, г. Цукуба, Япония*

В данной статье рассматривается тандемная система массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком, двумя последовательно обслуживающими приборами и орбитами при каждом из них методом асимптотического анализа. Приборы обслуживают заявки в течение экспоненциально распределенного случайного времени. Было получено предельное двумерное распределение вероятностей числа заявок на орбитах в рассматриваемой системе при условии большой задержки заявок на орбитах. **Ключевые слова:** *тандемная система массового обслуживания, система массового обслуживания с повторными вызовами, асимптотический анализ.*

Введение

Феномен повторных вызовов естественным образом возникает в различных системах. В качестве классического примера может выступать колл-центр: если оператор занят, клиент слышит соответствующее сообщение с просьбой перезвонить позднее [3]. Системы с источниками повторных вызовов (орбитами) широко изучались в литературе [1, 2]. Анализ таких моделей более сложен за счет того, что общее количество попыток заявок встать на прибор увеличивается по мере заполнения орбиты. По этой причине получение аналитических результатов для систем с повторными вызовами можно только в несколько частных случаях с одним или двумя обслуживающими серверами.

Тандемные системы массового обслуживания (СМО) с повторными вызовами используются для моделирования процессов обработки, когда входящие заявки проходят последовательный процесс обслуживания на нескольких этапах. Такая потребность возникает, например, при передаче мультимедийной информации [4], при управлении потоком данных между элементами мультиагентной робототехнической системы [5] и т.д.

Насколько нам известно, не так много работ посвящено тандемным системам с повторными вызовами. В работе [7] представлен асимптотический анализ тандемной СМО с постоянной интенсивностью повторных вызовов. В статье [6] авторы рассматривают тандемную СМО без промежуточного буфера для ожидания. Если первый прибор занят, происходит коллизия, в результате которой прибывшая и обслуживаемая заявки уходят на орбиту, откуда снова пытаются встать на обслуживание с постоянной частотой.

В данной работе рассмотрим тандемную СМО с двумя приборами и орбитами при каждом из них. С помощью метода асимптотического анализа найдем двумерное распределение вероятностей числа заявок на орбитах и распределение вероятностей состояний приборов при условии большой задержки заявок на орбитах. Представленное исследование является продолжением более раннего, в котором рассматривалась похожая модель с общей орбитой [9].

1. Математическая модель

Рассмотрим тандемную систему с повторными вызовами и двумя последовательно обслуживающими приборами (рисунок 1), на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Если заявка входящего потока обнаруживает первый прибор свободным, то она встает на него и обслуживается в течении экспоненциально-распределенного времени с параметром μ_1 , после чего обращается ко второму прибору. Если второй прибор свободен, заявка встает на него и обслуживается в течении экспоненциально-распределенного времени с параметром μ_2 . Если заявка входящего потока застает первый прибор занятым, она мгновенно отправляется на первую орбиту, где после случайной экспоненциально-распределенной задержки с параметром σ_1 снова пытается встать на первый прибор для обслуживания. Если после обслуживания на первом приборе заявка застает второй прибор занятым, она мгновенно отправляется на вторую орбиту, где после случайной экспоненциально-распределенной задержки с параметром σ_2 снова пытается попасть на обслуживание вторым прибором.

Перепишем систему (2) с учетом определения (3):

$$\begin{aligned}
& -\lambda H_{00}(u_1, u_2) + j\sigma_1 \frac{\partial H_{00}(u_1, u_2)}{\partial u_1} + j\sigma_2 \frac{\partial H_{00}(u_1, u_2)}{\partial u_2} + \mu_2 H_{01}(u_1, u_2) = 0, \\
& \lambda H_{00}(u_1, u_2) - j\sigma_1 e^{ju_1} \frac{\partial H_{00}(u_1, u_2)}{\partial u_1} - (\lambda + \mu_1 - \lambda e^{ju_1}) H_{10}(u_1, u_2) + \\
& \quad + j\sigma_2 \frac{\partial H_{10}(u_1, u_2)}{\partial u_2} + \mu_2 H_{11}(u_1, u_2) = 0, \\
& -j\sigma_2 e^{-ju_2} \frac{\partial H_{00}(u_1, u_2)}{\partial u_2} + \mu_1 H_{10}(u_1, u_2) - (\lambda + \mu_2) H_{01}(u_1, u_2) + \\
& \quad + j\sigma_1 \frac{\partial H_{01}(u_1, u_2)}{\partial u_1} + \mu_1 e^{ju_2} H_{11}(u_1, u_2) = 0, \\
& \lambda H_{01}(u_1, u_2) - j\sigma_1 e^{-ju_1} \frac{\partial H_{01}(u_1, u_2)}{\partial u_1} - j\sigma_2 e^{-ju_2} \frac{\partial H_{10}(u_1, u_2)}{\partial u_2} - \\
& \quad - (\lambda + \mu_1 + \mu_2 - \lambda e^{ju_1}) H_{11}(u_1, u_2) = 0. \tag{4}
\end{aligned}$$

Введем матрицы

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + \mu_1) & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & 0 & -(\lambda + \mu_2) & \lambda \\ 0 & \mu_2 & 0 & -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) \end{bmatrix}, \\
\mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & \lambda \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{I}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Перепишем систему (4) в матричном виде и добавим к ней скалярное уравнение, полученное путем умножения матричного уравнения на единичный вектор-столбец \mathbf{e} :

$$\mathbf{H}(u_1, u_2) \{ \mathbf{A} + e^{ju_1} \mathbf{B}_1 + e^{ju_2} \mathbf{B}_2 \} + j\sigma_1 \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2)}{\partial u_1} \{ \mathbf{I}_0 - e^{-ju_1} \mathbf{I}_1 \} +$$

$$\begin{aligned}
& +j\sigma_2 \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \{ \mathbf{I}_2 - e^{-ju_2} \mathbf{I}_3 \} = 0, \\
& (e^{ju_1} - 1) \left\{ \mathbf{H}(u_1, u_2) \mathbf{B}_1 + j\sigma_1 e^{-ju_1} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2)}{\partial u_1} \mathbf{I}_0 \right\} \mathbf{e} + \\
& (e^{ju_2} - 1) \left\{ \mathbf{H}(u_1, u_2) \mathbf{B}_2 + j\sigma_2 e^{-ju_2} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \mathbf{I}_2 \right\} \mathbf{e} = 0, \quad (6)
\end{aligned}$$

где $\mathbf{H}(u_1, u_2) = \{H_{00}(u_1, u_2), H_{10}(u_1, u_2), H_{01}(u_1, u_2), H_{11}(u_1, u_2)\}$.

Данная система уравнений является основной в дальнейших исследованиях. Будем решать ее методом асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбитах.

3. Первый этап асимптотического анализа

Обозначим $\sigma_1 = \sigma\gamma_1$, $\sigma_2 = \sigma\gamma_2$, $\sigma = \varepsilon$ и выполним в системе (6) замены:

$$u_1 = \varepsilon w_1, u_2 = \varepsilon w_2, \mathbf{H}(u_1, u_2) = \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon). \quad (7)$$

Получим

$$\begin{aligned}
& \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon) \{ \mathbf{A} + e^{j\varepsilon w_1} \mathbf{B}_1 + e^{j\varepsilon w_2} \mathbf{B}_2 \} + \\
& + j\gamma_1 \frac{\partial \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} \{ \mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w_1} \mathbf{I}_1 \} + \\
& + j\gamma_2 \frac{\partial \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} \{ \mathbf{I}_2 - e^{-j\varepsilon w_2} \mathbf{I}_3 \} = 0, \\
& (e^{j\varepsilon w_1} - 1) \left\{ \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon) \mathbf{B}_1 + j\gamma_1 e^{-j\varepsilon w_1} \frac{\partial \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} \mathbf{I}_0 \right\} \mathbf{e} + \\
& + (e^{j\varepsilon w_2} - 1) \left\{ \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon) \mathbf{B}_2 + j\gamma_2 e^{-j\varepsilon w_2} \frac{\partial \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} \mathbf{I}_2 \right\} \mathbf{e} = 0. \quad (8)
\end{aligned}$$

Систему (8) будем решать в предположении о том, что у функций $\mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon)$ и их производных существуют пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теорема 1. Пусть $i_1(t)$ и $i_2(t)$ – число заявок на первой и второй орбитах соответственно, тогда выполняется следующее предельное равенство

$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} \lim_{\sigma_2 \rightarrow 0} M e^{jw_1 \sigma_1 i_1(t) + jw_2 \sigma_2 i_2(t)} = e^{jw_1 a_1 + jw_2 a_2}, \quad (9)$$

где вектор вероятностей состояний приборов \mathbf{r} определяется системой уравнений, a_1 и a_2 определяются матричным уравнением, γ_1 и γ_2 являются параметрами асимптотического анализа

$$\mathbf{r} (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) - \gamma_1 a_1 \mathbf{r} (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - \gamma_2 a_2 \mathbf{r} (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(\mathbf{B}_1 - \gamma_1 a_1 \mathbf{I}_0) \mathbf{e} &= 0, \\
\mathbf{r}(\mathbf{B}_2 - \gamma_2 a_2 \mathbf{I}_2) \mathbf{e} &= 0, \\
\mathbf{r} \mathbf{e} &= 1.
\end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, получили систему уравнений (10), которая позволяет найти величины a_1 и a_2 – асимптотические средние числа заявок на первой и второй орбитах соответственно и \mathbf{r} – вектор вероятностей состояний приборов.

4. Второй этап асимптотического анализа

В систему (6) подставим следующее выражение

$$\mathbf{H}(u_1, u_2) = \exp\left(ju_1 \frac{a_1}{\sigma_1} + ju_2 \frac{a_2}{\sigma_2}\right) \mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2). \tag{11}$$

Получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2) \left\{ \mathbf{A} + e^{ju_1} \mathbf{B}_1 + e^{ju_2} \mathbf{B}_2 - \gamma_1 a_1 (\mathbf{I}_0 - e^{-ju_1} \mathbf{I}_1) - \right. \\
&- \gamma_2 a_2 (\mathbf{I}_2 - e^{-ju_2} \mathbf{I}_3) \left. \right\} + j\sigma_1 \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2)}{\partial u_1} \left\{ \mathbf{I}_0 - e^{-ju_1} \mathbf{I}_1 \right\} + \\
&+ j\sigma_2 \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \left\{ \mathbf{I}_2 - e^{-ju_2} \mathbf{I}_3 \right\} = 0, \\
&(e^{ju_1} - 1) \left\{ \mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2) (\mathbf{B}_1 - e^{-ju_1} a_1 \gamma_1 \mathbf{I}_0) + \right. \\
&+ j\sigma_1 e^{-ju_1} \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2)}{\partial u_1} \mathbf{I}_0 \left. \right\} \mathbf{e} + \\
&(e^{ju_2} - 1) \left\{ \mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2) (\mathbf{B}_2 - e^{-ju_2} a_2 \gamma_2 \mathbf{I}_2) \right. \\
&+ j\sigma_2 e^{-ju_2} \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \mathbf{I}_2 \left. \right\} \mathbf{e} = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

В (12) сделаем замены

$$\begin{aligned}
\sigma_1 = \sigma \gamma_1, \sigma_2 = \sigma \gamma_2, \sigma = \varepsilon^2, u_1 = \varepsilon w_1, u_2 = \varepsilon w_2, \\
\mathbf{H}^{(2)}(u_1, u_2) = \mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon).
\end{aligned} \tag{13}$$

Получим

$$\mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon) \left\{ \mathbf{A} + e^{j\varepsilon w_1} \mathbf{B}_1 + e^{j\varepsilon w_2} \mathbf{B}_2 - \gamma_1 a_1 (\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w_1} \mathbf{I}_1) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma_2 a_2 (\mathbf{I}_2 - e^{-j\varepsilon w_1} \mathbf{I}_3) \} + j\varepsilon \gamma_1 \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial \varepsilon w_1} \{ \mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w_1} \mathbf{I}_1 \} + \\
& + j\varepsilon \gamma_2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial \varepsilon w_2} \{ \mathbf{I}_2 - e^{-j\varepsilon w_2} \mathbf{I}_3 \} = 0, \\
& (e^{j\varepsilon w_1} - 1) \left\{ \mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon) (\mathbf{B}_1 - e^{-j\varepsilon w_1} a_1 \gamma_1 \mathbf{I}_0) + \right. \\
& \quad \left. + j\varepsilon \gamma_1 e^{-j\varepsilon w_1} \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} \mathbf{I}_0 \right\} \mathbf{e} + \\
& (e^{j\varepsilon w_2} - 1) \left\{ \mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon) (\mathbf{B}_2 - e^{-j\varepsilon w_2} a_2 \gamma_2 \mathbf{I}_2) + \right. \\
& \quad \left. + j\varepsilon \gamma_2 e^{-j\varepsilon w_2} \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} \mathbf{I}_2 \right\} \mathbf{e} = 0. \tag{14}
\end{aligned}$$

Систему (14) будем решать в предположении о том, что у функций $\mathbf{F}^{(2)}(w_1, w_2, \varepsilon)$ и их производных существуют пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теорема 2. В контексте Теоремы 1 верно следующее предельное равенство

$$\begin{aligned}
& \lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} \lim_{\sigma_2 \rightarrow 0} M e^{jw_1 \sqrt{\sigma_1} (i_1(t) - \frac{\sigma_1}{\sigma_1}) + jw_2 \sqrt{\sigma_2} (i_2(t) - \frac{\sigma_2}{\sigma_2})} = \\
& = e^{\frac{jw_1^2}{2} K_{11} + \frac{jw_2^2}{2} K_{22} + jw_1 jw_2 K_{12}}, \tag{15}
\end{aligned}$$

где K_{11} , K_{22} , K_{12} – корреляционные моменты, определяемые как

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \frac{(\mathbf{f}_1(\mathbf{B}_1 - a_1 \gamma_1 \mathbf{I}_0) + a_1 \gamma_1 \mathbf{r} \mathbf{I}_0) \mathbf{e}}{(\gamma_1 \mathbf{r} \mathbf{I}_0) \mathbf{e}}, K_{22} = \frac{(\mathbf{f}_2(\mathbf{B}_2 - a_2 \gamma_2 \mathbf{I}_2) + a_2 \gamma_2 \mathbf{r} \mathbf{I}_2) \mathbf{e}}{(\gamma_2 \mathbf{r} \mathbf{I}_2) \mathbf{e}}, \\
K_{12} &= \frac{(\mathbf{f}_2(\mathbf{B}_1 - a_1 \gamma_1 \mathbf{I}_1) + \mathbf{f}_1(\mathbf{B}_2 - a_2 \gamma_2 \mathbf{I}_3)) \mathbf{e}}{(\mathbf{r}(\gamma_1 \mathbf{I}_1 + \gamma_2 \mathbf{I}_3)) \mathbf{e}}. \tag{16}
\end{aligned}$$

Решение системы можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= C \mathbf{r} + K_{11} \mathbf{g}_{11} + K_{12} \mathbf{g}_{12} - \mathbf{z}_1, \\
\mathbf{f}_2 &= C \mathbf{r} + K_{12} \mathbf{g}_{21} + K_{22} \mathbf{g}_{22} - \mathbf{z}_2. \tag{17}
\end{aligned}$$

Здесь C – константа, вероятности \mathbf{r} определены выше, а величины \mathbf{g}_{11} , \mathbf{g}_{12} , \mathbf{g}_{21} , \mathbf{g}_{22} , \mathbf{z}_1 , \mathbf{z}_2 являются частными решениями неоднородной системы

$$\mathbf{g}_{11}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 - a_1 \gamma_1 (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2 \gamma_2 (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) = \gamma_1 \mathbf{r} (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1),$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{12}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) &= \gamma_2\mathbf{r}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3), \\
\mathbf{z}_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) &= \mathbf{r}(\mathbf{B}_1 - a_1\gamma_1\mathbf{I}_0), \\
\mathbf{g}_{11}\mathbf{e} = 0, \mathbf{g}_{12}\mathbf{e} = 0, \mathbf{z}_1\mathbf{e} = 0, \\
\mathbf{g}_{21}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) &= \gamma_1\mathbf{r}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1), \\
\mathbf{g}_{22}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) &= \gamma_2\mathbf{r}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3), \\
\mathbf{z}_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 - a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) &= \mathbf{r}(\mathbf{B}_2 - a_2\gamma_2\mathbf{I}_2), \\
\mathbf{g}_{21}\mathbf{e} = 0, \mathbf{g}_{22}\mathbf{e} = 0, \mathbf{z}_2\mathbf{e} = 0. & \quad (18)
\end{aligned}$$

Таким образом, вторая найденная асимптотика показывает, что асимптотическое распределение вероятностей числа $i_1(t)$ и $i_2(t)$ заявок на первой и второй орбитах в рассматриваемой системе является двумерным нормальным с асимптотическими средними $a_1/\gamma_1\sigma$, $a_2/\gamma_2\sigma$, дисперсиями $K_{11}/\gamma_1\sigma$, $K_{22}/\gamma_2\sigma$, и коэффициентом корреляции K_{12} . Задав двумерную нормальную плотность распределения вероятностей с данными параметрами, получим распределение вероятностей числа заявок на первой и второй орбитах в асимптотическом условии большой задержки заявок на орбитах.

Заключение

Исследование тандемной системы массового обслуживания с двумя орбитами при каждом обслуживающем приборе показало, что асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на первой и второй орбитах при условии большой задержки заявок на орбитах является двумерным нормальным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gennadi Falin, James GC Templeton* Retrial queues. 1997. 75 p.
2. *Artalejo J., Gómez-Corral A.* Retrial queueing systems // *Mathematical and Computer Modelling*. 1999. Vol. 30. № 3-4. P. 13–15.
3. *B Krishna Kumar, R. Sankar, R. Navaneetha Krishnan, R. Rukmani* Performance analysis of multi-processor two-stage tandem call center retrial queues with non-reliable processors // *Methodology and Computing in Applied Probability*. 2021. P. 1–48.
4. *Vishnevsky V.M., Larionov A.A., Semyonova O.V.* Evaluating the performance of a high-speed wireless tandem network using centimeter and millimeter-wave radio channels in road safety management systems // *Management problems*. 2013. № 4. P. 50–56.

5. *Kuznetsov N.A., Myasnikov D.V., Semenikhin K.V.* Optimal control of data transmission in a mobile two-agent robotic system // *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2016. Vol. 61. № 12. P. 1456–1465.
6. *Moutzoukis E., Langaris C.* Two queues in tandem with retrial customers // *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 2001. Vol. 15. № 3. P. 311–325.
7. *Avrachenkov K., Yechiali U.* On tandem blocking queues with a common retrial queue // *Computers & Operations Research*. 2010. Vol. 37. № 7. P. 1174–1180.
8. *Phung-Duc T., Masuyama H., Kasahara S., Takahashi Y.* State-Dependent M/M/c/c + r Retrial Queues with Bernoulli Abandonment // *Journal of Industrial and Management Optimization*. 2010. Vol. 6. № 3. P. 517–540.
9. *Nazarov A.A., Paul S.V., Phung-Duc T., Morozova M.* Analysis of Tandem Retrial Queue with Common Orbit and Poisson Arrival Process // *Performance Engineering and Stochastic Modeling*. 2021. P. 441–456.

Назаров Анатолий Андреевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: *nazarov.tsu@gmail.com*

Пауль Светлана Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: *paulsv82@mail.ru*

Фунг-Дук Туан — доцент кафедры инженерии и информационных систем университета Цукубы. E-mail: *tuan@sk.tsukuba.ac.jp*

Морозова Мария Алексеевна — магистр института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: *morozova_mariya_a@mail.ru*

Методы анализа и визуализации данных

COMPARISON OF MACHINE LEARNING ALGORITHMS IN THE PROBLEMS OF PREDICTING THE NUMBER OF USERS OF MULTI-ACCESS EDGE COMPUTING SYSTEMS

I. V. Filianin, A. A. Kapitonov

ITMO University, St. Petersburg, Russia

*The paper considers the existing problems in multi-access edge computing, highlights the tasks of optimizing the mechanism for allocation services in multi-access edge computing systems. Particular attention is paid to the mechanism for predicting the number of users in 4th and 5th generation networks depending on time and location. **Keywords:** multi-access edge computing, RAN, kubernetes, machine learning algorithms.*

Introduction

The development of virtualization, containerization and optimization of computing time has allowed large data and infrastructure providers to reduce costs by unifying both the software and hardware of data centers.

Communication networks of the 5th generation have become a logical conclusion, allowing you to connect IoT systems, self-driving cars and other devices.

The use of some of these devices is highly dependent on service providers computing, and changing the latency of data transmission to computing services can be an insurmountable obstacle. The development of multi-access edge computing technology can be the key to the implementation of these systems.

1. Problem statement

The basis of MEC technology lies in the field of distributed and cloud computing and is one of the solutions to the problem of distribution of computing services to reduce the delay between the data source and their processor.

In the course of its research, the ETSI has developed and standardized interfaces for interaction between the RAN controller and multi-access edge computing platforms, and also described examples of using MEC technology to offloading data processing.

At the moment, there are several unresolved issues such as:

- Decision-making mechanism for placing applications on MEC networks.
- Tools for automatic organization of virtual communication channels within the RAN before the application.
- Provision of roaming between application instances for the client device.

In the studies carried out earlier [1], the MEC system is presented as an abstract computer and a certain cellular network, and the whole description is reduced to the following model of a communication network (1), where W is the channel width, K is the number of client devices using MEC, P_n is the client device's transmitter power, h_n is the client device's link level, N_0 is the variance of the channel's complex white Gaussian noise.

$$r_n = \frac{W}{K} \log \left(1 + \frac{P_n * h_n}{\frac{W}{K} * N_0} \right) \quad (1)$$

$$\min_{A,f} \sum_{n=1}^N \alpha_n C_n^o + (1 - \alpha_n) C_n^l \quad (2)$$

$$s.t. \quad C1 : \alpha_n \in 0, 1, \forall n \in N, \quad C2 : (1 - \alpha_n) T_n^l + \alpha_n T_n^o \leq \tau_n, \forall n \in N$$

$$C3 : 0 \leq f_n \leq \alpha_n F, \forall n \in N, \quad C4 : \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n \leq F, \forall n \in N$$

The optimization problem is reduced to the following formula 2, where C_n^o is the delay in processing data of 1 client device in MEC, α_n is the value of using or not using MEC when processing data, where $\alpha_n = 0$ is the use of local computing, and $\alpha_n = 1$ is the use of MEC for data processing, C_n^l is the delay in processing client device data 1 directly on the device.

In the course of this study [1], several of the reinforcement learning algorithms such as "Q-learning" and "Deep Q-learning" were used, for the use of which 3 elements of these algorithms were described:

- State of the system at a point in time as $s = (C_{all}, F - \sum_{n=1}^n f_n)$
- The mechanism of action that makes changes to the system is described by the vector $a = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, f_1, f_2, \dots, f_n]$
- The reward function described as $R(s, a)$

As a result of the experiment, which tested the operation of these algorithms, they really reduce the data processing latency when using MEC, but this is done by changing the number of client devices that can use MEC and the computing resources allocated to them, as described earlier.

This method does not take into account the following points:

- 1) Server with MEC platform, not required to be located at every cell tower

- 2) Client device data is not an abstract set of bytes, it is tied to specific services used, such as IoT platforms, CDN platforms, self-driving car assistance systems, and others.
- 3) Proceeding from paragraph 2, it turns out that the MEC platform must decide on the assignment of a particular service to a specific server, the service does not have to be located on each server.
- 4) Proceeding from paragraph 3, it turns out that between the client device and the computing service there may be a network model different from (1) due to the fact that intermediate nodes appear.
- 5) Accordingly, when using supervised ML algorithms, it must be taken into account that the existing MEC platforms [5] are based on the Kubernetes containerization system.
- 6) Kubernetes, in turn, must allocate computing services in a geo-distributed network, allocate resources for computing services, and organize optimal communication channels [2] between service instances. Which in turn changes the approach to modeling network topology and reward functions for ML algorithms with reinforcement.

In accordance with these theses, the purpose of this work is to compare ML algorithms in the problems of predicting the number of users of multi-access edge computing systems, as part of the future solution of decision-making methods for placing applications in MEC networks, taking into account the operation of existing MEC platforms [5] and ETSI recommendations.

2. Problem analysis

The distribution of the load on the communication network can be represented as a regression. As a confirmation of this thesis, the article [3] contains a graph of load distribution on the cellular network of an operator from London, depending on the time of day.

At the same time, this is the total load on the cellular network depending on the time of day, but the MEC platform assumes that data processing acceleration is used for various services, which means that the distribution of the load on the different platform on will be different, so how different people will be end users in them.

Since MEC technology involves reducing the delay between the source of information and its processor, for this it is necessary to place the most relevant services on cell towers, and for this it is necessary to have a decision-making system that would place computing services depending on the day of the week, time connection to the network, the identifier of the base station of cellular communication and the number of unique users per unit of time.

To take into account all of the above parameters, a whole set of algorithms is needed that should predict the possible number of users depending on these parameters, the delay for the end user and decide on the placement of a particular service in a geo-distributed MEC network.

But within the framework of this work, only the prediction of the possible number of users is considered, therefore, in the course of the work, the following supervised ML algorithms were chosen to analyze and compare the quality of load prediction in a test environment:

- Linear Regression
- Polynomial Regression
- Kernel ridge regression
- Gaussian Process Regression.

3. System modeling

Python 3 was chosen as the programming language, and “scikit-learn” [6] was chosen as the off-the-shelf ML library due to its performance and ease of use in Python 3.

To test MEC technology, ETSI has developed an electronic resource ETSI MEC Sandbox [7], which allows you to emulate a cellular communication network, set the type of communication network, the possible equipment used and the number of clients.

As a result of the work, “Allomec DataCollector” software was developed for collecting data from the ETSI MEC Sandbox and saving them to the MongoDB database, as well as “Allomec Backend” for extracting data from MongoDB and organizing the work of ML algorithms.

4. System Testing

To compare ML algorithms, an experiment was performed with the following initial data:

- base station ID 1: 4g-macro-cell-4
- base station ID 2: 5g-small-cell-14
- time sample: 71800 seconds - 76050 seconds from the beginning of the day with a step of 10 seconds

As a result of the experiment, the MSE and R^2 est. are shown in Table 1.

Analyzing the results of estimating MSE and R^2 , we can conclude that the algorithms under consideration are not suitable for predicting the number of users in cellular networks. But this is not entirely true.

The reason lies in the fact that this portal does not emulate a real communication network, but provides an ETSI MEC API interface for in-

Table 1

Values of root mean square error and coefficient of determination depending on the base station, the algorithm used for the initial data from MEC Sandbox

Id BS	Score	Lin.reg.	Poly.reg.	KRR	GPR
4g-macro-cell-4	MSE	3.04	3.00	3.05	4.52
4g-macro-cell-4	R2	0.00487	0.01853	0.00143	-0.48
5g-small-cell-14	MSE	0.10	0.10	0.10	0.13
5g-small-cell-14	R2	0.00066	0.00087	0.00027	-0.27

teraction between the communication network controller and the client of this data.

To confirm this theory, data was generated in accordance with the load distribution discussed in the article [3] and an experiment was performed with the following initial data:

- base station ID 1: 4g-macrocell-66
- time sample: 0 seconds - 86395 seconds from the beginning of the day with a step of 5 seconds

As a result of the experiment, the MSE and R^2 est. are shown in Table 2.

Table 2

Values of the mean square error and determination coefficient depending on the base station, the algorithm used for the initial self-generated data

Id BS	Score	Lin.reg.	Poly.reg.	KRR	GPR
4g-macrocell-66	MSE	12009.76	6724.23	24882.8	0.0018
4g-macrocell-66	R2	0.4497	0.6919	-0.1401	1

Analyzing the results of the second experiment, we can confidently say that:

- The GPR ML algorithm is the best among those presented in the problems of predicting the number of users, since the MSE and R^2 est. were 0.0018 units. and 1 unit. respectively.
- The ETSI MEC Sandbox portal is not intended for tasks in which it is necessary to evaluate a real communication network.

Conclusion

As a result of the research, a program was developed in the Python 3 programming language that allows collecting data from the MEC Sandbox using the MEC API and predicting the number of users of cellular networks using ML algorithms.

A comparative analysis of the algorithms led to the conclusion that none of the presented algorithms is optimal for solving the problem of predicting the number of users with the initial data from MEC Sandbox.

At the same time, the GPR ML algorithm is the best among those presented in the problems of predicting the number of users, since the MSE and R^2 est. were 0.0018 units. and 1 unit. respectively, with initial data generated based on the load of a real communication network. Accordingly, this algorithm can be used in the future as part of the decision-making system for the placement of computing services in the MEC network.

REFERENCES

1. *Li J. et al.* Deep reinforcement learning based computation offloading and resource allocation for MEC //2018 IEEE Wireless communications and networking conference (WCNC). IEEE, 2018. P.1–6.
2. *Bogatyrev V. A., Bogatyrev A. V., Bogatyrev S. V.* Redundant servicing of a flow of heterogeneous requests critical to the total waiting time during the multi-path passage of a sequence of info-communication nodes //International Conference on Distributed Computer and Communication Networks. Springer, Cham, 2020. P.100–112.
3. *Facchini C. et al.* Dynamic green self-configuration of 3G base stations using fuzzy cognitive maps //Computer Networks. 2013. Vol.57. №7. P.1597–1610.
4. *Wang T. H. et al.* Design of a Network Management System for 5G Open RAN //2021 22nd Asia-Pacific Network Operations and Management Symposium (APNOMS). IEEE, 2021. P.138–141.
5. <https://mecwiki.etsi.org> — ETSI-MEC Wiki. 2022.
6. <https://scikit-learn.org> — Scikit-learn guide. 2022.
7. <https://try-mec.etsi.org> — ETSI MEC Sandbox Portal. 2022.

Filianin Ivan Viktorovich — Master, Lecturer in Practice, Faculty of Infocommunication Technologies. E-mail: adeptwin1@gmail.com, ifilyanin@itmo.ru

Alexander Kapitonov — PhD, Associate Professor of the Faculty of Infocommunication Technologies, Dean of the Faculty of Infocommunication Technologies. E-mail: Kap2fox@gmail.com

ЗАДАЧА АВТОМАТИЧЕСКОГО РАСПОЗНАВАНИЯ ЗДАНИЙ В ВОДООХРАННЫХ ЗОНАХ НА СПУТНИКОВЫХ СНИМКАХ

С. В. Гилин

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

Разработка систем распознавания изображений является одним из актуальных и востребованных направлений в области искусственного интеллекта, машинного обучения и анализа данных. В данной работе рассматривается проблема обнаружения на спутниковых снимках зданий и построек, находящихся в водоохраных зонах. **Ключевые слова:** *распознавание образов, распознавание зданий, распознавание водоохраных зон, распознавание на спутниковых снимках, автоматическое распознавание образов.*

Введение

Разработка систем распознавания изображений является одним из актуальных и востребованных направлений в области искусственного интеллекта, машинного обучения и анализа данных. В данной работе рассматривается проблема обнаружения на спутниковых снимках зданий и построек, находящихся в водоохраных зонах. В Водном Кодексе РФ приняты нормы расстояния нахождения построек по отношению к водному ресурсу, т.е. в зависимости от размера водоема постройки разрешено производить на строго определенном расстоянии. Индивидуальное строительство в водоохранной зоне осуществляется с учетом положений ст. 65 Водного кодекса РФ. Сведения о границах водоохраных зон и границах прибрежных защитных полос водных объектов внесены Единый государственный реестр недвижимости. Сведения об охранных зонах водных объектов находятся в государственном водном реестре. Поэтому задача обнаружения зданий и построек, находящихся в водоохраных зонах, является важной и практически значимой. Целью исследования является разработка нового алгоритма распознавания зданий в водоохраных зонах на спутниковых снимках. Для автоматизации процесса необходимо научить алгоритм добавлять на карты многоугольники домов без участия людей, а также определять — находятся

ли постройки на разрешенном расстоянии относительно водоемов. В данной работе отражены следующие результаты:

1. Выполнена модификация метода определения контуров здания, которая заключается в обновлении области скользящего окна путем исключения искусственных объектов, не соответствующих пороговым значениям выпуклости объектов. Исследованы и сформулированы основные условия применения метода.

2. Для метода определения водных объектов предложена новая маска изображения. Применение разработанной маски позволяет выделять перепады значений цветовой кодировки пикселей без учета их ориентации при помощи применения двумерных операторов Лапласа.

3. В работе впервые предложен метод определения незаконности постройки – обнаружение строений, находящихся в водоохраных зонах. В методе используется наложение на изображение координатных данных Росстата, которые позволяют сократить вычислительную сложность алгоритма и увеличить скорость его работы. Данные Росстата представляются в виде выделенных зон на карте с обозначенными кадастровыми номерами и координатами.

1. Задача распознавания образов

Задача распознавания объектов на спутниковых снимках является частным случаем таких задач, как распознавание образов, классификация и машинное обучение. Перечислим основные этапы решения задачи распознавания объектов — выявление объектов определенных заданных классов на снимках:

1. Выделение объектов на изображении путем сегментации с дальнейшим преобразованием выделенных сегментов для записи объектов в зависимости от метода дешифрирования.

2. Анализ объектов.

3. Классификация объектов.

4. Нахождение расстояния между распознаваемыми объектами.

5. Вывод результата решения задачи.

При определении распознаваемых объектов, для сокращения выбора построек, предлагается использовать наложение данных Росстата о проверенных зданиях. В данной работе рассматриваются два метода распознавания объектов на спутниковых снимках: автоматическое распознавание построек и распознавание объектов с помощью фильтрации с использованием маски Лапласа.

2. Метод автоматического распознавания контуров зданий

Для выявления объектов с схожим внешним видом используется группировка областей с одинаковыми визуальными характеристиками (сегментация). В данной работе мы рассматриваем алгоритм сегментации со сдвигом среднего, качество результата которой определяется тремя параметрами: цветовым разрешением h_c , пространственным разрешением h_s и минимальным размером сегмента. Если учесть, что у построек сложная форма, то мы не сможем распознать даже один объект из необходимого класса по одному набору параметров. В таком случае предполагается, что параметр h_c будет изменяться. Это позволяет нам получить разные результаты распознавания. Перед классификацией объекта — нам необходимо изучить его характеристики, чтобы понять, является ли он некоторой частью постройки. Для этого мы используем общее свойство искусственных объектов: они имеют либо малую постоянную кривизну, либо несколько точек высокой кривизны (или вообще не имеют кривизны). Средняя кривизна области R_j рассчитывается следующим образом:

$$C_u(R_i) = \frac{\oint_{B_{R_i}} k ds}{\text{length}(B_{R_i})} \leq \delta_{curv}, \quad (1)$$

где k — локальная кривизна, δ_{curv} — некий порог. Для возможности различать искусственные объекты используется выпуклость C_o как следующее условие для распознаваемых построек:

$$C_o(R_j) = \frac{\text{Area}(R_i)}{\text{Area}(H_i)} \leq \delta_{curvI}, \quad (2)$$

Здесь под H_i обозначена выпуклая оболочка R_i . Для классификации идентифицированных кандидатов используются три класса объектов:

1. Растительность;
2. Тени;
3. Искусственная сооружения.

Для более точного результата мы исключаем области тени и растительности. Изображение переводим из RGB пространства в «оттенк-насыщенность-значение» (HSV). Для каждого класса областей создаются маски, которые рассмотрим далее. Создается бинарная маска растительности. На следующем шаге маска растительности используется для классификации областей распознаваемых построек. Если более 60% идентифицированной области объекта соответствует белым частям маски растительности, вся область классифицируется как область растительности. Часто деревья заслоняют здания или их тени. Чтобы учесть

эту ситуацию, дополнительно к маске растительности M_{Veg} создается маска деревьев M_{Tree} . Деревьями считаются сегментированные области R_i со следующими свойствами:

$$C_u(R_i) \geq 0.2, \quad (3)$$

$$Area(R_i) \leq 100m^2, \quad (4)$$

$$\frac{Area(R_i \cap M_{Veg})}{Area(R_i)} \geq 0.6. \quad (5)$$

Обнаружение областей тени выполняется при помощи вычисления высоты Солнца и высоты зданий. Имея эти данные, можно выделить тени, отбрасываемые зданиями-кандидатами. Для увеличения контрастности, HSV-изображение фильтруется следующим образом:

$$\varphi(x, y) = \frac{4}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{H(x, y) - \sqrt{H(x, y)^2 + S(x, y)^2 + V(x, y)^2}}{H(x, y) + \sqrt{H(x, y)^2 + S(x, y)^2 + V(x, y)^2}} \right). \quad (6)$$

Для создания бинарной теневой маски используется порог $Otsu$. Пиксели ниже этого порога считаются относящимися к тени. Для каждого объекта строится теневая маска, но иногда тени могут быть искажены, либо слиты из-за лишних объектов. Для исключения искажений тень выбранного объекта сравнивается с маской тени и масками других объектов. В результате исключения маски растительности и проекции всех масок тени мы можем определить — является ли распознаваемый объект искусственной постройкой. Для увеличения скорости работы алгоритма создается два списка объектов: список всех распознаваемых объектов и пустой список. Так как для каждого объекта создается своя маска, то при обновлении списка объектов — точно распознанный объект переносим в отдельный список, что позволяет сократить количество итераций алгоритма распознавания построек. На аэроснимках бывает трудно отличить большие пустые площади (для примера можно взять парковки) от обычных зданий, поэтому для исключения данных кандидатов используется проверка на наличие отбрасываемой тени.

3. Метод определения водоохраных зон

После наложения спутникового изображения на карту местности и соотнесения опорных точек производится корректировка фотоизображения за счет масштабирования и поворота участка. Затем можно переходить к процедуре непосредственного распознавания областей,

для чего необходимо получить контуры различных участков на снимках. Для определения водоохраных зон предлагается при обработке изображения и выделении контуров объекта использовать алгоритм фильтрации с использованием маски оператора Лапласа. При заранее заданных значениях цветов в формате RGB водные ресурсы будут выделены темным цветом, что позволит сократить количество областей распознавания. Лапласиан будет записан в следующем виде: $L(f(x, y)) = -f(x-1, y-1) - 2 \cdot f(x, y-1) - f(x+1, y-1) - 2 \cdot f(x-1, y) + 12 \cdot f(x, y) - 2 \cdot f(x+1, y) - f(x-1, y+1) - 2 \cdot f(x, y+1) - f(x+1, y+1)$.

Для повышения быстродействия используется предварительно создаваемый массив адресов изображения. Последующая работа с адресами элементов повышает скорость работы алгоритма в 5–8 раз по сравнению с прямым обращением к пикселям изображения, что актуально для изображений большого разрешения, таких как спутниковые снимки. Алгоритм состоит из следующих этапов:

1. Перевод RGB –изображения в цветовую модель YUV (цветовая модель, которая состоит из яркости Y и двух цветоразностных компонент (U и V)), которая задается следующим образом:

$$Y = 0,299R + 0,587G + 0,114B, \quad (7)$$

$$U = 0,493(B - Y), \quad (8)$$

$$V = 0,877(R - Y). \quad (9)$$

2. Применяется формула $L(f(x, y))$ подставляя каждый пиксель с координатами x, y .

3. Распознавание водоохраных зон по заданным характеристикам (контурам и форме, градиенту цвета).

4. Оценка точности обнаружения водных объектов получена путем деления суммы верно классифицированных пикселей водного объекта, полученного с помощью водного индекса, к общему числу пикселей эталонной маски: $O = 100 \times N_w - N_{wm} / N_{wm}$.

Здесь N_w — число водных пикселей анализируемого изображения и N_{wm} — число водных пикселей эталонной маски. Данная оценка позволила более точно найти пороги значений, при которых пиксель можно считать принадлежащим водным объектам.

4. Определение расстояния между распознаваниями объектами

Для решения данной задачи будут использоваться изображения, в которых пикселю изображения соответствует область на местности раз-

мером 3×3 метра. Имея данную информацию, вычисляется расстояние от контура объекта проверяемого класса до объекта, который определяется классом водоохранной зоны. В данной работе для определения расстояния используется метрика, введенная Германом Минковским, а именно расстояние городских кварталов:

$$d_j(p, q) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |p_{ij} - q_{ij}|, \quad (10)$$

где d — расстояние между объектами, p_i и q_i — точки, соединяемые прямой, i — размерность плоскости, j — количество пикселей. С учетом вышеперечисленного можно построить следующий алгоритм:

1. Выбираются сравниваемые по расстоянию объекты из каждого класса.
2. Определяются всевозможные расстояния между каждой парой точек p и q , которые берутся из каждого класса.
3. С помощью сортировки определяется наименьшее расстояние между объектами.
4. Проверяется соответствие полученного расстояния с контрольными соотношениями ВК РФ. Контрольные соотношения определяются в соответствии с максимальной шириной водоема. Контрольные соотношения задаются формулой:

$$0 \leq d_j \leq d_w(W), \quad (11)$$

где d_w зависит от ширины водоема W .

5. Если постройка не проходит проверку, то объект можно считать незаконным.

Заключение

В данной статье рассмотрена проблема распознавания зданий в водоохраных зонах на спутниковых снимках. В рамках поставленной задачи был разработан модифицированный алгоритм распознавания построек, а также метод распознавания водных объектов при помощи маски Лапласа. После распознавания и классификации объектов — находится расстояние между классами объектов. Для определения законности постройки используются контрольные соотношения, определяющие доступное расстояние, на котором разрешены строительные объекты. На вход программе подаются изображения с временным диапазоном в 16 дней в одно и то же время. Данный интервал был выбран для исключения движущихся объектов. Для примера возьмем следующие объекты: облака, лодки, катера, машины и так далее. Изображения

соответствуют размерам 900^2 при условии, что размер одного пиксела 3×3 метра. Фильтрация изображения для распознавания зданий производится при помощи метода преобразования Фурье верхних частот, что и позволяет подсвечивать контуры. Для исключения неподходящих по размерам объектов используется теневая маска. Данная задача содержит в себе скрещивание алгоритмов распознавания построек и водных ресурсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронцов К. В.* Лекции по алгоритмам кластеризации и многомерного шкалирования. Москва: МГУ, 2007. 18 с.
2. *Лепский А. Е., Броневич А. Г.* Математические методы распознавания образов. Таганрог: ЮФУ, 2009. 155 с.
3. *Чернов А. В., Чупшев Н. В.* Автоматическое распознавание контуров зданий на картографических изображениях // Компьютерная оптика. 2007. Т. 4. № 31. С. 101–103.
4. *Живрин Я. Э.* Методы определения объектов на изображении // Молодой ученый. 2018. № 7(193). С. 8–19.

Гилин Степан Валентинович — Институт подготовки кадров высшей квалификации. E-mail: gilin.stepan@mail.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЙРОСЕТЕВОГО ПОДХОДА В ЗАДАЧЕ РАСПОЗНАВАНИЯ КОРОНАВИРУСНОЙ ИНФЕКЦИИ ПО РЕНТГЕНОВСКИМ СНИМКАМ ПАЦИЕНТОВ

Д. Д. Бугакова, Е. Ю. Лисовская

Национальный исследовательский

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

В данной работе рассматриваются алгоритмы работы и архитектуры сверточных нейронных сетей, которые были использованы для решения задачи распознавания коронавирусной инфекции. Приведены результаты работы различных архитектур, сравнения их работы, а также визуализация работы нейронных сетей с помощью алгоритма Grad-CAM. В заключении представлены выводы, сделанные по анализу результатов работы.

Ключевые слова: *python, pytorch, сверточные нейронные сети, глубокое обучение, классификация изображений.*

Введение

Стремительное распространение инфекции COVID-19, оказало огромное влияние и принесло непоправимый ущерб жизни многих людей. Для диагностирования и обнаружения такого рода инфекций в настоящее время применяют компьютерную томографию и рентгенографию, но даже при условии обеспеченности нужными аппаратами и медикаментами не всегда можно точно и правильно поставить диагноз, ввиду большого потока пациентов. Решением этой проблемы могут являться быстроразвивающиеся нейронные сети, способные решать задачи, связанные с анализом и классификацией медицинских изображений.

1. Описание и обработка исследуемых данных

Для того, чтобы рассмотреть работу нейронных сетей в задаче распознавания коронавирусной инфекции был использован набор данных с сайта [kaggle.com](https://www.kaggle.com) [1] о 18868 рентгеновских снимках пациентов, содержащий 4 класса (0 - covid, 1 - пневмония, 2 - помутнения в легких, 3 - чистые легкие), который был разделен на тренировочную, тестовую и валидационную выборки (таблица 1).

Таблица 1

Распределение данных в выборках

Тип выборки	Класс 0	Класс 1	Класс 2	Класс 3
Тренировочная	3315	1045	3416	9892
Валидационная	150	150	150	150
Тестовая	150	150	150	150

Исследуемый набор данных является несбалансированным, поэтому для корректного обучения был применен метод `WeightedRandomSampler`, который позволит рассматривать в каждом батче примерно одинаковое количество изображений каждого класса. Для его использования нужно:

- 1) получить значение количества изображений в каждом классе;
- 2) рассчитать весовые коэффициенты для каждого класса $\frac{1}{n_i}$, где n_i – количество изображений в классе i (весовые коэффициенты для классов: 0 - 0.0003, 1 - 0.0010, 2 - 0.0003, 3 - 0.0001);
- 3) присвоить каждому изображению из класса соответствующий весовой коэффициент.

Для обучения были выбраны следующие архитектуры нейронных сетей: ResNet-18, DenseNet-121, EfficientNet-B0.

2. Подбор гиперпараметров

Количество нейронов в скрытом слое. Количество нейронов в скрытом слое классификатора было выбрано одинаковым для всех моделей: 512.

Скорость обучения. Для оценки эффективной скорости обучения (СО), модели обучались со скоростью, которая изначально низкая, а затем экспоненциально повышалась с каждой итерацией:

$$lr_{max} = lr_{init}q^n, q = \left(\frac{lr_{max}}{lr_{init}}\right)^{\frac{1}{n}}, lr_i = lr_{init}q^i = lr_{init} \left(\frac{lr_{max}}{lr_{init}}\right)^{\frac{i}{n}},$$

где lr_{max} — конечная скорость обучения (верхняя граница), lr_{init} — начальная скорость обучения (нижняя граница), n — количество итераций, lr_i — скорость обучения на i -ом шаге.

После обучения модели выбирается интервал скорости обучения, на котором значение функционала ошибки уменьшается быстрее всего, такой интервал будет называться оптимальным. Дальнейшее обучение модели может проводиться разными способами: а) с верхним значением

оптимального интервала, б) с нижним значением оптимального интервала, в) со значением в 10 раз меньше значения верхнего оптимального интервала (лучшая верхняя граница), г) с помощью циклического обучения [2].

Начальные интервалы скорости обучения были выбраны одинаковыми для всех архитектур: $lr_{max} = 1 \times 10^{-7}$, $lr_{init} = 1 \times 10^{-1}$. После обучения всех моделей со скоростью обучения из начального интервала (рисунок 1), для каждой модели были выбраны оптимальные интервалы, лучшие верхняя и нижняя границы (таблица 2).

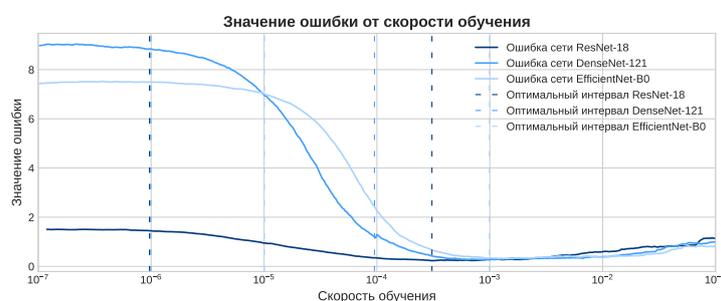


Рис. 1. Оптимальные интервалы для выбранных архитектур

Таблица 2

Значения параметров скорости обучения для разных моделей

Архитектура	Вид скор. обуч.	Значение скор. обуч.
ResNet-18	постоянная	1×10^{-6}
	постоянная	3×10^{-4}
	<i>постоянная</i>	3×10^{-5}
	<i>циклическая</i>	$[5 \times 10^{-6}; 3 \times 10^{-5}]$
DenseNet-121	<i>постоянная</i>	1×10^{-6}
	<i>постоянная</i>	$9,5 \times 10^{-5}$
	постоянная	$9,5 \times 10^{-6}$
	циклическая	$[1,5 \times 10^{-6}; 9,5 \times 10^{-5}]$
EfficientNet-B0	постоянная	1×10^{-5}
	<i>постоянная</i>	9×10^{-4}
	<i>постоянная</i>	9×10^{-5}
	циклическая	$[1,5 \times 10^{-5}; 9 \times 10^{-5}]$

3. Обучение моделей

Для обученных моделей были построены графики со значениями метрики ассигасу (правильности) для каждой из моделей (рисунки 2а-2в).

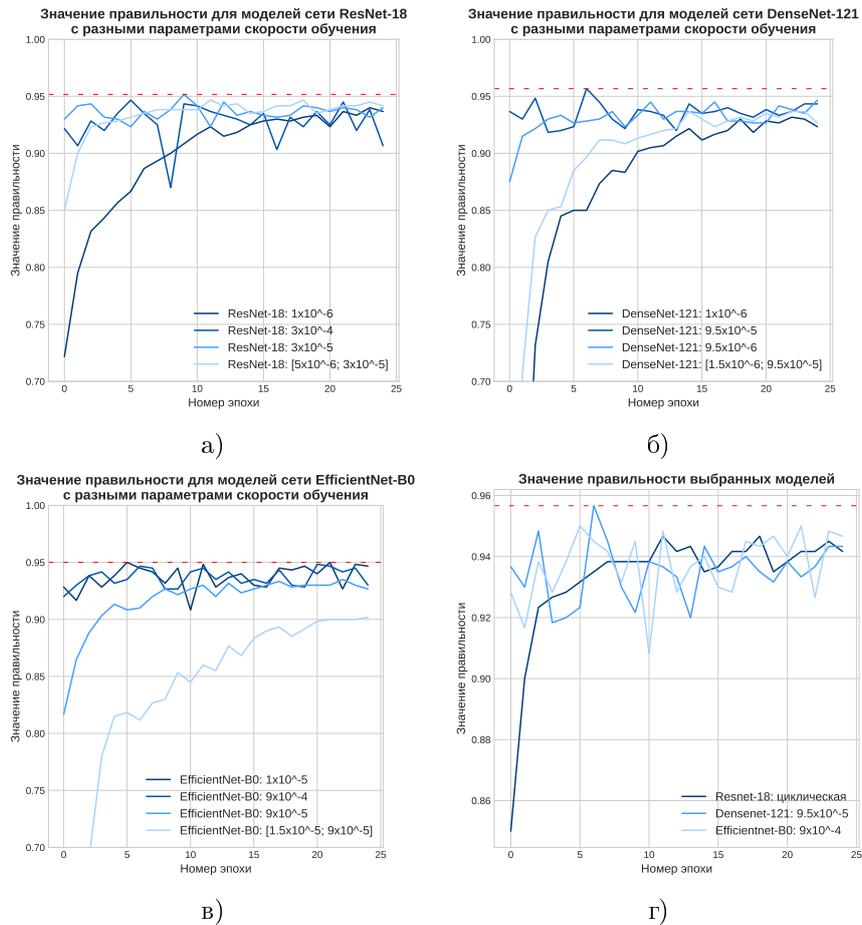


Рис. 2. Значение правильности: а) ResNet-18, б) DenseNet-121, в) EfficientNet-B0, г) моделей, которые показали лучшие значения метрик

Исходя из графиков, были определены модели для разных архитектур, которые быстрее достигают максимальной правильности, такие модели в таблице 2 выделены курсивом.

4. Оценивание результатов

Оценка работы разных моделей сверточных нейронных сетей, была проведена с помощью метрик: accuracy, recall, precision, F_1 -мера.

Для каждой из моделей были вычислены значения метрик для каждого класса. В таблице 3 для каждого класса представлены модели, которые показывают лучшую метрику accuracy. Черным в таблице 2 выделены модели, которые показали лучшую предсказательную способность.

Таблица 3

Значение метрики accuracy лучшей модели для каждого класса

Класс	Архитектура	Модель	Accuracy
0	EfficientNet-B0	9×10^{-4}	1.000000
1	DenseNet-121	$9,5 \times 10^{-5}$	0,996540
2	EfficientNet-B0	9×10^{-4}	0,968067
3	DenseNet-121	$9,5 \times 10^{-5}$	0,961603

Для моделей, которые показали лучшую предсказательную способность, были построены графики значения метрики accuracy (рисунок 2г).

5. Визуализация результатов с помощью Grad-CAM

Алгоритм визуализации Grad-CAM был применен к классам, для которых архитектура EfficientNet-B0 показала лучший результат (рисунок 3).

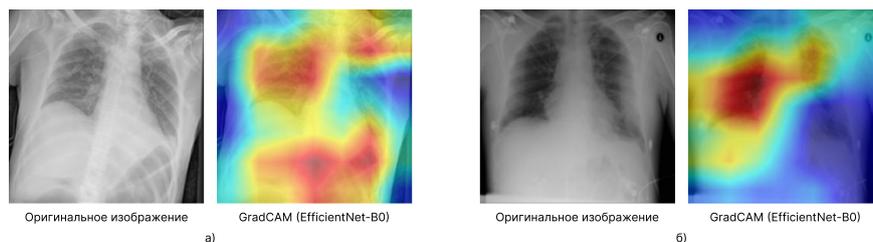


Рис. 3. Визуализация работы нейронной сети EfficientNet-B0: а) для класса «covid», б) для класса «помутнения в легких»

Заключение

По всем метрикам для всех архитектур и для всех классов изображений достигнута очень высокая точность предсказаний. При практическом использовании в медицинском учреждении при подозрении, что человек болен COVID, врачу следует полагаться на предсказание, которое выдает модель архитектуры EfficientNet-B0.

Можно предположить, что архитектура EfficientNet работает чуть лучше других, так как в ней меньше параметров, соответственно меньше весов, следовательно градиент меньше затухает или взрывается, поэтому сеть работает стабильно и точность предсказания выше. Остальные две сети работают не сильно хуже EfficientNet, так как их идея состоит в добавлении промежуточных связей между слоями. DenseNet по сравнению с ResNet работает более точно, так как в ней передаются не просто связи, а целые слои, и при чем к каждому последующему блоку, поэтому финальный блок получает все возможные варианты работы сверточных нейронных сетей и может эффективно отбросить часть ненужных фильтров и оставить только важные.

Также стоит отметить, что все архитектуры имеют высокую предсказательную способность для классов «covid» и «пневмония», чуть меньшую предсказательную способность для классов «помутнения в легких» и «чистые легкие». При практическом использовании данных архитектур медицинскому работнику следует быть более внимательным при постановке диагноза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. www.kaggle.com/datasets/tawsifurrahman/covid19-radiography-database — Kaggle. 2021.
2. *Leslie N. Smith*. Cyclical Learning Rates for Training Neural Networks // arXiv. 2015.
3. *Ramprasaath R. Selvaraju*. Visual Explanations from Deep Networks via Gradient-Based Localization // International Journal of Computer Vision. 2019. Т. 128. № 2. С. 336—359.

Бугакова Дарья Дмитриевна — студент института прикладной математики и компьютерных наук. E-mail: bugashka17@inbox.ru

Лисовская Екатерина Юрьевна — к.ф.-м.н., доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики. E-mail: ekaterina_lisovs@mail.ru

ПРОБЛЕМА ОЦЕНКИ РАБОТЫ АЛГОРИТМОВ ТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В. Е. Солопов, Т. В. Кабанова, Е. Ю. Петров

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В статье рассматривается процесс сравнения тематических моделей. Из-за существования большого количества методов и подходов к оценке результатов тематического моделирования трудно определить, какой набор оценок лучше. На основе анализа предметной области составлен набор критериев и оценок для проведения сравнительного анализа тематических моделей, использованы как внутренние оценки, так и внешние (экспертное мнение). Полученный набор оценок был применен к трем тематическим моделям, обученных с помощью таких алгоритмов, как LDA, LSI, NMF. Модели обучались на собранном корпусе текстов, связанных с тематикой изменения климата.

Ключевые слова: *тематическое моделирование, обработка естественного языка, корпус текстов, внутренняя оценка, внешняя оценка.*

Введение

Ежедневно наблюдается увеличение объема передаваемых данных [1], и большую их часть составляет текстовая информация. По этим причинам на сегодняшний день набирает популярность направление Natural Language Processing. Одно из наиболее узких направлений в NLP – это тематическое моделирование. Оно может позволить из большого количества текстовой информации выделить кластеры тем, которые описываются ключевыми словами, что является очень актуальным при исследовании больших объемов текстовой информации. Но в области тематического моделирования существует проблема в оценке и сравнении моделей. На данный момент нет общего подхода в сравнении результатов работы алгоритмов тематического моделирования. Такой вывод был сделан на основании литературного обзора научных работ на данную тему, а также при опросе сообщества специалистов, занимающихся тематическим моделированием. В научных работах зачастую используют только внутренние оценки, а на практике специалисты склонны применять только собственную экспертную оценку. Поэтому

был составлен набор критериев для получения информации об общем качестве полученной модели и сравнения с другими моделями.

1. Выбор оценок

При проведении литературного обзора было исследовано множество подходов к оценке тематических моделей, которые делятся на два класса: внутренние и внешние. Для проведения данной работы среди оценок были выбраны: согласованность, разреженность, словесная и тематическая интрузия [2]. Основанием для выбора этих методов оценивания тематических моделей является их прикладная ценность. Данные оценки легко интерпретируемы, а также просты в применении.

Согласованность и разреженность – внутренние оценки, использующие для вычислений результирующую матрицу модели. Согласованность описывает частоту встреч слов в документах в одной теме, а разреженность использует процент пустых значений результирующей матрицы.

Словесная и тематическая интрузия – внешние оценки, для вычисления которого используют возможность интерпретации результатов моделей людьми. Словесная интрузия измеряется за счет проведения теста, в котором эксперту показывается набор слов, описывающих тему. Среди них необходимо выбрать лишнее. Если в большинстве случаев это удается, то тема наиболее интерпретируемой. Измерение тематической интрузии проводится похожим образом с помощью составления тестов. В этом случае эксперту показывается фрагмент текста и ключевые слова из нескольких тем. При этом одна из тем не присутствует в данном фрагменте и экспертам нужно выявить постороннюю тему.

Далее на основе полученного набора оценок мы провели эксперимент по нахождению данных оценок для тематических моделей, обученных на одном наборе данных, чтобы сравнить результаты с собственным экспертным мнением о качестве полученных моделей.

2. Сбор и подготовка данных

Для проведения эксперимента был собран набор социальных высказываний на тему изменения климата с помощью системы «Крибрум». Данная система собирает данные из разных источников на основе поисковых запросов. С помощью итеративного расширения изначального набора запросов удалось собрать 77635 записей. С помощью метаданных, содержащихся в записях, были построены диаграммы, описывающие собранный набор. При изучении метаданных было выявлено, что в основном набор содержит русскоязычные записи из социальных сетей.

К собранному набору данных применялись классические способы предобработки текста, такие как токенизация, удаление разделителей и токенов длиной меньше двух, приведение к одному регистру и так далее. Далее для снижения информационного шума была проведена лемматизация – метод, приводящий слова к нормальной форме. Преимущество лемматизации в том, что в дальнейшем при экспертной оценке темы будут более интерпретируемы, чего нельзя сказать о стемминге, который оставляет только основу слова. Также для очистки корпуса было использовано удаление стоп-слов – слов, которые не несут в себе значимую информацию, для этого использовался готовый набор стоп-слов для русского языка. Используемый нами набор расширился с помощью анализа обратной частоты документов по формуле:

$$IDF(t_i, d_j, D) = \log_2 \left(\frac{|D|}{|t_i \in d_j|} \right), \quad (1)$$

где D – набор документов, $|t_i \in d_j|$ – все документы, в которых встречается t_i . После вычисления IDF был построен график плотности распределения (рисунок 1). На основе данной метрики можно отсечь общепу-

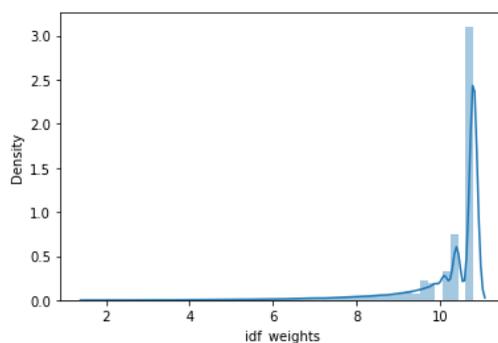


Рис. 1. Плотность распределения слов по IDF

ребительные и менее употребительные слова. При изучении плотности распределения слов по IDF, было решено отсечь хвосты распределений – значения ниже двух или выше десяти, так как левый хвост распределения ниже двух весьма незначителен, а правый хвост распределения имеет аномально высокие показатели IDF по сравнению со всей выборкой. Помимо перечисленных этапов было использовано выявление n-грамм и добавление их к начальному списку токенов, а для векторизации обработанного корпуса были использованы методы BoW и TFIDF.

3. Используемые алгоритмы тематического моделирования

Наиболее популярные в настоящий момент методы тематического моделирования можно разделить на две основные группы — алгебраические и вероятностные (генеративные) [3]. Выбор моделей происходил по следующим критериям: упоминаниям в научной литературе и удобство использования. В работе использовались две алгебраических модели: латентно-семантическое индексирование (LSA), неотрицательное матричное разложение (NMF), а также одну вероятностную модель: латентное размещение Дирихле (LDA). Латентно-семантическое индексирование или латентно-семантический анализ, а также латентное размещение Дирихле, являются наиболее популярными в своих группах [3], что соответствует нашему выбору моделей. Также данная тройка алгоритмов была описана авторами в работе [4], в главе о тематическом моделировании. Помимо этого выбранные алгоритмы вошли в набор методов тематического моделирования, которые были названы основными в работе [3]. Эти же методы описывает автор работы [5]. На практике использование такой связки алгоритмов оказалось весьма удобным, так как все они были реализованы в одной библиотеке Gensim на языке Python. Такое решение весьма удобно, так как в коде использование каждой модели описывается схожим образом, а также не приходится приводить результаты работы к одному формату или использовать разные языки программирования.

4. Проведение эксперимента

Для выявления интерпретируемости подобранного набора оценок мы обучили шесть тематических моделей, так как для каждого из выбранных алгоритмов использовалось два варианта векторизации собранных данных. В процессе обучения моделей для каждого из вариантов был подобран важнейший гиперпараметр тематической модели - количество тем. Данное значение подбиралось с помощью измерения метрики согласованности для разных значений количества тем. По результирующим матрицам полученных тематических моделей были посчитаны выбранные внутренние оценки. Далее с помощью описанных подходов, по внешней оценке, были составлены тесты. Полученные тесты для выявления словесной и тематической интрузии были предложены пяти людям, которые не являются экспертами в тематическом моделировании. По результатам тестирования получены следующие значения оценок (см. табл. 1). Далее для всех оценок было посчитано среднее общее значение для удобства сравнения моделей (см. табл. 2).

Таблица 1

Результаты оценок

Модель/ Векто- ризация	Кол- во тем	Согла- сован- ность (%)	Разре- жен- ность (%)	Словесная интрузия (%)	Тематическая интрузия (%)
LDA/BoW	6	62	70	26.48	100
LDA/TF-IDF	12	58	76	43.4	80
LSA/BoW	9	50	31	24.2	0
LSA/TF-IDF	21	53	34	34.2	60
NMF/BoW	10	65	77	38	60
NMF/TF-IDF	18	58	79	23	100

Таблица 2

Среднее по результатам оценок

Модель	Векто- ризация	Кол-во тем	Средняя оценка (%)
LDA	BoW	6	64.62
LDA	TF-IDF	12	64.35
LSA	BoW	9	26.32
LSA	TF-IDF	21	45.3
NMF	BoW	10	60
NMF	TF-IDF	18	65

По таблице видно, что наибольшую оценку получил вариант обучения модели с помощью алгоритма NMF на корпусе, тексты которого были векторизованы с помощью TF-IDF. Но при рассуждениях о релевантности используемых нами оценок мы посчитали, что вариант LDA с векторизацией TF-IDF лучше справляется с извлечением тем из нашего корпуса текстов, так как итоговая оценка отличается всего на 0.65. Зато оценка словесной интрузии – максимальная среди рассматриваемых вариантов. Вывод о значимости данной оценки мы сделали после обсуждения с привлеченными экспертами, а также при собственном изучении полученных тем. Расхождение оценок с собственными за-

ключениями говорит о том, что выбранный нами набор оценок требует подбора весов в соответствии со значимостью для каждого критерия.

Заключение

В результате работы был подобран набор оценок для тематических моделей и проведен эксперимент по их использованию. Был собран и обработан набор данных по тематике изменения климата, на котором были обучены разные варианты тематических моделей, после чего к их результатам был применен подобранный нами набор оценок. Сделаны выводы, о том, что предложенный набор оценок нуждается в доработке в соответствии с релевантностью используемых критериев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Минаков В.Ф.* Знания в цифровом обществе // Nauka-rastudent.ru. 2016. № 11(035). URL: <http://nauka-rastudent.ru/35/3742/>
2. *Chang J., Gerrish S., Wang C., Boyd-Graber J.L., Blei D.M.* Reading tea leaves: How humans interpret topic models // Advances in neural information processing systems. 2009. P. 213–214.
3. *Parhomenko P. A., Grigorev A. A., Astrakhantsev N. A.* A survey and an experimental comparison of methods for text clustering: application to scientific articles // Trudy ISP RAN. 2017. Vol. 29. P. 161–200.
4. *Бенджамин Бенгфорт, Ребека Билбро, Тони Охеда* Прикладной анализ текстовых данных на Python. Машинное обучение и создание приложений обработки естественного языка. СПб: Питер, 2019. 368 с.
5. *Коршунов Антон, Гомзин Андрей* Тематическое моделирование на естественном языке // Труды института системного программирования РАН. 2012. Ч. 23. С. 215–244.

Солопов Вадим Евгеньевич — бакалавр, студент, ИПМиКН. E-mail: svebb00@gmail.com

Кабанова Татьяна Валерьевна — канд. физ.-мат. наук, Доцент кафедры ТВиМС, ИПМиКН. E-mail: tvk@bk.ru

Петров Евгений Юрьевич — магистр, технический специалист Центра прикладного анализа больших данных ТГУ, ИПМиКН. E-mail: petrov@data.tsu.ru

Математическая теория
телетрафика и теория
массового обслуживания

A DISCRETE-TIME INVENTORY SYSTEM WITH PERISHABLE ITEMS AND AGE-DEPENDENT DEMANDS

Jijo Joy¹, K. P. Jose²

¹*St. Aloysius College Edathua, Alappuzha, Kerala, India*

²*St. Peter's College, Kolenchery, Ernakulam, Kerala, India*

This paper analyses a discrete-time (s, S) inventory model with perishable items having a common life time. Demand is assumed to be a Bernoulli process and service time and lead-time follow geometric distributions. The customer has a choice to accept or reject an item by considering its remaining lifetime. The Matrix Analytic Method is used to analyze the model. Numerical experiments are conducted by considering a suitable cost function on the basis of the relevant performance measures. **Keywords:** *bernoulli process, perishable inventory, age-dependent demand, matrix analytic method.*

Introduction

In the present day highly competitive market scenario, people are much concerned about the manufacturing date and expiration date of commodities they purchase. The customer's concern about his/her health demands the availability of fresh items in stock. The present model is relevant and which is applicable in the case of managing baked items, tin food, processed meat and fish, cosmetics, medicines, etc.

A perishable inventory model with positive lead time was first introduced by Nahmias(1979)[1]. Deteriorating inventory system considering demand for items as a linear function of time was first studied by Dave and Patel(1981)[2]. Pal(1989)[3] considered a deteriorating item inventory model with Positive lead time and without fixed ordering cost. Anilkumar and Jose(2020)[4] studied a Geo/Geo/1 inventory system with local purchase. In recent work, Adrian(2021) [5] developed a perishable inventory model by considering two types of degradations both physical and freshness conditions of an inventory. Chen J. and et. al. (2016)[6] proposed an EOQ model considering expiry date and displayed volume as the major factors of demand. Dobson et. al.(2007) [7] studied a single item perishable inventory model considering the product's lifetime. A recent work on Discrete time queues was by Anilkumar and Jose (2021)[8] by introducing self interruption in priority queues. Feng et. al.(2017)[9] proposes an inventory model considering demand as a function of freshness, displayed stock, and price.

In this paper, we extend the concept of the age-dependent model by giving a choice to the customer. He or she can accept or reject an item whose remaining lifetime is known. We assume that the probability that a customer accepts a product will reduce with increasing age.

1. Mathematical Modelling and Analysis

In this model, we study a discrete-time (s, S) perishable inventory model with positive service time and positive lead time. The arrival is assumed to be a Bernoulli process with parameter a . Both service time and lead time are assumed to be geometric with parameters b and c respectively. When the lead time is realized we will discard all the items already in the inventory so that the remaining new items have a common lifetime m . A customer's demand is for exactly one item and the customer is not allowed to join the system when the inventory level is zero.

We hypothesize that the demand depends on age. The age of the fresh items in the inventory is assumed to be m units and after which the item becomes spoiled. We assume that the customer's decision to buy a product depends on the freshness of the product. We assume that when the product is fresh the probability that the customer chooses them is high and there is a high probability that a customer not buy a product whose expiry date is near. For an item with remaining lifetime i , where $i = 1, 2, 3, \dots, m$, we assume that the customer will choose the item with probability β_i and not choose the item with probability $1 - \beta_i$.

Notations

X_n : Number of customers in queue at an epoch n .

Y_n : Inventory level at the epoch n .

Z_n : The remaining life of the product at an epoch n .

\mathbf{e} : $(1, 1, 1, \dots, 1)'$, column vector of 1's of size $Sm + 1$.

Then $\Psi = \{(X_n, Y_n, Z_n); n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ is a Quasi-Birth-Death Process on the state space

$$\mathcal{E} = \{(i', j', k'), i' \geq 0, 0 \leq j' \leq S, 1 \leq k' \leq m\}.$$

Now the transition probability matrix of the process is

$$\mathcal{P} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} C_1 & C_0 & & & \\ A_2 & A_1 & A_0 & & \\ & A_2 & A_1 & A_0 & \\ & & A_2 & A_1 & A_0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

where the blocks A_0, A_1, A_2 are square matrices whose $(j, k)^{th}$ element with phase i is given below. Here $j^* = j - (i - 1)m - 1$, $i^* = (i - 1)m$, $\beta^* = \beta_{j^*}b + \bar{\beta}_{j^*}$, $\beta^{**} = (ab + \bar{a}\bar{b})\beta_{j^*}b + a\bar{\beta}_{j^*}$ and $\delta = a\bar{\beta}_{j^*} + \bar{a}\beta_{j^*}\bar{b}$.

$$A_2(j, k) = \begin{cases} \bar{c}, & \text{if } j = 1; k = 1 \\ \bar{a}c, & \text{if } i = 1, \dots, s; j = i^* + 2; k = Sm + 1 \\ \bar{a}c\beta^*, & \text{if } i = 1, \dots, s; j = i^* + 3, \dots, im + 1; k = Sm + 1 \\ \bar{a}\bar{c}, & \text{if } i = 1, \dots, s; j = i^* + 2; k = 1 \\ \bar{a}\beta_{j-1}b\bar{c}, & \text{if } i = 2, \dots, m; j = i + 1; k = 1 \\ \bar{a}\bar{\beta}_{j^*}\bar{c}, & \text{if } i = 1, \dots, s; j = i^* + 3, \dots, im + 1; k = j - 1 \\ \bar{a}\bar{\beta}_{j^*}, & \text{if } i = s + 1, \dots, S; j = i^* + 3, \dots, im + 1; k = j - 1 \\ \bar{a}, & \text{if } i = s + 1, \dots, S; j = i^* + 2; k = 1 \\ \bar{a}\beta_{j^*}b\bar{c}, & \text{if } i = 2, \dots, s; j = i^* + 3, \dots, im + 1; k = j - m - 1 \\ \bar{a}\beta_{j^*}b, & \text{if } i = s + 1, \dots, S; j = i^* + 3, \dots, im + 1; k = j - m - 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$A_1(j, k) = \begin{cases} c, & \text{if } j = 1; k = Sm + 1 \\ ac, & \text{if } i = 1, \dots, s; j = i^* + 2; k = Sm + 1 \\ c\beta^{**}, & \text{if } i = 1, \dots, s; j = i^* + 3, \dots, im + 1; k = Sm + 1 \\ a\bar{c}, & \text{if } i = 1, \dots, s; j = i^* + 2; k = 1 \\ a\beta_{j-1}b\bar{c}, & \text{if } i = 2, \dots, m; j = i + 1; k = 1 \\ \delta\bar{c}, & \text{if } i = 1, \dots, s; j = i^* + 3, \dots, im + 1; k = j - 1 \\ \delta, & \text{if } i = s + 1, \dots, S; j = i^* + 3, \dots, im + 1; k = j - 1 \\ a, & \text{if } i = s + 1, \dots, S; j = i^* + 2; k = 1 \\ a\beta_{j^*}b\bar{c}, & \text{if } i = 2, \dots, s; j = i^* + 3, \dots, im + 1; k = j - m - 1 \\ a\beta_{j^*}b, & \text{if } i = s + 1, \dots, S; j = i^* + 3, \dots, im + 1; k = j - m - 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$A_0(j, k) = \begin{cases} a\beta_{j^*}\bar{b}c, & \text{if } i = 1, 2, \dots, s; j = i^* + 3, \dots, im + 1; k = Sm + 1 \\ a\beta_{j^*}\bar{b}\bar{c}, & \text{if } i = 1, \dots, s; j = i^* + 3, \dots, im + 1; k = j - 1 \\ a\beta_{j^*}\bar{b}, & \text{if } i = s + 1, \dots, S; j = i^* + 3, \dots, im + 1; k = j - 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. Stability Condition

The stability of the considered queueing inventory model is the same as that of ordinary discrete-time Geo/Geo/1 queue with inter-arrival time and service time being geometrically distributed with parameters say a and b respectively. Then, the system is stable if $a < b$.

3. Steady-State Analysis

We use Matrix Geometric Method for analyzing the model.

4. System Performance Measures

We, partition the stationary probability vector π as $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2 \dots)$ and $\pi_i = (\pi_{i0}, \pi_{i11} \dots, \pi_{i1m}, \pi_{i21} \dots, \pi_{i2m}, \dots, \pi_{iS1} \dots, \pi_{iSm}) (i \geq 0)$. The performance measures of the system under steady state are

- 1) Expected inventory level,

$$EI = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^S \sum_{k=1}^m j \pi_{ijk}$$

- 2) Expected reorder rate,

$$ER = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=s+1}^S \pi_{ij1} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m \beta_k b \pi_{i(s+1)k}$$

- 3) Expected loss rate of customers

$$EL = a \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i0}$$

- 4) Expected number of customers waiting in the system when the inventory level is zero,

$$EW = \sum_{i=1}^{\infty} i y_{i0}$$

5) Expected perishable Quantity,

$$EPQ = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^S j \bar{\beta}_1 \pi_{ij1} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^S (j-1) \beta_1 \pi_{ij1} + \sum_{j=1}^S j \pi_{0j1}$$

5. Cost Analysis

Define the expected total cost of the system per unit time as

$$ETC = [c_0 + S c_1](ER) + c_2(EI) + c_3(EW) + c_4(EL) + c_5(EPQ)$$

where,

c_0 : The fixed ordering cost

c_1 : Procurement cost/unit

c_2 : Holding cost of inventory/unit/unit time

c_3 : Holding cost of customers/unit/unit time

c_4 : Cost due to loss of customers/unit/unit time

c_5 : Disposal cost/unit Perished

6. (s, S) Pair

For fixed parameter values, the optimal (s, S) pair is given in the following table.

Table 1

$a = 0.3, b = 0.8, c = 0.6, m = 15, c_0 = 50, c_1 = 15, c_2 = 4, c_3 = 3, c_4 = 15, c_5 = 1$

s S	14	15	16	17	18
6	52.5199	52.2080	53.0113	54.9641	57.9154
7	58.8076	57.2699	56.7648	57.4316	59.2979
8	66.5386	63.8129	62.0200	61.3216	61.8519
9	75.8634	71.8685	68.8181	66.7700	65.8785
10	87.4268	81.6039	77.1983	73.8233	71.5200

Concluding Remarks

In this article, we studied a discrete (s, S) perishable inventory system with positive service times and positive lead times. The primary demand constitutes a geometric process. Service time follows a geometric distribution. We analyzed the system using Matrix Analytic Method. Some important system performance measures are derived. The expression for expected total cost is also obtained. One can modify this model by allowing backlog when the inventory level is zero.

REFERENCES

1. *Nahmias S. and Wang S. S.* A Heuristic lot size reorder point model for decaying inventories // *Mgmt. Sci.* 1979. Vol. 25. № 1. P. 90–97.
2. *Dave U. and Patel L. K.* (T, S_i) policy inventory model for deteriorating items with time proportional demand // *Journal of Operational Research Society.* 1981. Vol. 32. P. 137–142.
3. *Pal M.* The $(S-1, S)$ inventory model for deteriorating items with exponential lead time // *Calcutta Statistical Association Bulletin.* 1989. Vol. 38. P. 149–150.
4. *Anilkumar M. P. and Jose K. P.* Discrete Time Queue with self interruption resulting reducing priority // *AIP Conference Proceedings* 2261. 2020. doi: 10.1063/5.0016992
5. *Macias-Lopez Adrian et.al.* An inventory model for perishable items with price-, stock-, and Time-dependent demand rate considering shelf-life and non linear holding costs // *Mathematical problems in Engineering.* 2021. doi: 10.1155/2021/6630938
6. *Chen J., Min J. T., Tenf J. T. and Li F.* Inventory and shelf space optimization for fresh produce with expiration date under freshness-and-stock-dependent demand rate // *Journal of the Operational Research Society.* 2016. Vol. 67. № 6. P. 884–896.
7. *Dobson D., Pinker I. J. and Yildiz O.* An EOQ model for perishable goods with age dependent demand rate // *European Journal of Operational Research.* 2017. Vol. 257. № 1. P. 84–88.
8. *Anilkumar M. P. and Jose K. P.* Stochastic Optimization of Local purchase quantities in a Geo/Geo/1 production inventory system // *Communications in Computer and Information Science.* 2021. doi: 10.1007/978-3-030-66242-4-17.
9. *Feng L., Chan Y. L. and Cardenas-Barron L. D.* Pricing and lot-sizing policies for perishable goods when the demand depends on selling price, displayed stocks, and expiration date // *International Journal of Production Economics.* 2017. Vol. 185. P. 11–20.

Jijo Joy — M. Sc. in Mathematics, Assistant Professor, Department of Mathematics, St. Aloysius College Edathua - 689573, Alappuzha, Kerala, India. E-mail: jijo.sacedathua@gmail.com

K. P. Jose — Ph. D., Associate Professor and Head, Post Graduate Department of Mathematics, Saint Peter's College, Kolenchery-682311, Kerala, India. E-mail: kpjpsc@gmail.com

A GOF TEST FOR SHIFTED EXPONENTIAL DISTRIBUTION

A. V. Zorine¹

¹*Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation*

Shifted exponential distribution arises in many real-life cases including point processes in vehicular traffic control problems. We develop a new Goodness-of-Fit (GoF) test for composite hypothesis of shifted exponential probability distribution. The test is based on the conditional distribution of the sample given sufficient statistics. This approach was advocated by R.A. Fisher but is less used than parameter estimation and Monte-Carlo technique to obtain p -values, or searches for characterizations of parametric distribution families and construction of test statistics from such a characterization. We apply the developed GoF test to vehicular data and provide the limiting autocovariance function for the empirical processes involved. **Keywords:** *goodness-of-fit test, exponential distribution with shift, sufficient statistics, conditional distribution, empirical process.*

Introduction

One of important tasks of applied mathematical statistics is development of goodness-of-fit tests for composite hypotheses of given parametric family of probability distributions. When using parameters estimates in place of unknown parameters, popular Pearson's chi-square test and one-sample Kolmogorov test suffer from spoiled distribution of its test statistics under true null hypothesis (cf. e.g. [1]). To resolve this issue, specialized goodness-of-fit tests have been developing for popular parametric families of distribution, e.g. gaussian, exponential, poissonian etc.

Let us focus on the family of exponential distribution with a shift. For example, one needs to test for exponentiality with a shift when composing a non-local description for point processes on a line [2]. A useful hack is recommended in [3]: the least sample value is subtracted from each sampled value, and the zero result then excluded from the sample. Thus the sample size is reduced by one. Then under the null hypothesis the remaining differences remain i.i.d. and belong to a zero-shift exponential family with the same rate parameter. Now, any of composite hypothesis tests for exponentiality, e.g. collected in [4, 5, 6], can be applied.

In the present work we construct a test based on the conditional distribution of the sample conditioned on sufficient statistics, and investigate some of its asymptotic properties. Finally, the test is applied to vehicular traffic data from [2].

1. The test

Let X_1, X_2, \dots, X_n be i.i.d. random variables with the probability density

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < \theta, \\ \lambda e^{\lambda(\theta-x)} & \text{if } x \geq \theta \end{cases}$$

with some $\lambda > 0$, $-\infty < \theta < \infty$. By the factorization criterion, statistics

$$T(x_1, \dots, x_n) = \min\{x_1, \dots, x_n\}, \\ S(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$$

are sufficient statistics for the vector parameter (θ, λ) .

Let us recall that the maximum likelihood estimators are

$$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = x_{(1)}, \\ \hat{\lambda}(x_1, \dots, x_n) = \frac{n}{S(x_1, \dots, x_n) - nT(x_1, \dots, x_n)}.$$

We want to find a representation of the conditional distribution of the random variables X_1, \dots, X_n given $T(X_1, \dots, X_n) = t$ and $S(X_1, \dots, X_n) = s$.

Let us assume in what follows that the sample size $n \geq 3$. Notice that there's a unique with probability one index r such that $X_r = \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Let us introduce new random variables Y_1, \dots, Y_{n-2} as follows:

$$Y_j = \begin{cases} X_j - X_r, & X_r = \min\{X_1, \dots, X_n\}, j < r \\ X_{j+1} - X_r, & X_r = \min\{X_1, \dots, X_n\}, j \geq r. \end{cases}$$

Theorem 1. The joint density of $(Y_1, \dots, Y_{n-2}, T, S)$ is

$$f_{Y_1, \dots, Y_{n-2}, T, S}(y_1, \dots, y_{n-2}, t, s) = \\ = \begin{cases} n\lambda^n e^{\lambda(n\theta-s)} & \text{if } y_1 \geq 0, \dots, y_{n-2} \geq 0, t > \theta, \\ & y_1 + \dots + y_{n-2} + nt \leq s; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The marginal density of (T, S) for $t > \theta$, $s > nt$ is

$$f_{T,S}(t, s) = \frac{n\lambda^n(s - nt)^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda(n\theta - s)}$$

The conditional density of Y_1, \dots, Y_{n-2} given $T = t$, $S = s$, $t > \theta$, and $s > nt$ equals

$$\begin{aligned} f_{Y_1, \dots, Y_{n-2}}(y_1, \dots, y_{n-2} \mid T = t, S = s) &= \\ &= \begin{cases} \frac{(n-2)!}{(s - nt)^{n-2}} & \text{if } y_1 > 0, \dots, y_{n-2} > 0, y_1 + \dots + y_{n-2} < s - nt; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

We see that the conditional distribution of the vector (Y_1, \dots, Y_{n-2}) coincides with the probability distribution of a vector

$$(U_{(1)}, U_{(2)} - U_{(1)}, \dots, U_{(n-2)} - U_{(n-3)})$$

where $U_{(1)}, \dots, U_{(n-2)}$ are the order statistics from the $(n-2)$ values sampled from the uniform distribution in the interval $(0, s - nt)$.

A sampling algorithm is given in the following theorem.

Theorem 2. Let $T = t$ and $S = s$. Put, by definition, $Y_1 = U_{(1)}$, $Y_2 = U_{(2)} - U_{(1)}$, \dots , $Y_{n-2} = U_{(n-2)} - U_{(n-3)}$ as above. Set (X'_1, \dots, X'_n) equal to any of $h_k(Y_1, \dots, Y_{n-2}, T, S)$, $k = 1, 2, \dots, n$ with equal probability $1/n$. Then (X'_1, \dots, X'_n) has the same joint probability distribution as (X_1, \dots, X_n) conditioned on T and S .

As usual, denote by $\hat{F}_n(u; x_1, x_2, \dots, x_n)$ the empirical cumulative distribution function from a sample x_1, x_2, \dots, x_n , and let

$$F_0(u; \theta, \lambda) = \begin{cases} 0, & u < \theta, \\ 1 - e^{-\lambda(u - \theta)}, & u \geq \theta \end{cases}$$

be the probability distribution function for the shifted exponential distribution with shift θ and rate λ .

To test for exponential distribution with a shift, let us consider the Kolmogorov statistic

$$\begin{aligned} D_n(x_1, \dots, x_n) &= \sup_{-\infty < u < \infty} \left| \hat{F}_n(u; x_1, \dots, x_n) - \right. \\ &\quad \left. F_0(u; T(x_1, \dots, x_n), (S(x_1, \dots, x_n)/n - T(x_1, \dots, x_n))^{-1}) \right| \quad (1) \end{aligned}$$

and build a test with critical domain $D_n(x_1, \dots, x_n) > D_{n,\alpha}$ where the critical threshold $D_{n,\alpha}$ is selected to deliver the significance level α :

$$\mathbf{P}_{H_0}(D_n(X_1, \dots, X_n) > D_{n,\alpha} | T(X_1, \dots, X_n) = t, S(X_1, \dots, X_n) = s) = \alpha.$$

With respect to the conditional distribution, the random variables X_1, \dots, X_n are statistically dependent, hence the probability distribution of D_n under H_0 differs from the Kolmogorov distribution. To determine the upper quantile $D_{n,\alpha}$ (or to estimate the p -value) one needs to sample from the conditional distribution in order to obtain a sample distribution of D_n .

2. Numerical example

In [2], another study of the Bartlett's Traffic data [7] was conducted. The stop line crossing times reported in [7], were grouped into vehicle batches using a sophisticated algorithm, and the following time intervals between 'slow vehicles' in the head of each batch were obtained (read along lines):

44.4, 112.9, 38.7, 53.9, 36.8, 40.1, 70.5, 73.5, 23.7, 23.8, 33.1, 72.2, 87.1,
32.4, 72.6, 119.8, 19.6, 46.6, 134.2, 22.8, 44.4, 51.5, 28.7, 45.2, 75.7, 55.7,
101, 33, 66.4, 58.1, 37.5, 19.4, 29.3, 34.9, 50.6, 29.7, 73.5.

The empirical cumulative distribution function is shown in Fig. 1 with an shifted exponential probability distribution function added. Here the sample size is $m = 37$ and the sufficient statistics take on the values $T = 19.4$, $S = 1993.3$. The Kolmogorov–Smirnov test statistics equals 0.61627 and the Monte-Carlo estimate for p -value is 0.647. Hence, the null hypothesis of exponential distribution with a shift must be accepted.

3. Asymptotic property of empirical process

The test statistic (1) can be written as

$$D_n(x_1, \dots, x_n) = \sup_{0 < z < 1} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\left(\frac{x_i - t}{s - nt} < -\frac{\ln(1-z)}{n}\right) - z \right|.$$

Let Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1} be the lengths of intervals obtained from dropping at random of $(n-2)$ points on the unit interval $(0, 1)$. Then the probability distribution of the random variable $D_n(X_1, \dots, X_n)$ coincides with the probability distribution of

$$\sup_{0 < z < 1} \left| \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} I\left(Y_i < -\frac{\ln(1-z)}{n}\right) - z \right|.$$

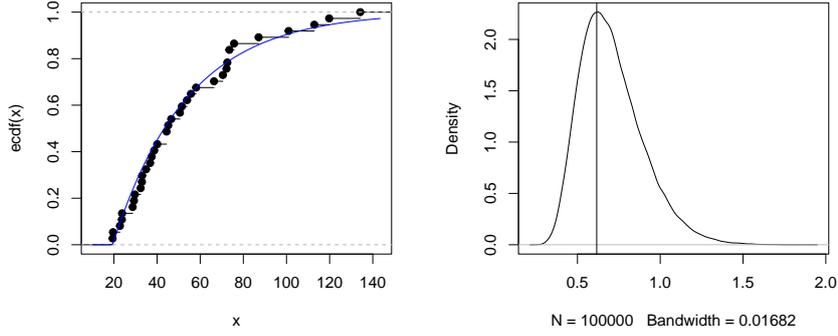


Figure 1. Empirical cumulative distribution function for intervals between ‘slow’ vehicles (on the left) vs empirical density for the Kolmogorov–Smirnov test statistic and its value for the discussed data (on the right)

Let us consider the empirical process

$$\zeta_n(z) = \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} I \left(Y_i < -\frac{\ln(1-z)}{n} \right) - z \right), \quad 0 < z < 1.$$

Theorem 3. We have:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\zeta_n(z) &= \sqrt{n} \left(\frac{n-1}{n} \left(1 - \left(1 + \frac{\ln(1-z)}{n} \right)^{n-2} \right) - z \right), \\ \mathbb{E}\zeta_n(z_1)\zeta_n(z_2) &= \frac{n-1}{n} \left(1 - \left(1 + \frac{\ln(1 - \min(z_1, z_2))}{n} \right)^{n-2} \right) + \\ &+ \frac{(n-1)(n-2)}{n} \left(1 - \left(1 + \frac{\ln(1-z_1)}{n} \right)^{n-2} - \left(1 + \frac{\ln(1-z_2)}{n} \right)^{n-2} + \right. \\ &+ \left. \left(1 + \frac{\ln((1-z_1)(1-z_2))}{n} \right)^{n-2} \right) - z_1(n-1) \left(1 - \left(1 + \frac{\ln(1-z_2)}{n} \right)^{n-2} \right) - \\ &- z_2(n-1) \left(1 - \left(1 + \frac{\ln(1-z_1)}{n} \right)^{n-2} \right) + nz_1z_2. \end{aligned}$$

The proof relies on complex integral representation for mathematical expectation of functions of Y_1, \dots, Y_{n-1} [8]. As a corollary, as $n \rightarrow \infty$, covariance $\mathbf{cov}(\zeta_n(z_1), \zeta_n(z_2))$ tends to

$$\min(z_1, z_2) - z_1z_2 - ((1-z_1)\ln(1-z_1))((1-z_2)\ln(1-z_2)),$$

and the limiting distribution of the empirical process $\zeta_n(z)$, $0 < z < 1$ cannot be a Brownian bridge as in the classical Kolmogorov test.

4. Conclusion

We have developed a test for the composite hypothesis of shifted exponential distribution. So far its p -value can be found only by Monte-Carlo simulation, since the limiting empirical process is not a Brownian bridge.

5. Acknowledgements

This work is dedicated to the memory of my father, Vladimir Alexandrovich Zorin, who passed away on 10.09.2022, being a docent of the department of probability theory and data analysis of the N.I. Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod. He taught me mathematics and probability. He also drew my attention to the problem of testing composite hypotheses in practical studies.

REFERENCES

1. *Voinov V., Nikulin M., Balakrishnan N.* Chi-squared goodness of fit tests with applications. Oxford: Elsevier, 2013. 229 p.
2. *Fedotkin M. A., Fedotkin A. M., Kudryavtsev E. V.* Nonlocal description of the time characteristic for input flows by means of observations // Automatic control and computer sciences. 2015. Vol. 49. № 1. P. 29–36.
3. *Durbin J.* Kolmogorov-Smirnov Tests when Parameters are Estimated with Applications to Tests of Exponentiality and Tests on Spacings // *Biometrika*. 1975. Vol. 62. № 1. P. 5–22.
4. *Ascher S.* A survey of tests for exponentiality // *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 1990. Vol. 19. № 5. P. 1811–1825.
5. *Henze N., Meintanis S. G.* Recent and classical tests for exponentiality: a partial review with comparisons // *Metrika*. 2005. Vol. 61. P. 29–45.
6. *Spurrer; J. D.* An overview of tests for exponentiality // *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 1984. Vol. 13. № 13. P. 1635–1654.
7. *Bartlett M. S.* The spectral analysis of point processes // *J. Roy. Stat. Soc., Ser. B*. 1963. Vol. 25. P. 264–296.
8. *Darling D. A.* On a class of problems related to the random division of an interval // *The Annals of Mathematical Statistics*. 1953. Vol. 23. № 2. P. 239–253.

Zorine Andrei Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, docent, Head of the department of probability theory and data analysis. E-mail: andrei.zorine@itmm.unn.ru

A MAP/PH(1),PH(2)/2 INVENTORY MODEL WITH VACATION DURING PRODUCTION

P. Beena,¹ K. P. Jose²

¹*Sree Neelakanta Govt.Sanskrit College, Pattambi, Palakkad, Kerala, India*

²*St. Peter's College, Kerala, India*

In this paper, a $MAP/PH(1), PH(2)/2$ multiple vacations production inventory model is considered in which time between successive arrivals follow MAP, both the production facility and the two heterogeneous servers avail multiple vacations. Servers have a phase type distributed service time and the time for producing an item is exponentially distributed. Once the stock level of goods reaches S , the production unit goes on vacation and if the stock level of goods drops to s when returning after the vacation, the production unit will start production until the inventory level reaches S . The production unit will go back to another vacation if the stock level of goods is greater than s , even after returning from vacation. The algorithmic solution to the model is obtained by Matrix Geometric Method. **Keywords:** *production inventory, multiple servers, multiple vacations, cost analysis, production vacation.*

Introduction

Production vacation is the cessation of production for a short period of random length. In the production process, the strategy of most manufacturing companies is to produce products based on customer demand, stock items at that level, and then start production based on demand. Servers may take a vacation due to system outages or other tasks assigned to them. Levy and Yechiali [5] were the first to study the queueing systems with one or more vacations. Manna et.al [6] discussed a single item imperfect production system in which the demands depend upon the rate of advertisement and the rate of producing defective items depends on the production rate. Goyal and Giri [2] analyzed a production–inventory problem in which the demand, production, and deterioration rates vary with time, and shortages are allowed. A production inventory system with multiple servers and varying production rate was discussed by Beena and Jose [1]. A production control inventory model for deteriorating items in which two different rates of production are discussed by Ajantha Roy and Samantha [8]. They reached the conclusion that the two different production rates will yield more profit and customer satisfaction than the single-production rate. Yue

and Qin [9] analyzed a production inventory system with production time and production vacation times exponentially distributed and service time positive. Krishnamoorthy et al. [4] considered a production inventory system in which the production time of each item and service time follow Erlang distributions. Jose and Beena [3] studied production inventory model with retrial and server vacations.

1. Description of the Model

Two heterogeneous server (s, S) production inventory model that produces a single type of product is considered, in which customers enter into a system according to the Markovian arrival process (MAP) with D_0 and D_1 as its parametric matrices having dimension l . The servers recommended a heterogeneous phase type distributed service time with representation $(\alpha, S)_m$ and $(\beta, T)_n$ respectively. The time required for the machine to build an item follows an exponential distribution with the rate η . The server will go on multiple vacations when there are no customers in the system or the stock runs out or there is no stock and customers in the system. Servers returning after vacation will restart service only when the stock level is positive and customers are waiting on the system. Otherwise, the servers will go back to vacation and this pattern will continue until the customer level and stock level are positive. The duration of the vacation time of both servers is exponentially distributed with parameters θ_1 and θ_2 . Once the stock level of goods reaches S , the production unit goes on vacation with an exponentially distributed rate θ . On return from the vacation, if the stock level of goods drops to s , the production unit will start production until the inventory level reaches S . The production unit will go back on another vacation of random duration having the same distribution rate if the stock level of goods is greater than s , even after returning from vacation.

2. Analysis

The notations and assumptions used in this model are $N(t)$ indicates the number of customers in the system at time t , $I(t)$ describes the level of stock at time t , $C(t)$ indicates the status of servers 1 and 2, $F(t)$ denotes the production status, $J_0(t)$ indicates the phase of the arrival process, $J_1(t)$ and $J_2(t)$ indicate the phases of the service processes of servers 1 and 2, e_1, e_2 and e_3 are column vectors of appropriate dimensions. The process $\{X(t) = (N(t), C(t), F(t), I(t), J_0(t), J_1(t), J_2(t)), t \geq 0\}$ is a continuous time Markov chain with state space

$$\Omega = l(0) \cup l(1) \cup l(2) \cup l(3),$$

$l(0) = (i, 0, 0, k, j_0) | 0 \leq k \leq S \cup (i, 0, 1, k, j_0) | 0 \leq k \leq S - 1; i \geq 0$
 $l(1) = (i, 1, 0, k, j_0, j_1) | 1 \leq k \leq S \cup (i, 1, 1, k, j_0, j_1) | 1 \leq k \leq S - 1; i \geq 1$
 $l(2) = (i, 2, 0, k, j_0, j_2) | 1 \leq k \leq S \cup (i, 2, 1, k, j_0, j_2) | 1 \leq k \leq S - 1; i \geq 1$
 $l(3) = (i, 3, 0, k, j_0, j_1, j_2) | 2 \leq k \leq S \cup (i, 3, 1, k, j_0, j_1, j_2) | 2 \leq k \leq S - 1; i \geq 2$
 where $1 \leq j_0 \leq l, 1 \leq j_1 \leq m, 1 \leq j_2 \leq n$.

Now the infinitesimal generator of the process is

$$Q = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & B_{21} & A_1 & A_0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & A_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

where A_0, A_1, A_2 are square matrices of order $8S - 4$.

Stability Analysis and Steady state probability vector

To prove the stability of the system, define a transition rate matrix $A = A_0 + A_1 + A_2$. A is irreducible so there exists a steady state probability vector $\pi = (\pi^{[c]}, c = 0, 1, 2, 3)$ which confirms $\pi A = 0$ and $\pi e = 1$. The necessary and sufficient condition required by the system to reach the stability condition is $\pi A_0 e < \pi A_2 e$ (refer Neuts [7]). The transition probability vector of Q is

$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots)$. The sub vectors of \mathbf{x} can be derived by using

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} * \mathbf{R}, \quad i = 3, 4, 5 \dots \quad (1)$$

where R is the minimal non-negative solution to the matrix quadratic equation $R^2 A_2 + R A_1 + A_0 = 0$. The vectors $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ and $\mathbf{x}_i, i \geq 3$ can be calculated using equations 1,2,3,4 and 5.

$$\mathbf{x}_0 B_{00} + \mathbf{x}_1 B_{10} = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{x}_0 B_{01} + \mathbf{x}_1 B_{11} + \mathbf{x}_2 B_{21} = 0 \quad (3)$$

$$\mathbf{x}_1 B_{12} + \mathbf{x}_2 [A_1 + R A_2] = 0 \quad (4)$$

and

$$\mathbf{x}_0 e_3 + \mathbf{x}_1 e_1 + \mathbf{x}_2 (I - R)^{-1} e_2 = 1 \quad (5)$$

3. Performance Measures

(i) Expected number of buyers in the system,

$$E_{EC} = \mathbf{x}_1 e_2 + \mathbf{x}_2 [2(I - R)^{-1} + R(I - R)^{-2}] e_1$$

(ii) Expected inventory level,

$$\begin{aligned}
 E_{EI} = & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^S \sum_{j_0=1}^l ky_{i,0,0,k,j_0} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{S-1} \sum_{j_0=1}^l ky_{i,0,1,k,j_0} \\
 & + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^S \sum_{j_0=1}^l \sum_{j_1=1}^m ky_{i,1,0,k,j_0,j_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{S-1} \sum_{j_0=1}^l \sum_{j_1=1}^m ky_{i,1,1,k,j_0,j_1} \\
 & + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^S \sum_{j_0=1}^l \sum_{j_2=1}^n ky_{i,2,0,k,j_0,j_2} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{S-1} \sum_{j_0=1}^l \sum_{j_2=1}^n ky_{i,2,1,k,j_0,j_2} \\
 & + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j_0=1}^l \sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^n \left[\sum_{k=1}^S ky_{i,3,0,k,j_0,j_1,j_2} + \sum_{k=2}^{S-1} ky_{i,3,1,k,j_0,j_1,j_2} \right]
 \end{aligned}$$

(iii) Expected number of departures after completing service,

$$\begin{aligned}
 E_{EDS} = & \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^S y_{i,1,0,k}(I_l \otimes S^0)e + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{S-1} y_{i,1,1,k}(I_l \otimes S^0)e + \\
 & + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^S y_{i,2,0,k}(I_l \otimes T^0)e + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{S-1} y_{i,2,1,k}(I_l \otimes T^0)e \\
 & + \sum_{i=2}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^S y_{i,3,0,k} + \sum_{k=2}^{S-1} y_{i,3,1,k} \right] (I_l \otimes (S^0 \oplus T^0))e
 \end{aligned}$$

(iv) Mean Production rate,

$$E_{EP} = \eta \left[\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{S-1} y_{i,0,1,k} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{S-1} [y_{i,1,1,k} + y_{i,2,1,k}] + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{S-1} y_{i,3,1,k} \right]$$

4. Cost Analysis

The expected total cost (T_{cost}) of the system per unit per unit time is given by $T_{cost} = c_1 E_{EC} + c_2 E_{EDS} + c_3 E_{EI} + c_4 E_{EP}$ where, c_1 = holding cost of customers per unit per unit time, c_2 = cost due to service per unit per unit time, c_3 = holding cost of inventory per unit per unit time, c_4 = cost of manufacturing per unit per unit time.

Different combinations of arrival processes are

1. Hyper- exponential of order 2 :

$$D_0 = \begin{bmatrix} -5.5 & 0 \\ 0 & -0.55 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 4.67855 & 0.82145 \\ 0.467855 & 0.082145 \end{bmatrix}$$

2. Erlang of order 2 :

$$D_0 = \begin{bmatrix} -4.6924 & 4.6924 \\ 0 & -4.6924 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4.6924 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Exponential : $D_0 = [-2.3462], D_1 = [2.3462]$

4. Map with negative correlation :

$$D_0 = \begin{bmatrix} -1.195 & 1.195 & 0 \\ 0 & -128 & 0 \\ 0 & 0 & -128 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0 & 126.5 \\ 126.5 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

5. Map with positive correlation :

$$D_0 = \begin{bmatrix} -1.195 & 1.195 & 0 \\ 0 & -128 & 0 \\ 0 & 0 & -128 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 126.5 & 0 & 1.5 \\ 1.5 & 0 & 126.5 \end{bmatrix}$$

Three different Phase -type service processes are

1. Erlang distribution :

$$\alpha = [1 \ 0], \beta = [1 \ 0], S = \begin{bmatrix} -5.1613 & 5.1613 \\ 0 & -5.1613 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} -5.0746 & 5.0746 \\ 0 & -5.0746 \end{bmatrix}$$

2. Hyper exponential :

$$\alpha = [0.8 \ 0.2], \beta = [0.7 \ 0.3], S = \begin{bmatrix} -4.2665 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} -7.437 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Exponential distribution :

$$\alpha = [1], \beta = [1], S = [-2.5806], T = [-2.5373]$$

Concluding Remarks

In the present scenario, it is highly recommended to study the impact of providing vacation to both production and servers. Further studies can be made by introducing the Markovian Production Process and Phase type distributed lead time.

REFERENCES

1. *Beena P., Jose K. P.*, A MAP/PH(1),PH(2) production inventory model with inventory dependent production rate and multiple servers. AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2261. № 030052. P. 1–12.
2. *Goyal S., Giri B. C.*, The production–inventory problem of a product with time varying demand, production and deterioration rates. European Journal of Operational Research. 2003. Vol. 147. № 3. P. 549–557.
3. *Jose K. P., Beena P.* On a retrial production inventory system with vacation and multiple servers. International Journal of Applied and Computational Mathematics. 2020. Vol. 6. P. 1–17.
4. *Krishnamoorthy A., Nair S. S., Narayanan V. C.*, Production inventory with service time and interruptions. International Journal of Systems Science. 2015. Vol. 46. № 10. P. 1800–1816.
5. *Levy Y., Yechiali U.*, An M/M/s queue with servers' vacations. INFOR: Information Systems and Operational Research. 1976. Vol. 2. № 14. P. 153–163.
6. *Manna A. K., Dey J. K., Mondal S. K.*, Imperfect production inventory model with production rate dependent defective rate and advertisement dependent demand. Computers & Industrial Engineering, Elsevier. 2017. Vol. 104. P. 9–22.
7. *Neuts M. F.*, Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models – an Algorithmic Approach. John Hopkins University Press.
8. *Roy A., Samanta G. P.* Inventory model with two rates of production for deteriorating items with permissible delay in payments. International Journal of Systems Science. 2011. Vol. 42. № 8. P. 1375–1386.
9. *Yue D., Qin Y.*, A production inventory system with service time and production vacations. Journal of Systems Science and Systems Engineering, Springer. 2019. Vol. 2. № 28. P. 168–180.

Beena. P — Ph.D, Assistant Professor & Head, Department of Mathematics, Sree Neelakanta Govt.Sanskrit College, Pattambi, Palakkad, Kerala, India.. E-mail: *beenapathari@gmail.com*

K. P. Jose — Ph.D, Associate Professor & Head, Post Graduate Department of Mathematics, St. Peter's College, Kolenchery -682311, Kerala, India.. E-mail: *kpjpsc@gmail.com*

A RETRIAL INVENTORY MODEL WITH N-POLICY

K. P. Jose,¹ N. J. Thresiamma²

¹*St. Peter's College, Kerala, India*

²*Govt. Polytechnic College, Kerala, India*

A retrial inventory system with an additional control policy for service pattern is presented in this article. An arriving customer who finds the server busy joins a buffer of finite size. The server only starts to offer service when N customers have accumulated in the buffer and it shuts down when the buffer is empty or the inventory drops to zero. Using the Lyapunov test function and the Neuts-Rao truncation approach, respectively, the stability of the system and steady state probability vectors are determined. Several performance measures and a suitable cost function were obtained.

Keywords: *retrial inventory, N-Policy, Neuts-Rao truncation method.*

1. Introduction

Many real-world day-to-day, as well as industrial situations, involve retrial queueing problems. The most common issue involved in the retrial queueing system is controlling the admission and service of the customers. Control policies for queueing systems are widely applicable in wireless communication networks, manufacturing systems, computer systems, production systems, etc.

Artalejo, Krishnamoorthy, and Lopez-Herrero [1] were the first attempt to study inventory policies with positive lead-time and retrial of customers. Krishnamoorthy and Jose [3] analyzed and compared three production inventory systems with positive service time and retrial of customers. Salini and Jose [2] analyzed a MAP/PH/1 production inventory model with retrial of customers and varying service rates.

The concept of N-policy was first introduced in 1963 by Yadin and Naor [7] in queueing literature to minimize the total operational cost in a cycle. Tao et.al [4] studied $M/M/1$ Retrial Queue with Working Vacation Interruption and Feedback under N-Policy. Thresiamma and Jose [5] introduced the N policy on production inventory system with positive service time. They observed that introducing the N policy to production inventory will reduce the total cost. In this paper, we introduce N-policy to a retrial inventory system with a finite buffer.

equation $R^2A_2 + RA_1 + A_0 = 0$; for which the spectral radius is less than 1. The vectors $x(0), x(1), \dots, x(n-1)$ are obtained by solving the equations

$$x(0)A_{1,0} + x(1)A_{2,1} = 0$$

$$x(i-1)A_0 + x(i)A_{1,i} + x(i+1)A_{2,i+1} = 0; (1 \leq i \leq n-2)$$

$$x(n-2)A_0 + x(n-1)(A_{1,n-1} + RA_2) = 0$$

subject to the normalizing condition $[\sum_{i=0}^{n-2} x(i) + x(n-1)(I-R)^{-1}]e = 1$

Partition \mathbf{x} according to the levels as

$x(i) = (x_{i,0,0,0}, x_{i,0,0,1}, \dots, x_{i,0,0,S}, x_{i,0,1,0}, x_{i,0,1,1}, \dots, x_{i,0,1,N-1}, \dots, x_{i,0,S,0}, x_{i,0,S,1}, \dots, x_{i,0,S,N-1}, x_{i,1,1,1}, x_{i,1,1,2}, \dots, x_{i,1,1,S}, x_{i,1,2,1}, x_{i,1,2,2}, \dots, x_{i,1,2,S}, \dots, x_{i,1,S,1}, x_{i,1,S,2}, \dots, x_{i,1,S,S})$; $x(i)$ contain $S(N+S+1)+1$ elements. Some important performance measures are

(i) Expected inventory Level

$$EI = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^S \sum_{k=0}^{N-1} jx_{i,0,j,k} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^S \sum_{k=1}^S jx_{i,1,j,k}$$

(ii) Expected Number of customers in the orbit

$$EC = \left(\sum_{i=1}^{\infty} ix(i) \right) e = \left(\sum_{i=1}^{n-1} ix(i) + x(n)(n(I-R)^{-1} + R(I-R)^{-2}) \right) e$$

(iii) Expected Number of customers in the buffer

$$EB = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^S kx_{i,0,0,k} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^S \sum_{k=1}^{N-1} kx_{i,0,j,k} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^S \sum_{k=1}^S kx_{i,1,j,k}$$

(iv) Expected number of departures after completing service

$$EDS = \mu \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^S \sum_{k=1}^S x_{i,1,j,k}$$

(v) Expected Number of external customers lost before entering orbit.

$$EL1 = (1-\gamma)\lambda \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_{i,0,0,S} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^S x_{i,1,j,S} \right)$$

(vi) Expected Number of customers lost due to retrials.

$$EL2 = \theta(1 - \delta) \left(\sum_{i=1}^{\infty} ix_{i,0,0,S} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^S ix_{i,1,j,S} \right)$$

(vii) Overall rate of retrials

$$ORR = \theta \left(\sum_{i=1}^{\infty} ix(i) \right) e$$

(viii) Successful rate of retrials

$$SRR = \theta \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{S-1} ix_{i,0,0,k} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^S \sum_{k=0}^{N-1} ix_{i,0,j,k} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^S \sum_{k=1}^{S-1} ix_{i,1,j,k} \right)$$

(ix) Expected Re order rate

$$ERO = \mu \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^S x_{i,1,s+1,k}$$

Cost Function: The Expected total Cost is defined as

$$ETC = (C + (S - s)C_1)ERO + C_2EI + C_3EC + C_4EB + C_5EL_1 + C_6EL_2 + (C_7 - C_8)EDS$$

where C = Fixed cost, C_1 = procurement cost/unit, C_2 = holding cost of inventory /unit/unit time, C_3 = holding cost of the customers in the orbit/unit/unit time, C_4 = holding cost of the customer in the buffer/unit/unit time, C_5 = cost due to loss of primary customers/unit/unit time, C_6 = cost due to loss of retrial customers/unit/unit time, C_7 = cost due to service/unit/unit time and C_8 = Revenue from service/unit/unit time.

Graphical Illustrations

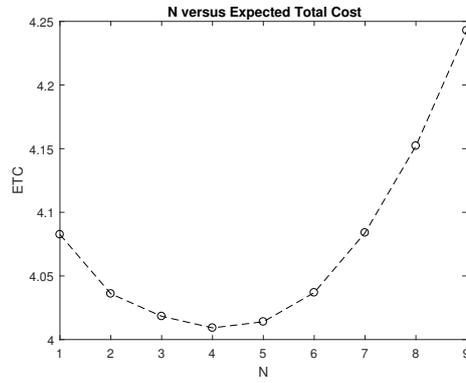


Figure 1. N versus ETC

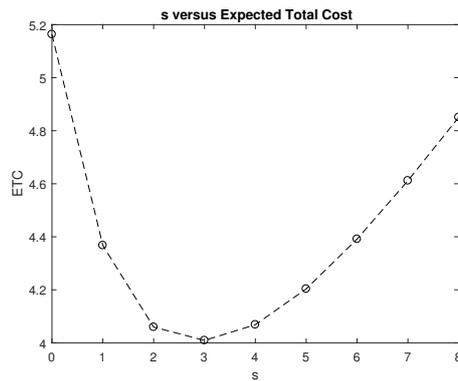


Figure 2. s versus ETC

$S = 20 : s = 3 : \lambda = 1.5 : \mu = 1.8 : \beta = 1.2 : \delta = 0.9 : \gamma = 0.9 : \theta = 0.6 : C = 10 : C_1 = 3 : C_2 = 1 : C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0.1 : C_7 = 2 : C_8 = 6$

4. Conclusion

In this paper, we studied the incorporation of the N -policy into a retrieval inventory model with positive service time. The figure depicts the variation in expected total cost with respect to N and s . It can be seen from the numerical experiments that implementing the N -policy minimizes the expected total cost and achieves the minimum cost within the specified val-

ues of the parameters. One can extend this model to a buffer of varying capacity and to a retrial production inventory system.

REFERENCES

1. *Jesus R. Artalejo, Achyutha Krishnamoorthy, Maria Jesus Lopez-Herrero*, Numerical analysis of(s, S) inventory systems with repeated attempts *Annals of Operations Research*. 2006. Vol. 141. P. 67–83.
2. *K.P Jose, Salini S. Nair*, A MAP/PH/1 Production Inventory Model with Varying Service Rates *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. Vol. 117. P. 373–381.
3. *Krishnamoorthy A, Jose K. P.*, Three production inventory systems with service, loss and retrial of customers *Internat. J. Inform. Management Sci*. 2015. Vol. 19, P. 367–389.
4. *Tao, Li and Zhang, Liyuan and Gao, Shan*, M/M/1 Retrial Queue with Working Vacation Interruption and Feedback under N-Policy, *Journal of Applied Mathematics*. 2014. P. 1–9.
5. *Thresiamma, N. J. and Jose, K. P.*, N-Policy for a Production Inventory System with Positive Service Time, *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications*. 2022. P. 52–66.
6. *Tweedie, Richard L.*, Sufficient conditions for regularity, recurrence and ergodicity of Markov processes *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1975. P. 125–136.
7. *Yadin. M, Naor. P*, Queueing Systems with a Removable Service Station *Operations Research*. 1963. Vol. 14., P. 393–405.

K.P. Jose — Ph.D., Associate Professor & Head, Post Graduate Dept. of Mathematics, Saint Peter’s College, Kolenchery-682311, Kerala, India. E-mail: kpjspc@gmail.com.

Thresiamma N.J — Assistant Professor of Mathematics, Govt. Polytechnic College, Muttom-685587, Kerala, India. E-mail: thresvimala@gmail.com.

AN EXPLICIT SOLUTION FOR AN INVENTORY MODEL WITH POSITIVE SERVICE TIME AND CATASTROPHES

Smija Skaria¹, Sajeev S Nair¹, Sandhya E²

¹*Government Engineering College, Thrissur, APJ Abdul Kalam Technological University, Kerala, India*

²*Jyothi Engineering College, Cheruthuruthy, Thrissur, Kerala, India, Research scholar, University of Calicut*

We consider a queuing system with a single server where inventory is served. The inter arrival times as well as inter service times both follow exponential distribution. Inventory is replenished according to (s, S) policy, in the sense that when the inventory level drops to s an order is placed, the order quantity being fixed as $Q = S - s$. Here in this model lead time is taken as zero. In addition to regular arrival of customers we also consider an arrival of destructive customers whose arrival completion results in the destruction of the entire inventory in the system. The inter arrival times of destructive customers are also assumed to follow exponential distribution. Stability of the above system is analyzed and steady state vector is calculated explicitly. **Keywords:** (s, S) inventory model, positive lead time, catastrophe to inventory, explicit solution.

Introduction

The pioneers in the study of queueing inventory models are Melikov and Molchano [1] and Sigman and Simchi- Levi [2]. In Sigman and Simchi- Levi customers are allowed to join even when there is no inventory in the system. They also discuss the case of non exponential lead time distribution. Later Berman and et.al [3] considered an inventory system where a processing time is required for serving the inventory. Here they considered deterministic service time and the model was discussed as a dynamic programming model. Berman and Kim [4] and Berman and Sapna [5] later discussed inventory queueing systems with exponential service time distribution and with arbitrary distribution.

There are several papers on inventory queueing models by Krishnamoorthy and his co-authors [6, 7, 8, 9]. They mainly used Matrix Analytic Methods to study these models. In most of the models service time for providing the inventoried item is assumed. Schwarz etal considered a queueing inventory model with Poisson arrivals and exponentially distributed service and

lead times. Queueing models with disaster and repair have wide applications in modeling many practical situations .It has been studied by many researchers in the past few decades (refer [17, 18, 21, 22, 14]).

1. Mathematical Model

The system under consideration is described as below. There is a single server counter where inventory is served to which regular customers arrive for service. The number of arrivals of regular customers by time t follows a Poisson process with parameter λ . Inventory is replenished according to (s, S) policy, replenishment being instantaneous. Service times follow exponential distribution with parameter μ . In addition to regular customers we also consider an arrival of destructive customer whose arrival completion results in the destruction of entire inventory in the system.

We denote by $N(t)$ the number of the customers in the system including the one being served (if any) and $L(t)$ be the inventory level. Then $\Omega = X(t) = (N(t), L(t))$ will be a Markov chain. The state space of this Markov chain can be described as $E = \{(i, j) : i \geq 0, s + 1 \leq j \leq S\}$. The above state space can be partitioned into levels $L(i)$ where $L(i) = \{(i, s + 1), (i, s + 2), \dots, (i, S); i \geq 0\}$. The Markov chain described above is a level independent quasi birth death process whose infinitesimal generator matrix is given by

$$T = \begin{bmatrix} B_0 & A_0 & 0 & 0 & - & - & - \\ A_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 & - & - \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix}.$$

Here all the matrices are of order $Q \times Q$ where $Q = S - s$. The different transitions in the Markov chain $\Omega = X(t) = (N(t), L(t))$ are given below.

i) Transitions due to arrival of regular customers

$$(i, j) \xrightarrow{\lambda} (i + 1, j); i \geq 0, s + 1 \leq j \leq S;$$

ii) Transitions due to service completion of customers

$$(i, j) \xrightarrow{\mu} (i - 1, j - 1); i > 0, s + 1 \leq j \leq S;$$

iii) Transitions due to arrival of destructive customers

$$(i, j) \xrightarrow{\eta} (i, Q); i \geq 0.$$

The diagonal entries of B_0 and A_1 are such that each row sum of T is zero.

2. Analysis of the Model

Stability condition

Define $A = A_0 + A_1 + A_2$ and $\pi = (\pi_{s+1}, \pi_{s+2}, \dots, \pi_S)$ be the steady state vector of A . We know the QBD process with generator matrix T is stable if and only if $\pi A_0 e < \pi A_2 e$ (see Neuts). The stability condition reduces to

$$\lambda[\pi_{s+1} + \pi_{s+2} + \dots + \pi_S] < \mu[\pi_{s+1} + \pi_{s+2} + \dots + \pi_S],$$

that is $\lambda < \mu$. Thus we have the following theorem for the stability of the system under study.

Theorem 1. The Markov chain Ω is stable if and only if $\lambda < \mu$.

Computation of steady state vector

We first consider a system identical to the above system except for service time is negligible. This system $\tilde{\Omega} = \tilde{X}(t) = \{L(t)\}$ will be a Markov chain where $L(t)$ is as defined for the original system. The state space of this Markov chain can be described as $\tilde{E} = \{s+1, s+2, \dots, S\}$. The infinitesimal generator matrix of the process is given by $\tilde{T} = -(\eta + \lambda)I_Q + \eta J_Q^{(1)} + \lambda J_Q^{(2)}$, where I_Q is the identity matrix of order Q , $J_Q^{(1)}$ is a square matrix of order Q with

$$J_Q^{(1)}(i, j) = \begin{cases} 1 & , j = Q - s \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

and $J_Q^{(2)}$ is a square matrix of order Q with

$$J_Q^{(2)}(i, j) = \begin{cases} 1 & , j = i - 1, i > 1 \\ 1 & , j = Q, i = 1 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}.$$

Let $x = (x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_S)$ be the steady state probability vector of the process $\tilde{\Omega}$. Then $x\tilde{T} = 0$ gives

$$-(\eta + \lambda)x_i + \lambda x_{i+1} = 0 \quad \text{for all } i \neq Q,$$

$$-(\eta + \lambda)x_S + \lambda x_{s+1} = 0,$$

$$\eta[x_{s+1} + x_{s+2} + \dots + x_{S-s+1} + x_{S-s+1} + \dots + x_S] + \lambda x_{Q+1} - \lambda x_Q = 0.$$

Let $\left(\frac{\eta + \lambda}{\lambda}\right) = \zeta$. Solving the above set of equations and using $\sum_{i=s+1}^S x_i = 1$

$$x_{s+1+i} = \zeta^i x_{s+1}, \quad i = 1, 2, \dots, S - 2s - 1,$$

$$x_{Q+i} = -\left(\frac{\eta}{\lambda}\right) \zeta^{i-1} + \zeta^{Q-s+i-1} x_{s+1}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

where $x_{s+1} = \left(\frac{\eta}{\lambda}\right) \frac{\zeta^s}{\zeta^Q - 1}$.

Let $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ be the steady state probability vector of the process Ω , where $\pi_i = (\pi(i, s+1), \pi(i, s+2), \dots, \pi(i, S))$; $i \geq 0$. Then π satisfies $\pi T = 0$ and $\pi e = 1$. We have the equations

$$\pi_0 B_0 + \pi_1 A_2 = 0, \quad \pi_i A_0 + \pi_{i+1} A_1 + \pi_{i+2} A_2 = 0; \quad i \geq 0 \quad (1)$$

If we assume $\pi(i, j) = \frac{\lambda}{\mu} \pi(i-1, j)$ for all j , each set of equations in (1) reduces to the steady state equations $x\tilde{T} = 0$. Also by adding all the equations in $\pi_0 B_0 + \pi_1 A_2 = 0$, we get $\pi(1) = \frac{\lambda}{\mu} \pi(0)$. Similarly by adding all the equations in $\pi_i A_0 + \pi_{i+1} A_1 + \pi_{i+2} A_2 = 0$ and using the previous set of equations we get $\pi(i) = \frac{\lambda}{\mu} \pi(i-1)$, where $\pi(i) = \sum_{j=s+1}^S \pi(0, j)$. Thus we have the following

$$\pi(0, s+1+i) = \zeta^i \pi(0, s+1), \quad i = 1, 2, \dots, S-2s-1,$$

$$\pi(0, Q+i) = -\left(\frac{\eta}{\lambda}\right) \zeta^{i-1} + \zeta^{Q-s+i-1} \pi(0, s+1), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

where

$$\pi(0, s+1) = \frac{\eta}{\lambda} \left(\frac{\zeta^s}{\zeta^Q - 1} \right) \pi(0)$$

and $\pi(0) = \frac{\mu - \lambda}{\mu}$

3. System Performance Measures

- 1) The expected number of customers in the system,

$$ENCS = \sum_{i=1}^{\infty} i \pi(i) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

- 2) The expected inventory level in the system,

$$EIL = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=s+1}^S j \pi(i, j)$$

- 3) The expected rate of ordering,

$$ERO = \sum_{i=1}^{\infty} \mu \pi(i, s+1) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=s+1}^S \eta \pi(i, j)$$

- 4) The probability that the server is busy,

$$PSB = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=s+1}^S \pi(i, j)$$

4. Numerical Illustration

Effect of regular arrival rate on the various performance measures

$$\mu = 9 \quad \eta = 5 \quad s = 8 \quad S = 21$$

λ	PSB	EIL	ENCS	ERO
3	0.3333	18.7445	0.4999	5.1668
3.2	0.3555	19.3618	0.5517	5.1975
3.4	0.3777	20.0269	0.60714	5.2311
3.6	0.3999	20.7451	0.6666	5.2677
3.8	0.4222	21.5224	0.7307	5.3077
4	0.4444	22.3657	0.7999	5.3511

Table 1

Effect of service rate on the various performance measures

$$\lambda = 3 \quad \eta = 5 \quad s = 8 \quad S = 21$$

μ	PSB	EIL	ENCS	ERO
7	0.4285	21.8686	0.7499	5.1514
7.2	0.4166	21.4223	0.7142	5.1525
7.4	0.4054	21.0166	0.6818	5.1538
7.6	0.3947	20.6462	0.6521	5.1551
7.8	0.3846	20.3066	0.6249	5.1566
8	0.3749	19.9942	0.5999	5.1582
8.2	0.3658	19.7058	0.5769	5.1598
8.4	0.3571	19.4388	0.5555	5.1615

Table 2

Effect of catastrophe rate on the various performance measures

$$\lambda = 3 \quad \mu = 9 \quad s = 8 \quad S = 21$$

η	PSB	EIL	ENCS	ERO
4	0.3333	18.6569	0.4999	4.2602
4.2	0.3333	18.6734	0.4999	4.4373
4.4	0.3333	18.6908	0.4999	4.6168
4.6	0.3333	18.7086	0.4999	4.7983
4.8	0.3333	18.7266	0.4999	4.9818
5	0.3333	18.7445	0.4999	5.1668
5.2	0.3333	18.7624	0.4999	5.3533
5.4	0.3333	18.7799	0.4999	5.5411

Table 3

Conclusion

In this paper we could derive an explicit expression for the steady state probability vector for an inventory queuing model with catastrophes to inventory. We wish to extend this paper by considering positive lead time as well which may have several applications in real life situations. We also intend to do the transient analysis of this model and its extensions.

REFERENCES

1. *Melikov A.Z., Molchano A.A.* Stock optimization in transport/storage systems // *Cybernetics*. 1992. № 27(3). P. 484–487.
2. *Sigman K, Simchi-Levi D* Light traffic heuristic for an M/G/1 queue with limited inventory. // *Ann Oler.Res.* 1992. № 40. P. 371–380.
3. *O.Berman, E.Kim, D.G Shimshack* Deterministic approximations for inventory management at service facilities // *IIE Transactions* 1993. Vol. 5. № 5. P. 98–104.
4. *O.Berman, E.Kim* ,Stochastic models for inventory management at service facilities, *Communication in Statistics.* // *Stochastic Models.* 1999. Vol. 15. № 4. P. 695–718.
5. *O.Berman, K.P Sapna* Inventory management at service facilities for systems with arbitrarily distributed service times, *Communications in Statistics* // *Stochastic Models.* 2000. Vol. 16. № 3-4. P. 343–360.
6. *TG Deepak, A.Krishnamoorthy, C.N Viswanath, K.Vineetha* Inventory with service time and transfer of customers and/inventory // *Annals of Operations Research.* 2018. Vol. 160. № 1. P. 191–213.
7. *A.Krishnamoorthy, TG Deepak, C.N Viswanath, K.Vineetha* Effective utilization of idle time in an (s,S)inventory with positive service time // *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis(JAMSA).* 2006. Art.Num. 69068. doi: 10.1155/JAMSA/2006/69068
8. *A.Krishnamoorthy, MEIslam, C.NViswanath* Retrial inventory with Batch Markovian Arrival and Positive Service Time // *Stochastic Modelling and Applications.* 2006. Vol. 9. № 2. P. 38–53.
9. *A.Krishnamoorthy, K.P Jose, C.N Viswanath* Numerical investigation of a PH/PH/1Inventory system with Positive service time and Shortage // *Neural, Parallel & Scientific Computations.* December 2008, Dynamic Publishers, USA. Vol. 16. № 4. P. 54–62.
10. *S. R. Chakravarthy* A catastrophic queueing model with delayed action // *Applied Mathematical Modeling.* 2017. Vol. 46. P. 631–649.
11. *F. Chang, T. Liu, J. Ke* On an unreliable-server retrial queue with customer feedback and impatience // *Applied Mathematical Modeling.* 2018. Vol. 55. P. 171–182.

12. *M. Jain, C. Shekhar, S. Shukla* N-policy for a repairable redundant machining system with controlled rates // *NRAIRO-Operations Research*. 2016. Vol. 50. P. 891–907.
13. *M. Jain* Priority queue with batch arrival, balking, threshold recovery, unreliable server and optimal service // *RAIRO-Operations Research*. 2017. Vol. 51. P. 417–432.
14. *B. K. Kumar, S. P. Madheswari* Transient analysis of an M/M/1 queue subject to catastrophes and server failures // *Stochastic Analysis and Applications*. 2005. Vol. 23. P. 329–340.

Smija Skaria — Research Scholar, Government Engineering College, Thrissur, APJ Abdul Kalam Technological University, Kerala, India. E-mail: *smijashano@gmail.com*

Sajeev S Nair — Associate Professor, Government Engineering College, Thrissur, APJ Abul Kalam Technological University, Kerala, India. E-mail: *sajeev@gectcr.ac.in*

Sandhya E — Assistant Professor, Jyothi Engineering College, Cheruthuruthy, Thrissur, Kerala, India, Research Scholar, University of Calicut. E-mail: *esandhya79@gmail.com*

AN EXPLICIT SOLUTION FOR AN INVENTORY MODEL WITH RETRIAL AND SERVER INTERRUPTIONS

Sandhya E¹, C. Sreenivasan², Smija Skaria³, Sajeev S Nair³

¹*Jyothi Engineering College, Cheruthuruthy, Thrissur, Kerala, India*
Research Scholar, University of Calicut

²*Government Victoria College, Palakkad, Kerala, India*

³*Government Engineering College, Thrissur, APJ Abdul Kalam Technological University, Kerala, India*

Customers enter into a single server queuing model in accordance with a Poisson process where inventory is served. The inter service time follows exponential distribution. Upon arrival, finding the server busy the customers enter into an orbit from where they retry for service at a constant retrial rate. While the server serves a customer the service can be interrupted, the inter occurrence time of interruption being exponentially distributed. Following a service interruption the service restarts according to an exponentially distributed time. Inventory is replenished according to (s, S) policy, replenishment being instantaneous. Explicit expression for the steady state distribution is calculated and several performance measures are evaluated explicitly. **Keywords:** (s, S) inventory model, positive lead time, retrial, server interruptions, explicit solution.

Introduction

The pioneers in the study of queuing inventory models are Melikov and Molchano [1] and Sigman and Simchi- Levi [2]. In Sigman and Simchi- Levi customers are allowed to join even when there is no inventory in the system. They also discuss the case of non exponential lead time distribution. Later Berman and et.al [3] considered an inventory system where a processing time is required for serving the inventory. Here they considered deterministic service time and the model was discussed as a dynamic programming model. Berman and Kim [4] and Berman and Sapna [5] later discussed inventory queuing systems with exponential service time distribution and with arbitrary distribution.

There are several papers on inventory queueing models by Krishnamoorthy and his co-authors [6, 7, 8, 9]. They mainly used Matrix Analytic Methods to study these models. In most of the models service time for providing the inventoried item is assumed. Schwarz etal considered a queuing inven-

tory model with Poisson arrivals and exponentially distributed service and lead times. They could obtain a product form solution for the system steady state. But they assumed that that no customers join the system when the inventory level is zero. For a detailed description of papers in inventory queuing models we refer to the papers [15, 16].

1. Mathematical Model

The system under consideration is described as below. We consider a single server queuing model where inventory is served to which customers arrive for service. The number of arrivals of by time t follows a Poisson process with parameter λ . Inventory is replenished according to (s, S) policy ,replenishment being instantaneous. Service times follow exponential distribution with parameter μ . Upon arrival, finding the server busy the customers enter into an orbit from where they retry for service at a constant retrial rate. The time between two successive retrials also follow exponential distribution with parameter θ . While the server serves a customer the service can be interrupted, the inter occurrence time of interruption being exponentially distributed with parameter δ_1 . Following a service interruption the service restarts after an exponentially distributed time with parameter δ_2 . For the model under study the following assumptions are made.

- i) No inventory is lost due to server interruption.
- ii) The customer being served when interruption occurs waits there until his service is completed.
- iii) No arrivals or retrials are entertained when the server is on interruption.
- iv) An order placed if any is cancelled while the server is on interruption.

We denote by $N(t)$ the number of the customers in the orbit, $I(t)$ the inventory level and $S(t)$ the server status at time t . Let

$S(t) = 0, 1, 2$ if the server is idle, busy and on interruption respectively.

Then $\Omega = X(t) = (N(t), S(t), I(t))$ will be a Markov chain .The state space of this Markov chain can be described as $E = \{(i, j, k) : i \geq 0; j = 0, 1, 2; s + 1 \leq k \leq S\}$. The above state space can be partitioned into levels $L(i)$ where $L(i) = \{(i, j, k); j = 0, 1, 2; k = s + 1, s + 2, \dots, S\}; i \geq 0$ in the lexicographic ordering. The Markov chain Ω described above is a level independent quasi birth death process whose infinitesimal generator matrix

is given by $T = \begin{bmatrix} B_0 & A_0 & 0 & 0 & - & - & - \\ A_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 & - & - \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix}$. Here all the matrices are

of order $3Q \times 3Q$ where $Q = S - s$. The different transitions in the Markov chain $\Omega = X(t) = (N(t), S(t), I(t))$ are given below.

- i) Transitions due to arrivals
 $(i, 0, k) \xrightarrow{\lambda} (i, 1, k), (i, 1, k) \xrightarrow{\lambda} (i + 1, 1, k); i \geq 0, s + 1 \leq k \leq S$
- ii) Transitions due to service completion of customers
 $(i, 1, k) \xrightarrow{\mu} (i - 1, 0, k - 1); i \geq 0, s + 2 \leq k \leq S$
 $(i, 1, s + 1) \xrightarrow{\mu} (i - 1, 0, S); i \geq 0$
- iii) Transitions due to retrials $(i, 0, k) \xrightarrow{\theta} (i - 1, 1, k); i \geq 1$
- iv) Transitions due to interruptions $(i, 1, k) \xrightarrow{\delta_1} (i, 2, k); i \geq 0$
- v) Transitions due to repairs $(i, 2, k) \xrightarrow{\delta_1} (i, 1, k); i \geq 0$

2. Analysis of the Model

Stability condition

Define $A = A_0 + A_1 + A_2$ and $\pi = (\pi(0, s + 1), \dots, \pi(0, S), \pi(1, s + 1), \dots, \pi(1, S), \pi(2, s + 1), \dots, \pi(2, S))$ be the steady state vector of A . We know the QBD process with generator matrix T is stable if and only if $\pi A_0 e <$

$\pi A_2 e$ (see Neuts). Since $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda I_Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ and $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \theta I_Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, the

stability condition reduces to

$$\lambda [\pi(1, s + 1) + \dots + \pi(1, S)] < \theta [\pi(0, s + 1) + \dots + \pi(0, S)],$$

that is $\lambda \left(\frac{\lambda + \theta}{\mu} \right) < \theta$. Thus we have the following theorem for the stability of the system under study.

Theorem 1. The Markov chain is stable if and only if $\frac{\lambda}{\theta} \left(\frac{\lambda + \theta}{\mu} \right) < 1$

Computation of steady state vector

We compute the steady state vector of the model explicitly. Let $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ be the steady state probability vector of the process Ω , where $\pi_i = (\pi(i, 0, s + 1), \dots, \pi(i, 0, S), \pi(i, 1, s + 1), \dots, \pi(i, 1, S), \pi(i, 2, s + 1), \dots, \pi(i, 2, S)); i \geq 0$. Then π satisfies $\pi T = 0$ and $\pi e = 1$. We have the equations $\pi_0 B_0 + \pi_1 A_2 = 0, \pi_i A_0 + \pi_{i+1} A_1 + \pi_{i+2} A_2 = 0; i \geq 0$.

We first consider a system identical to the above system expect for

no inventory is served. This system $\tilde{\Omega} = \tilde{X}(t) = (N(t), S(t))$ will be a Markov chain where $N(t)$ and $S(t)$ is as defined for the original system. The state space of this Markov chain can be described as $\tilde{E} = \{(i, 0), (i, 1), (i, 2)\}; i \geq 0$. The infinitesimal generator matrix

$$\text{of the process is given by } \tilde{T} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_0 & \tilde{A}_0 & 0 & 0 & - & - & - \\ \tilde{A}_2 & \tilde{A}_1 & \tilde{A}_0 & 0 & 0 & - & - \\ 0 & \tilde{A}_2 & \tilde{A}_1 & \tilde{A}_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_2 & \tilde{A}_1 & \tilde{A}_0 & 0 & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix}, \text{ where}$$

$$\tilde{B}_0 = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu + \delta_1) & \delta_1 \\ 0 & \delta_2 & -\delta_2 \end{bmatrix}, \tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} (\lambda + \theta) & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu + \delta_1) & \delta_1 \\ 0 & \delta_2 & -\delta_2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Let } x = (x_0, x_1, \dots), \text{ where}$$

$x_i = (x(i, 0), x(i, 1), x(i, 2))$ be the steady state probability vector of the process $\tilde{\Omega}$. The steady state equations are given by $x\tilde{T} = 0$. We know that $x_i = x_{i-1}R; i \geq 1$, where the matrix R satisfies $R^2A_2 + RA_1 + A_0 = 0$. Since the first and third rows of A_0 are zeros, so are that of R . From $R^2A_2 + RA_1 + A_0 = 0$, we obtain $\mu r_2 = (\lambda + \theta)r_1, \delta_1 r_2 = \delta_2 r_3, \lambda r_1 - (\lambda + \mu)r_2 + r_1 r_2 \theta + \lambda =$

$$0. \text{ Solving for } r_1, r_2, r_3 \text{ we get } R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda(\lambda + \theta) & \lambda(\lambda + \theta)\delta_1 \\ \theta & \theta\mu & \theta\mu\delta_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Now}$$

$x_0 = (x(0, 0), x(0, 1), x(0, 2)) = \left(1, \frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda\delta_1}{\mu\delta_2}\right) x(0, 0)$ and from the normalizing condition $x_0(I - R)^{-1}e = 1$, where I is the identity matrix of order

$$3 \text{ and } e \text{ is column vector of ones we get } x(0, 0) = \frac{1 - \frac{\lambda(\lambda + \theta)}{\delta_1\lambda}}{\frac{\theta\mu}{\delta_2\mu}}. \text{ Now}$$

the steady state equations of Ω are given by $\pi T = 0$. If we assume $\pi(i, j, k) = \frac{1}{Q}x(i, j); s + 1 \leq k \leq S$, each of the Q equations in the set $\pi T = 0$ reduces to that of $x\tilde{T} = 0$. The intuition behind this is that since the replenishment is instantaneous there is an equal probability for each inventory level to be visited. It is verified that the above values satisfy $\pi T = 0$.

3. System Performance Measures

- 1) The probability that the server is busy $PSB = \left[\frac{\lambda\theta}{\theta\mu - \lambda^2 - \lambda\theta} \right] x(0,0)$
- 2) The probability that the server is on interruption $PSI = \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} \right) PSB$
- 3) The probability that the server is idle $PIDL = \left[1 + \frac{\lambda^2}{\theta\mu - \lambda^2 - \lambda\theta} \right] x(0,0)$
- 4) The expected inventory level in the system $EIL = \frac{S + s + 1}{2}$
- 5) The expected number of customers in the orbit
 $ENCO = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^2 \sum_{k=s+1}^S i\pi(i, j, k)$
- 6) The expected rate of ordering, $ERO = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\pi(i, s + 1)$

4. Numerical Illustration

Table 1

Effect of regular arrival rate on the various performance measures

$$\mu = 9 \quad \theta = 5 \quad \delta_1 = 2 \quad \delta_2 = 3 \quad s = 5 \quad S = 11$$

λ	PSB	PINT	PIDL	EIL	ENCO	ERO
3	0.4545	0.1818	0.3637	8.5	0.8701	0.1928
3.2	0.479	0.1916	0.3294	8.5	1.1112	0.2143
3.4	0.5029	0.2011	0.296	8.5	1.4354	0.2364
3.6	0.5274	0.2109	0.2617	8.5	1.9167	0.2603
3.8	0.5562	0.2201	0.2237	8.5	2.6055	0.2837
4	0.5603	0.2241	0.2156	8.5	3.0369	0.2943

Table 2

Effect of retrial rate on the various performance measures

$$\lambda = 3 \quad \mu = 9 \quad \delta_1 = 2 \quad \delta_2 = 3 \quad s = 5 \quad S = 11$$

θ	PSB	PINT	PIDL	EIL	ENCO	ERO
4	0.4545	0.1818	0.3637	8.5	1.1272	0.241
4.2	0.4545	0.1818	0.3637	8.5	1.0575	0.229
4.4	0.4545	0.1818	0.3637	8.5	1.0031	0.2191
4.6	0.4545	0.1818	0.3637	8.5	0.953	0.2096
4.8	0.4545	0.1818	0.3637	8.5	0.909	0.2008
5	0.4545	0.1818	0.3637	8.5	0.8701	0.1928

Table 3

Effect of interruption rate on the various performance measures

$$\lambda = 3 \quad \mu = 9 \quad \theta = 5 \quad \delta_2 = 3 \quad s = 5 \quad S = 11$$

δ_1	PSB	PINT	PIDL	EIL	ENCO	ERO
1	0.3999	0.0999	0.5002	8.5	0.8429	0.2076
1.2	0.4117	0.1176	0.4707	8.5	0.8487	0.2045
1.4	0.423	0.1346	0.4424	8.5	0.8543	0.2014
1.6	0.4339	0.1509	0.4152	8.5	0.8598	0.1985
1.8	0.4444	0.1666	0.389	8.5	0.865	0.1956
2	0.4545	0.1818	0.3637	8.5	0.8701	0.1928

Conclusion

In this paper we could derive an explicit expression for the steady state probability vector for an inventory queuing model with retrial and server interruptions. We wish to extend this paper by considering positive lead time as well which may have several applications in real life situations. We also intend to do the transient analysis of this model and its extensions.

REFERENCES

1. *Melikov A.Z., Molchano A.A.* Stock optimization in transport/storage systems // *Cybernetics*. 1992. № 27(3). P. 484–487.
2. *Sigman K, Simchi-Levi D* Light traffic heuristic for an M/G/1 queue with limited inventory. // *Ann Oler.Res.* 1992. № 40. P. 371–380.
3. *O.Berman, E.Kim, D.G Shimshack* Deterministic approximations for inventory management at service facilities // *IIE Transactions*. 1993. Vol. 5. № 5. P. 98–104.

4. *O.Berman, E.Kim* Stochastic models for inventory management at service facilities, *Communication in Statistics // Stochastic Models*. 1999. Vol. 15. № 4. P. 695–718.
5. *O.Berman, K.P Sapna* Inventory management at service facilities for systems with arbitrarily distributed service times, *Communications in Statistics // Stochastic Models*. 2000. Vol. 16. № 3–4. P. 343–360.
6. *TG Deepak, A.Krishnamoorthy, C.N Viswanath, K.Vineetha* Inventory with service time and transfer of customers and/inventory // *Annals of Operations Research*. 2018. Vol. 160. № 1. P. 191–213.
7. *A.Krishnamoorthy, TG Deepak, C.N Viswanath, K.Vineetha* Effective utilization of idle time in an (s,S)inventory with positive service time // *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis(JAMSA)*. 2006. Vol. 2006. Art.Num. 69068. doi: 10.1155/JAMSA/2006/69068
8. *A.Krishnamoorthy, MEIslam, C.NViswanath* Retrial inventory with Batch Markovian Arrival and Positive Service Time // *Stochastic Modelling and Applications*. 2006. Vol. 9. № 2. P. 38–53.
9. *A.Krishnamoorthy, K.P Jose, C.N Viswanath* Numerical investigation of a PH/PH/1Inventory system with Positive service time and Shortage // *Neural, Parallel & Scientific Computations*. December 2008, Dynamic Publishers, USA. Vol. 16. № 4. P. 54–62.
10. *A. Krishnamoorthy, D. Shajin, V. Narayanan* Inventory with positive service time: A survey // *Advanced Trends in Queueing Theory*. Mathematics and Statistics Ed. by V. Anisimov and N. Limnios. Vol. 2.
11. *A. Krishnamoorthy, R. Manikandan, B. Lakshmy* Revisit to queueing-inventory system with positive service time // *Ann. Oper. Res.* 2015. Vol. 233. P. 221–236.

Sandhya E — Assistant Professor, Jyothi Engineering College, Cheruthuruthy, Thrissur, Kerala, India, Research Scholar, University of Calicut. E-mail: *esandhya79@gmail.com*

C. Sreenivasan — Associate Professor, Government Victoria College, Palakkad, Kerala, India . E-mail: *sreenikoonathara@gmail.com*

Smija Skaria — Research Scholar, Government Engineering College, Thrissur, APJ Abdul Kalam Technological University, Kerala, India . E-mail: *smijashano@gmail.com*

Sajeev S Nair — Associate Professor, Government Engineering College, Thrissur, APJ Abul Kalam Technological University, Kerala, India. E-mail: *sajeev@gectcr.ac.in*

ANALYSIS OF MULTI-SERVER PRIORITY QUEUEING SYSTEM WITH SERVERS RESERVATION AND DISASTERS

A. Dudin^{1,2}, S. Dudin¹, O. Dudina¹

¹*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

²*RUDN University, Moscow, Russian Federation*

A multi-server queueing system with an infinite buffer and two types of customers is considered. The flow of customers is described by two Markovian arrival processes (*MAPs*). Type-1 (or *HPT*) customers have the preemptive priority over type-2 (or *LPT*) customers. To avoid frequent interruption of service of *LPT* customers, reservation of a certain number of servers for *HPT* customers is assumed. *LPT* customers, who are not accepted for service upon arrival or service of which is interrupted, may decide to go to the buffer of an infinite capacity or abandon the system. An *HPT* customer who meets all servers busy by *HPT* customers is lost. The *MAP* flow of disasters arrives. An arrival of a disaster causes instantaneous departure of all customers from the buffer. The behavior of the system is described by the multi-dimensional continuous time Markov chain. The form of the generator of this chain is highlighted and the way for computation of the stationary distribution of this chain is outlined. **Keywords:** *priority queue, servers reservation, disasters.*

Introduction

Multi-server queueing systems with heterogeneous customers of two types and preemptive priority of one of the types often arise as the adequate mathematical model of various real-world systems. E.g., in cognitive radio systems (see [1]) the primary (licensed) *HPT* users have the preemptive priority over cognitive *LPT* users who can obtain service opportunistically when some part of resource of the system is not used. Since arrival of an *HPT* user may interrupt service of an *LPT* user, it is desirable to reduce the frequency of such interruptions. One of the known opportunities to reach it is to reserve some amount of servers exclusively for service of *HPT* users. An *LPT* user can be rejected when not all servers are busy at the

The work of the first author has been supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program

moment of his/her arrival, but the number of busy servers exceeds some fixed threshold.

Such schemes of interruption avoidance are well known in the literature, see, e.g., [2]. The overwhelming majority of the existing literature assumes that arrival flows are defined by the stationary Poisson processes what is not realistic, e.g., in modern telecommunication networks. As more realistic model of such flows, the *MAP* flow is recommended, see for definition and relevant research [3, 4, 5, 6]. Therefore, results for such a type of systems with the *MAP* flows of users already exist, see, e.g., [7, 8, 9].

In this paper, we briefly show how the result of [9] can be extended to more complicated system subject to so-called disasters. Here, we mean that a disaster (see, e.g., [10, 11]) is the item, arrival of which implies instantaneous departure of all LPT users from the buffer. Servers are assumed to be not affected by disasters.

1. Mathematical model

We consider an N -server queueing model providing service to two types of customers. Type- k customers arrive according to the Markovian arrival flow MAP_k , $k = 1, 2$. The MAP_k is defined by the underlying process $\nu_t^{(k)}$, $t \geq 0$, which is an irreducible continuous-time Markov chain with the state space $\{0, 1, \dots, W_k\}$. Arrivals occur only at the epochs of jumps in the underlying process $\nu_t^{(k)}$, $t \geq 0$. The intensities of transitions of the process $\nu_t^{(k)}$, $t \geq 0$, that are accompanied (not accompanied) by the arrival of a type- k customer are defined by the square matrix $D_1^{(k)}$ ($D_0^{(k)}$) of size $\bar{W}_k = W_k + 1$, $k = 1, 2$. The matrix $D^{(k)} = D_0^{(k)} + D_1^{(k)}$ is an infinitesimal generator of the process $\nu_t^{(k)}$. The invariant probability vector $\chi^{(k)}$ of this process satisfies the system of equations $\chi^{(k)} D^{(k)} = \mathbf{0}$, $\chi^{(k)} \mathbf{e} = 1$. Here and throughout this paper, $\mathbf{0}$ is a zero row vector, and \mathbf{e} denotes a unit column vector of an appropriate size. The average intensity λ_k (fundamental rate) of the MAP_k is defined by $\lambda_k = \chi^{(k)} D_1^{(k)} \mathbf{e}$.

The service times of type k customers have an exponential distribution with the parameter μ_k , $k = 1, 2$.

We assume that there is no buffer for type-1 customers and an infinite buffer for type-2 customers. Type-1 customers have the preemptive priority over type-2 customers. If there is a free server during a type-1 customer arrival epoch, this customer starts service immediately. If all servers are busy during a type-1 customer arrival epoch and there are type-2 customers in service, service of one type-2 customer is interrupted and type-1 customer occupies the corresponding server. The type-2 customer whose service is

interrupted moves to the buffer with probability p and departs with the complimentary probability $1 - p$. If all servers are busy by type-1 customers during the type-1 customer arrival epoch, this customer is dropped (lost).

To reduce the probability of interruption of service, we assume reservation of servers defined as follows. A threshold is fixed. We denote it as M , $0 < M \leq N$. A type-2 customer is accepted to the system if the number of busy servers at the arrival moment is less than M . Otherwise, this customer moves to the buffer with probability q , and abandons the system with the complimentary probability.

The described queueing model exactly corresponds to the model analysed in [9]. Here, we suggest additionally, that the flow of disasters arrive to the system. This flow is described by the *MAP* defined by the underlying process η_t with the state space $\{1, \dots, z\}$ and matrices Z_0 and Z_1 . Transitions of the process η_t with intensities given by the entries of the matrix Z_1 lead to emptying the buffer.

The goal of this paper is the analysis of the system with disasters based on the results of the analysis of the system without disasters.

2. The process describing behavior of the system

Let $i_t, i_t \geq 0$, be the number of type-2 customers in the buffer, $n_t, n_t = \overline{0, N}$, be the number of busy servers, $l_t, l_t = \overline{0, \min\{n_t, M\}}$, be the number of type-2 customers in service, $\nu_t^{(k)}, \nu_t^{(k)} = \overline{0, W_k}$, be the state of the directing process of the *MAP* $_k$, $k = 1, 2$, $\eta_t, \eta_t = \overline{1, z}$, be the state of the directing process of the *MAP* flow of disasters at the epoch $t, t \geq 0$.

The behavior of the system under study in [9] was described by the regular irreducible continuous-time Markov chain

$$\xi_t = \{i_t, n_t, l_t, \nu_t^{(1)}, \nu_t^{(2)}\}, t \geq 0.$$

The behavior of the system considered in our paper is described by the regular irreducible continuous-time Markov chain

$$\xi_t = \{i_t, n_t, l_t, \nu_t^{(1)}, \nu_t^{(2)}, \eta_t\}, t \geq 0.$$

The generator Q of the Markov chain ξ_t was obtained in [9] in the block form

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & O & O & \dots \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} & Q_{1,2} & O & \dots \\ O & Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1)$$

where the blocks $(Q_{i,j})_{n,n'}$, $n, n' = \overline{0, N}$, $\max\{0, i-1\} \leq j \leq i+1$, contain intensities of transition of the chain ξ_t from the states having the value (i, n) of the first two components to the states having the value (j, n') of these components listed in the lexicographic order. The size of the blocks $Q_{i,j}$ is equal to $K\bar{W}$ where $K = (M+1)(N+1-M/2)$ and $\bar{W} = \bar{W}_1\bar{W}_2$. The explicit form of these blocks is presented in [9] if the parameter α , which characterizes the impatience of customers in the buffer that is not suggested in the model under study here, is set to be equal to 0.

When $\alpha = 0$, then $Q_{i,i} = Q^0$, $Q_{i,i+1} = Q^+$, $Q_{i,i-1} = Q^-$, for $i \geq 1$ and the Markov chain with the generator Q is the level independent Quasi-Birth-and-Death process which can be easily analysed via the use of well-known results by M. Neuts, see, e.g., [5], [12]. Therefore, the stationary distribution vectors of this chain has the matrix geometric form.

Let now \mathbf{Q} be the generator of the Markov chain ξ_t .

3. Relation of generators Q and \mathbf{Q}

Theorem 1. The generator \mathbf{Q} of the Markov chain ξ_t has the following form

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{0,0} & \mathbf{Q}_{0,1} & O & O & O & \dots \\ \mathbf{Q}_{1,0} & \mathbf{Q}_{1,1} & \mathbf{Q}_{1,2} & O & O & \dots \\ \mathbf{Q}_{2,0} & \mathbf{Q}_{2,1} & \mathbf{Q}_{2,2} & \mathbf{Q}_{2,3} & O & \dots \\ \mathbf{Q}_{3,0} & O & \mathbf{Q}_{3,2} & \mathbf{Q}_{3,3} & \mathbf{Q}_{3,4} & \dots \\ \mathbf{Q}_{4,0} & O & O & \mathbf{Q}_{4,3} & \mathbf{Q}_{4,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2)$$

where the blocks $(\mathbf{Q}_{i,j})_{n,n'}$, $n, n' = \overline{0, N}$, $j = 0$ and $\max\{0, i-1\} \leq j \leq i+1$, contain intensities of transition of the chain ξ_t from the states having the value (i, n) of the first two components to the states having the value (j, n') of these components listed in the lexicographic order.

The relations between the blocks $Q_{i,j}$ and $\mathbf{Q}_{i,j}$ are given by the formulas:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{i,i+1} &= Q_{i,i+1} \otimes I_z, \quad i \geq 0, \\ \mathbf{Q}_{0,0} &= Q_{0,0} \oplus (Z_0 + Z_1), \quad \mathbf{Q}_{i,i} = Q_{i,i} \oplus Z_0, \quad i \geq 1, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mathbf{Q}_{1,0} = Q_{1,0} \otimes I_z + \left(O_{K \times (K_1 - K)} \mid I_K \right) \otimes Z_1,$$

$$\mathbf{Q}_{i,i-1} = Q_{i,i-1} \otimes I_z, \quad i \geq 2,$$

$$\mathbf{Q}_{i,0} = \left(O_{K \times (K_1 - K)} \mid I_K \right) \otimes Z_1, \quad i \geq 2.$$

where $O_{a \times b}$ denotes a zero matrix of size $a \times b$, I_a denotes an identity matrix of size a , \otimes and \oplus are symbols of Kronecker product and sum of matrices, see [13].

Proof evidently follows from the fact that the Markov chain ξ_t is obtained from the Markov chain ξ_t by supplementing it by the additional component η_t that is independent of the rest of the components and properties of Kronecker product and sum of matrices.

The principal difference between the generators having structures (1) and (2) is that (1) is a three-block diagonal matrix while matrix (2) has additional non-zero blocks $Q_{i,0}$, $i \geq 0$. The Markov chains with the structure of type (2) of the generator are investigated in much less extent than Markov chains with the structure of type (1) of the generator. However, the algorithms for computation of the stationary distribution of discrete-time Markov chains with the structure of type (2) of the one-step transition probability matrices exist. The algorithm based on the use of the property of analyticity of the vector generating function in the unit disc was elaborated in [10]. In [11], more numerically stable algorithm based on the idea similar to M. Neuts approach via the use of the matrix S was elaborated and its advantage is illustrated. Using the notion of the jump Markov chain, analogs of algorithms from [10, 11] can be obtained and used for computation of the stationary distribution of the Markov chain ξ_t and key performance measures of the considered system.

4. Conclusion

In this paper, possibility of analysis of a multi-server queueing system with preemptive priority of one of the two types of customers and reservation of servers for service of high priority customers in presence of the flow of disasters based on the results of analysis of analogous system without disasters is demonstrated. Results can be extended to the cases when the arrival of a disaster causes instantaneous removal of all customers from service (with instantaneous or non-instantaneous recovering of servers) or complete emptying the system.

REFERENCES

1. *Akyildiz I.F., Lee W.Y., Vuran M.C., Mohanty S.* Next generation dynamic spectrum access cognitive radio wireless networks: A survey // *Computer Networks*. 2006. Vol. 50(13). P. 2127–2159.
2. *Zhu X.A., Shen L.A., Yum T.-S.* Analysis of cognitive radio spectrum access with optimal channel reservation // *IEEE Communications Letters*. 2007. Vol. 11(4). P. 304–306.
3. *Lucantoni, D.* New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // *Communication in Statistics-Stochastic Models*. 1991. Vol. 7. P. 1–46.

4. *Chakravarthy S. R.* The batch Markovian arrival process: a review and future work // Advances in probability theory and stochastic processes. 2001. Vol. 1. P. 21–49.
5. *Dudin A.N., Klimenok V.I., Vishnevsky V.M.* The theory of queueing systems with correlated flows. Cham: Springer Nature, 2020. 410 p.
6. *Vishnevskii V.M., Dudin A.N.* Queueing systems with correlated arrival flows and their applications to modeling telecommunication networks // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78. P. 1361–1403.
7. *Dudin A.N., Lee M.H., Dudina O.S., Lee S.K.* Analysis of priority retrial queue with many types of customers and servers reservation as a model of cognitive radio system // IEEE Transactions on Communications. 2016. Vol. 65(1). P. 186–199.
8. *Lee S., Dudin A., Dudina O., Kim C.* Analysis of a priority queueing system with the enhanced fairness of servers scheduling // Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing. 2022. P. 1–13. doi: 10.1007/s12652-022-03903-z
9. *Sun B., Lee M.H., Dudin S.A., Dudin A.N.* MAP+MAP/M₂/N/∞ Queueing System with Absolute Priority and Reservation of Servers // Mathematical Problems in Engineering. 2014. ID 813150. P. 1–15.
10. *Dudin A.N., Nishimura S.* A BMAP/SM/1 queueing system with Markovian arrival input of disasters // Journal of Applied Probability. 1999, Vol. 36. № 3. P. 868–881.
11. *Dudin A., Semenova O.* A stable algorithm for stationary distribution calculation for a BMAP/SM/1 queueing system with Markovian arrival input of disasters // Journal of Applied Probability. 2004. Vol. 41(2). P. 547–556.
12. *Neuts M.F.* Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach. Courier Corporation, 1994.
13. *Graham A.* Kronecker products and matrix calculus with applications. Chichester: Ellis Horwood, 1981.

Dudin Alexander — doctor of science, professor, head of Research Laboratory of Applied Probabilistic Analysis, Department of Applied Mathematics and Computer Science, BSU. E-mail: *dudin-alexander@mail.ru*

Dudin Sergey — candidate of science, leading scientific researcher at Research Laboratory of Applied Probabilistic Analysis, Department of Applied Mathematics and Computer Science, BSU. E-mail: *dudins@bsu.by*

Dudina Olga — candidate of science, leading scientific researcher at Research Laboratory of Applied Probabilistic Analysis, Department of Applied Mathematics and Computer Science, BSU. E-mail: *dudina@bsu.by*

NUMERICAL ANALYSIS OF SHORTEST QUEUE PROBLEM FOR TIME-SCALE QUEUEING SYSTEM WITH A SMALL PARAMETER

S.A.Vasilyev, M.A.Bouatta, S.K.Kanzitdinov, G.O.Tsareva

*Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University),
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, Russia*

In this paper we apply numerical methods for analysis of the time-scale queueing systems (TSQS) evolution dynamics under the the assumption that the number of single-services tends to infinity. We suppose that TSQS implements a service discipline so that for each incoming request is provided a random selection a server from random selected m -set servers that has the s -th shortest queue size. The evolution dynamics TSQS can be describe using the function that can be found by solving a system of differential equations infinite degree. We formulate the singularly perturbed Cauchy problem for this system of differential equations with a small parameter. We use the truncation procedure for this singularly perturbed Cauchy problem and formulate the finite order system of differential equations. We apply a high-order non-uniform grid scheme for numerical solving of the truncated Cauchy problem. We use different sets of small parameters for time-scaling processes analysis for TSQS. The grid scheme demonstrates good convergence of solutions of the singularly perturbed Cauchy problem when a small parameter tend to zero. The results of the numerical simulation show that this TSQS can hold with a high incoming flow of requests. **Keywords:** *shortest queue problem, countable Markov chains, time-scale network analysis, singular perturbed infinite systems of differential equations, stability analysis for infinite systems of differential equations with a small parameter, numerical analysis of the Cauchy problem, layer-adapted piecewise uniform Shishkin-type meshes.*

Introduction

The research of time-scale queueing systems (TSQS) with a larger number of servers is extremely important because of the development of 5G/6G networks and Internet of Things (IoT) sets the problem of using not only analytical methods but also numerical ones [1], [4]. The modern research of

Supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program.

TSQS with complex routing discipline focused on the problems of stability analysis of infinite servers TSQS [2], [3].

In this paper we use Dobrushin approach for TSQS [5]. We apply numerical methods for analysis of the time-scale evolution of TSQS shortest queue dynamics with $n \rightarrow \infty$ single-services, each with its own exponentially distributed service times of mean $\bar{t} = 1/\mu$, where μ is a service intensity. We use a Poisson incoming flow of requests with the intensity $n\lambda$. TSQS implements the service discipline so that each input request provides a randomly selection from any m -set servers such server that has the s -th shortest (or equivalently, the $(m-s)$ -th longest) queue length, where $1 \leq s \leq m$. The evolution of the shortest queue dynamics TSQS can be describe using the function $u_k^{s,m}(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots; s, m = 1, 2, \dots; 1 \leq s \leq m$). The function $u_k^{s,m}(t)$ can be found by solving a system of differential equations infinite degree which can be obtained using the Markov chains approach. We formulate the singularly perturbed Cauchy problem for this system of differential equations with a small parameter. We use the truncation procedure for this singularly perturbed Cauchy problem and formulate the finite order system of differential equations. We apply a high-order non-uniform grid scheme of the Shishkin-type for numerical solving of the truncated Cauchy problem. We use different sets of small parameters for time-scaling processes analysis for TSQS. The grid scheme demonstrates good convergence of solutions of the singularly perturbed Cauchy problem when a small parameter $\varepsilon \rightarrow 0$. The results of the numerical simulation show that this TSQS can hold with a high incoming flow of requests.

1. Time-scale queueing systems model with a small parameter

We consider TSQS with $n \rightarrow \infty$ infinite-buffer FCFS single-services, each with its own exponentially distributed service times of mean $\bar{t} = 1/\mu$. We suppose that there is Poisson arrivals of requests with rate $\rho = n\lambda$, where $0 < \lambda < \mu$.

Assuming that we can select m servers for each request upon it arrival randomly and immediately and we can choose one server among the selected m servers that has the s -th shortest ($(m-s)$ -th longest) queue length in the choice moment, where $1 \leq s \leq m$. If there happen to be more than one server with the s -th shortest queue size, we select one of them randomly. The request is sent to the chosen server after this server selection procedure immediately.

Let $\mathbf{u}^{s,m} = \{u_k^{s,m}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ be shares of the servers that have the queues lengths with not less than k , where $1 \geq u_0^{s,m}(t) \geq u_1^{s,m}(t) \geq \dots \geq u_k^{s,m}(t) \geq \dots$, $u_k^{s,m}(t) = \zeta_k^{s,m}/n$ ($k \in \mathcal{Z}_+$, $\mathcal{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, $s, m \in \mathcal{N}$, $\mathcal{N} =$

$\{1, 2, \dots\}$), $0 \leq \zeta_k^{s,m} \leq n$ are non-negative integers and $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{s,m}(t) < \infty$ for any $t \geq 0$.

As was shown [5], the elements of the sequences $\{u_k^{s,m}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ becomes deterministic in the infinite limit $n \rightarrow \infty$ and the evolution of this large-scale system is described by solutions of an infinite system of differential equations

$$\begin{cases} \dot{u}_k^{s,m}(t) = \mu(u_{k+1}^{s,m}(t) - u_k^{s,m}(t)) + \\ + \lambda(h_{s,m}(u_{k-1}^{s,m}(t)) - h_{s,m}(u_k^{s,m}(t))), k \geq 1, t \geq 0, \\ u_0^{s,m}(t) = 1, u_k^{s,m}(0) = g_k \geq 0, k \geq 1, \end{cases} \quad (1)$$

where $\mathbf{g} = \{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ ($g_0 = 1, g_k \geq g_{k+1}$) is non-increasing non-negative sequences and the function $h_{s,m}(u_k^{s,m}(t))$ has the form for $1 \leq s \leq m$ ($s, m \in \mathcal{N}$) $h_{s,m}(u_k^{s,m}(t)) = \sum_{l=0}^{s-1} C_m^l (1 - u_k^{s,m}(t))^l (u_k^{s,m}(t))^{m-l}$.

When we study scale invariance in time (i.e. scales transformation of time intervals change), we can analyze the transformation properties of solutions of differential equations. Scaling transformations are similarity transformations and form a group of scale transformations.

We can investigate scaling properties of solutions for Cauchy problem of infinite system of differential equations with small parameter such form

$$\begin{cases} \varepsilon^{b_k} \dot{u}_k^{s,m}(t) = \mu(u_{k+1}^{s,m}(t) - u_k^{s,m}(t)) + \\ + \lambda(h_{s,m}(u_{k-1}^{s,m}(t)) - h_{s,m}(u_k^{s,m}(t))), \\ k \geq 1, t \geq 0, \\ u_0^{s,m}(t) = 1, u_k^{s,m}(0) = g_k \geq 0, k \geq 1, g_k \geq g_{k+1}, \end{cases} \quad (2)$$

where $\varepsilon > 0$ is a small parameter and $\mathbf{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($b_k \geq 0$) is a numerical sequence of real numbers. Thus, the system (1) is the singular perturbation system and we can describe processes of rapid changes of the solutions of this system with scaling transformations this form $\bar{t}_k = \varepsilon^{-b_k} t$.

This Cauchy problem (2) can be transformed into a Tikhonov problem, if we assume $b_k = 0, k = 1, 2, \dots, l, b_k > 0, k = l + 1, l + 2, \dots$ ($l \geq 2$).

2. Truncation time-scale network model and numerical analysis

We can write Tikhonov problem for the truncation system of differential equations (2)

$$\begin{cases} \dot{w}_k^{s,m}(t) = \varepsilon^{-b_k} [\mu(w_{k+1}^{s,m}(t) - w_k^{s,m}(t)) + \\ + \lambda(h_{s,m}(w_{k-1}^{s,m}(t)) - h_{s,m}(w_k^{s,m}(t))), 1 \leq k \leq n, 0 \leq t \leq T, \\ w_0^{s,m}(t) = 1, w_{n+1}^{s,m}(t) = 0, w_k^{s,m}(0) = g_k \geq 0, \\ 1 \leq k \leq n, g_k \geq g_{k+1}, \end{cases} \quad (3)$$

where $b_k = 0, k = 1, 2, \dots, l, b_k > 0, k = l + 1, l + 2, \dots, n$ ($2 \leq l \leq n$) and the parameter T is the right border of the time interval for Tikhonov problem.

We apply a piecewise-uniform grid $\bar{\Omega}_t$ ($0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$) for numerical analysis of this Tikhonov problem (4) $\bar{\Omega}_t = (t_i | t_i = i\tau_1; i = 0, 1, 2, \dots, K; t_i = t_K + (i - K)\tau_2; i = K + 1, \dots, N), \tau_1 = \delta/K, \tau_2 = (T - \delta)/(N - K), \delta = \bar{C}\varepsilon \ln(\varepsilon^{-1})$), where a parameter \bar{C} is determined by the coefficients of singularly perturbed system of differential equations. Thus, this piecewise-uniform grid $\bar{\Omega}_t$ has K small steps τ_1 and $(N - K)$ big steps τ_2 on the segment $[0, T]$.

We can consider a finite-difference approximation of the system (2) in the following form $h_i = t_i - t_{i-1}, w_{k+1,i}^{s,m} = w_{k+1}^{s,m}(t_i)$, where a vector notation for this numerical scheme has the form: $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{F}(\mathbf{w}_i, t_i), i = 0, 1, \dots, N, 0 \leq t_i \leq T, \mathbf{w}_0^{s,m} = \mathbf{g}, \mathbf{w}_i = \{w_{k,i}^{s,m}\}_{k=1}^n, \mathbf{F}(\mathbf{w}_i, t_i) = \{F_k(\mathbf{w}_i, t_i)\}_{k=1}^n, F_k(\mathbf{w}_i, t_i) = w_{k,i}^{s,m} + h_i \varepsilon^{-b_k} [\mu (w_{k+1,i}^{s,m} - w_{k,i}^{s,m}) + \lambda (h_{s,m}(w_{k-1,i}^{s,m}) - h_{s,m}(w_{k,i}^{s,m}))], 1 \leq k \leq n, \mathbf{w}_0^{s,m} = \{w_{k,0}^{s,m}\}_{k=1}^n, w_{0,i}^{s,m} = 1, w_{n+1,i}^{s,m} = 0, \mathbf{g} = \{g_k\}_{k=1}^n (g_k \geq g_{k+1})$.

We use the the fourth-order Runge-Kutta method to calculate a numerical solution for this problem and use the following formulas: $\mathbf{q}_i^1 = \mathbf{F}(\mathbf{w}_i, t_i), \mathbf{q}_i^2 = \mathbf{F}(\mathbf{w}_i + \frac{h_i}{2}\mathbf{q}_i^1, t_i + h_i/2), \mathbf{q}_i^3 = \mathbf{F}(\mathbf{w}_i + \frac{h_i}{2}\mathbf{q}_i^2, t_i + h_i/2), \mathbf{q}_i^4 = \mathbf{F}(\mathbf{w}_i + h_i\mathbf{q}_i^3, t_i + h_i), \mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i + \frac{h_i}{6}(\mathbf{q}_i^1 + 2\mathbf{q}_i^2 + 2\mathbf{q}_i^3 + \mathbf{q}_i^4)$, where $\mathbf{q}_i^j \in R^n$ ($i = 0, N, j = 1, 4$) are vectors.

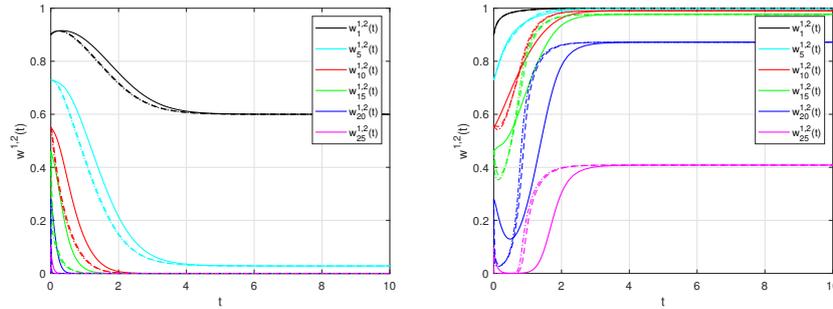


Figure 1. The evolution of the function $w_k^{1,2}$, $\lambda = 4$ for the left graph, $\lambda = 6$ for the right graph, $\mu = 5, \varepsilon = 0.1$ solid line, $\varepsilon = 0.01$ long dash line, $\varepsilon = 0.001$ short dash line

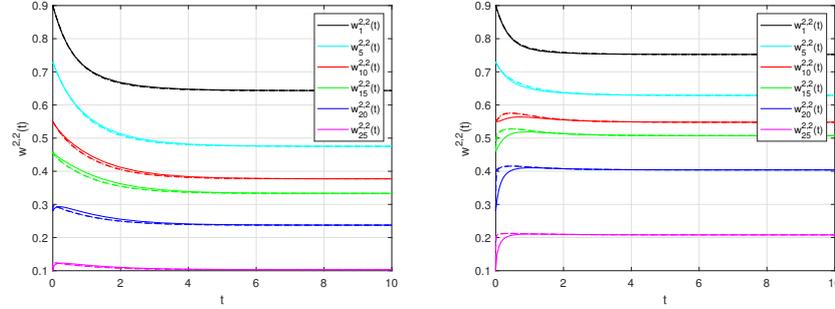


Figure 2. The evolution of the function $w_k^{2,2}$, $\lambda = 4$ for the left graph, $\lambda = 6$ for the right graph, $\mu = 5$, $\varepsilon = 0.1$ solid line, $\varepsilon = 0.01$ long dash line, $\varepsilon = 0.001$ short dash line

The numerical analysis of the solutions $w_k^{s,m}(t)$ ($k = 1, 5, 10, 15, 20, 25$; $m = 2$; $s = 1, 2$) is presented in the figures (see Fig. 1-2). For numerical simulation we used the following parameters: the arrival request rates are $\lambda = 4$ (the low incoming mode) and $\lambda = 6$ (the high incoming mode), the service intensity is $\mu = 5$, the dimension of the system of the differential equations is $n = 25$, the number of the differential equations without a small parameters is $l = 9$ (i.e. $1 \leq k \leq 9$), the number of the differential equations with a small parameters is $n - l = 16$ (i.e. $10 \leq k \leq 25$), the degrees of a small parameter are $b_k = 0, 1 \leq k \leq 9$ and $b_k = 1/k, 10 \leq k \leq 25$, the number of steps of the grid is $N = 10^4$, the permissible error is $\delta = 10^{-5}$. The values of the initial conditions are presented as the set of the numbers $z_0 = 1, z_k = (28 - 9k)/30, k = \overline{1, 25}$. The values of the parameters s, m, ε are presented in the captions under the figures (see Fig. 1-2). In the Fig. 1 we can see the results of the numerical stimulation of the solution $w_k^{1,2}$. It is shown that TSQS has an unstable service mode under overload conditions. There are the left and inner transition layers. The transitions become more sharper when $\varepsilon \rightarrow 0$. In the Fig. 2 we can see the results of the numerical stimulation of the solution $w_k^{2,2}$. It is shown that TSQS has a stable service mode under overload conditions. Thus, an increase in the parameter s leads to the stably service. There are only the left transition layers. The left transitions become more sharper when $\varepsilon \rightarrow 0$.

3. Conclusion

In this paper we show how numerical methods may be applied for analysis of the evolution of TSQS dynamics. The results of the numerical simulation show that this TSQS can hold with a high incoming flow of requests

and there are time-scale effects in the behavior of the solutions $w_k^{s,m}(t)$. It is demonstrate the appearance of boundary layers solution of the equation with a small parameter. We suppose that it is possible to formulate an optimal control problem for such TSQS and successfully solve it. Our ability to solve such problems is very important because it will save technical and financial resources for 5G/6G networks implementation.

This paper has been supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program (recipient S.A. Vasilyev, mathematical model development, simulation model development, numerical analysis).

REFERENCES

1. *van der Boor M., Borst S., van Leeuwen J.* Optimal hyper-scalable load balancing with a strict queue limit // Performance Evaluation. 2021. Vol. 149–150. P. 102217. doi: 10.1016/j.peva.2021.102217
2. *Fiems D., Mandjes M., Patch B.* Networks of infinite-server queues with multiplicative transitions // Performance Evaluation. 2018. Vol. 123–124. P. 35–49. doi: 10.1016/j.peva.2018.03.003
3. *Jansen H.M., Mandjes M., De Turck K., Wittevrongel S.* Diffusion limits for networks of Markov-modulated infinite-server queues // Performance Evaluation. 2019. Vol. 135. P. 102039. doi: 10.1016/j.peva.2019.102039
4. *Stefan Rank S., Hans-Peter Schwefel H.-P.* Transient analysis of RED queues: A quantitative analysis of buffer-occupancy fluctuations and relevant time-scales // Performance Evaluation. 2006. Vol. 63. P. 725–742. doi: 10.1016/j.peva.2005.08.001
5. *Vvedenskaya N.D.* A large queueing system with message transmission along several routes // Problemy Peredachi Informatsii. 1998. Vol. 34. № 2, P. 98–108.

Vasilyev Sergey A. — Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associated professor, Department of Applied Probability and Informatics. E-mail: *vasilyev-sa@rudn.ru*

Bouatta Mohamed A. — PhD student, Department of Applied Probability and Informatics. E-mail: *adelbouatta.rudn@mail.ru*

Kanzitdinov Shakhmurad K. — PhD student, Department of Applied Probability and Informatics. E-mail: *shahkanzitdinov@mail.ru*

Tsareva Galina O. — PhD student, Department of Applied Probability and Informatics. E-mail: *gotsareva@gmail.com*

PEAK LOAD IN INFINITE-SERVER QUEUING SYSTEM WITH DETERMINISTIC SERVICE TIME

G. Tsitsiashvili

*Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok,
Russian Federation*

There is a wide range of such queuing systems in which the service time is deterministic. In this paper, the dependence of the parameter of the Poisson distribution of the number of customers in the system with the deterministic service time and infinite number of servers in the presence of a peak in the intensity of the input flow is investigated. This dependence is investigated analytically and numerically and it is shown how reducing the service time smooths out the peak in the number of customers in the system. **Keywords:** *multi-server queuing system, deterministic service time, smoothing of pike load.*

Introduction

Stationary multi-server queuing systems are usually investigated under the assumption of no queue, i.e. with an infinite number of servers. Such models appear in computer program testing systems [1] – [3]. They are closely adjacent to systems with failures or to systems with unreliable servers. When analysing such systems, it is assumed that there is some functional relationship between the intensity of the input flow and the service.

However, systems with no queue (an infinite number of servers) and non-stationary Poisson input flow can also be investigated with a deterministic service time. Of particular interest in the analysis of such systems are peak load modes and ways of smoothing them. In this paper, the study is based on the relationship between the intensity of the Poisson input flow and the parameter of the Poisson distribution of the number of customers in the system at a given time [4]. Non-stationary queuing systems are widely used in modelling of computing systems (see, for example, [5]). But algorithms of their analysis and numerical investigation are very complicated even in simple versions.

However, the abundance of practical applications: production processes and communications, trade processes and consumer services. raises the question of the development of these models, despite their large analytical

and computational complexity. In this regard, it should be noted such important practical research programs as "Smart city" Digital economy etc., which require the development of analysis and calculation methods for non-stationary queuing systems [6] – [8].

In this paper, such service systems are presented as continuous networks with deterministic service times and with no queues at the nodes. A special mathematical technique is being developed for them, combining both probabilistic calculations and elements of graph theory.

1. Queuing systems with an infinite number of servers and deterministic service time

The mathematical model of such a service system can serve as a non-stationary Poisson flow with intensity $\lambda(t)$, $t \geq 0$, of the moments of users arrivals, stationary time a of service and hence the user's stay in the system, as well as the number of users $n(t)$ in the system at the time $t \geq 0$. Queuing systems with an infinite number of servers have been repeatedly investigated from both theoretical and applied points of view. However, all these models were built under the assumption of stationary input flow and service process.

This paper focuses on a model with non-stationary input flow. Therefore, the paper [1] can be considered the closest to this model, in which the intensity of Poisson input flow and the intensity of the service process are non-stationary and connected by some relation. As already noted, this is a special assumption about the input flow and service intensities. However, the mathematical technique of studying such a model is not quite suitable for systems with deterministic service time. In turn, such systems are often found in applications, for example, in models of sport complexes or cinemas, in which the user immediately goes to service having the character of a certain session with a deterministic duration.

At the first stage, we assume that the intensity of the Poisson flow $\lambda(t)$, $0 \leq t \leq T$ is a continuous function of time t . However, for convenience of calculations, it should be assumed that for $t < 0$ and for $t > T$, the function $\lambda(t) = 0$. In this case, the number of users $n(t)$ has a Poisson distribution with the parameter $\Lambda(t) = \int_{t-\alpha}^t \lambda(\tau) d\tau$. As an example, customers may be considered as visitors to a swimming pool in regime of free swimming mode.

The mathematical model of the continuous service system proposed in this section is based on observations of a really functioning sports complex. The transition in this complex to a continuous service system significantly

improved the quality of service, smoothed the load on the system in real time and allowed users to not depend on the changeable transport situation in the city. This model may be used for the "Smart city" program.

The elementary technique of the theory of random sets is more suitable here, in which the number of points of a Poisson flow on a certain segment is determined by the integral of the intensity of the flow on this segment [?] – [?]. Indeed, let the deterministic customer service time be a , and the intensity of the Poisson input flow is a continuously differentiable function $\lambda(t) \geq 0, t \geq 0$. Then the random number of customers in the system at time t coincides with the random number of points of Poisson intensity flow $\lambda(t)$ on the segment $[\max(0, t-a), t]$ and therefore has a Poisson distribution with the parameter

$$\Lambda(t) = \int_{\max(0, t-a)}^t \lambda(u) du.$$

2. Peak loads in a system with infinite number of servers and deterministic service time

Suppose that the intensity of the Poisson input flow $\lambda(t) \geq 0, t \geq 0$, at the point t_* has a single extremum-maximum and the equality $\lambda(t_*) = \lambda^*$ is satisfied. Our task is to derive the point t^* , at which function $\Lambda(t^*) = \Lambda^*$ has a maximum.

To do this, first write out the value of the continuous function $\Lambda(t) t \geq 0$:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du \quad 0 \leq t \leq a, \quad \Lambda(t) = \int_{t-a}^t \lambda(u) du \quad a \leq t. \quad (1)$$

To use the maximum condition of function $\Lambda(t)$, we calculate from formula (1) its derivative for $0 \leq t \neq a$, which is a continuously differentiable function

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = \lambda(t) \quad 0 \leq t < a, \quad \frac{d\Lambda(t)}{dt} = \lambda(t) - \lambda(t-a) \quad a < t. \quad (2)$$

(1) Consider the case $0 < t_* < a, \lambda(0) > \lambda(a)$, when, due to formulas (1), (2), the following relations are fulfilled

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} > 0 \quad 0 \leq t < a, \quad \frac{d\Lambda(t)}{dt} < 0 \quad a < t. \quad (3)$$

Then it follows from formula (3) that function $\Lambda(t)$ has a single extremum-maximum and

$$\Lambda^* = \int_0^a \lambda(u) du, \quad t^* = a.$$

This statement is not difficult to obtain using formulas (1), (2) and piecewise continuity of function $\frac{d\Lambda(t)}{dt}$.

(2) In turn, for $0 < t_* < a$, $\lambda(0) < \lambda(a)$, function $\Lambda(t)$ has a single extremum-maximum at some point t^* , $t_* \leq t^* \leq t_* + a$. This statement may be easily obtained because function $\frac{d\Lambda}{dt}$, $t > a$, is continuously differentiable and the following inequalities are true

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} > 0 \quad 0 \leq t < a, \quad \frac{d\Lambda(t)}{dt} \Big|_{t=a+0} > 0, \quad \frac{d\Lambda(t)}{dt} \Big|_{t=t_*+a} < 0.$$

(3) Now let's move on to the case $a < t_* < \infty$, then function $\Lambda(t)$ has a single extremum-maximum at some point t^* , $t_* < t^* < t_* + a$. This statement may be easily obtained because function $\frac{d\Lambda}{dt}$, $t > a$, is continuously differentiable and the following inequalities are true

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} > 0 \quad 0 \leq t < a, \quad \frac{d\Lambda(t)}{dt} > 0 \quad a < t \leq t_*, \quad \frac{d\Lambda(t)}{dt} \Big|_{t=t_*+a} < 0.$$

3. Smoothing of peak load by parameter a decreasing

If one of the conditions (1), (2), (3) is met the following inequality is true

$$\Lambda^* = \int_{t^*-a}^{t^*} \lambda(u) du \leq a\lambda^*. \quad (4)$$

Thus, reducing the parameter a allows to decrease the value Λ^* .

In turn, the lower estimate for the value Λ^* may be obtained, for example, under the following condition

$$\int_0^a \lambda(u) du \geq \lambda^* \Rightarrow \Lambda^* \geq \Lambda(a) \geq \lambda^*. \quad (5)$$

This relation can also be obtained by replacing the inequality (5) with the condition $\lambda(t) \geq \lambda_*$, $0 \leq t \leq a$, $a\lambda_* \geq \lambda^*$. Figure 1 shows that as a increases, the maximum Λ^* of function $\Lambda(t)$ also increases, and the point t^* , at which function $\Lambda(t)$ reaches a maximum, shifts to the right relative to the point t_* .

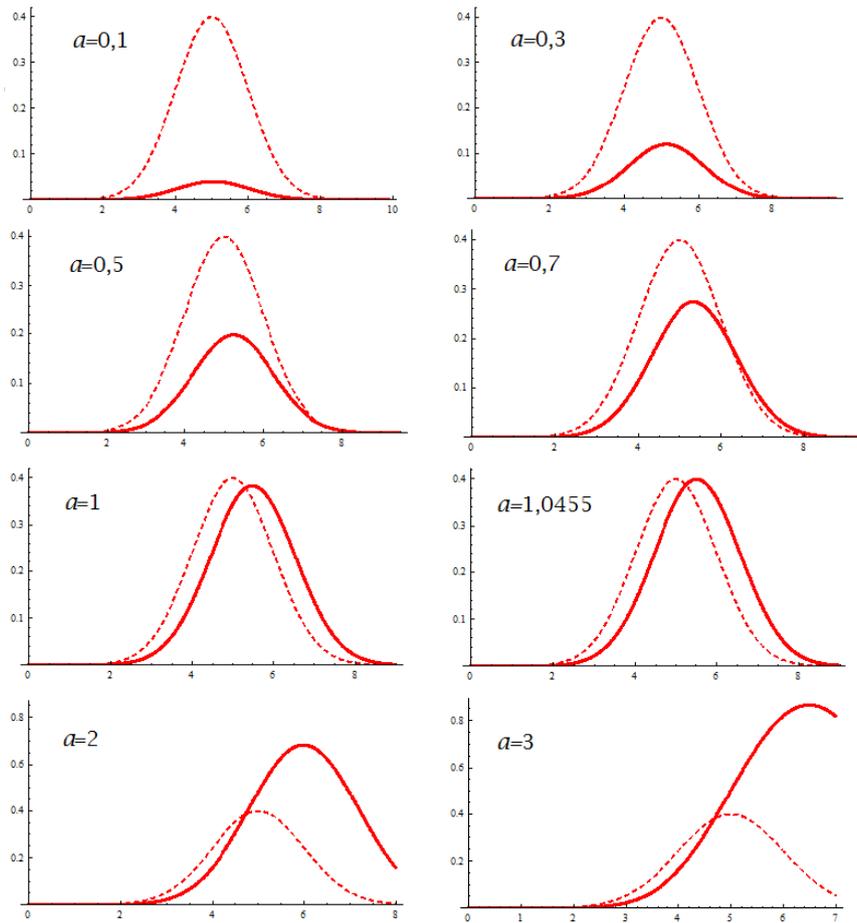


Figure 1. Graphs of functions $\lambda(t)$ (dotted line), $\Lambda(t)$ (solid line) for $T = 10$, $b = 5$, $c = 1$

4. Discussion

Analytical analysis showed that function $\Lambda(t)$ depends on the parameter a significantly. If a decreases then function $\Lambda(t)$ is smoothed out. Otherwise, the magnitude Λ^* of the peak increases, and the peak itself shifts to the left. This means that parameter a , which characterizes the deterministic service time, significantly affects the number of customers in the system.

Conclusion

The properties of the queuing model with the infinite number of servers and deterministic service time and computational experiments shows dependence of the system behaviour on deterministic service time. This dependence makes it possible to control the system in the peak load mode, determined by the intensity of the input Poisson flow, and smooth out the peak load.

REFERENCES

1. *Minamino Y. et al.* Efficiency evaluation of software faults correction based on queuing simulation // *Mathematics*. 2022. Vol. 10. № 9. Art.Num. 1438.
2. *Pham H.* Software reliability. Singapore: Springer-Verlag, 2000.
3. *Yamada S.* Software reliability modelling, fundamentals and applications. Tokyo/Heidelberg: Springer-Verlag, 2014.
4. *Tsitsiashvili G.* Non-stationary Poisson model of a continuously functioning queuing system // *Journal of physics: conference series (IF)*. 2020. Vol. 1. Art.Num. 1680.
5. *Gorcev A.* Adaptive control of task flows in a computer system // *Automatics and vych. technic*. 1982. Vol. 6, P. 53–60. (In Russian).
6. *Greenfield A.* Against the Smart City. London: Verso, 2013.
7. *Boyle D. et al* Urban Sensor Data Streams: // *IEEE Internet Computing*. 2013. Vol. 17. № 6. P. 12–20.
8. *Namiot D., Schneps-Schnappe M.* On domestic standards for a Smart city // *International Journal of Open Information Technologies*. 2016. Vol. 4. № 7. P. 32–36.

Tsitsiashvili Gurami — Doctor of physical and mathematical sciences, professor Institute for Applied Mathematics, far Eastern Branch of RAS, main researcher, research group of probability methods and systems analysis. E-mail: guram@iam.dvo.ru

SENSITIVITY OF k -OUT-OF- n SYSTEM'S STEADY-STATE CHARACTERISTICS

N. Ivanova^{1,2}

¹ Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

² V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia

This article deals with sensitivity analysis using analytical methods, as well as a numerical study. On the example of a repairable k -out-of- n system, which is one of the most common ways to improve reliability, it is shown that under rare failures condition and a fixed average repair time, the steady-state characteristics of the system are insensitive to the shape of the repair time distribution as well as its coefficient of variation. **Keywords:** *system reliability, k -out-of- n system, steady-state probabilities, sensitivity analysis, rare failures.*

Introduction

The study of sensitivity is an important issue in both theoretical and practical problems. The theory of sensitivity (or invariance) of stochastic systems arose in the middle of the last century. Many authors have dealt with this problem, for example, B. Sevastyanov, I. Kovalenko, B. Gnedenko, A. Soloviev. An overview of some earliest works can be found in [1].

Nowadays, the problem of sensitivity has been investigated to various mathematical models which prove conclusions of the previous works. In the current paper, a k -out-of- n system is considered as a new example which, in addition to theoretical aspects, requires research in the field of sensitivity. k -out-of- n systems have been a popular object of research for many years. These systems are a simple example of redundancy, which is considered as a method of increasing reliability.

The paper is organized as follows. In the next section, some notations, assumptions as well as problem setting will be done. Section 2 deals with analytical results for steady state system reliability characteristics with the help of markovization method. Section 3 provides sensitivity analysis of a 3-out-of-6 system, which is proved by numerical example in Section 4. The paper ends with the conclusion.

Supported by RFBR according to the research project No. 20-01-00575A and the RUDN University Strategic Academic Leadership Program, as well as funded by RSF according to the research project No. 22-49-02023

1. Notations and Assumptions

Consider a repairable k -out-of- n ($k < n$) system. A repairable system is one that is repaired not only after a component failure (partial repair), but also after the failure of the entire system (full repair). Suppose that there is one unit for repair procedure. Introduce some assumptions about the shape of components life and repair time distributions. Suppose that

- the lifetimes of system components are exponentially distributed with parameter α and mean time $a = \alpha^{-1}$;
- the repair times for any failed components (partial repair) are independent identically distributed (i.i.d.) random variables (r.v.'s) B_i ($i = 1, 2, \dots$) with common cumulative distribution function (c.d.f.) $B(x) = \mathbf{P}\{B_i \leq x\}$ which is absolute continuous with its probability density function (p.d.f.) $b(x)$;
- the repair times for failed system (full repair) are also i.i.d. r.v.'s F_i ($i = 1, 2, \dots$) with corresponding c.d.f. $F(x) = \mathbf{P}\{F_i \leq x\}$, its p.d.f. is $f(x)$;
- the instantaneous repairs are impossible, their mean times are finite, $B(0) = F(0) = 0$, $b = \int_0^{\infty} (1 - B(x))dx < \infty$, $f = \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx < \infty$;
- corresponding Laplace transforms (LTs) of p.d.f.'s $b(t)$ and $f(t)$ are $\tilde{b}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}b(t)dt$, $\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$,
- given elapsed repair time x the conditional intensities of partial and full repair are, respectively, $\beta(x) = \frac{b(x)}{1-B(x)}$, $\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$.

Denote the system state space as $E = \{0, 1, \dots, k\}$, where 0 – all n elements operate; $j - j$ elements out of n ($j = \overline{1, k-1}$) have failed, one of them is being repaired, and others ($n - k$) operate; and $k - k$ elements have failed which means the system failure and its restoration.

To perform reliability analysis, introduce a random process $J = \{J(t), t \geq 0\}$ on a space set E as a description of the system behavior, $J(t) = j$, $j \in E$, if the system is in state j at time t . Suppose that $J(0) = 0$. The paper is devoted to time-dependent system state probabilities (t.d.s.s.p.'s) $\pi_j(t)$ and steady-state probabilities (s.s.p.'s) π_j calculation,

$$\pi_j(t) = \mathbf{P}\{J(t) = j\}, \quad \pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{J(t) = j\}, \quad j \in E,$$

as well as properties of their asymptotic sensitivity to the shapes of system components' repair time distribution.

2. Markovization Method and Steady-State Probabilities

Present analytical results of the s.s.p.'s calculation of a k -out-of- n system with the help of the method of supplementary variables (one of the

markovization methods) [2]. In the case under consideration, as a supplementary variable, the elapsed repair time of the failed component is used. Thus, denote by

$$Z(t) = \{J(t), X(t)\}_{t \geq 0}$$

a two-dimensional Markov process with extended states' space $\bar{E} = \{0, (i, x) \mid i = \overline{1, k}\}$. In this notation $J(t)$ is defined as above, and $X(t)$ means the elapsed repair time of the failed component or the whole system. Figure 1 represents the states' transition graph of the process $Z(t)$. Here $\lambda_i = (n - i)\alpha$, ($i = \overline{0, k-1}$) is the system failure intensity, when i

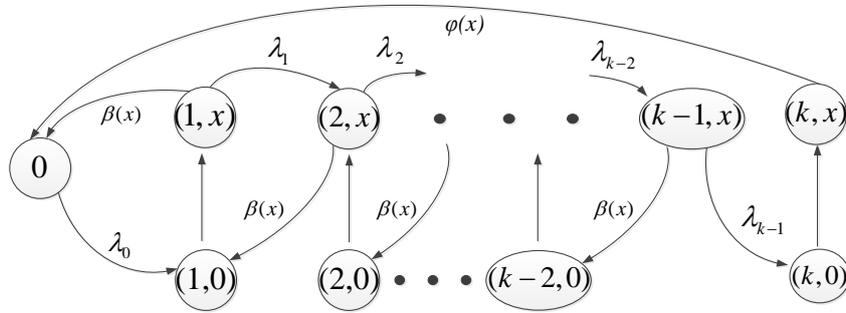


Figure 1. Transition graph of the process $Z(t)$

components out of n fail.

Denote by

- $\pi_0(t) = \mathbf{P}\{J(t) = 0\}$ – the probability of a working state of all system components at time t ;
- $\pi_i(t; x) = \mathbf{P}\{J(t) = i; x < X(t) \leq x + dx\}$ – the joint probability that at time t there are i failed components, among which one is repaired with the elapsed repair time in the interval x and $x + dx$, $i = \overline{1, k}$.

From the graph 1 as well as by comparing the process $Z(t)$ in the closed interval t and $t + \delta$, the Kolmogorov forward system of partial differential equations for the t.d.s.p.'s calculation can be obtained [3]

The process $Z(t)$ is a Harris one, so according to the Harris Markov processes theory, it has a stationary regime. Thus, as $t \rightarrow \infty$ the following expressions hold,

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \pi_0 &= \int_0^\infty \beta(x) \pi_1(x) dx + \int_0^\infty \varphi(x) \pi_k(x) dx, \\
\dot{\pi}_1(x) &= -(\lambda_1 + \beta(x)) \pi_1(x), \\
\dot{\pi}_i(x) &= -(\lambda_i + \beta(x)) \pi_i(x) + \lambda_{i-1} \pi_{i-1}(x), \quad i = \overline{2, k-1}, \\
\dot{\pi}_k(x) &= -\varphi(x) \pi_k(x),
\end{aligned}$$

jointly with the initial $\pi_0(0) = 1$ and boundary conditions

$$\begin{aligned}
\pi_1(0) &= \lambda_0 \pi_0 + \int_0^\infty \beta(x) \pi_2(x) dx, \\
\pi_i(0) &= \int_0^\infty \beta(x) \pi_{i+1}(x) dx, \quad i = \overline{2, k-2}, \\
\pi_{k-1}(0) &= 0, \\
\pi_k(0) &= \lambda_{k-1} \int_0^\infty \pi_{k-1}(x) dx,
\end{aligned}$$

the solution of which can be found with the help of the method of constants variation [4].

3. Sensitivity Analysis

Consider a 3-out-of-6 system as an example. The s.s.p.'s and the availability coefficient K_{av} have the following form,

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{6}{5} \cdot \frac{1 - \tilde{b}(5\alpha)}{1 + 5\tilde{b}(5\alpha) - 5\tilde{b}(4\alpha)} \pi_0, \quad \pi_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 + 4\tilde{b}(5\alpha) - 5\tilde{b}(4\alpha)}{1 + 5\tilde{b}(5\alpha) - 5\tilde{b}(4\alpha)} \pi_0, \\
\pi_3 &= \frac{6\alpha f(1 + 4\tilde{b}(5\alpha) - 5\tilde{b}(4\alpha))}{1 + 5\tilde{b}(5\alpha) - 5\tilde{b}(4\alpha)} \pi_0, \quad \pi_0 = 1 - \sum_{i=1,3} \pi_i, \quad (1) \\
K_{av} &= 1 - \pi_3 = \frac{37 + 58\tilde{b}(5\alpha) - 75\tilde{b}(4\alpha)}{60\alpha f(1 + 4\tilde{b}(5\alpha) - 5\tilde{b}(4\alpha)) + 37 + 58\tilde{b}(5\alpha) - 75\tilde{b}(4\alpha)}.
\end{aligned}$$

The formulas (1) are presented in terms of LT of partial repair time distribution of the system components. Full repair time is defined only as a mean value. The obvious dependence of s.s.p.'s on the shape of repair time distribution is observed. On the other hand, some papers, for example [5], show that with "rare" failures, the shape of such a distribution does not affect the reliability measures. In stochastic systems, this property is called insensitivity.

So, consider the behavior of the s.s.p.'s under the rare failures condition. Suppose that $q = \max(\lambda_i) \rightarrow 0$. Applying Taylor series up to the second order of q ,

$$\tilde{b}(\lambda_i) \approx 1 - b\lambda_i + \frac{b^2\lambda_i^2}{2}, \quad i = 1, 2,$$

with substitution $\rho_1 = \alpha b$ and $\rho_2 = \alpha f$ from (1) the following ones can find,

$$\begin{aligned} \pi_1 &\approx \frac{6\rho_1(2-5\rho_1)}{2-5\rho_1(2-9\rho_1)}\pi_0, & \pi_2 &\approx \frac{30\rho^2}{2-5\rho_1(2-9\rho_1)}\pi_0, \\ \pi_3 &\approx \frac{120\rho_1^2\rho_2}{2-5\rho_1(2-9\rho_1)}\pi_0, & \pi_0 &\approx \frac{2-5\rho_1(2-9\rho_1)}{2+\rho_1(2+15\rho_1(3+8\rho_2))}, \\ K_{av} &\approx \frac{2+2\rho_1+45\rho_1^2}{2+\rho_1(2+15\rho_1(3+8\rho_2))}. \end{aligned} \quad (2)$$

4. Numerical Example

Consider further some numerical example to show the rate of convergence of the availability coefficient K_{av} in case of rare failures, different distributions of repair time as well as different values of its coefficient of variation v . The following distributions are used for the repair time:

- Erlang ($Erl(l, \theta)$) with $b = l \cdot \theta^{-1}$, $v = \sqrt{l}/l$,
- Gnedenko-Weibull ($GW(k, \lambda)$) with $b = \lambda \cdot \Gamma(1 + \frac{1}{k})$,
 $v = \frac{\sqrt{\lambda^2 \cdot \Gamma(1+2/k) - b^2}}{b}$,
- Uniform ($U(\hat{a}, \hat{b})$) with $b = \frac{\hat{a} + \hat{b}}{2}$, $v = \frac{1}{\hat{a} + \hat{b}} \cdot \sqrt{\frac{(\hat{b} - \hat{a})^2}{3}}$.

Suppose $b = 1$, $v = 0.5, 1, 2$, mean full repair time $f = 2$. Mean lifetime of system elements $a = \overline{0.1, 20}$, so the failure intensity $\alpha = a^{-1}$. Fig. 2 shows the dependence of the coefficient of availability K_{av} from the mean lifetime of system elements for different repair time distributions, as well as the case of rare failures (in the legend it defines as Approx.). Other notations of the legend is defined as in [4].

5. Conclusion

Fig. 2 shows that over the entire interval a all curves become very close to each other despite the different values of v . As $a \approx 10$, the asymptotic expression (2) shows the absolute accuracy in comparison with the obtained expression (1) for each value v with Erl and GW , and U with $v = 1$. The results provided indicate the presence of asymptotic insensitivity of the system's stationary characteristics to the shape of the repair time distribution and its coefficient of variation at its fixed mean and $\alpha \rightarrow 0$.

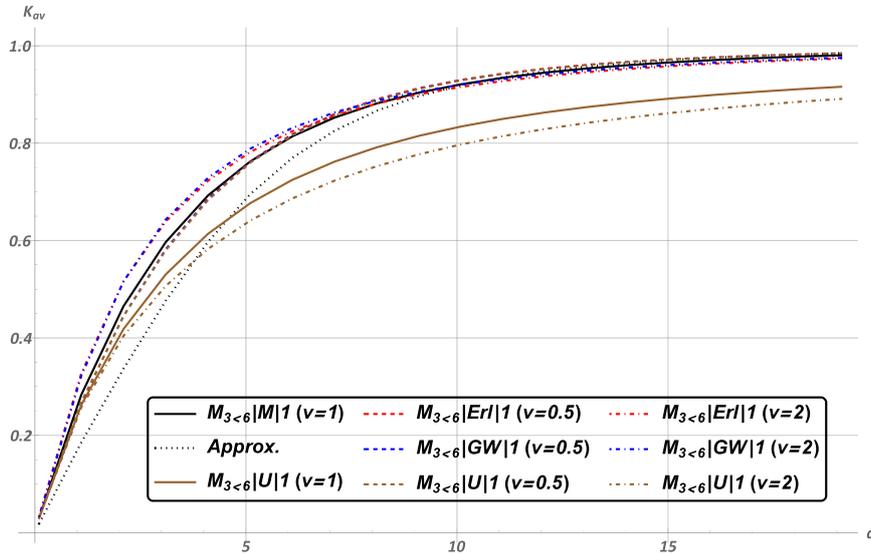


Figure 2. K_{av} of a 3-out-of-6 system under rare failures condition

REFERENCES

1. *Kovalenko I.N.* Sevastyanov's famous theorem // Proc. Steklov Inst. Math. 2013. Vol. 282. P. 124–126. doi: 10.1134/S0081543813060114
2. *Kalashnikov V.* Mathematical Methods in Queuing Theory. Dordrecht: Springer, 1994. 389 p.
3. *Rykov V.V.* On steady state probabilities of renewable system with Marshal–Olkin failure model // Stat Papers. 2018. Vol. 59. P. 1577–1588. doi: 10.1007/s00362-018-1037-6
4. *Rykov V.V., Ivanova N.M., Kozyrev D.V.* Sensitivity Analysis of a k-out-of-n:F System Characteristics to Shapes of Input Distribution // In: Vishnevsky V.M., Samouylov K.E., Kozyrev D.V. (eds) Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2020. Lecture Notes in Computer Science, Cham: Springer, 2020. Vol. 12563. P. 485–496.
5. *Houankpo H.G.K., Kozyrev D.V.* Mathematical and Simulation Model for Reliability Analysis of a Heterogeneous Redundant Data Transmission System // Mathematics. 2021. Vol. 9. Art.num. 2884. doi: 10.3390/math9222884

Ivanova Nika — Junior Scientific Researcher, ICS RAS; Ph.D. Student, RUDN University. E-mail: nm_ivanova@bk.ru

STOCHASTIC DATA NETWORK MODEL

T. Rusilko, D. Salnikov, A. Pankov

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Republic of Belarus

The focus of interest in the paper is a data network consisting of terminal devices connected by routing devices and communication channels. The problem of mathematical modeling of such a data network is solved using a closed exponential G-network of single-server queueing nodes with positive requests and signals. The model is studied under the critical assumption of a large number of requests being processed. The mathematical approach used make it possible to calculate the main statistical characteristics of a Markov process describing the model state, as well as to reconstruct analytically its normal probability density function based on the Gaussian approximation method. The results of the study allow us to analyze the data network performance measures in both transient and steady state. **Keywords:** *G-network, data network, mathematical model, queueing network, asymptotic analysis, Gaussian approximation.*

Introduction

To date, the development of technology has led to the widespread use of systems that provide parallel and decentralized information processing. A feature of these systems is the set of incoming tasks that are quite simple to process. These tasks come to the system nodes, requesting resources for processing. Due to the peculiarities of such systems, it is necessary to create new and modify existing methods for their analysis, and for solving problems of increasing their efficiency. Queueing networks are effective mathematical models for studying discrete probabilistic systems with a network-like structure. The G-networks were first introduced by Erol Gelenbe and have been studied in a steady state [1, 2, 3]. The study of G-network models in a transient state is presented in the articles [4, 5]. Other applications of G-networks with signals have been discussed in [6, 7].

The purpose of this paper is mathematical modeling and efficiency analysis of the data network using a closed exponential G-network with signals. An asymptotic analysis of the model is performed, which implies an approximation method of queueing network study under the assumption of a large but limited number of requests [8, 9, 10, 11]. The mathematical approach used in this paper is based on a discrete model of a continuous Markov process and the theory of diffusion approximation of a Markov process [11, 12].

1. Model description. Problem formulation

The focus of this paper is the data network consisting of terminal devices, connected by routing devices and communication channels (data links). The terminal devices function is the transfer and reception of data, they are communication endpoints. Each terminal or routing device has many inputs and outputs. Each of the communication channels has one input and one output, which are connected to the inputs and outputs of the devices, they provide data transfer. Data is transmitted over the network in the form of discrete packets. The bandwidth of data links is limited. Network devices and channels process information packets at a limited rate.

In general, a payload (information useful to the user), a malicious code (malware) and a service information can be transmitted over data networks. By service information we mean commands that provide load balancing between devices. The load balancing is the process of distributing a set of packets over a set network units, with the aim of making their overall processing more efficient and avoiding overloading some units.

The problem of mathematical modeling of such a data network can be solved using a G-network with signals. As a model of a data network we will use a closed exponential G-network, consisting of n queueing nodes (queues) and an external environment. We set K is the total number of requests circulating in the G-network. The requests in the G-network correspond to data packets transmitted over the data network, positive requests are assigned to payload, signals are assigned to malware and service information. All terminal and routing devices, as well as data links, are represented in the form of queueing nodes with $\cdot/M/1$ structure.

Each data packet can be in one of following states corresponding G-network nodes with the same number: S_0 – in the external environment, S_i – in one of the devices or data lines (in the i -th G-network node), $i = \overline{1, n}$. The transition of a request from the state S_0 to S_i corresponds to the arrival of a packet in the network. The arrival requests flow is divided into a flow of positive requests and signals. Requests arrive from outside following a Poisson process with rate λ_0 . The probability of a payload arriving at time interval $[t, t + \Delta t]$ is $\lambda_0 p_{0i}^+ \Delta t + o(\Delta t)$, a malicious or service packet arrival probability is $\lambda_0 p_{0i}^- \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^n (p_{0i}^+ + p_{0i}^-) = 1$. A payload packet transfers from S_i to S_j without modification with probability p_{ij}^+ , transfers from S_i to S_j as a packet containing malicious code or service information with probability p_{ij}^- , or leaves the network with probability $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n (p_{ij}^+ + p_{ij}^-)$, $i, j = \overline{1, n}$.

All queueing nodes S_i are single-server, the waiting buffer is unlimited. The service time of positive requests is exponentially distributed with the service rate μ_i , $i = \overline{1, n}$. Requests are served according to FIFO rule. Signals arriving at a node are not served by the node servers. A signal arriving at node S_i either instantly moves a positive request from the system S_i to the system S_j with a probability of q_{ij} , note that in this case the signal is called a trigger, or destroys a positive request located at the same node S_i with a probability of $q_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n q_{ij}$ and immediately leaves the network.

The state of this network at time t is represented by a random process

$$k(t) = (k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t)), \quad (1)$$

where $k_i(t)$ is the number of requests (packets) in the state S_i at the time t , $0 \leq k_i(t) \leq K$, $i = \overline{1, n}$. It is obvious that the number of requests serving in the G-network at the time t is $\sum_{i=1}^n k_i(t) = K - k_0(t)$. The allocation of data packets according to possible states at time t fully describes the state of the data network at that time. Accordingly, the allocation of requests by queueing nodes completely determines the state of the G-network. Taking into account the above-described, the process $k(t)$ is a continuous-time Markov chain with a finite state space.

2. Asymptotic analysis of the G-network

Asymptotic analysis implies an approximation method of queueing network study under the critical assumption of a large number of requests K . Using the technique described in [8, 9, 10, 11], it is possible to derive a set of ordinary differential equations for the main statistical characteristics of a random process $k(t)$.

Data networks typically handle a large number of information packets. In connection with this, we proceed to the limit from the Markov chain $k(t)$ to the continuous Markov process $\xi(t) = \left(\frac{k_1(t)}{K}, \frac{k_2(t)}{K}, \dots, \frac{k_n(t)}{K} \right)$ when K tends to be very large. The state space of relative vector $\xi(t)$ is $X = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \geq 0, i = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}$. The increment of $\xi_i(t)$ in the short time $\Delta t \rightarrow 0$ is $\Delta x_i = \varepsilon$, where $\varepsilon = 1/K$. As $K \rightarrow \infty$, the increment of $\xi_i(t)$ decreases, and in any small time interval $\Delta t \rightarrow 0$ the process $\xi_i(t)$ has some small change in the state $\Delta x_i \rightarrow 0$. We can assume that the limiting distribution of $\xi_i(t)$ is continuous. The vector $\xi(t)$ will be continuous-time continuous-state Markov processes with a probability density function $p(x, t)$.

Similarly to [8, 9, 11], it was proved that the density $p(x, t)$ satisfies the following Fokker–Planck–Kolmogorov equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i(x, t)p(x, t)) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (B_{ij}(x, t)p(x, t)), \\ A_i(x, t) = & \lambda_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) (p_{0i}^+ - p_{0i}^-) + \sum_{j=1}^n \lambda_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) p_{0j}^- q_{ji} - \\ & - \mu_i \min(x_i, \varepsilon) \sum_{j=1}^n p_{ij}^- (1 - \theta(x_j)) + \sum_{j=1}^n \mu_j \min(x_j, \varepsilon) (p_{ji}^+ - p_{ji}^- - \delta_{ji}) + \\ & + \sum_{j,s=1}^n \mu_j \min(x_j, \varepsilon) p_{js}^- q_{si}, \end{aligned} \quad (2)$$

where the drift coefficients $A_i(x, t)$ characterize the rate of change of the process $\xi(t)$, δ_{ji} is the Kronecker delta, $\theta(x)$ is the Heaviside step function. The diffusion coefficients $B_{ij}(x, t)$, $i, j = \overline{1, n}$, are also linear in x , their form is not given because of paper size limitation.

The probability distribution of the vector $\xi(t)$ given by the density $p(x, t)$ is a complete and exhaustive characteristic of the G-network state at time t . However, such an exhaustive characteristic cannot be found, since equation (2) is not explicitly solvable. Therefore, instead of the density $p(x, t)$, we will use an incomplete approximate description of a random process $\xi(t)$ using its moments. It is often enough to know what "average value" of $\xi(t)$ is, how far from this average value the values of $\xi(t)$ typically are, and how the statistical relationship between its components $\xi_i(t)$ and $\xi_j(t)$ is characterized. The minimum number of parameters by which an n -dimensional random process can be characterized is as follows: the expected values $E\xi_i(t)$, the variances $D\xi_i(t)$ and the mixed raw moments of the second order $E(\xi_i(t)\xi_j(t))$, $i, j = \overline{1, n}$.

It was found [10] that the set of ordinary differential equations for the first-order and second-order raw moments of the state vector elements $\xi_i(t)$ with an accuracy of $O(1/K^2)$ is

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_i(t)}{dt} = \frac{dE(\xi_i(t))}{dt} = & A_i(\nu^{(1)}(t)), \quad i = \overline{1, n}; \\ \frac{d\nu_{ij}(t)}{dt} = \frac{dE(\xi_i(t)\xi_j(t))}{dt} = & E(\xi_i(t)A_j(\xi(t))) + \\ & + E(\xi_j(t)A_i(\xi(t))) + \varepsilon B_{ij}(\nu^{(1)}(t)), \quad i, j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3)$$

Solution of (3) with a certain initial condition, firstly, makes it possible to predict the mean and the dispersion of the number of data packets at each model state with time, and, secondly, draw a conclusion about the correlation of the number of packets at different data network units with time. These results are useful in decision making and network load analysis. They are applicable with a specified accuracy in both the transient and steady state, this is a fundamental advantage of the used asymptotic method.

In this paper, we restrict ourselves to considering only the set of differential equations for expected values $\nu_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, of the defined form

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_i(t)}{dt} = & \lambda_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n \nu_i(t) \right) (p_{0i}^+ - p_{0i}^-) + \\ & + \sum_{j=1}^n \lambda_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n \nu_i(t) \right) p_{0j}^- q_{ji} - \mu_i \min(\nu_i(t), \varepsilon) \sum_{j=1}^n p_{ij}^- (1 - \theta(x_j)) + \\ & + \sum_{j=1}^n \mu_j \min(\nu_j(t), \varepsilon) (p_{ji}^+ - p_{ji}^- - \delta_{ji}) + \sum_{j,s=1}^n \mu_j \min(\nu_j(t), \varepsilon) p_{js}^- q_{si}. \end{aligned} \quad (4)$$

In the asymptotic case of large K under study, the Gaussian approximation method [12] can be used to reconstruct analytically the normal probability density function $p(x, t)$ from the found moments of the process $\xi(t)$ and to analyze this process using normal density properties [13].

Conclusion

In this paper, the G-network with signals was presented as a stochastic data network model. Requests in the G-network correspond to data packets transmitted over the data network, positive requests are assigned to payload, signals are assigned to malware and service information. The model was studied in the asymptotic case of a large number of requests. As a result, the main statistical characteristics of the number of requests at each network unit were found in both the transient and steady state. The presented technique allows us to reconstruct the normal density of the state process $\xi(t)$ based on the Gaussian approximation method.

REFERENCES

1. *Gelenbe E.* Product form queueing networks with negative and positive customers // *Journal of Applied Probability.* 1991. Vol. 28. № 3. P. 653–663.
2. *Gelenbe E.* G-networks with triggered customer movement // *Journal of Applied Probability.* 1993. Vol. 30. № 3. P. 742–748.
3. *Gelenbe E.* G-networks with signals and batch removal // *Probability in the Engineering and Informational Sciences.* 1993. Vol. 7. № 3. P. 335–343.

4. *Matalytski M., Naumenko V.* Investigation of G-network with signals at transient behavior // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2014. Vol. 13. № 1. P. 75–86.
5. *Matalytski M., Naumenko V.* Analysis of the queueing network with a random bounded waiting time of positive and negative customers at a non-stationary regime // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2017. Vol. 16. № 1. P. 97–108.
6. *Gelenbe E.* Steps toward self-aware networks // Communications of the ACM. 2009. Vol. 52. № 7. P. 66–75.
7. *Gelenbe E., Pujolle G.* Introduction to queueing networks. New York: John Wiley, 1998. 240 p.
8. *Rusilko T.* Network stochastic call center model // 6th International scientific and practical conference Distance Learning Technologies, volume 3057, Yalta: CEUR workshop proceedings, 2021. P. 91–101.
9. *Rusilko T.* Asymptotic analysis of a closed G-network of unreliable nodes // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2022. Vol. 21. № 2. P. 91–102.
10. *Rusilko T.* The first two orders moments determination method for the state vector of the queueing network in the asymptotic case // Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control. 2021. Vol. 11. № 2. P. 152–161.
11. *Medvedev G.* Closed queueing systems and their optimization // Proceedings of the USSR Academy of Sciences. 1978. Vol. 6. P. 199–203.
12. *Tikhonov V., Mironov M.* Markov Processes. Moscow: Soviet Radio, 1987. 206 p.
13. *Rusilko T.* Gaussian approximation method for determining the probability density of the state vector of the queueing network in the asymptotic case // Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control. 2022. Vol. 12. № 3. P. 150–160.

Rusilko Tatiana — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Mathematics and Informatics, Yanka Kupala State University of Grodno. E-mail: tatiana.rusilko@gmail.com

Salnikov Dmitry — Master's Degree Student, Yanka Kupala State University of Grodno. E-mail: dima.saln.gr@gmail.com

Pankov Andrey — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Mathematics and Informatics, Yanka Kupala State University of Grodno. E-mail: a.pankov@gmail.com

АСИМПТОТИЧЕСКИ-ДИФФУЗИОННЫЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ M/M/1 С НЕТЕРПЕЛИВЫМИ ЗАЯВКАМИ, КОЛЛИЗИЯМИ И НЕНАДЁЖНЫМ ПРИБОРОМ

Е. Ю. Данилюк, А. С. Плеханов, С. П. Моисеева

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

Рассмотрена система массового обслуживания с повторными вызовами типа M/M/1. Классическая модель RQ-системы усложнена наличием конфликтов заявок в системе, «нетерпеливых» заявок на орбите, а также «ненадёжным» прибором, который выходит из строя и ремонтируется в функционирующей системе массового обслуживания. Решена задача нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите методом асимптотически-диффузионного анализа в условии долгой «терпеливости» заявок на орбите. Приведены численные результаты, демонстрирующие область применения полученных теоретических выводов, а также дан сравнительный анализ метода асимптотического анализа и метода асимптотически-диффузионного анализа для рассмотренной задачи. **Ключевые слова:** *асимптотически-диффузионный анализ, RQ-система, коллизии, нетерпеливые заявки, ненадёжный прибор.*

Введение

В настоящее время востребованы исследования систем массового обслуживания с повторными вызовами, о чем свидетельствуют многочисленные работы в этой области и грантовая поддержка. Эти системы как математические модели очень подходят для описания современных телекоммуникационных систем, сетей, мобильных сетей. Наряду с построением математических моделей RQ-систем разрабатываются новые методы их исследования. Достаточно новым методом является метод асимптотически-диффузионного анализа. Как и метод асимптотического анализа, он активно разрабатывается томской научной школой, и есть интересные работы [1, 2, 4, 3], в которых используется метод асимптотически-диффузионного анализа. Применение диффузионной аппроксимации для систем массового обслуживания представлены, например, в [6], [7].

Настоящая статья посвящена разработке метода асимптотически-диффузионного анализа на примере RQ-системы M/M/1 с нетерпеливыми заявками, коллизиями и ненадёжным прибором, для которой авторами в [5] решена задача нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите асимптотическим методом. Оба метода применяются в условиях долгой «терпеливости» заявок на орбите, что позволяет сравнить области их применимости для различных значений параметров системы.

1. Постановка задачи и предварительные результаты

Подробное описание математической модели исследуемой RQ-системы дано авторами в первом разделе [5]. Чтобы получить распределение вероятностей $P\{k(t) = k, i(t) = i\} = P_k(i, t)$, $k = 0, 1, 2$, $i = 0, 1, 2, \dots$, числа заявок на орбите в момент времени t методом асимптотически-диффузионного анализа, запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова (1) [5] в терминах частичных характеристических функций (1)

$$H_k(u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P_k(i, t), \quad k = 0, 1, 2, \quad (1)$$

где $j = \sqrt{-1}$. Очевидно, что $H(u, t) = H_0(u, t) + H_1(u, t) + H_2(u, t)$.

Тогда система (1) [5] примет вид (2) и будет являться основной системой для исследования RQ-системы с нетерпеливыми заявками, коллизиями и ненадёжным прибором.

$$\begin{cases} \frac{\partial H_0(u, t)}{\partial t} = -(\lambda + \gamma_0) H_0(u, t) + (\mu + \lambda e^{2ju}) H_1(u, t) + \gamma_2 H_2(u, t) \\ \quad + j(\sigma + \alpha - \alpha e^{-ju}) H_0'(u, t) - j\sigma e^{ju} H_1'(u, t), \\ \frac{\partial H_1(u, t)}{\partial t} = \lambda H_0(u, t) - (\lambda + \mu + \gamma_1) H_1(u, t) - j\sigma e^{-ju} H_0'(u, t) \\ \quad + j(\sigma + \alpha - \alpha e^{-ju}) H_1'(u, t), \\ \frac{\partial H_2(u, t)}{\partial t} = \gamma_0 H_0(u, t) + \gamma_1 e^{ju} H_1(u, t) - (\lambda + \gamma_2 - \lambda e^{ju}) H_2(u, t) \\ \quad + j\alpha(1 - e^{-ju}) H_2'(u, t), \end{cases} \quad (2)$$

где $H_k'(u, t) = \frac{\partial H_k(u, t)}{\partial u} = j \sum_{i=0}^{\infty} i e^{jui} P_k(i, t)$, $k = 0, 1, 2$.

Складывая уравнения системы (2), получаем дополнительное уравнение (3)

$$\frac{\partial H(u, t)}{\partial t} = (1 - e^{-ju}) \{ [\lambda (e^{ju} + 1) + \gamma_1] H_1(u, t) + \lambda H_2(u, t) + j e^{-ju} (\sigma + \alpha) H'_0(u, t) + j (\alpha e^{-ju} - \sigma) H'_1(u, t) + j \alpha e^{-ju} H'_2(u, t) \}. \quad (3)$$

2. Основные результаты

Для получения диффузионной аппроксимации распределения вероятностей числа заявок на орбите исследуемой системы методом асимптотически-диффузионного анализа следует последовательно реализовать этапы: получение коэффициента сноса, центрирование стохастического процесса, получение коэффициента диффузии, — в условии долгой «терпеливости» заявок на орбите ($\sigma \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$). Результаты исследования приведены в Теореме 1.

Теорема 1. Диффузионная аппроксимация распределения вероятностей числа заявок на орбите RQ-системы M/M/1 с нетерпеливыми заявками, коллизиями и ненадёжным прибором (с входящим простейшим потоком заявок интенсивности λ , экспоненциальным законом распределения обслуживания заявки прибором с параметром μ , экспоненциальным законом распределения случайной задержки заявки на орбите с параметром σ , экспоненциальным законом распределения нетерпеливости заявки с параметром $\alpha = q\sigma$, где $q > 0$ — константа, экспоненциальным законом распределения времени, в течение которого сервер находится в рабочем состоянии (если прибор занят - с параметром γ_1 , если свободен - с параметром γ_0); экспоненциальным законом распределения времени, в течение которого длится ремонт вышедшего из строя сервера, с параметром γ_2) в условии долгой «терпеливости» заявок на орбите имеет вид

$$P_{diffusion}(i) = \frac{\Pi(i\sigma)}{\sum_{k=0}^{\infty} \Pi(k\sigma)}, \quad (4)$$

где

$$\Pi(z) = \frac{C}{b(z)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}, \quad C — константа, \quad (5)$$

коэффициенты сноса и диффузии соответственно определяются равенствами

$$a(x) = (2\lambda + \gamma_1 + x) R_1(x) + \lambda R_2(x) - x R_0(x) - qx, \quad (6)$$

$$b(x) = a(x) + 2 \left((2\lambda + \gamma_1 + x) g_1(x) + \lambda g_2(x) - x g_0(x) + x R_0(x) + \lambda R_1(x) + qx \right), \quad (7)$$

вероятности

$$\begin{cases} R_0(x) = \frac{\gamma_2 (\lambda + \mu + \gamma_1 + x)}{(\gamma_0 + \gamma_2) (\lambda + \mu + \gamma_1 + x) + (\gamma_1 + \gamma_2) (\lambda + x)}, \\ R_1(x) = \frac{\gamma_2 (\lambda + x)}{(\gamma_0 + \gamma_2) (\lambda + \mu + \gamma_1 + x) + (\gamma_1 + \gamma_2) (\lambda + x)}, \\ R_2(x) = 1 - R_0(x) - R_1(x), \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} g_0(x) = \frac{\Delta_0}{(\gamma_0 + \gamma_2) (\lambda + \mu + \gamma_1 + x) + (\gamma_1 + \gamma_2) (\lambda + x)}, \\ g_1(x) = \frac{\Delta_1}{(\gamma_0 + \gamma_2) (\lambda + \mu + \gamma_1 + x) + (\gamma_1 + \gamma_2) (\lambda + x)}, \\ g_2(x) = -g_0(x) - g_1(x), \\ \Delta_0 = (\gamma_1 + \gamma_2) \left[x R_0(x) + (a(x) + qx) R_1(x) \right] \\ + (\lambda + \mu + \gamma_1 + x) \left[(a(x) + qx - \lambda) R_2(x) - \gamma_1 R_1(x) \right], \\ \Delta_1 = (\lambda + x) \left[(a(x) + qx - \lambda) R_2(x) - \gamma_1 R_1(x) \right] \\ - (\gamma_0 + \gamma_2) \left[x R_0(x) + (a(x) + qx) R_1(x) \right]. \end{cases} \quad (9)$$

3. Численные результаты

Положим $\mu = 1$, $\gamma_0 = 0.1$, $\gamma_1 = 0.2$, $\gamma_2 = 1$, $\alpha = 2\sigma$.

Для различных значений параметров системы σ и λ построим $P_{asympt}(i)$ и $P_{diffusion}(i)$ — аппроксимации распределения вероятностей числа заявок на орбите, полученные методом асимптотического анализа и методом асимптотически-диффузионного анализа соответственно, и сравним их с допредельным $P_{matrix}(i)$, полученным непосредственным решением системы уравнений (1) [5] для $i = 0, 1, 2, \dots, N$, $N = 500$.

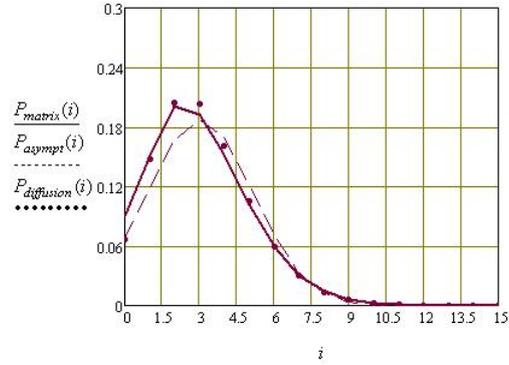


Рис. 1. Сравнение допредельного (сплошная), асимптотического (---) и диффузионного (···) распределений для $\sigma = 0.1$, $\lambda = 0.9$

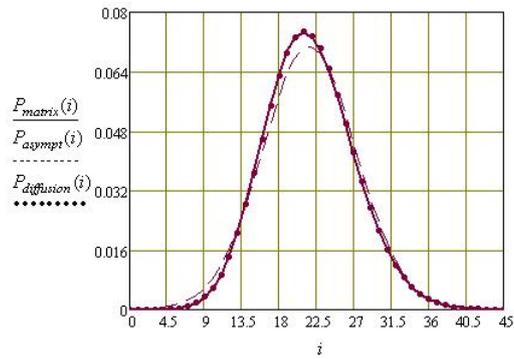


Рис. 2. Сравнение допредельного (сплошная), асимптотического (---) и диффузионного (···) распределений для $\sigma = 0.01$, $\lambda = 0.7$

В качестве критерия близости распределений $P_{matrix}(i)$ и $P_{diffusion}(i)$ будем использовать расстояние Колмогорова

$$\Delta_{ADA} = \max_{0 \leq i \leq N} \left| \sum_{k=0}^i P_{matrix}(i) - \sum_{k=0}^i P_{diffusion}(i) \right|,$$

расстояние Колмогорова Δ_{AA} для распределений $P_{matrix}(i)$ и $P_{asympt}(i)$ найдено в [5].

В Таблице 1 приведены значения Δ_{AA} , Δ_{ADA} , анализ которых с учетом рисунков позволяет сделать следующие выводы:

- 1) при фиксированном значении загрузки системы λ/μ с уменьшением σ расстояние Колмогорова Δ уменьшается;
- 2) при фиксированном значении параметра времени задержки заявки на орбите σ и α с ростом значения загрузки системы λ/μ расстояние Колмогорова Δ_{AA} уменьшается для $\sigma \geq 0.1$ и увеличивается для $\sigma \leq 0.01$ (такое поведение Δ характерно для систем с коллизиями), расстояние Колмогорова Δ_{ADA} уменьшается;
- 3) при одинаковых значениях параметров системы метод асимптотически-диффузионного анализа точнее в смысле расстояния Колмогорова.

Таблица 1

Значение расстояний Колмогорова для асимптотического Δ_{AA} и асимптотически-диффузионного Δ_{ADA} методов

λ/μ	$\sigma = 0.1$		$\sigma = 0.01$		$\sigma = 0.005$	
	Δ_{AA}	Δ_{ADA}	Δ_{AA}	Δ_{ADA}	Δ_{AA}	Δ_{ADA}
0.5	0.161	0.082	0.0230	0.0057	0.0160	0.0039
0.7	0.117	0.049	0.0200	0.0041	0.0160	0.0028
0.9	0.092	0.026	0.0210	0.0031	0.0200	0.0021
1.5	0.055	0.009	0.0300	0.0017	0.0290	0.0012

Заключение

В работе исследована RQ-система M/M/1 с нетерпеливыми заявками, коллизиями и ненадёжным прибором методом асимптотически-диффузионного анализа в условии в условии долгой «терпеливости» заявок на орбите. Получена диффузионная аппроксимация распределения вероятностей числа заявок на орбите и проведен сравнительный анализ с результатами применения метода асимптотического анализа, показана более высокая точность метода асимптотически-диффузионного анализа. Дополнительно планируется найти значения вероятностных характеристик системы, комплексно отражающих ее функционирование, и показать чувствительность распределения к параметрам системы. Анализ предложенной математической модели может быть использован для оценки производительности реальных систем и дальнейшей их модификации, в том числе информационно-коммуникационных сетей, а также в других известных приложениях теории массового обслуживания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nazarov A., Phung-Duc T., Paul S, Lizyura O.* Asymptotic-Diffusion Analysis of Retrial Queue with Two-Way Communication and Renewal Input // Proceedings of The 5th International Conference on Stochastic Methods (ICSM-5), Москва: Российский университет дружбы народов (РУДН), 2020. С. 339–345.
2. *Nazarov A., Phung-Duc T., Izmailova Ya.* Asymptotic-Diffusion Analysis of Multiserver Retrial Queueing System with Priority Customers // Proceedings of the XIX International Conference named after A. F. Terpugov. Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM-2020), Томск: Издательство научно-технической литературы, 2021. С. 88–98.
3. *Danilyuk E., Moiseeva S., Nazarov A.* Asymptotic Diffusion Analysis of a Retrial Queueing System M/M/1 with Impatient Calls // Communications in Computer and Information Science. 2022. Vol. 1552. P. 233–246.
4. *Moiseev A., Nazarov A., Paul S.* Asymptotic diffusion analysis of multi-server retrial queue with hyperexponential service // Mathematics. 2020. Vol. 8. № 4. P. 531.
5. *Danilyuk E. Yu., Moiseeva S. P., Sztrik J.* Asymptotic Analysis of Retrial Queueing System M/M/1 with Impatient Customers, Collisions and Unreliable Server // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2020. Vol. 13. № 2. P. 218–230.
6. *Whitt W.* A Diffusion Approximation for the G/GI/n/m Queue // Oper. Res. 2003. № 53. P. 922–941.
7. *Ward A. R., Glynn P. W.* A Diffusion Approximation for a GI/GI/1 Queue with Balking or Reneging // Queueing Syst. 2005. № 50. P. 371–400.

Данилюк Елена Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики. E-mail: daniluc.elena.yu@gmail.com

Плеханов Александр Сергеевич — студент 4 курса бакалаврита института прикладной математики и компьютерных наук. E-mail: haakimfargo@mail.ru

Моисеева Светлана Петровна — доктор физико-математических наук, профессор, и.о. заведующего кафедрой теории вероятностей и математической статистики. E-mail: smoiseeva@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ M|M|1 С КОЛЛИЗИЯМИ И H_1, H_2 НАСТОЙЧИВЫМИ ЗАЯВКАМИ

А. В. Полховская, С. П. Моисеева

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В статье рассматривается RQ-система массового обслуживания типа M/M/1 с одним обслуживающим прибором, коллизиями (конфликтами) заявок и отказами. Новизна заключается в том, что в предыдущее исследование были добавлены вероятности отказа заявок H_1, H_2 . На вход системы поступает простейший поток, продолжительность обслуживания и случайная задержка, которую осуществляет заявка на орбите в случае возникновения конфликта экспоненциально распределены. Для нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите используется метод асимптотического анализа. В качестве асимптотического условия используется большая задержка на орбите. Сформулирована и доказана теорема о гауссовой форме асимптотического распределения вероятностей числа заявок на орбите. **Ключевые слова:** RQ-система, коллизии, нетерпеливые заявки, асимптотический анализ.

Введение

Настоящая статья посвящена исследованию RQ-системы с одним обслуживающим прибором, коллизиями и H_1, H_2 настойчивыми заявками. Рассмотрение RQ-систем с ситуацией конфликта заявок подразумевает, что заявка, нашедшая прибор занятым в момент прибытия ее в систему, и заявка, находящаяся на обслуживании, вступают в конфликт [1-8]. RQ-системы с конфликтами заявок имитируют поведение многих реальных ситуаций, например, в телекоммуникационных сетях, где передача данных должна быть гарантирована безошибочной точностью с некоторой заданной вероятностью.

В реальной жизни нетерпеливость к ожиданию является наиболее заметной особенностью людей, когда они хотят получить обслуживание. Для характеристики поведения нетерпеливых клиентов помимо терминов «нетерпеливость», «ненастойчивость», используются термин «отказ», понимаемый как решение не присоединяться к линии (прибору) после неудачной попытки получить обслуживание с последующим

уходом из системы [7,8]. В данной работе используется понятие отказа в смысле нетерпеливости с фиксированной вероятностью и в смысле оставления заявки без обслуживания после присоединения ее к линии.

1. Математическая модель системы

Рассмотрим однолинейную RQ-систему с конфликтами заявок и отказами, изображенную на рисунке 3.

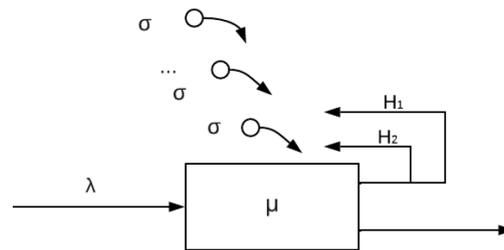


Рис. 1. RQ-система M/M/1 с коллизиями и H_1 , H_2 настойчивыми заявками

Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его и начинает обслуживание, которое заканчивается успешно, если во время него другие заявки не поступали. Если прибор занят, то поступившая и обслуживаемая заявки вступают в конфликт. При этом, будем считать, что заявка с прибора уходит на орбиту с вероятностью H_1 , заявка, вызвавшая конфликт, уходит на орбиту с вероятностью H_2 , а с вероятностью $1 - H_i$ покидает систему. На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Продолжительность обслуживания имеет экспоненциальную функцию распределения с параметром μ . Случайная задержка, которую осуществляет заявка на орбите в случае возникновения конфликта, экспоненциально распределена с параметром σ . Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t , $l(t)$ будет определять состояние прибора следующим образом:

$$l = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

$P(l(t) = l, i(t) = i) = P_l(i, t)$ – вероятность того, что прибор в момент времени находится в состоянии l , и в источнике повторных вызовов i заявок.

Ставится задача исследования случайного процесса $l(t), i(t)$.

Система уравнений Колмогорова

Для получения распределения вероятностей $P(l(t) = l, i(t) = i) = P_l(i, t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы выведем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$i = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_0(0,t)}{\partial t} = -\lambda P_0(0,t) + \mu P_1(0,t) + \lambda(1-H_1)(1-H_2)P_1(0,t) + \\ + \sigma(1-H_1)(1-H_2)P_1(1,t), \\ \frac{\partial P_1(0,t)}{\partial t} = -(\mu + \lambda)P_1(0,t) + \lambda P_0(0,t) + \sigma P_0(1,t). \end{cases}$$

$i = 1$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_0(1,t)}{\partial t} = -(\lambda + \sigma)P_0(1,t) + \mu P_1(1,t) + \lambda(1-H_2)H_1P_1(0,t) + \\ + \lambda(1-H_1)H_2P_1(0,t) + \lambda(1-H_1)(1-H_2)P_1(0,t) + \sigma(1-H_2) \cdot \\ \cdot H_1P_1(1,t) + \sigma(1-H_1)H_2P_1(1,t) + 2\sigma(1-H_1)(1-H_2)P_1(2,t), \\ \frac{\partial P_1(1,t)}{\partial t} = -(\mu + \lambda + \sigma)P_1(1,t) + \lambda P_0(1,t) + 2\sigma P_0(2,t). \end{cases}$$

$i \geq 2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} = -(\lambda + i\sigma)P_0(i,t) + \mu P_1(i,t) + \lambda H_1 H_2 P_1(i-2,t) + \\ + \lambda(1-H_2)H_1P_1(i-1,t) + \lambda(1-H_1)H_2P_1(i-1,t) + \\ + \lambda(1-H_1)(1-H_2)P_1(i,t) + (i-1)\sigma H_1 H_2 P_1(i-1,t) + \\ + i\sigma(1-H_2)H_1P_1(i,t) + i\sigma(1-H_1)H_2P_1(i,t) + (i+1)\sigma \cdot \\ \cdot (1-H_1)(1-H_2)P_1(i+1,t), \\ \frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} = -(\mu + \lambda + \sigma)P_1(i,t) + \lambda P_0(i,t) + (i+1)\sigma P_0(i,t). \end{cases} \quad (1)$$

Запишем систему (1) в стационарном режиме $\lim_{t \rightarrow \infty} P_l(i, t) = \Pi_l(x)$:

$i = 0$:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda \Pi_0(0) + \mu \Pi_1(0) + \lambda(1-H_1)(1-H_2)\Pi_1(0) + \sigma(1-H_1) \cdot \\ \cdot (1-H_2)\Pi_1(1), \\ 0 = -(\mu + \lambda)\Pi_1(0) + \lambda \Pi_0(0) + \sigma \Pi_0(1). \end{cases}$$

$i = 1$:

$$\begin{cases} 0 = -(\lambda + \sigma)\Pi_0(1) + \mu \Pi_1(1) + \lambda(1-H_2)H_1\Pi_1(0) + \lambda(1-H_1) \cdot \\ \cdot H_2\Pi_1(0) + \lambda(1-H_1)(1-H_2)\Pi_1(0) + \sigma(1-H_2)H_1\Pi_1(1) + \\ + \sigma(1-H_1)H_2\Pi_1(1) + 2\sigma(1-H_1)(1-H_2)\Pi_1(2), \\ 0 = -(\mu + \lambda + \sigma)\Pi_1(1) + \lambda \Pi_0(1) + 2\sigma \Pi_0(2). \end{cases}$$

$i \geq 2$:

$$\begin{cases} 0 = -(\lambda + i\sigma)\Pi_0(i) + \mu\Pi_1(i) + \lambda H_1 H_2 \Pi_1(i-2) + \lambda(1-H_2) \cdot \\ \cdot H_1 \Pi_1(i-1) + \lambda(1-H_1)H_2 \Pi_1(i-1) + \lambda(1-H_1)(1-H_2) \cdot \\ \cdot \Pi_1(i) + (i-1)\sigma H_1 H_2 \Pi_1(i-1) + i\sigma(1-H_2)H_1 \Pi_1(i) + \\ + i\sigma(1-H_1)H_2 \Pi_1(i) + (i+1)\sigma(1-H_1)(1-H_2)\Pi_1(i+1), \\ 0 = -(\mu + \lambda + \sigma)\Pi_1(i) + \lambda\Pi_0(i) + (i+1)\sigma\Pi_0(i). \end{cases} \quad (2)$$

2. Асимптотический анализ

Введем частичные характеристические функции:

$$h_l(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju} \Pi_l(i), \quad l = \{0,1\},$$

$$-j \frac{\partial h_l(u)}{\partial u} = \sum_{i=0}^{\infty} i e^{ju} \Pi_l(i),$$

где $j = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

Тогда из системы (2) получим систему двух уравнений относительно функций $h_l(u)$:

$$\begin{cases} -\lambda h_0(u) + j\sigma \frac{\partial h_0(u)}{\partial u} + \mu h_1(u) + \lambda H_1 H_2 e^{2ju} h_1(u) + \lambda(H_1(1-H_2) + \\ + H_2(1-H_1))e^{ju} h_1(u) + \lambda(1-H_1)(1-H_2)h_1(u) - j\sigma H_1 H_2 \cdot \\ \cdot e^{ju} \frac{\partial h_1(u)}{\partial u} - j\sigma(H_1(1-H_2) + H_2(1-H_1)) \frac{\partial h_1(u)}{\partial u} - j\sigma(1-H_1) \cdot \\ \cdot (1-H_2)e^{-ju} \frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0, \\ 0 = -\mu h_1(u) + \lambda h_1(u) + j\sigma \frac{\partial h_1(u)}{\partial u} + \lambda h_0(u) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial h_0(u)}{\partial u} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Суммируя первое уравнение системы со вторым уравнением, умноженным на $e^j u$, получим:

$$\begin{aligned} -\lambda h_0(u) + \mu h_1(u) + \lambda e^{ju}(A - C e^{-ju})h_1(u) - \\ - j\sigma(A + C e^{-ju} - 1) \frac{\partial h_1(u)}{\partial u} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $A = H_1 H_2, B = H_1(1-H_2) + H_2(1-H_1), C = (1-H_1)(1-H_2)$.

Полученное уравнение (4) будем решать методом асимптотического анализа в предельном условии $\sigma \rightarrow 0$.

2.1 Асимптотика первого порядка

Для нахождения асимптотики первого порядка в системе выполним следующие замены:

$$\sigma = \varepsilon, u = \varepsilon w, h_l(u) = f_l(\varepsilon, w).$$

Тогда система уравнений (3) и уравнение (4) примут вид:

$$\begin{cases} -\lambda f_0(\varepsilon, w) + \mu f_1(\varepsilon, w) + \lambda(Ae^{2j\varepsilon w} + Be^{j\varepsilon w} + C)f_1(\varepsilon, w) + j\frac{\partial f_0(\varepsilon, w)}{\partial w} - \\ -j(Ae^{j\varepsilon w} + B + Ce^{-j\varepsilon w})\frac{\partial f_1(\varepsilon, w)}{\partial w} = 0, \\ \lambda f_0(\varepsilon, w) - \mu f_1(\varepsilon, w) - \lambda f_1(\varepsilon, w) + je^{-j\varepsilon w}\frac{\partial f_0(\varepsilon, w)}{\partial w} + j\frac{\partial f_1(\varepsilon, w)}{\partial w} = 0, \\ \lambda f_0(\varepsilon, w) - \mu f_1(\varepsilon, w) + \lambda e^{j\varepsilon w}(A - Ce^{-j\varepsilon w})f_1(\varepsilon, w) - j\sigma(A + Ce^{-j\varepsilon w} - \\ -1)\frac{\partial f_1(\varepsilon, w)}{\partial w} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Теорема 1. Предельное значение функции $f_l(\varepsilon, w)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет вид:

$$f_l(w) = r_l e^{jw\kappa_1},$$

где

$$\kappa_1 = \frac{\mu r_1}{1 - 2r_1} - \lambda,$$

и r_0, r_1 определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{\lambda - \mu r_1}{(1 - A - C)r_1} + \lambda = \lambda - \frac{\mu r_1}{1 - 2r_1}, \\ r_1 + r_0 = 1, \end{cases}$$

Полученная величина κ_1 определяет асимптотическое среднее значение $\frac{\kappa_1}{\sigma}$ числа заявок на орбите в системе совместного доступа с ненастойчивыми заявками, конфликтами и отказами. Для построения гауссовской аппроксимации распределения вероятностей числа $i(t)$ заявок на орбите рассмотрим асимптотику второго порядка.

2.2 Асимптотика второго порядка

Выполнив в системе (5) замены

$$h_l(u) = e^{\frac{j u \kappa_1}{\sigma}} h_l^{(2)}(u),$$

получим

$$\begin{cases} -(\lambda + \varkappa_1)h_0^{(2)}(u) + (\mu + \lambda(Ae^{2ju} + Be^{ju} + C) + (Ae^{ju} + B + \\ + Ce^{-ju})\varkappa_1)h_1^{(2)}(u) + j\sigma \frac{\partial h_0^{(2)}(u)}{\partial u} - j\sigma(Ae^{ju} + B + Ce^{-ju}) \cdot \\ \cdot \frac{\partial h_1^{(2)}(u)}{\partial u} = 0, \\ (\lambda + e^{-ju}\varkappa_1)h_0^{(2)}(u) - (\mu + \lambda + \varkappa_1)h_1^{(2)}(u) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial h_0^{(2)}(u)}{\partial u} + \\ + j\sigma \frac{\partial h_1^{(2)}(u)}{\partial u} = 0, \\ \lambda h_0^{(2)}(u) + (\lambda e^{ju}(A - Ce^{-ju}) - \mu + (A + Ce^{-ju} - 1)\varkappa_1)h_1^{(2)}(u) - \\ - j\sigma(A + Ce^{-ju} - 1) \frac{\partial h_1^{(2)}(u)}{\partial u} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Сделаем замены:

$$\sigma = \varepsilon^2, u = \varepsilon w, h_l^{(2)}(u) = f_l^{(2)}(\varepsilon, w),$$

тогда (6) примет вид

$$\begin{cases} -(\lambda + \varkappa_1)f_0^{(2)}(\varepsilon, w) + (\mu + \lambda(Ae^{2j\varepsilon w} + Be^{j\varepsilon w} + C) + (Ae^{j\varepsilon w} + \\ + B + Ce^{-j\varepsilon w})\varkappa_1)f_1^{(2)}(\varepsilon, w) + j\varepsilon \frac{\partial h_0^{(2)}(\varepsilon, w)}{\partial w} - j\varepsilon(Ae^{j\varepsilon w} + B + \\ + Ce^{-j\varepsilon w}) \cdot \\ \cdot \frac{\partial f_1^{(2)}(\varepsilon, w)}{\partial w} = 0, \\ (\lambda + e^{-j\varepsilon w}\varkappa_1)f_0^{(2)}(\varepsilon, w) - (\mu + \lambda + \varkappa_1)f_1^{(2)}(\varepsilon, w) - j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \cdot \\ \cdot \frac{\partial f_0^{(2)}(\varepsilon, w)}{\partial w} + j\varepsilon \frac{\partial f_1^{(2)}(\varepsilon, w)}{\partial w} = 0, \\ \lambda f_0^{(2)}(\varepsilon, w) + (\lambda e^{j\varepsilon w}(A - Ce^{-j\varepsilon w}) - \mu + (A + Ce^{-j\varepsilon w} - 1)\varkappa_1) \cdot \\ \cdot f_1^{(2)}(\varepsilon, w) - j\varepsilon(A + Ce^{-j\varepsilon w} - 1) \frac{\partial f_1^{(2)}(\varepsilon, w)}{\partial w} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Теорема 2. Предельное при $\varepsilon \rightarrow 0$ функций $f_l(w)$ решения имеет вид:

$$f_l(w) = r_l e^{\frac{(jw)^2}{2!}} \varkappa_2,$$

где r_0, r_1 определен в теореме 1, а скалярная величина \varkappa_1 определяется формулой

$$\varkappa_2 = \frac{(\lambda + \varkappa_1)g_0 - \varkappa_1 R_0 - (\lambda + \mu + \varkappa_1)g_1}{R_1 - R_0},$$

в которой g_0, g_1 являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{(\lambda + \varkappa_1)g_0 - \varkappa_1 R_0 - (\lambda + \mu + \varkappa_1)g_1}{R_1 - R_0} = \\ = \frac{\lambda g_0 + R_1(\lambda A - \lambda C - C\varkappa_1) + g_1(\lambda A - \lambda C - \mu - (1 - A - C)\varkappa_1)}{(A - 1)R_1}, \\ g_0 + g_1 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, найденная асимптотика второго порядка показывает, что асимптотическое распределение вероятностей числа $i(t)$ заявок на орбите в рассматриваемой системе является гауссовским с асимптотическим средним $\frac{\mu_1}{\sigma}$ и дисперсией $\frac{\mu_2}{\sigma}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Krishna Kumar B., Vijayalakshmi G., Krishnamoorthy A., Sadiq Basha S.* A single server feedback retrial queue with collisions // Computer and operations research. 2010. Vol. 7. № 37. P. 1247–1255.
2. *Назаров А. А., Судыко Е. А.* Анализ марковской RQ-системы с конфликтами запросов на обслуживание и входящим потоком Пуассона // Журнал управления и информатики Томского государственного университета. 2010. № 3(12). С. 97–106.
3. *Назаров А. А., Судыко Е. А.* Существование стационарного режима для немарковских систем с конфликтами запросов // Вестник Томского политехнического университета. 2011. Т. 318. № 5. С. 166–168.
4. *Данилюк Е. Ю., Федорова Е. А., Моисеева С. П.* Асимптотический анализ системы массового обслуживания M|M|1 с коллизиями и нетерпеливыми вызовами // Автоматизация и дистанционное управление. 2018. Т. 79. № 12. С. 2136–2146.
5. *Назаров А. А., Штрик Дж., Квач А. и др.* Асимптотический анализ системы массового обслуживания с конечным источником M / M / 1 с коллизиями и сервером, подверженным поломкам и ремонту // Annals of Operations Research. 2018. С. 1–17.
6. *Данилюк Е. Ю., Моисеева С. П., Назаров А. А.* Асимптотический анализ системы массового обслуживания повторных вызовов M / GI / 1 с коллизиями и нетерпеливыми вызовами // Коммуникации в информатике и информатике. 2019. Т. 1109. С. 230–242.
7. *Данилюк Е. Ю., Моисеева С. П., Штрик Я.* Асимптотический анализ системы массового обслуживания M/M/1 с нетерпеливыми клиентами, коллизиями и ненадежным сервером // Вестник Сибирского федерального университета. Математика и физика. 2020. Т. 13. № 2. С. 218–230.
8. *Kim J.* Retrial queueing system with collision and impatience // Commun. Korean Math. Soc. 2010. № 4. P. 647–653.

Моисеева Светлана Петровна — д.ф.-м.н., профессор кафедры ТВиМС. E-mail: smoiseeva@mail.ru

Полховская Анна Васильевна — магистрант кафедры ТВиМС. E-mail: anua.polhovskaya00@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ M|M|N С КАТАСТРОФАМИ В БЛОКЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Е. А. Фёдорова, Н. П. Мелошникова, Д. А. Плаксин

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В работе проводится исследование многолинейной RQ-системы с отрицательными заявками как математической модели сервиса облачных вычислений. Входящий поток положительных заявок простейший, время обслуживания на приборе распределено экспоненциально. Заявки, не получившие обслуживания, находятся на орбите случайное время, распределенное экспоненциально, после которого обращаются к блоку обслуживания согласно протоколу случайного множественного доступа. Катастрофы описываются потоком отрицательных, которые оказывают действие на блок обслуживания, обнуляя все приборы. В работе найдено стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите методом асимптотического анализа в условии большой задержки. **Ключевые слова:** RQ-системы, отрицательные заявки, орбита, асимптотический анализ, большая задержка, катастрофы

Введение

RQ-системы [1, 2] (системы с повторными вызовами) это новые математические модели ТМО, которые часто применяются для анализа, исследования и оптимизации разных технических систем: сотовой связи, систем передачи информации, call-центров, центров облачных вычислений и др [5]. Особенностью RQ-систем является наличие орбиты для хранения необслуженных заявок, которые могут повторно обратиться к обслуживающему устройству (или блоку приборов). RQ-системы с отрицательными заявками [3, 4] представляют особый интерес, т.к. для инфо-коммуникационных систем характерно наличие негативных воздействий - вирусов, хакерских атак, поломок, сбоев и др.

Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).

1. Описание модели

В данной работе рассматривается многолинейная RQ-система, на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром λ , будем называть эти заявки положительными. Положительные заявки поступают на обслуживающие приборы (серверы), до момента, когда все N приборов будут заняты, будем считать все приборы эквивалентными. Время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ . Если все приборы заняты, то входящая заявка идет на орбиту, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ . С орбиты после случайного времени задержки заявка вновь обращается к обслуживающим приборам с повторной попыткой получить обслуживание.

Также на вход поступает поток отрицательными заявками, с параметром γ . Отрицательная заявка не нуждается в обслуживании. При поступлении в систему, отрицательная заявка "обнуляет" все приборы, то есть все обслуживаемые заявки покидают систему и блок обслуживания становится свободным. Будем называть описанную модель (Рисунок 3) RQ-системой с катастрофами [5] в блоке обслуживания.

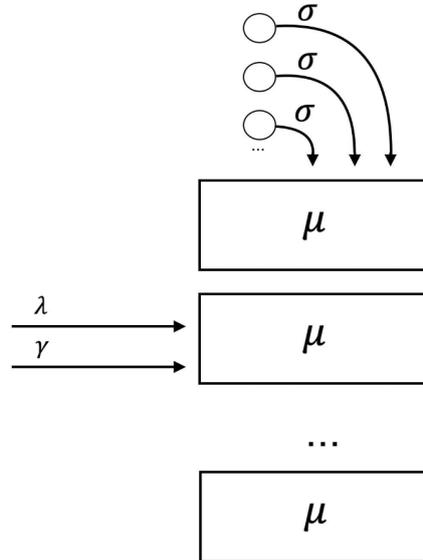


Рис. 1. RQ-система $M|M|N$ с отрицательными заявками

Пусть $i(t)$ – случайный процесс, характеризующий число заявок на орбите, а $k(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, \text{ все приборы свободны,} \\ 1, \text{ один прибор занят,} \\ \dots \\ k, k \text{ приборов заняты,} \\ \dots \\ K, \text{ все приборы заняты.} \end{cases}$$

Ставится задача нахождения стационарного распределения вероятностей числа заявок на орбите.

Обозначим $P\{k(t) = k, i(t) = i\} = P(k, i)$ – стационарные вероятности того, что прибор находится в состоянии k , а на орбите i заявок. Очевидно, что двумерный процесс $\{k(t), i(t)\}$ является Марковским. Для распределения вероятностей $P(k, i, t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему уравнений Колмогорова, которая в стационарном режиме имеет вид:

$$\begin{cases} -P(0, i)(\lambda + i\sigma) + P(1, i)\mu + \sum_{k=1}^K P(k, i)\gamma = 0, \\ -P(k, i)(\lambda + k\mu + i\sigma + \gamma) + P(k-1, i)\lambda + P(k-1, i+1)\sigma(i+1) + \\ + P(k+1, i)(k+1)\mu = 0, \text{ где } 1 \leq k \leq K-1, \\ -P(N, i)(\lambda + N\mu + \gamma) + P(K-1, i)\lambda + P(N, i-1)\lambda + \\ + P(N-1, i+1)\sigma(i+1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для нахождения вероятностей $P(k, i)$ к системе уравнений (1) необходимо также добавить условие нормировки:

$$\sum_{k=0}^K \sum_{i=0}^{\infty} P(k, i) = 1. \quad (2)$$

Составим систему уравнений, определяющих частичные характеристические функции

$$H(k, u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P(k, i).$$

Перепишем систему (1):

$$\left\{ \begin{array}{l} -j\sigma \frac{\partial H(0, u)}{\partial u} = -\lambda H(0, u) + \mu H(1, u) + \sum_{k=1}^K \gamma H(k, u), \\ j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H(k-1, u)}{\partial u} - j\sigma \frac{\partial H(k, u)}{\partial u} = -(\lambda + k\mu + \gamma)H(k, u) + \\ \quad + \lambda H(k-1, u) + (k+1)\mu H(k+1, u), \text{ где } 1 \leq k \leq K-1, \\ j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H(N-1, u)}{\partial u} = -(\lambda(1 - e^{ju}) + N\mu + \gamma)H(N, u) + \\ \quad + \lambda H(N-1, u). \end{array} \right.$$

Перепишем систему в матричном виде:

$$j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} (\mathbf{A}_0 + e^{-ju} \mathbf{A}_1) = \mathbf{H}(u) (\mathbf{B}_0 + e^{ju} \mathbf{B}_1), \quad (3)$$

$$\mathbf{H}(0) \mathbf{e} = 1, \quad (4)$$

где $\mathbf{H}(u) = \{H(0, u), H(1, u), \dots, H(k, u), \dots, H(N, u)\}$ – вектор-строка частных характеристических функций, а матрицы \mathbf{A}_0 , \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_0 и \mathbf{B}_1 следующие:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \mu + \gamma & -(\lambda + \mu + \gamma) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma & 2\mu & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \gamma & 0 & \cdots & -(\lambda + k\mu + \gamma) & \cdots & 0 \\ \gamma & 0 & \cdots & (k+1)\mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda \\ \gamma & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -(\lambda + K\mu + \gamma) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Для решения системы (3)-(4) в работе предлагается метод асимптотического анализа в условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \rightarrow 0$).

2. Асимптотический анализ

Обозначим:

$$\sigma = \varepsilon, u = \varepsilon w, \mathbf{H}(u) = \mathbf{F}(w, \varepsilon).$$

Тогда уравнения (3)-(4) имеют вид:

$$j \frac{\partial \mathbf{F}(w, \varepsilon)}{\partial w} (\mathbf{A}_0 + e^{-j\varepsilon w} \mathbf{A}_1) = \mathbf{F}(w, \varepsilon) (\mathbf{B}_0 + e^{j\varepsilon w} \mathbf{B}_1), \quad (5)$$

$$\mathbf{F}(0)\mathbf{e} = 1.$$

В ходе решения системы (5) была доказана следующая теорема.

Теорема. Асимптотическая характеристическая функция числа заявок $i(t)$ на орбите в RQ-системе M|M|N с катастрофами в блоке обслуживания $h(u) = \sum_{n=0}^N H(n, v)$ в условии большой задержки $\sigma \rightarrow 0$ имеет

форму характеристической функции гауссовского распределения

$$h(u) = \exp\left\{ju \frac{k_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2 k_2}{2 \sigma}\right\},$$

где k_1 определяется уравнением:

$$\mathbf{R}(\mathbf{B}_1 - k_1 \mathbf{A}_1) \mathbf{e} = 0,$$

k_2 вычисляется по формуле:

$$k_2 = \frac{\mathbf{g}_1(\mathbf{B}_1 - k_1 \mathbf{A}_1) \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{B}_1 + k_1 \mathbf{A}_1) \mathbf{e}}{-\mathbf{g}_2(\mathbf{B}_1 - k_1 \mathbf{A}_1) \mathbf{e} + \mathbf{R} \mathbf{A}_1 \mathbf{e}},$$

где \mathbf{e} -единичный вектор, вектор $\mathbf{R} = \mathbf{R}(k_1)$ определяется системой

$$\begin{cases} \mathbf{R}((\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) + k_1(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1)) = 0, \\ \mathbf{R} \mathbf{e} = 1, \end{cases}$$

а \mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_2 определяются системой:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1((\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) + k_1(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1)) + \mathbf{R}(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) &= 0, \\ \mathbf{g}_2((\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) + k_1(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1)) + \mathbf{R}(\mathbf{B}_1 - k_1 \mathbf{A}_1) &= 0. \end{aligned}$$

Заключение

В ходе исследования был проведен асимптотический анализ многолинейной RQ-системы с отрицательными заявками и катастрофами в блоке обслуживания в условии большой задержки. Была доказана теорема, которая показывает, что асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите имеет вид Гауссовского распределения с полученными параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Falin G. I., Templeton J. G. C.* Retrial queues // London: Chapman and Hall. 1997. Vol. 7. № 1. P. 127–167.
2. *Artalejo J. R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems. Berlin: Springer, 2008. 267 p.
3. *Gelenbe E.* Product-form queueing networks with negative and positive customers // Journal of Applied Probability. 1991. № 28. P. 656–663.
4. *Do T. V.* Bibliography on G-networks, negative customers and applications // Mathematical and Computer Modelling. 2011. Vol. 53. № 1–2. P. 205–212.
5. *Shin Y. W.* Multi-server retrial queue with negative customers and disasters // Queueing Syst. 2007. Vol. 55. P. 223–337.

6. *Фёдорова Е. А., Назаров А. А., Фархадов М. П.* Асимптотический анализ RQ-системы MMRP|M|1 с отрицательными заявками в условии большой загрузки // Саратов: Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 4. № 20. С. 534–547.

Фёдорова Екатерина Александровна — кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Теории вероятности и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета. E-mail: *moiskate@mail.ru*

Мелошников Наталья Павловна — магистрант 2-го года обучения кафедры Теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета. E-mail: *meloshnikovana@gmail.com*

Плаксин Данил Андреевич — магистрант 2-го года обучения кафедры Теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета. E-mail: *daniil.plaksin1@gmail.com*

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ MMPР|M|1 С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ ПРИБОРА В УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАГРУЗКИ

К. Р. Хаджи-Оглы, Е. А. Фёдорова

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В статье исследуется однолинейная RQ-система с переключением прибора, где интенсивность обслуживания зависит от числа заявок на орбите (имеет два значения). Входящий поток заявок – MMPР, время задержки на орбите распределено экспоненциально. Для нахождения стационарного распределения числа заявок на орбите предлагается метод асимптотического анализа в условии большой загрузки. В статье приводится формулировка доказанной теоремы о том, что в асимптотическая характеристическая функция исследуемого процесса имеет форму гамма-распределения. **Ключевые слова:** RQ-система, переключение прибора, MMPР-поток, асимптотический анализ, большая загрузка.

RQ-системы (Retrial Queue) – это системы массового обслуживания с повторными вызовами. Главное отличие таких систем в том, что заявки, которые пришли в систему и обнаружили, что прибор занят, не покидают систему, а идут на орбиту. После случайной задержки они снова пытаются добиться обслуживания. Такие модели имеют широкое применения в различных телекоммуникационных сетях, в том числе сетях сотовой связи, FANET и др.

В работах [1] и [2] рассмотрены основные типы RQ-систем и разнообразные методы исследования.

RQ-системы с переменной интенсивностью обслуживания рассмотрены в работах [3, 4]. Однако в указанных работах клиенты поступают в систему в соответствии с пуассоновским процессом, что далеко не всегда хорошо описывает реальные информационные потоки.

Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030)

1. Математическая модель

Рассмотрим RQ-систему (рисунок 1) с одним обслуживающим прибором и входящим ММРР-потокм заявок (Markov Modulated Poisson Process), который описывается матрицами \mathbf{D}_0 и \mathbf{D}_1 .

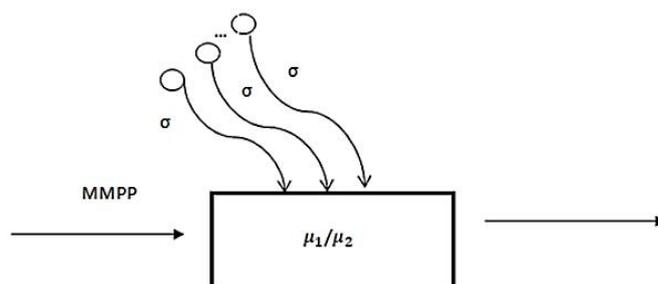


Рис. 1. RQ-система MMPP|M|1 с переключением прибора

Обозначим цепь Маркова ММРР-потока $n(t)$ (где $n = 1, 2, \dots, N$). Матрица инфинитезимальных характеристик управляющего процесса $n(t)$ равна $\mathbf{Q} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1$ и имеет элементы $Q = \{q_{n\nu}\}$, где $n, \nu = 1, 2, \dots, N$. Матрица $\mathbf{D}_1 = \text{diag}\{\rho\lambda_n\}$, элементы которой имеют следующий смысл: λ_n — условные интенсивности ММРР-потока, ρ — загрузка системы (определим его ниже). Тогда обозначив $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_n\}$, можно записать: $\mathbf{D}_1 = \rho\mathbf{\Lambda}$.

\mathbf{r} — вектор-строка стационарного распределения вероятностей состояний процесса $n(t)$:

$$\begin{cases} \mathbf{r}\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}\mathbf{e} = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Нетрудно показать, что интенсивность входящего потока равна $\lambda = \mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}$, где \mathbf{e} — единичный вектор столбец.

Если входящая заявка видит прибор свободным, то она занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с интенсивностью μ_1 или μ_2 , где параметр обслуживания будет зависеть от количества заявок на орбите в данный момент. Пусть I — некоторая заданная граница числа заявок на орбите, при достижении которой меняется интенсивность обслуживания. То есть, если на орбите заявок меньше, чем заданная граница I , то прибор будет обслуживать заявки с параметром μ_1 , и соответственно, если на орбите находится больше или равно I заявок, то обслуживание будет

происходить с параметром μ_2 . Если поступившая заявка видит, что прибор занят, то она переходит на орбиту, где находится случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром σ . С орбиты заявка еще раз обращается к обслуживающему устройству. Если прибор свободен, то заявка начинает обслуживание, если же он занят, то заявка мгновенно возвращается на орбиту для реализации следующей задержки случайной продолжительности.

Пусть выполняется: $\mathbf{r}\rho\mathbf{Ae} = \mu_2$, тогда загрузка системы определяется как

$$\rho = \lambda/\mu_2.$$

Обозначим

- $i(t)$ – случайный процесс числа заявок на орбите;
- $n(t)$ – цепь Маркова, управляющая ММРР-потокком;
- $k(t)$ определяет состояние прибора как:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Очевидно, что трёхмерный случайный процесс $\{k(t), n(t), i(t)\}$ является Марковским. Ставится задача найти стационарное распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов такой системы.

2. Система уравнений Колмогорова

Обозначим $P(k, n, i, t) = P\{k(t) = k, n(t) = n, i(t) = i\}$ – вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k , управляющая ММРР-потокком цепь Маркова – в состоянии n , и на орбите находится i заявок. Составим дифференциальные уравнения Колмогорова:

$$i < I$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P(0, n, i, t)}{\partial t} = -(\rho\lambda_n + i\sigma - q_{nn})P(0, n, i, t) + \mu_1 P(1, n, i, t) + \\ \quad + \sum_{v \neq n} P(0, v, i, t)q_{vn}, \\ \frac{\partial P(1, n, i, t)}{\partial t} = -(\rho\lambda_n + \mu_1 - q_{nn})P(1, n, i, t) + \\ \quad + \rho\lambda_n P(0, n, i, t) + (i+1)\sigma P(0, n, i+1, t) + \\ \quad + \rho\lambda_n P(1, n, i-1, t) + \sum_{v \neq n} P(1, v, i, t)q_{vn}. \end{array} \right. \quad (2)$$

$i \geq I$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P(0, n, i, t)}{\partial t} = -(\rho\lambda_n + i\sigma - q_{nn})P(0, n, i, t) + \mu_2 P(1, n, i, t) + \\ + \sum_{v \neq n} P(0, v, i, t)q_{vn}, \\ \frac{\partial P(1, n, i, t)}{\partial t} = -(\rho\lambda_n + \mu_2 - q_{nn})P(1, n, i, t) + \\ + \rho\lambda_n P(0, n, i, t) + (i+1)\sigma P(0, n, i+1, t) + \\ + \rho\lambda_n P(1, n, i-1, t) + \sum_{v \neq n} P(1, v, i, t)q_{vn}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Обозначим вектор-строки: $\mathbf{P}(k, i) = \{P(k, 1, i), P(k, 2, i), \dots, P(k, N, i)\}$, где $P(k, n, i)$ - стационарные вероятности процесса $\{k(t), n(t), i(t)\}$. Тогда в стационарном режиме в матричной форме система (1)–(2) примет вид:

$i < I$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}(0, i)(\mathbf{Q} - \rho\Lambda - i\sigma\mathbf{I}) + \mu_1 \mathbf{P}(1, i) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}(1, i)(\mathbf{Q} - \rho\Lambda - \mu_1\mathbf{I}) + \mathbf{P}(0, i)\rho\Lambda + \\ + \sigma(i+1)\mathbf{P}(0, i+1) + \mathbf{P}(1, i-1)\rho\Lambda = \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (4)$$

$i \geq I$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}(0, i)(\mathbf{Q} - \rho\Lambda - i\sigma\mathbf{I}) + \mu_2 \mathbf{P}(1, i) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}(1, i)(\mathbf{Q} - \rho\Lambda - \mu_2\mathbf{I}) + \mathbf{P}(0, i)\rho\Lambda + \\ + \sigma(i+1)\mathbf{P}(0, i+1) + \mathbf{P}(1, i-1)\rho\Lambda = \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (5)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица.

Перейдем к частичным характеристическим функциям:

$$\mathbf{H}(k, u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju_i} \mathbf{P}(k, i),$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Таким образом, из системы (4)–(5) имеем следующую систему уравнений для характеристических функций:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}(0, u)(\mathbf{Q} - \rho\Lambda) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(0, u)}{\partial u} + \mu_1 S_1(u) + \mu_2 S_2(u) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{H}(1, u)(\mathbf{Q} - \rho\Lambda) - \mu_1 S_1(u) - \mu_2 S_2(u) + \mathbf{H}(0, u)\rho\Lambda - \\ - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(0, u)}{\partial u} + e^{ju} \mathbf{H}(1, u)\rho\Lambda = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (6)$$

где

$$S_1(\bar{u}) = \sum_{i=0}^{I-1} \mathbf{P}(1, i) e^{ju i},$$

$$S_2(\bar{u}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(1, i) e^{ju i}.$$

Очевидно, что $S_1(u) + S_2(u) = \mathbf{H}(1, u)$

3. Метод Асимптотического анализа в условии большой загрузки

Будем решать систему (6) методом асимптотического анализа в условии большой загрузки $\rho \rightarrow 1$ [5]. В результате исследований была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите в условии большой загрузки в RQ-системе ММРР|M|1 с переключением прибора имеет вид характеристической функции гамма-распределения.

$$h(u) = \left(1 - \frac{ju}{(1-\rho)\beta} \right)^{-\alpha} \quad (7)$$

с параметрами

$$\alpha = 1 + \frac{\mu_2}{\sigma} \beta, \quad \beta = \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mathbf{v}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} - \mu_2 \mathbf{v}\mathbf{e}},$$

где вектор \mathbf{v} является решением неоднородной системы $\mathbf{v}\mathbf{Q} = \mathbf{r}(\mu_2\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})$.

Заключение

Таким образом, в работе исследована однолинейная RQ-система с входящим ММРР-потокком заявок с переключением прибора, где интенсивность обслуживания зависит от числа заявок на орбите (имеет два значения). Было доказано, что асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите в условии большой загрузки имеет вид гамма-распределения (7) с найденными параметрами. Численный анализ результатов показал ограниченную область применимости предложенного метода, в связи с чем в будущих исследованиях планируется разработать новые модификации метода асимптотического анализа [6] для RQ-систем с переключением прибора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Falin G. I., Templeton J. G. C.* Retrial queues // London: Chapman and Hall. 1997. Vol. 7. № 1. P. 127–167.
2. *Artalejo J. R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems. A Computational Approach. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 267 p.
3. *Zhang, X., Wang, J., Ma, Q.* Optimal design for a retrial queueing system with state-dependent service rate // Journal of Systems Science and Complexity, 2017. Vol. 30(4), P. 883–900.
4. *Jain, M., Sanga, S.S.* F-Policy for M/M/1/K Retrial Queueing Model with State-Dependent Rates. // Performance Prediction and Analytics of Fuzzy, Reliability and Queuing Models. Asset Analytics. Singapore: Springer, 2019. P. 127–138.
5. *Fedorova E., Danilyuk E., Nazarov A., Melikov A.* Retrial Queueing System MMPP|M|1 with Impatient Calls Under Heavy Load Condition // Lecture Notes in Computer Science, 2019. Vol. 11688. P. 3–15.
6. *Назаров А.А., Фёдорова Е.А.* Модификация метода асимптотического анализа в условии большой загрузки на примере RQ-системы M/M/1 // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. Т. 4(37). С. 57–64.

Хаджи-Оглы Ксения Руслановна — Студент кафедры Теории вероятностей и математической статистики ИПМКН ТГУ. E-mail: 494xad@mail.ru

Фёдорова Екатерина Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Теории вероятностей и математической статистики ИПМКН ТГУ. E-mail: moiskate@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ M/M/1/N-1 С ПРИОРИТЕТАМИ И ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ

С. В. Рожкова^{1,2}, Е. Ю. Титаренко^{1,2}

¹ *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

² *Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск, Россия*

В работе исследована RQ-система M/M/1/N-1 с мгновенной и отложенной обратными связями. Приоритетные заявки приходят с некоторой вероятностью и попадают на обслуживание, если обслуживающий прибор свободен, а если прибор занят, то становятся в очередь. Если буфер заполнен, то заявка попадает на орбиту, где ожидает случайное время и повторяет попытку попасть на обслуживание или в очередь. Не приоритетные заявки сразу попадают на орбиту. После обслуживания заявка либо покидает систему, либо повторно поступает на обслуживание, либо переходит на орбиту. В работе показано, что асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите при условии растущего среднего времени ожидания на орбите является гауссовским. **Ключевые слова:** *асимптотический анализ, RQ-система, обратная связь, приоритетные заявки.*

Введение

В современных сетях к гетерогенному трафику (голос, видео, компьютерные данные и т.д.) предъявляются различные требования к показателям качества обслуживания. Эффективным способом удовлетворения противоречивых требований разнородных вызовов (пакетов) является использование схем приоритетов. Различные типы схем приоритетов в моделях массового обслуживания уже исследованы [1]. В последнее время интенсивно исследуются новые типы схем приоритетов [2, 3]. Полезными инструментами для моделирования стохастических процессов, возникающих в сетях связи, колл-центрах, системах очередей являются очереди с повторными вызовами и обратной связью [4].

В данной статье рассматривается система с повторными вызовами, имеющая один обслуживающий прибор и буфер, содержащий $N - 1$ мест для ожидания. Приоритетная входящая заявка сразу поступает на обслуживание, а застав прибор занятым, попадает в очередь. Если

буфер заполнен, то заявка попадает на орбиту, где ожидает случайное время и повторяет попытку попасть на обслуживание или в очередь. Не приоритетная входящая заявка сначала попадает на орбиту. В системе учитывается возможность повторного обслуживания в виде мгновенной и отсроченной обратной связи. Система исследуется методом асимптотического анализа при условии растущего среднего времени ожидания заявок на орбите.

1. Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим RQ-систему $M/M/1/N-1$ (рис. 1). На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . С вероятностью p приходит приоритетная заявка и поступает на обслуживание, если прибор свободен. Иначе заявка становится в очередь, а при отсутствии мест в буфере попадает на орбиту. Не приоритетная заявка сразу попадает на орбиту. Время обслуживания распределено по экспоненциальному закону с параметром μ . Заявка, обслуживание которой завершено, покидает систему с вероятностью r_0 , мгновенно поступает на повторное обслуживание с вероятностью r_1 или переходит на орбиту с вероятностью r_2 , т.е. $r_0 + r_1 + r_2 = 1$. На орбите заявки ожидают повторного обслуживания в течение времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром σ , после чего делают попытку встать в очередь. При отсутствии мест в буфере заявки остаются на орбите.

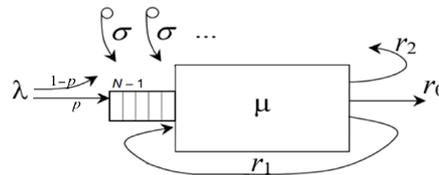


Рис. 1. Схема системы

Обозначим $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t , процесс $n(t)$ определяет состояние прибора и буфера для ожидания следующим образом: $n(t) = 0$, если прибор свободен; $n(t) = n$, если прибор занят и в очереди $n - 1$ заявка, $n = \overline{1, N}$. Двумерный процесс $\{i(t), n(t)\}$ является цепью Маркова с непрерывным временем. Обозначим вероятности числа заявок на орбите с учетом состояния прибора $P_n(i, t) = P \{i(t) = i, n(t) = n\}$, $n = \overline{0, N}$; $i = \overline{0, \infty}$. Требуется найти стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите.

2. Уравнения Колмогорова

Для стационарного распределения вероятностей $P_n(i) \equiv P_n(i, t)$, запишем систему уравнений

$$\begin{aligned} & -(\lambda + i\sigma)P_0(i) + \lambda(1-p)P_0(i-1) + \mu r_0 P_1(i) + \mu r_2 P_1(i-1) = 0; \\ & \lambda p P_{n-1}(i) + (i+1)\sigma P_{n-1}(i+1) + \lambda(1-p)P_n(i-1) - (\lambda + \mu r_0 + \mu r_2 + \\ & + i\sigma)P_n(i) + \mu r_0 P_{n+1}(i) + \mu r_2 P_{n+1}(i-1) = 0, \quad n = \overline{1, N-1}; \\ & (i+1)\sigma P_{N-1}(i+1) - (\lambda + \mu r_0 + \mu r_2)P_N(i) + \lambda p P_{N-1}(i) + \\ & + \lambda P_N(i-1) = 0. \end{aligned}$$

Введем частичные характеристические функции числа заявок на орбите $H_n(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju} P_n(i)$ и преобразуем систему к виду

$$\begin{aligned} & -\lambda H_0(u) + j\sigma \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} + \lambda(1-p)e^{ju} H_0(u) + (\mu r_0 + \mu r_2 e^{ju}) H_1(u) = 0; \\ & \lambda p H_{n-1}(u) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_{n-1}(u)}{\partial u} + \lambda(1-p)e^{ju} H_n(u) + j\sigma \frac{\partial H_n(u)}{\partial u} - \\ & - (\lambda + \mu r_0 + \mu r_2) H_n(u) + (\mu r_0 + \mu r_2 e^{ju}) H_{n+1}(u) = 0, \quad n = \overline{1, N-1}; \\ & \lambda p H_{N-1}(u) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_{N-1}(u)}{\partial u} - (\lambda - \lambda e^{ju} + \mu r_0 + \mu r_2) H_N(u) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Полная характеристическая функция числа заявок на орбите имеет вид $H(u) = \sum_{n=0}^N H_n(u)$. Сложим уравнения системы (2), получим

$$\mu r_2 \sum_{n=1}^N H_n(u) + (1-p)\lambda \sum_{n=0}^{N-1} H_n(u) + j\sigma e^{-ju} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial H_n(u)}{\partial u} + \lambda H_N(u) = 0. \quad (2)$$

3. Асимптотика первого порядка

Решим уравнения для характеристической функции (2), (3) при асимптотическом условии растущего среднего времени ожидания на орбите, то есть будем полагать, что $\sigma \rightarrow 0$.

Теорема 1. Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в RQ-системе $M/M/1/N-1$ с приоритетами и обратными связями, тогда для последовательности характеристических функций выполняется равенство $\lim_{\sigma \rightarrow 0} M \{e^{jwi(t)\sigma}\} = e^{jw\kappa_1}$, где κ_1 является решением уравнения

$$\frac{d^N - 1}{d - 1} \kappa_1 = (\lambda - \lambda p + \mu r_2) \frac{d^{N+1} - 1}{d - 1} - \mu r_2 + \lambda p d^N, \quad d(\kappa) = \frac{\lambda p + \kappa_1}{\mu r_0 + \mu r_2}. \quad (3)$$

Доказательство. Обозначим $\sigma = \varepsilon$ и сделаем в системе (2), (3) замены: $u = \varepsilon w$, $H_n(u) = F_n(w, \varepsilon)$, $n = \overline{0, N}$. В полученной системе уравнений выполним предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ и обозначим $F_n(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_n(w, \varepsilon)$. Будем искать решение системы в виде $F_n(w) = R_n \Phi(w) + O(\varepsilon)$. После преобразований получим систему

$$\begin{aligned} & -\lambda R_0 + jR_0 \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} + \lambda(1-p)R_0 + (\mu r_0 + \mu r_2) R_1 = 0; \\ & \lambda p R_{n-1} - jR_{n-1} \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} + \lambda(1-p)R_n + jR_n \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} - \\ & - (\lambda + \mu r_0 + \mu r_2) R_n + (\mu r_0 + \mu r_2) R_{n+1} = 0, \quad n = \overline{1, N-1}; \quad (4) \\ & \lambda p R_{N-1} - jR_{N-1} \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} - (\mu r_0 + \mu r_2) R_N = 0; \\ & \mu r_2 \sum_{n=1}^N R_n + (1-p)\lambda \sum_{n=0}^{N-1} R_n + j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} \sum_{n=0}^{N-1} R_n + \lambda R_N = 0. \end{aligned}$$

Из системы (7) видно, что $\Phi'(w)/\Phi(w)$ не зависит от w , тогда можно обозначить $\Phi'(w)/\Phi(w) = j\kappa_1$ и записать $\Phi(w)$ в виде $\Phi(w) = \exp\{jw\kappa_1\}$, что и утверждается в формулировке теоремы. Решая первые $N+1$ уравнений системы (7) с учетом условия $\sum_{n=0}^N R_n = 1$, получим $R_n = \frac{d^n(d-1)}{d^{N+1}-1}$, а из последнего уравнения системы получим алгебраическое уравнение (3) для κ_1 . В общем случае алгебраическое уравнение N степени имеет N корней. Многочисленные численные эксперименты показали, что среди корней только один действительный положительный корень, который и будет значением κ_1 . ■

Из теоремы 1 следует, что $F_n(w) = R_n e^{j\kappa_1 w}$, $n = \overline{0, N}$, тогда асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите имеет вид $H(u) = \sum_{n=0}^N F_n(w, \varepsilon) \approx \sum_{n=0}^N F_n(w) = \exp\{j\kappa_1 w\} = \exp\{j \frac{\kappa_1}{\sigma} u\}$.

4. Асимптотика второго порядка

Теорема 2. Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в RQ-системе $M/M/1/N-1$ с приоритетами и обратными связями, тогда для последовательности характеристических функций выполняется равенство $\lim_{\sigma \rightarrow 0} M \left\{ e^{jw\sqrt{\sigma}(i(t)-\kappa_1/\sigma)} \right\} = \exp\left\{ (jw)^2 \kappa_2 / 2 \right\}$, где

$$\kappa_2 = \frac{\kappa_1(1-R_N) - \mu r_2 g_0 + (\lambda p + \kappa_1) g_N}{1 - R_N + \mu r_2 \varphi_0 - (\lambda p + \kappa_1) \varphi_N}, \quad (5)$$

$$\varphi_n = \frac{(n-N)d^{n+N+1} + (N-n+1)d^{n+N} - (n+1)d^n + nd^{n-1}}{(d^{N+1}-1)^2(\mu r_0 + \mu r_2)}, n = \overline{0, N},$$

а функции g_0 и g_N являются решением системы уравнений

$$\begin{aligned} & -(\lambda p + \varkappa_1)g_0 + (\mu r_0 + \mu r_2)g_1 = -\lambda(1-p)R_0 - \mu r_2 R_1; \\ & (\lambda p + \varkappa_1)g_{n-1} - (\lambda p + \varkappa_1 + \mu r_0 + \mu r_2)g_n + (\mu r_0 + \mu r_2)g_{n+1} = \\ & = \varkappa_1 R_{n-1} - \lambda(1-p)R_n - \mu r_2 R_{n+1}, \quad n = \overline{1, N-1}; \\ & (\lambda p + \varkappa_1)g_{N-1} - (\mu r_0 + \mu r_2)g_N = \varkappa_1 R_{N-1} - \lambda R_N. \end{aligned}$$

Доказательство. В системе уравнений (2), (3) выполним замену $H_n(u) = H_n^{(2)}(u)e^{ju\varkappa_1/\sigma}$, $n = \overline{0, N}$. Здесь $H_n^{(2)}(u)$ – характеристическая функция центрированной случайной величины $i(t) - \varkappa_1/\sigma$. Затем обозначим $\sigma = \varepsilon^2$ и введем замену $u = \varepsilon w$, $H_n^{(2)}(u) = F_n^{(2)}(w, \varepsilon)$, $n = \overline{0, N}$. Решение полученной системы запишем в виде разложения $F_n^{(2)}(w, \varepsilon) = \Phi_2(w)(R_n + j\varepsilon w f_n) + O(\varepsilon^2)$. После преобразований, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы 1, можно обозначить $\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} = -\varkappa_2$ и записать $\Phi_2(w) = \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\varkappa_2\right\}$. Тогда после замены $f_n = C \cdot R_n + g_n + \varkappa_2 \varphi_n$, $n = \overline{0, N}$ получим (5). ■

Теорема 2 показывает, что асимптотическая функция числа заявок на орбите в RQ-системе $M/M/1/N-1$ с приоритетами и обратными связями является характеристической функцией гауссовской случайной величины с математическим ожиданием \varkappa_1/σ и дисперсией \varkappa_2/σ , что позволяет для распределения $P(i)$ построить аппроксимацию вида $P_{asimp}(i) = \frac{G(i+0.5) - G(i-0.5)}{1 - G(-0.5)}$, где $G(x)$ – функция нормального распределения.

5. Численные результаты

Рассмотрим систему с параметрами $\lambda = 2, r_0 = 0.5, r_1 = 0.3, r_2 = 0.2$. Определим точность аппроксимации с помощью расстояния Колмогорова $\Delta = \max_{0 \leq k \leq N} \left| \sum_{i=0}^k (P_{asimp}(i) - P(i)) \right|$. Здесь распределение $P(i)$ получено в результате имитационного моделирования. В таблице 1 приведены расстояния при различных значениях параметра p , σ и загрузке системы $\rho = \lambda/(\mu r_0)$.

Из таблицы видно, что асимптотический метод можно применять при $\sigma < 0.1$ или $\sigma < 0.01$ в зависимости от загрузки системы.

Таблица 1

Расстояния Колмогорова

p	ρ	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0,01$
0.8	0.5	0.122	0.019	0.017
	0.9	0.167	0.075	0.029
0.2	0.5	0.065	0.012	0.007
	0.9	0.163	0.093	0.044

Заключение

В работе проведено исследование системы массового обслуживания $M/M/1/N-1$ с приоритетами, обратными связями и повторными вызовами. Показано, что асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите при условии растущего среднего времени ожидания на орбите является гауссовским с параметрами κ_1/σ и $\sqrt{\kappa_2}/\sigma$. Получены уравнения для нахождения параметров распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lee Y., Choi B. D. Queuing system with multiple delay and loss priorities for ATM networks // Information Sciences. 2001. Vol. 138(1-4). P. 7–29.
2. Demoor T., Fiems D., Walraevens J., Brunel H. Partially shared buffers with full or mixed priority // Journal of Industrial and Management Optimization. 2011. Vol. 7(3). P. 735–751.
3. Youngjin Oh, Kim, C. S., Melikov, A. Z. A Space Merging Approach to the Analysis of the Performance of Queueing Models with Finite Buffers and Priority Jumps // Industrial Engineering & Management Systems. 2013. Vol. 12. № 3. P. 274–280.
4. Melikov A. Z., Sztrik J., Aliyeva S. H. Analysis of retrial queues with delayed feedback. // Miskolc Mathematical Notes. 2021. Vol. 22. № 2. P. 769–782.

Рожкова Светлана Владимировна — д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор, отделение математики и информатики ШБИП ТПУ, кафедра теории вероятностей и математической статистики, Институт прикладной математики и компьютерных наук ТГУ. E-mail: rozhkova@tpu.ru

Титаренко Екатерина Юрьевна — аспирант, старший преподаватель, отделение информационных технологий ИШИТР ТПУ, физический факультет ТГУ. E-mail: teu@tpu.ru

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ ТРЕБОВАНИЙ

М. Пагано¹, Е. П. Станкевич², И. Е. Тананко²

¹ *Пизанский университет, г. Пиза, Италия*

² *Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия*

Рассматривается система массового обслуживания с одним обслуживающим прибором, очередью бесконечной длины и пуассоновским входящим потоком. Прибор обслуживает требования группами фиксированного размера. Длительность обслуживания группы требований является случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение. Получено приближенное выражение для вычисления оптимальной интенсивности входящего потока, при которой обеспечивается минимум математического ожидания длительности пребывания требований в системе. **Ключевые слова:** *система массового обслуживания, групповое обслуживание, интенсивность входящего потока, оптимизация.*

Введение

В настоящее время системы и сети массового обслуживания широко применяются в качестве математических моделей многих дискретных стохастических систем. В связи с практической значимостью таких моделей интерес представляет решение задач оптимизации и управления [1, 2, 3], которое обеспечивает экономически выгодное функционирование реальных систем. Одним из актуальных и активно развивающихся направлений теории массового обслуживания является анализ, оптимизация и исследование систем и сетей с групповым обслуживанием требований [4, 5, 6]. В работе [6] для открытой сети массового обслуживания с групповым обслуживанием требований найден оптимальные размер групп требований, которые должны обслуживаться в системах сети, чтобы м. о. длительности пребывания требований в сети было минимальным. В данной работе для систем обслуживания, входящих в

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006)

состав сети, рассмотренной в [6], получено приближенное выражение для вычисления интенсивности входящего потока, при котором математическое ожидания (м. о.) длительности пребывания требований в системе минимально.

Описание системы

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ . Система включает один обслуживающий прибор, который обслуживает требования группами фиксированного размера b , а также очередь бесконечной длины. Если прибор закончил обслуживание группы требований и в очереди в этот момент находится меньше чем b требований, то прибор будет простаивать до тех пор, пока в системе накопится b требований, иначе на обслуживание выбирается ровно b требований. Длительность обслуживания группы требований является случайной величиной, которая имеет экспоненциальное распределение с параметром μ .

Предполагается, что система функционирует в стационарном режиме, поэтому коэффициент использования

$$\rho = \frac{\lambda}{b\mu} < 1.$$

В работе [5] показано, что интенсивности обслуживания $\tilde{\mu}(n)$ эквивалентного процесса размножения и гибели, зависящие от состояния n , определяются системой

$$\begin{cases} \tilde{\mu}(n) = \lambda - \mu \frac{\lambda^b}{\tilde{\mu}(n+1) \cdot \dots \cdot \tilde{\mu}(b+n)}, & 1 \leq n \leq b-1, \\ \tilde{\mu}(n) = \lambda + \mu - \mu \frac{\lambda^b}{\tilde{\mu}(n+1) \cdot \dots \cdot \tilde{\mu}(b+n)}, & n \geq b. \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(n)$. После упрощения система уравнений (1) сводится к уравнению, полученному в работе [5],

$$M^{b+1} - (\lambda + \mu)M^b + \lambda^b \mu = 0, \quad (2)$$

имеющему при любых b только один корень, удовлетворяющий условию стабильности. Как показано в работе [5], этот корень принадлежит интервалу

$$\left(\frac{b(\lambda + \mu)}{b+1}, \frac{(\lambda + \mu)^{b+1} - \lambda^b \mu}{(\lambda + \mu)^b} \right), \quad (3)$$

откуда, в частности, следует, что $M > \lambda$.

Задача оптимизации

Математическое ожидание длительности пребывания требований в системе $M|M^b|1$ получено в работе [6]

$$\bar{u} = \frac{b-1}{2\lambda} + \frac{1}{M-\lambda}. \quad (4)$$

Используя формулы производных сложных и неявных функций [7] для (2) и (3), получаем

$$\frac{dM}{d\lambda} = -\frac{b\lambda^{b-1}\mu - M^b}{M^b - \frac{b\lambda^b\mu}{M}}, \quad (5)$$

и

$$\frac{du}{d\lambda} = -\frac{b-1}{2\lambda^2} + \frac{1}{(M-\lambda)^2} \left(1 - \frac{dM}{d\lambda} \right). \quad (6)$$

Наша цель найти интенсивность входящего потока, при которой м.о. длительности пребывания требований в системе \bar{u} минимально. Для этого рассмотрим уравнение

$$\frac{du}{d\lambda} = 0. \quad (7)$$

Подставив выражения (4) и (5) в уравнение (7), получим

$$-\frac{b-1}{2\lambda^2} + \frac{1}{(M-\lambda)^2} \left(1 + \frac{b\lambda^{b-1}\mu - M^b}{M^b - \frac{b\lambda^b\mu}{M}} \right) = 0. \quad (8)$$

После упрощения, выражение (6) принимает вид

$$M^{b+1} - M\lambda^b(1+b) + \frac{b(3-b)}{1-b}\lambda^{b+1} = 0, \quad (9)$$

где M принадлежит интервалу (3).

Если $b = 2$ и $b = 3$, то уравнение (7) имеет корни $\lambda_{opt} = M/2$ и $\lambda_{opt} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}M$, удовлетворяющие условию стабильности, соответственно, а для остальных значений b найти корень в явном виде не представляется возможным.

Найдем приближенные значения корня уравнения (7) для $b > 3$. Обозначим $\frac{M}{\lambda} = x$ и перепишем уравнение (7) в виде

$$x^{b+1} - (1+b)x + \frac{b(3-b)}{1-b} = 0 \quad \text{для } x > 1.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^{b+1} - (1+b)x + \frac{b(3-b)}{1-b} \quad \text{при } b > 3.$$

Найдем производную

$$f'(x) = (b+1)(x^b - 1).$$

Производная $f'(x) > 0$ при $x > 1$, то есть возрастает при всех значениях M , принадлежащих интервалу (3). Легко проверить, что $f(1) < 0$ и $f(2) > 0$, а так как $f(x)$ возрастает при $x > 1$, то при $x \in (1, 2)$ уравнение $f(x) = 0$ имеет один корень. Следовательно, (7) тоже имеет один корень, являющийся точкой минимума для (3).

Представим x в виде

$$x(b) = 1 + \frac{\alpha}{b} + o\left(\frac{1}{b}\right),$$

тогда

$$\left(1 + \frac{\alpha}{b}\right)^{b+1} - (b+1)\left(1 + \frac{\alpha}{b}\right) + \frac{b(3-b)}{1-b} + o\left(\frac{1}{b}\right) = 0$$

или

$$\begin{aligned} e^\alpha - b - \alpha - 1 + b - 2 + o(1) &= 0, \\ e^\alpha - (\alpha + 3) &= 0. \end{aligned}$$

Решая численно это уравнение, получаем два корня $\alpha_1 = -2,9475$ и $\alpha_2 = 1,5052$. Так как $x > 1$, а значит и $\alpha > 0$, получаем

$$x(b) = 1 + \frac{1,5052}{b}. \quad (10)$$

Таким образом,

$$M = \frac{\lambda(b + 1,5052)}{b}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (3), получаем приближенное значение м. о. длительности пребывания требований в системе

$$\bar{u}_{min} = \frac{b-1}{2\lambda} + \frac{b}{\lambda(b + 0,5052)}.$$

Разделим уравнение (2) на λ^{b+1}

$$\frac{M^{b+1}}{\lambda^{b+1}} - \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) \frac{M^b}{\lambda^b} + \frac{\mu}{\lambda} = 0.$$

Используя введенное выше обозначение $\frac{M}{\lambda} = x$, получим

$$\lambda = \mu \frac{x^b(b) - 1}{x^{b+1}(b) - x^b(b)},$$

которое является оптимальной интенсивностью входящего потока, обеспечивающей минимум \bar{u} .

Численный пример

В табл. 1 приведены численные значения и приближенные значения оптимальных интенсивности входящего потока и м. о. длительности пребывания требований в системе, а также соответствующие относительные погрешности вычислений для $b > 3$. Из табл. 1 видно, что наиболь-

Таблица 1

Таблица точных и приближенных значений λ и \bar{u}

b	λ_{opt}	λ_{appr}	RE (%)	\bar{u}_{min}	\bar{u}_{appr}	RE (%)
4	1.7965	1.9168	6.6928	2.1617	2.1689	0.3371
5	2.3146	2.4307	5.0175	2.1850	2.1894	0.2008
6	2.8320	2.9455	4.0094	2.1991	2.2020	0.1332
7	3.3491	3.4609	3.3371	2.2084	2.2105	0.0947
8	3.8662	3.9766	2.8572	2.2151	2.2166	0.0708
9	4.3831	4.4926	2.4976	2.2200	2.2212	0.0549
10	4.9001	5.0088	2.2182	2.2238	2.2248	0.0439
20	10.0689	10.1742	1.0460	2.2394	2.2397	0.0103
40	20.4064	20.5101	0.5083	2.2463	2.2464	0.0025
70	35.9129	36.0159	0.2869	2.2491	2.2491	0.0008
100	51.4193	51.5222	0.1999	2.2502	2.2502	0.0004

шая относительная погрешность составляет около 7 % при вычислении приближенного значения интенсивности входящего потока для $b = 4$, а при увеличении размера группы требований относительная погрешность стремится к нулю. Относительная погрешность при вычислении приближенного значения м. о. длительности пребывания требований в системе меньше 1 % при любых b .

Заключение

Полученные приближенные выражения позволяют вычислять минимальное значение м. о. длительности пребывания требований для раз-

личных интенсивностей входящих потоков и размеров групп требований. Результат работы может быть использован для анализа систем с групповой обработкой большого числа объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zeng Y., Xia C., H.* Optimal Bulking Threshold of Batch Service Queues // J. Appl. Prob. 2017. Vol. 54. P. 409–423.
2. *Lazar A., A.* The Throughput Time Delay Function of an M|M|1 Queue // IEEE Trans. Inf. Theory. 1983. Vol. 29. P. 914–918.
3. *Stidham Jr. S.* Optimal Design of Queueing Systems. New York: Chapman and Hall/CRC, 2009. 384 p.
4. *Stankevich E., Tananko I., Pagano M.* Analysis of Open Queueing Networks with Batch Services // In: Dudin, A., Nazarov, A., Moiseev, A. (eds) Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2021. Communications in Computer and Information Science, Cham: Springer, 2022. P. 40–51.
5. *Станкевич Е. П., Тананко И. Е., Пагано М.* Анализ системы массового обслуживания с групповым обслуживанием требований // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Международной научной конференции (Саратов, СГУ, 18-20 ноября 2021 г.). Саратов: ООО Издательство “Научная книга”, 2021. С. 148–151.
6. *Stankevich E., Tananko I., Pagano M.* Optimization of Open Queueing Networks with Batch Services // Mathematics. 2022. Vol. 10. Art.Num. 3027.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Том I: 24-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. 624 с.

Пагано Микеле — PhD, профессор, департамент информационной инженерии. E-mail: *Michele.Pagano@iet.unipi.it*

Станкевич Елена Петровна — к. ф. - м. н., доцент, кафедра системного анализа и автоматического управления. E-mail: *StankevichElena@mail.ru*

Тананко Игорь Евстафьевич — к. ф. - м. н., доцент, заведующий кафедрой, кафедра системного анализа и автоматического управления. E-mail: *TanankoIE.sgu@gmail.com*

СРАВНЕНИЕ ОСНОВНЫХ КРИТЕРИЕВ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ АЛГОРИТМА С ИНФОРМАТИВНЫМ ПЕШЕХОДНЫМ ПОТОКОМ

С. А. Лембриков, Е. В. Кувыкина

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Работа посвящена изучению специального класса алгоритмов с обратной связью применительно к управлению потоками транспорта и пешеходов на перекрёстке. Изменение интенсивности и вероятностной структуры входных потоков является отличительной чертой систем управления дорожным движением. Рассмотрен ряд показателей оптимальности работы данного алгоритма, а именно, средние задержки произвольного требования на перекрёстке и среднее значение очереди по потокам. Изучена зависимость параметров управления, полученных при помощи данных критериев оптимальности, от параметров потоков Барлетта. Проведено сравнение рассмотренных показателей качества работы системы в зависимости от конкретной ситуации. **Ключевые слова:** *средние задержки, средняя длина очереди, поток Барлетта, поток Пуассона, транспортный поток, пешеходный поток, транспортная пачка.*

Введение

Задачи регулирования перекрёстков представляют значительный интерес. Эффективное управление потоками машин и пешеходов благотворно сказывается на экологической ситуации и безопасности людей. Специфической особенностью транспортных систем являются изменения вероятностной структуры входных потоков под влиянием случайных условий, таких как аварии, ухудшение погодных условий и другие. Эти факторы приводят к ограничению возможностей маневрирования. За машинами, движущимися с малыми скоростями, скапливаются быстрые, ожидающие благоприятного момента для обгона, и это приводит к образованию транспортных пачек [1]. Отметим, что в рассматриваемой системе предусмотрены специальные периоды для обслуживания потока пешеходов. Это актуально, например, для перекрёстков, расположенных вблизи школ. Данная статья посвящена изучению основных критериев эффективности работы таких систем.

1. Постановка задачи

В статье рассматривается работа перекрёстка, который представлен как система массового обслуживания с ожиданием. В систему поступает три независимых конфликтных потока Π_1, Π_2 и Π_3 , где Π_1 и Π_2 являются потоками машин, а Π_3 — потоком пешеходов. При этом все они обслуживаются в непересекающиеся промежутки времени.

Обслуживающее устройство (ОУ) имеет восемь состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(8)}$. В состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ происходит обслуживание потока $\Pi_j, j = \overline{1, 3}$. Кроме того, пешеходный поток Π_3 дополнительно обслуживается в состоянии $\Gamma^{(7)}$. Переход в состояния $\Gamma^{(5)}$ и $\Gamma^{(7)}$ происходит лишь в случае, если очередь по потоку Π_3 превышает критические значения N_1 и N_2 соответственно. Состояния $\Gamma^{(2)}, \Gamma^{(4)}, \Gamma^{(6)}$ и $\Gamma^{(8)}$ соответствуют жёлтому свету. В каждом состоянии $\Gamma^{(r)}$ ОУ находится некоторое фиксированное время T_r , причём длительности жёлтого света и длительности T_5 и T_7 обслуживания пешеходов являются константами и выбираются из условий безопасности движения на данном перекрёстке [2]. Управляющими параметрами системы являются времена пребывания ОУ в состояниях $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(3)}$. Смена состояний ОУ происходит в соответствии с направленным графом, приведённом на рис. 2.

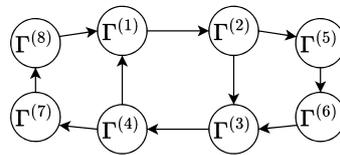


Рис. 1. Граф смены состояний работы ОУ

Пешеходный поток Π_3 полагается пуассоновским, так как движение пешеходов происходит с относительно малой скоростью и не зависит от внешних условий. Потоки Π_1 и Π_2 полагаются потоками Бартлетта, которые являются математической моделью потоков транспортных пачек и описываются нелокально с помощью векторной случайной последовательности $\{(\tau_i, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}), i \geq 0\}$ [3, 4]. В качестве моментов наблюдения $\tau_i, i \geq 0$ выбираются моменты поступления первых требований в пачках. Случайные величины $\eta_{j,i}$ описывают число заявок, поступивших по потоку Π_j за i -ый такт наблюдения $[\tau_i, \tau_{i+1})$, то есть число заявок в i -ой пачке потока Π_j , и имеют следующее распределение:

$$\begin{cases} P(\eta_{j,i} = 1) = 1 - r_j \\ P(\eta_{j,i} = k) = r_j \cdot (1 - g_j) \cdot g_j^{k-2}, k \geq 2, \end{cases} \quad (1)$$

где r_j, g_j — параметры распределения, $0 < r_j, g_j < 1, j = 1, 2$.

Параметр g_j связан со средней длиной пачки или, другими словами, средним количеством заявок в пачке $M\eta_{j,i}$. Параметр r_j — это вероятность того, что в систему поступает пачка из двух и более заявок, $j = 1, 2$. Ниже приведена формула, описывающая их соотношение:

$$r_j = (M\eta_{j,i} - 1) \cdot (1 - g_j), j = 1, 2 \quad (2)$$

Для системы с ожиданием можно выделить две важнейшие характеристики, которые определяют качество её работы. Первой из них являются средние задержки γ произвольного требования на перекрёстке [5], которые вычисляются по следующей формуле:

$$\gamma = (\lambda_1 \cdot \gamma_1 + \lambda_2 \cdot \gamma_2 \cdot \lambda_3 \cdot \gamma_3) / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \quad (3)$$

где λ_j — интенсивность Π_j , а γ_j — средние задержки произвольной заявки в системе по потоку $\Pi_j, j = \overline{1, 3}$.

В качестве второго критерия работы системы в данной статье рассматривается средняя очередь O , которая вычисляется следующим образом:

$$O = (\lambda_1 \cdot O_1 + \lambda_2 \cdot O_2 + \lambda_2 \cdot O_2) / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \quad (4)$$

где O_j — средние очереди по каждому из потоков $\Pi_j, j = \overline{1, 3}$.

Будем предполагать, что оптимальными параметрами управляющего алгоритма являются те, при которых достигаются минимальные средние задержки γ в первом случае, и минимальная средняя очередь O — во втором. В данной работе задача определения оптимальных параметров решается численно с использованием метода имитационного моделирования на языке программирования C++.

2. Численные исследования

В статье исследовано поведение двух критериев качества работы данной системы. Численные эксперименты показали наличие подобных, но, тем не менее, различных зависимостей данных характеристик от параметров g_j при неизменной средней длине пачек, $j = 1, 2$. Также установлено, что первый подход в определении оптимальной работы системы даёт, в среднем, меньшие значения оптимальных параметров управления. Для иллюстрации данного положения рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР 1. Пусть длительности жёлтого света $T_2 = T_4 = T_6 = T_8 = 3$ (с), а длительности обслуживания пешеходов $T_5 = T_7 = 30$ (с).

Критические значения для очередей по потоку пешеходов $N_1 = N_2 = 0$ (заявок). Пусть интенсивности потоков Π_1, Π_2 и Π_3 совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,1$ (заявок в секунду). Поток пешеходов Π_3 предполагается пуассоновским, а потоки Π_1 и Π_2 — потоками Бартлетта с одинаковой средней длиной пачки $M\eta_{1,i} = M\eta_{2,i} = 2$ (заявок). Параметры $g_j, j = 1, 2$ меняются в пределах от 0,1 до 0,9 с шагом в 0,1 и в пределах от 0,9 до 0,99 с шагом в 0,01. Параметры $r_j, j = 1, 2$ меняются согласно формуле (2). Средние значения очередей O_j в формуле (4) определяются в моменты окончания обслуживания потоков $\Pi_j, j = \overline{1, 3}$.

Для заданных параметров $g_j, j = 1, 2$ в работе посчитаны значения минимальных средних задержек γ и минимальной средней очереди O . Тем не менее, сравнить данные характеристики между собой напрямую не представляется возможным. Дело в том, что значения задержек γ варьируются от 34,7 (с) до 168,64 (с), а значения очереди O — от 0,23 (заявок) до 10,64 (заявок). Нормализуем данные с помощью следующей формулы:

$$\tilde{x} = (x - x_{min}) / (x_{max} - x_{min}), \quad (5)$$

где x и \tilde{x} — исходное и нормализованное значения одной из двух данных характеристик соответственно, а x_{min} и x_{max} — их минимальное и максимальное значения соответственно [6].

Данное преобразование позволяет выполнить сравнительный анализ зависимостей рассматриваемых характеристик от параметров $g_j, j = 1, 2$. Полученные кривые представлены на рис. 2:



Рис. 2. Зависимости нормализованных задержек γ и очереди O от $g_j, j = 1, 2$

Из рис. 2 видно, что кривая I лежит выше кривой II . Это говорит о том, что с ростом параметров $g_j, j = 1, 2$ минимальные средние задержки γ растут быстрее, чем минимальная средняя очередь O .

На следующем рисунке представлены графики зависимости среднего значения оптимальных параметров управления T_1 и T_3 от параметров $g_j, j = 1, 2$, которые были получены с помощью двух рассматриваемых критериев. Отметим, что в данном случае рассматривается полусумма параметров управления T_1 и T_3 , поскольку в приведённом примере система симметрична относительно входных потоков Π_1 и Π_2 .

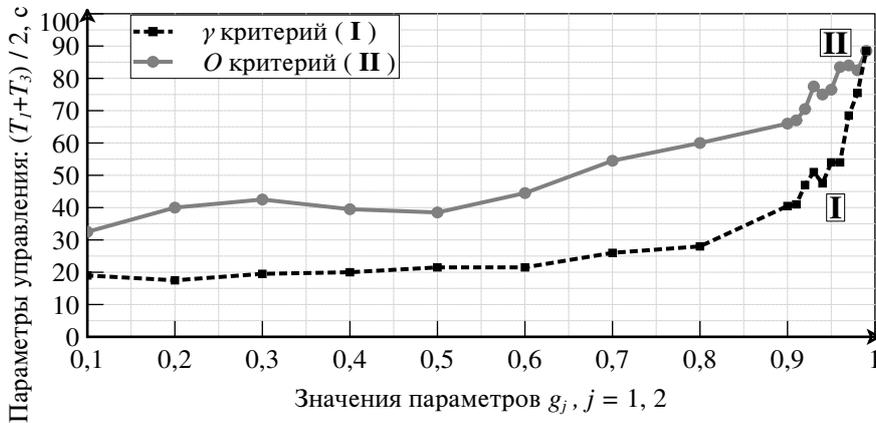


Рис. 3. Графики зависимости средних значений параметров управления от $g_j, j = 1, 2$, посчитанных для различных критериев оптимальности

Из рис. 3 видно, что критерий оптимальности работы системы, основанный на минимальных средних задержках γ , практически всегда даёт меньшие значения параметров управления, чем те, что были получены с помощью минимальной средней очереди O . Исключением является крайняя правая точка при критически высоком значении параметров $g_j = 0,99, j = 1, 2$ — в ней значения параметров управления совпадают. Данный результат показывает, что выбирать приоритетный критерий для определения оптимальной работы системы стоит исходя из конкретной ситуации. К примеру, в случае малого расстояния между перекрёстками предпочтительнее минимизировать среднюю очередь O . В противном случае, лучшим критерием будет минимизация средних задержек γ произвольной заявки на перекрёстке.

Заключение

В статье рассмотрены два важнейших критерия работы системы — средние задержки γ произвольного требования на перекрёстке и средняя очередь O . Показано, что данные характеристики имеют схожую, но, тем не менее, различную зависимость от параметров потоков Барлетта. Выяснено, что минимизация задержек γ даёт, в среднем, меньшие значения оптимальных параметров управления, чем минимизация очереди O . Таким образом, данное исследование позволяет сделать вывод о том, что определять оптимальную работу системы по тому или иному критерию может быть целесообразно в зависимости от конкретной ситуации. При этом средние задержки γ и средняя очередь O в некотором смысле могут быть взаимозаменяемыми характеристиками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поспелов П. И., Таташев А. Г., Терентьев А. В., Карелина М. Ю., Яшина М. В.* Потоки Барлетта и математическое описание автотранспортных потоков // *Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли*. 2021. Т. 13. № 6. С. 34–41.
2. *Kudryavtsev E., Fedotkin M.* Optimization of the Adaptive Control System for Conflict Cox–Lewis Flows // *Communications in Computer and Information Science*, Springer, Cham, 2022. Vol. 1605. P. 185–196.
3. *Федоткин М. А.* Неполное описание потоков неоднородных требований. Теория массового обслуживания. Москва: МГУ, ВНИИСИ, 1981. 118 с.
4. *Кувыкина Е. В.* Общая постановка задачи об алгоритмическом управлении конфликтными потоками заявок при их нелокальном описании // *Моделирование динамических систем. Сборник научных трудов Нижегородского филиала института машиноведения РАН*. 2007. С. 65–71.
5. *Кувыкина Е. В.* Изучение системы управления конфликтными транспортными потоками в классе алгоритмов с дообслуживанием // *Научные проблемы водного транспорта*. 2016. № 48. С. 56–61.
6. *Долгов А. И., Маршаков Д. В.* О применимости математического масштабирования и нормирования // *Вестник Донского государственного технического университета*. 2018. Т. 18. № 1. С. 92–101.

Лембриков Степан Андреевич — магистрант, кафедра теории вероятностей и анализа данных ИИТММ ННГУ. E-mail: stepan.lembrikov.ru@mail.ru

Кувыкина Елена Вадимовна — кандидат физико—математических наук, доцент, кафедра теории вероятностей и анализа данных ИИТММ ННГУ. E-mail: e.kuvykina@yandex.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ RQ-СИСТЕМЫ M/M/1 С НЕНАДЕЖНЫМ ПРИБОРОМ

Н. М. Воронина¹, С. В. Рожкова,^{1,2} С. П. Моисеева²

¹ *Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск, Россия*

² *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

В работе рассматривается однолинейная RQ-система массового обслуживания с ненадежным прибором, управляемая динамическим протоколом случайного множественного доступа. Проведено исследование допредельного распределения вероятностей числа заявок на орбите. Для исследования этой системы используется метод производящих функций. **Ключевые слова:** RQ-система, динамический протокол доступа, ненадежный прибор.

Введение

Исследованию моделей сетей передачи данных с различными протоколами доступа посвящено большое количество работ. Для решения проблем повторных обращений заявок предлагаются различные модификации протоколов доступа. В [1, 2] рассматриваются адаптивные протоколы доступа. В работах [3, 4, 5] рассматривается исследование систем массового обслуживания с динамическим протоколом доступа. В данной работе исследуется одноканальная RQ-система с ненадежным прибором, управляемая динамическим протоколом доступа. Прибор считается ненадежным, если он время от времени выходит из строя и требует восстановления (ремонта). Только после этого прибор возобновляет обслуживание вновь поступающих заявок.

1. Постановка задачи

Любая сеть передачи данных, сформировав заявки, отправляет их на общий ресурс (прибор). Если прибор свободен, то заявка обслуживается. Если во время обслуживания заявки прибор вышел из строя, то он отправляется на ремонт, а заявка переходит на орбиту. Для исследования таких систем рассмотрим однолинейную RQ-систему с ненадежным прибором, управляемую динамическим протоколом доступа. Целью ра-

боты является исследование такой системы, а также нахождение ее основных характеристик.

2. Описание модели

На вход системы с динамическим протоколом доступа поступает простейший поток заявок с параметром λ . Заявка обслуживается прибором случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ_1 .

Ненадежный прибор может быть в одном из состояний: свободен, занят обслуживанием или на ремонте. Если прибор свободен, и на вход поступает заявка, то прибор сразу же начинает обслуживание поступившей заявки. Если заявка поступает в момент, когда прибор занят, то поступившая заявка переходит на орбиту и ожидает возможности занять прибор при следующей попытке.

После случайного интервала времени заявка с интенсивностью σ/i вновь пытается занять прибор на обслуживание, где i - число заявок на орбите в момент времени t (рис. 1). Время бесперебойной работы сервера распределено по экспоненциальному закону с параметром γ_1 , если он простаивает, и с параметром γ_2 , если сервер занят обслуживанием.

Как только происходит поломка, сервер отправляется на ремонт. Все поступающие заявки переходят на орбиту. Время восстановления после ремонта распределено экспоненциально с параметром μ_2 .

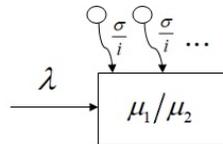


Рис. 1. Модель системы

Пусть $i(t)$ - число заявок на орбите, а $k(t)$ определяет состояние обслуживающего прибора: $k(t) = 0$, если прибор свободен, $k(t) = 1$, если прибор занят, $k(t) = 2$, если прибор на ремонте.

3. Метод производящих функций

Обозначим $P\{i(t) = i, k(t) = k\} = P(k, i, t)$ - вероятность того, что в данный момент времени t прибор находится в состоянии k и на орбите i заявок.

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для $i \geq 1$:

$$\begin{cases} \partial P(0, i, t) / \partial t = -(\lambda + \sigma + \gamma_1) P(0, i, t) + \mu_1 P(1, i, t) + \\ + \mu_2 P(2, i, t), \\ \partial P(1, i, t) / \partial t = -(\lambda + \mu_1 + \gamma_2) P(1, i, t) + \lambda P(0, i, t) + \\ + \sigma P(0, i + 1, t) + \lambda P(1, i - 1, t), \\ \partial P(2, i, t) / \partial t = -(\lambda + \mu_2) P(2, i, t) + \gamma_1 P(0, i, t) + \\ + \gamma_2 P(1, i - 1, t) + \lambda P(2, i - 1, t). \end{cases} \quad (1)$$

Будем считать, что система функционирует в стационарном режиме, т.е.

$$P(k, i, t) \equiv P(k, t)$$

Запишем систему (1) для стационарного распределения:

$$\begin{cases} -(\lambda + \gamma_1) P(0, 0) + \mu_1 P(1, 0) + \mu_2 P(2, 0) = 0, i = 0, \\ -(\lambda + \mu_1 + \gamma_2) P(1, 0) + \lambda P(0, 0) + \sigma P(0, 1) = 0, i = 0, \\ -(\lambda + \mu_2) P(2, 0) + \gamma_1 P(0, 0) = 0, i = 0, \\ -(\lambda + \sigma + \gamma_1) P(0, i) + \mu_1 P(1, i) + \mu_2 P(2, i) = 0, i \geq 1, \\ -(\lambda + \mu_1 + \gamma_2) P(1, i) + \lambda P(0, i) + \sigma P(0, i + 1) + \\ + \lambda P(0, i - 1) = 0, i \geq 1, \\ -(\lambda + \mu_2) P(2, i) + \gamma_1 P(0, i) + \gamma_2 P(1, i - 1) + \\ + \lambda P(2, i - 1) = 0, i \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Чтобы решить систему (2), необходимо определить производящие функции

$$G(k, x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i P(k, i).$$

Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -(\lambda + \sigma + \gamma_1) G(0, x) + \mu_1 G(1, x) + \mu_2 G(2, x) = -\sigma P(0, 0), \\ \left(\lambda + \frac{\sigma}{x}\right) G(0, x) + (\lambda x - \lambda - \mu_1 - \gamma_2) G(1, x) = \frac{\sigma}{x} P(0, 0), \\ \gamma_1 G(0, x) + \gamma_2 x G(1, x) + (\lambda x - \lambda - \mu_2) G(2, x) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решение полученной системы (3) будем искать, обозначив

$$G(x) = G(0, x) + G(1, x) + G(2, x).$$

Тогда получим:

$$G(x) = P(0, 0)\sigma((x-1)\lambda - \gamma_1 - \mu_2)((x-1)\lambda - \gamma_2 - \mu_1)/((x^2 - x)* \\ * \lambda^3 + x((\sigma + \gamma_1)x - \sigma - \gamma_1 - \gamma_2 - \mu_2)\lambda^2 + (((-\gamma_2 - \mu_1 - \mu_2)\sigma - \\ - \gamma_1(\gamma_2 + \mu_1))x + \sigma\mu_1)\lambda + \sigma\mu_2(\gamma_2 + \mu_1)). \quad (4)$$

Учитывая условие нормировки $G(1) = 1$, получаем выражение для $P(0, 0)$:

$$P(0, 0) = \frac{(-\gamma_2 - \mu_2)\lambda^2 - (\sigma\mu_2 + (\sigma + \gamma_1)\gamma_2 + \gamma_1\mu_1)\lambda + \sigma\mu_2(\gamma_2 + \mu_1)}{\sigma(\gamma_1 + \mu_2)(\gamma_2 + \mu_1)}.$$

Подставляя $P(0, 0)$ в равенство (5), получим выражение для производящей функции:

$$G(x) = ((-\gamma_2 - \mu_2)\lambda^2 - ((\gamma_2 + \mu_2)\sigma + \gamma_1(\gamma_2 + \mu_1))\lambda + \sigma\mu_2(\gamma_2 + \mu_1))* \\ * ((x-1)\lambda - \gamma_1 - \mu_2)((x-1)\lambda - \gamma_2 - \mu_1)/((\gamma_1 + \mu_2)((x^2 - x)\lambda^3 + \\ + x((\sigma + \gamma_1)x - \sigma - \gamma_1 - \gamma_2 - \mu_2)\lambda^2 + (((-\gamma_2 - \mu_1 - \mu_2)\sigma - \\ - \gamma_1(\gamma_2 + \mu_1))x + \sigma\mu_1)\lambda + \sigma\mu_2(\gamma_2 + \mu_1))(\gamma_2 + \mu_1)).$$

Значения стационарного распределения R_k будут иметь следующий вид:

$$R_0 = G(0, 1) = \frac{(-\lambda + \gamma_2 + \mu_1)\mu_2 - \lambda\gamma_2}{(\gamma_2 + \mu_1)(\gamma_1 + \mu_2)}, \quad R_1 = G(1, 1) = \frac{\lambda}{\gamma_2 + \mu_1}, \\ R_2 = G(2, 1) = \frac{(-\lambda + \gamma_2 + \mu_1)\gamma_1 + \lambda\gamma_2}{(\gamma_2 + \mu_1)(\gamma_1 + \mu_2)}.$$

Чтобы вероятность была положительна должно выполняться следующее неравенство:

$$\frac{\lambda}{\mu_1} \leq \frac{\sigma\mu_2(\gamma_2 + \mu_1)}{(\lambda + \sigma)(\gamma_2\mu_1 + \mu_2\mu_1) + \gamma_1\mu_1(\gamma_2 + \mu_1)} = S, \quad (5)$$

где S - пропускная способность рассматриваемой системы.

Пропускная способность – это верхняя граница тех значений загрузки $\rho = \frac{\lambda}{\mu_1}$, для которых существует стационарный режим.

Неравенство (6) определяет условие существования стационарного режима для рассматриваемой динамической системы.

4. Численные результаты

Для того, чтобы найти распределение вероятностей $P(i)$, достаточно к характеристической функции применить обратное преобразование Фурье.

$$P(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} H(u) du,$$

где $H(u) = G(e^{ju})$, $j = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

Рассмотрим систему с параметрами: $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 2$, $\gamma_1 = 0.03$, $\gamma_2 = 0.03$, $\lambda = 1$, $\sigma = 1$. В табл. 2 и на рис. 2 показано распределение числа заявок на орбите для данной системы.

Таблица 1

Распределение вероятностей числа заявок на орбите

i	0	1	2	3	4	5
$P(i)$	0,48213	0,19421	0,12012	0,07523	0,04734	0,02985
i	6	7	8	9	10	11
$P(i)$	0,01883	0,01188	0,00750	0,00473	0,00299	0,00189
i	12	13	14	15	16	...
$P(i)$	0,00119	0,00075	0,00047	0,00030	0,00019	...

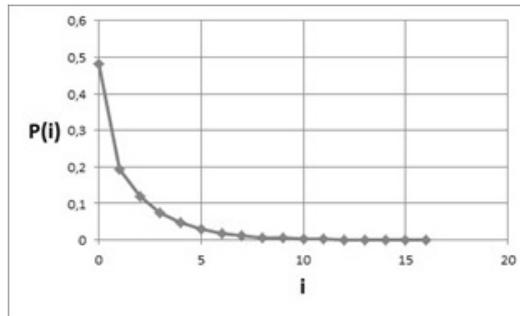


Рис. 2. Распределение вероятностей числа заявок на орбите

Заключение

В данной работе проведено исследование динамической RQ-системы M/M/1 с ненадежным прибором. В результате исследования получены производящая и характеристические функции для распределения вероятностей числа заявок на орбите. Найдено стационарное распределение состояний прибора и пропускная способность рассматриваемой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назаров А.А., Кузнецов Д.Ю. Адаптивные сети случайного доступа. Томск: ТПУ, 2002. 256 с.
2. Любина Т.В., Назаров А.А. Исследование адаптивной RQ-системы с входящим MPP потоком заявок методом асимптотического анализа // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2012): материалы XI Всерос. науч.-практич. конф. с междунар. участием (г. Анжеро-Судженск, 23–24 нояб. 2012 г.). Кемерово: Практика, 2013. Ч. 2. С. 94–99.
3. Шохор С. Л. Распределение числа сообщений в сети связи с резервированием канала и динамическим протоколом доступа // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 271. С. 67–69.
4. Любина Т.В., Назаров А.А. Исследование марковской динамической RQ-системы с конфликтами заявок // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 3(12). С. 73–84.
5. Назаров А. А., Шохор С. Л. Сравнение асимптотической и допредельной модели сети связи с динамическим протоколом случайного множественного доступа // Математическое моделирование и теория вероятностей. Томск: Пеленг, 1988. С. 233–241.

Воронина Наталия Михайловна — аспирант, старший преподаватель, отделение информационных технологий ИШИТР ТПУ. E-mail: vnm@tpu.ru

Рожкова Светлана Петровна — д-р физ.-мат. наук, профессор, ОМИ ШБИП ТПУ, кафедра теории вероятностей и математической статистики ИПМКН ТГУ. E-mail: rozhkova@tpu.ru

Моисеева Светлана Петровна — д-р физ.-мат. наук, профессор, кафедра теории вероятностей и математической статистики ИПМКН ТГУ. E-mail: smoiseeva@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ $M_2|M_2|1$

А. А. Назаров, С. В. Пауль, К. С. Шульгина, Р. Р. Салимзянов

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В работе выполнено исследование математической модели циклической системы в виде однолинейной системы с повторными вызовами, на вход которой поступает два простейших потока заявок, продолжительности обслуживания которых имеют экспоненциальную функцию распределения. Пару поток и соответствующую ему орбиту назовем RQ-системой. Прибор посещает RQ-систему в циклическом порядке, время нахождения прибора у такой системы с повторными вызовами имеет экспоненциальную функцию распределения. Применяя метод асимптотического анализа найдено предельное стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбитах в циклической системе с двумя входящими потоками. **Ключевые слова:** *циклическая система с повторными вызовами, RQ-система, асимптотический анализ.*

Введение

В данной работе рассматривается циклическая система с повторными вызовами [1, 2, 3], в которой цикл определяется суммой интервалов подключения обслуживающего прибора к RQ-системам (системы с повторными вызовами) [4, 5, 6, 7]. Особенностью такой системы является то, что продолжительности таких интервалов случайные и не зависят не только между собой, но и от входящих потоков заявок и продолжительностей их обслуживания. На вход предлагаемой циклической системы поступают два простейших потока заявок, интервалы подключения прибора к RQ-системам (входящий поток и соответствующая ему орбита) имеют экспоненциальную функцию распределения. Для исследования используется метод асимптотического анализа [8, 9] в асимптотическом условии большой задержки заявок на орбитах.

1. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим циклическую систему с повторными вызовами (рисунок 1), на вход которой поступают два простейших потока событий с ин-

тенсивностью λ_1 и λ_2 . Заявки каждого потока формируют свою орбиту неограниченного объема.

Будем называть пару n -го потока и соответствующую ему орбиту « n -ой RQ-системой», $n = 1, 2$. Прибор посещает RQ-системы в циклическом порядке, начиная с первой и заканчивая второй, потом цикл повторяется. Время нахождения прибора у n -ой системы с повторными вызовами имеет экспоненциальную функцию распределения с параметром α_n , $n = 1, 2$. В течение этого времени прибор обслуживает заявки, которые поступают из n -ого входящего потока и с орбиты. Время обслуживания заявок имеет экспоненциальную функцию распределения с параметрами μ_n , $n = 1, 2$. Если поступившая заявка входящего потока обнаруживает прибор занятым или не подключенным, она мгновенно уходит на соответствующую орбиту, где осуществляет случайную задержку в течение экспоненциального времени с параметром σ_n , $n = 1, 2$ после которой вновь обращается к прибору. Будем рассматривать циклическую RQ-систему, когда после истечения времени подключения к n -ой RQ-системе заявка уходит на соответствующую орбиту.

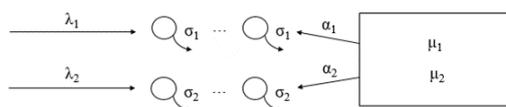


Рис. 1. Циклическая система с повторными вызовами

Обозначим процесс $k(t)$ – состояние прибора в момент времени t . Этот процесс может принимать следующие значения: 0 – прибор подключен к первой RQ-системе и свободен, 1 – прибор подключен к первой RQ-системе и занят, 2 – прибор подключен ко второй RQ-системе и свободен, 3 – прибор подключен ко второй RQ-системе и занят.

Также введем случайные процессы: $i_1(t)$ – число заявок на первой орбите в момент времени t , $i_2(t)$ – число заявок на второй орбите в момент времени t .

Ставится задача нахождения стационарного трехмерного распределения числа заявок на первой и второй орбитах. Для этого рассмотрим трехмерный марковский процесс $\{k(t), i_1(t), i_2(t)\}$. Для распределения вероятностей $P\{k(t) = k, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2\} = P_k(i_1, i_2, t)$, составим систему Колмогорова.

Введем частичные характеристические функции, обозначив

$j = \sqrt{-1}$: $H_k(u_1, u_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} P_k(i_1, i_2)$, $k = \overline{0, 3}$. Систему для частичных характеристических функций запишем в матричной форме, обозначив

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_1) & \lambda_1 & \alpha_1 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \alpha_1) & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_2) & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \mu_2 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2 + \alpha_2) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Получим систему, в которой скалярное уравнение получено путем умножения матричного уравнения на вектор единичного столбца \mathbf{e}

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(u_1, u_2)(\mathbf{A} + e^{ju_1} \mathbf{B} + e^{ju_2} \mathbf{C}) + j\sigma_1 \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2)}{\partial u_1} (\mathbf{I}_0 - e^{ju_1} \mathbf{I}_1) + \\ + j\sigma_2 \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2)}{\partial u_2} (\mathbf{I}_2 - e^{ju_2} \mathbf{I}_3) = 0, \\ (e^{ju_1} - 1)(\mathbf{H}(u_1, u_2) \mathbf{B} + j\sigma_1 e^{-ju_1} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2)}{\partial u_1} \mathbf{I}_1) \mathbf{e} + \\ (e^{ju_2} - 1)(\mathbf{H}(u_1, u_2) \mathbf{C} + j\sigma_2 e^{-ju_2} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \mathbf{I}_3) \mathbf{e} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Система (1) уравнений является основой для дальнейших исследований. Мы решим ее методом асимптотического анализа в предельном условии согласованно большой задержки заявок на орбитах ($\sigma_1 \rightarrow 0$ и $\sigma_2 \rightarrow 0$).

2. Асимптотический анализ первого порядка

Теорема 1. Пусть $i_1(t)$ и $i_2(t)$ - число заявок на первой и второй орбитах соответственно, тогда выполняется следующее предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{jw_1 \sigma \gamma_1 i_1(t) + jw_2 \sigma \gamma_2 i_2(t)} = e^{jw_1 a_1 + jw_2 a_2},$$

где вектор вероятностей состояний прибора \mathbf{r} является корнем уравнения

$$\mathbf{r}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) - \gamma_1 a_1 \mathbf{r}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - \gamma_2 a_2 \mathbf{r}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) = 0. \quad (2)$$

a_1 и a_2 являются корнями матричных уравнений

$$\mathbf{r}(\mathbf{B} - \gamma_1 a_1 \mathbf{I}_1) \mathbf{e} = 0,$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{C} - \gamma_2 a_2 \mathbf{I}_3) \mathbf{e} = 0,$$

где γ_1 , γ_2 , w_1 и w_2 являются параметрами метода асимптотического анализа.

Таким образом, получили системы уравнений, решение которых позволит нам найти величины a_1 и a_2 - асимптотические средние числа заявок на первой и второй орбитах соответственно и \mathbf{r} - вектор вероятностей состояний прибора.

3. Асимптотический анализ второго порядка

Теорема 2. В контексте Теоремы 1 верно следующее предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M \cdot e^{jw_1 \sqrt{\sigma} \gamma_1 (i_1(t) - \frac{a_1}{\sigma \gamma_1}) + jw_2 \sqrt{\sigma} \gamma_2 (i_2(t) - \frac{a_2}{\sigma \gamma_2})} = e^{\frac{jw_1^2}{2} K_{11} + \frac{jw_2^2}{2} K_{22} + jw_1 w_2 K_{12}},$$

где K_{11} , K_{12} , K_{22} - корреляционные моменты, которые определяются равенствами

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{((\mathbf{g}_{11} + \mathbf{g}_{12} - \mathbf{z}_1)(\mathbf{B} - a_1 \gamma_1 \mathbf{I}_1) + a_1 \gamma_1 \mathbf{r} \mathbf{I}_1) \mathbf{e}}{(\gamma_1 \mathbf{r} \mathbf{I}_1) \mathbf{e}}, \\ K_{12} &= \frac{((\mathbf{g}_{21} + \mathbf{g}_{22} - \mathbf{z}_2)(\mathbf{B} - a_1 \gamma_1 \mathbf{I}_1) + (\mathbf{g}_{11} + \mathbf{g}_{12} - \mathbf{z}_1)(\mathbf{C} - a_2 \gamma_2 \mathbf{I}_3)) \mathbf{e}}{(\mathbf{r}(\gamma_1 \mathbf{I}_1 + \gamma_2 \mathbf{I}_3)) \mathbf{e}}, \\ K_{22} &= \frac{((\mathbf{g}_{21} + \mathbf{g}_{22} - \mathbf{z}_2)(\mathbf{C} - a_2 \gamma_2 \mathbf{I}_3) + a_2 \gamma_2 \mathbf{r} \mathbf{I}_3) \mathbf{e}}{(\gamma_2 \mathbf{r} \mathbf{I}_3) \mathbf{e}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь вектор вероятностей состояний прибора \mathbf{r} является решением уравнения (2), а векторы \mathbf{g}_{11} , \mathbf{g}_{12} , \mathbf{g}_{21} , \mathbf{g}_{22} , \mathbf{z}_1 , \mathbf{z}_2 являются частными решениями неоднородных систем

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{11}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1 \gamma_1 (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2 \gamma_2 (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) &= \gamma_1 \mathbf{r} (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1), \\ \mathbf{g}_{12}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1 \gamma_1 (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2 \gamma_2 (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) &= \gamma_2 \mathbf{r} (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3), \\ \mathbf{z}_1(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1 \gamma_1 (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2 \gamma_2 (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) &= \mathbf{r} (\mathbf{B} - a_1 \gamma_1 \mathbf{I}_1), \\ \mathbf{g}_{11} \mathbf{e} = 0, \mathbf{g}_{12} \mathbf{e} = 0, \mathbf{z}_1 \mathbf{e} &= 0. \\ \mathbf{g}_{21}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1 \gamma_1 (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2 \gamma_2 (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) &= \gamma_1 \mathbf{r} (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1), \\ \mathbf{g}_{22}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1 \gamma_1 (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2 \gamma_2 (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) &= \gamma_2 \mathbf{r} (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3), \\ \mathbf{z}_2(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - a_1 \gamma_1 (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) - a_2 \gamma_2 (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)) &= \mathbf{r} (\mathbf{C} - a_2 \gamma_2 \mathbf{I}_3), \\ \mathbf{g}_{21} \mathbf{e} = 0, \mathbf{g}_{22} \mathbf{e} = 0, \mathbf{z}_2 \mathbf{e} &= 0. \end{aligned}$$

Вторая асимптотика показывает, что асимптотическое двумерное распределение вероятностей числа $i_1(t)$ и $i_2(t)$ заявок на первой и второй орбитах является нормальным распределением с асимптотическими средними: $a_1/\gamma_1\sigma$, $a_2/\gamma_2\sigma$, дисперсиями: $K_{11}/\gamma_1\sigma$, $K_{22}/\gamma_2\sigma$, и коэффициентом корреляции числа заявок на первой и второй орбитах $K_{12}/\gamma_1\gamma_2\sigma$.

4. Численный анализ

Для построения плотности распределения вероятностей двумерного нормального распределения числа заявок на первой и второй орбитах была использована система математических вычислений Mathcad. Задав необходимые начальные параметры: $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.4$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\alpha_1 = 0.7$, $\alpha_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 2$, $\sigma = 0.01$, $\sigma_1 = \gamma_1\sigma$, $\sigma_2 = \gamma_2\sigma$, построим плотность распределения вероятностей двумерного нормального распределения числа заявок на первой и второй орбитах

$$f1(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi s_1 s_2 \sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left(\frac{(x_1 - \kappa_1)^2}{s_1^2} - \frac{2\rho(x_1 - \kappa_1)(x_2 - \kappa_2)}{s_1 s_2} + \frac{(x_2 - \kappa_2)^2}{s_2^2} \right)},$$

где $\kappa_1 = \frac{a_1}{\sigma_1}$, $\kappa_2 = \frac{a_2}{\sigma_2}$, $s_1 = \sqrt{\frac{K_{11}}{\sigma_1}}$, $s_2 = \sqrt{\frac{K_{22}}{\sigma_2}}$, $\rho = \frac{K_{12}}{\gamma_1 \gamma_2 \sigma}$, а коэффициенты a_1 , a_2 , K_{11} , K_{12} , K_{22} были найдены с помощью первой и второй асимптотики в (2) и (3).

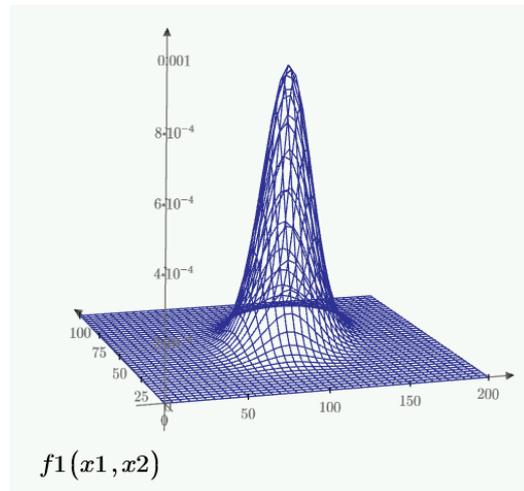


Рис. 2. График плотности асимптотического двумерного нормального распределения числа заявок на первой и второй орбитах

Для определения точности полученных аналитических результатов, сравним асимптотические результаты с эмпирическим распределением, полученным в результате работы имитационной модели. Точность асимптотических результатов будем оценивать с помощью расстояния Колмогорова между аналитическим и эмпирическим распределениями. В таблице 2 приведены значения этих расстояний для различных параметров σ для распределения вероятностей числа заявок на первой (Δ_1) и второй (Δ_2) орбите.

Таблица 1

Расстояние Колмогорова Δ_1 и Δ_2

	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.01$	$\sigma = 0.001$
Δ_1	0.0701	0.0129	0.0029	0.0011
Δ_2	0.1533	0.0194	0.0027	0.0006

Анализируя данные таблицы 2, можно сделать вывод, что точность аппроксимации растет с уменьшением параметра σ . Полужирным в таблице 2 выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимаций удовлетворительной. Из полученных значений можно сделать вывод, что аппроксимация, полученная с помощью асимптотического анализа, дает хорошие результаты при низкой интенсивности повторного обслуживания ($\sigma \leq 0.1$) обращения с орбиты.

Заключение

Таким образом, найденная асимптотика первого и второго порядка показывает, что асимптотическое распределение вероятностей числа $i_1(t)$ и $i_2(t)$ заявок на первой и второй орбитах в рассматриваемой циклической системе является двумерным нормальным с асимптотическими средними: $a_1/\gamma_1\sigma$, $a_2/\gamma_2\sigma$, дисперсиями: $K_{11}/\gamma_1\sigma$, $K_{22}/\gamma_2\sigma$, и коэффициентом корреляции числа заявок на первой и второй орбитах $K_{12}/\gamma_1\gamma_2\sigma$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишневский В. М., Семенова О. В. Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях. М.: Техносфера, 2007. 312 с.
2. Вишневский В. М., Семенова О. В. Математические методы исследования систем поллинга. Автоматика и телемеханика. 2006. Т. 2. С. 3–56.
3. Nazarov A., Paul S. A Cyclic Queueing System with Priority Customers and T-Strategy of Service // CCIS. 2016. Vol. 678. P. 182–193.

4. Artalejo J. R., Gómez-Corral A. Retrial queueing systems // *Mathematical and Computer Modelling*. 1999. Т. 30. № 3–4. P. 8–15.
5. Falin G., Templeton J. G. C. Retrial queues. CRC Press, 1997. Т. 75.
6. Alfa A. S., Isotupa K. P. S. An M/PH/k retrial queue with finite number of sources // *Computers and Operations Research*. 2004. Т. 31. № 9. P. 1455–1464.
7. Artalejo J. R. Algorithmic Methods in Retrial Queues. Springer, 2006. Vol. 141.
8. Nazarov A. A., Paul S. V., Gudkova I. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition // *ECMS 2017*. P. 687–693.
9. Nazarov A., Phung-Duc T., Paul S. Heavy Outgoing Call Asymptotics for MMPP/M/1/1 Retrial Queue with Two-Way Communication // *International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling*. Springer, Cham, 2017. P. 28–41.

Назаров Анатолий Андреевич — д-р технических наук, профессор, институт прикладной математики и компьютерных наук. E-mail: *nazarov.tsu@gmail.com*

Пауль Светлана Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доцент, институт прикладной математики и компьютерных наук. E-mail: *paulsv82@mail.ru*

Шульгина Ксения Сергеевна — магистрант второго года обучения, институт прикладной математики и компьютерных наук. E-mail: *shulgina19991999@mail.ru*

Салимзянов Радмир Ренатович — магистрант первого года обучения, институт прикладной математики и компьютерных наук. E-mail: *rsalimzyanov@yahoo.com*

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛА ПОВТОРНЫХ ОБРАЩЕНИЙ В СИСТЕМЕ $M(i)|M|\infty C$ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Е. Г. Чегодаева¹, А. З. Меликов², С. П. Моисеева¹ Е. П. Полин¹

¹ *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

² *Институт систем управления НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан*

В работе проводится исследование потока повторных обращений в бесконечнолинейной СМО с обратной связью и интенсивностью входящего потока, зависящей от состояния системы.

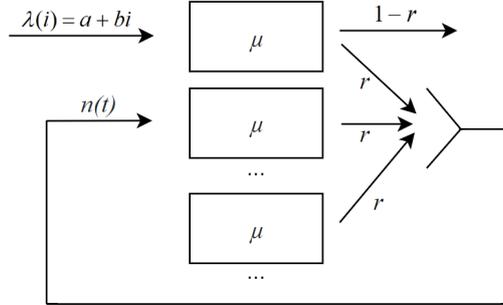
Ключевые слова: *система массового обслуживания, поток повторных обращений, СМО с обратной связью.*

Введение

С увеличением вычислительной мощности современной техники возросло внимание к важному разделу теории вероятности – теории массового обслуживания. В настоящее время наибольший интерес наблюдается к исследованию социально-экономических систем [4, 5]. Известно, что для таких систем классические модели потоков (такие, как пуассоновские) искаженно описывают поведение реальных, по этой причине было решено остановиться на исследовании потока с переменной интенсивностью [1]. Главными особенностями рассматриваемой модели является зависимость входящего потока от количества занятых приборов системы и наличие обратной связи. Подобные СМО представляют огромный интерес в современных исследованиях [3].

1. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает поток, имеющий интенсивность $\lambda(i) = a + bi$, где a является постоянной, выражающей независимую скорость поступления заявок; b имеет смысл вероятности, с которой каждая заявка, содержащаяся в системе, влечет за собой появление новой, $i(t)$ – процесс изменения числа занятых приборов в системе в момент времени t . Время обслуживания будем считать случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром μ . Число повторных обращений, реализованных за время t обозначим за $n(t)$.

Рис. 1. Математическая модель СМО вида $M(i)|M|\infty$

Поставим задачу нахождения производящей функции распределения вероятностей $P(n, t)$ числа повторных обращений за время t

$$F(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n P(n, t).$$

Для этого введем двумерный марковский процесс $\{i(t), n(t)\}$, распределение вероятностей которого имеет вид:

$$P(i, n, t) = P\{i(t) = i, n(t) = n\}.$$

2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Для распределения вероятностей рассматриваемого случайного процесса составим Δt – методом систему дифференциальных уравнений Колмогорова [1]. Запишем допредельные равенства, используя формулу полной вероятности:

$$P(0, n, t + \Delta t) = P(0, n, t)(1 - a\Delta t) + P(1, n, t)(1 - r)\mu\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P(i, n, t + \Delta t) = P(i, n, t)(1 - (a + bi)\Delta t)(1 - i\mu\Delta t) + P(i, n - 1, t)i\mu r\Delta t + P(i - 1, n, t)(a + (i - 1)b)\Delta t + P(i + 1, n, t)(i + 1)(1 - r)\mu\Delta t + o(\Delta t), \quad i \geq 1.$$

Система дифференциальных уравнений Колмогорова примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(0, n, t)}{\partial t} &= -aP(0, n, t) + \mu(1 - r)P(1, n, t), \\ \frac{\partial P(i, n, t)}{\partial t} &= -(a + bi + i\mu)P(i, n, t) + i\mu rP(i, n - 1, t) + \\ &+ (a + b(i - 1))P(i - 1, n, t) + (i + 1)\mu(1 - r)P(i + 1, n, t), \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Начальные условия: } P(i, n, 0) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 0, \\ 0, & \text{если } i > 0. \end{cases}$$

3. Производящая функция общего числа заявок в системе

Производящая функция определяется как

$$G(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x^i y^n P(i, n, t).$$

Из системы (1) для функции $G(x, y, t)$ получаем линейное дифференциальное уравнение в частных производных 1-го порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, y, t)}{\partial t} + [(b + \mu)x - bx^2 - \mu(1 - r) - \mu rxy] \frac{\partial G(x, y, t)}{\partial x} = \\ = a(x - 1)G(x, y, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Для (2) запишем систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{(b + \mu)x - bx^2 - \mu(1 - r) - \mu rxy} = \frac{dG(x, y, t)}{a(x - 1)G(x, y, t)}.$$

Найдем два первых интеграла системы. Первый из уравнения:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{(b + \mu)x - bx^2 - \mu(1 - r) - \mu rxy}.$$

Разложим на множители многочлен в знаменателе:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{(x - x_1(y))(x - x_2(y))} = \frac{A dx}{x - x_1(y)} + \frac{B dx}{x - x_2(y)},$$

где

$$x_{1,2}(y) = \frac{-(b + \mu(1 - ry)) \pm \sqrt{(b - \mu(1 - ry))^2 + 4b\mu r(1 - y)}}{-2b},$$

$$D(y) = (b - \mu(1 - ry))^2 + 4b\mu r(1 - y).$$

Вычислив коэффициенты A, B методом вычеркивания и проинтегрировав полученное выражение, имеем:

$$-\frac{\sqrt{D(y)}}{b} t = \ln \frac{x - x_1(y)}{x - x_2(y)} - \ln C_1.$$

Отсюда

$$C_1 = \exp \left\{ \frac{\sqrt{D(y)}}{b} t \right\} \frac{x - x_1(y)}{x - x_2(y)}. \quad (3)$$

Другой интеграл найдем из уравнения:

$$a(x-1)dt = \frac{dG(x, y, t)}{G(x, y, t)}. \quad (4)$$

Вынесем из (3) $x-1$:

$$x-1 = \frac{\frac{\sqrt{D(y)}}{b}t}{C_1 \exp\left\{\frac{\sqrt{D(y)}}{b}t\right\} - 1} + x_2(y) - 1.$$

Подставим это выражение в (4) и проинтегрируем:

$$G(x, y, t) = \frac{\exp\{a(x_2(y)-1)t\}C_2}{\left(C_1 - \exp\left\{\frac{\sqrt{D(y)}}{b}t\right\}\right)^a}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (2) можно записать следующим образом

$$G(x, y, t) = \Phi(C_1) \frac{\exp\{a(x_2(y)-1)t\}}{\left(C_1 - \exp\left\{\frac{\sqrt{D(y)}}{b}t\right\}\right)^a},$$

где $C_2 = \Phi(C_1)$ – произвольная дифференцируемая функция, а C_1 определяется равенством (3).

Общее решение $G(x, y, t)$ перепишем в виде

$$G(x, y, t) = \Phi \left(\exp\left\{\frac{\sqrt{D(y)}}{b}t\right\} \frac{x-x_1(y)}{x-x_2(y)} \right) \left(\frac{\exp\{(x_2(y)-1)t\}}{\exp\left\{\frac{\sqrt{D(y)}}{b}t\right\} \left(\frac{x-x_1(y)}{x-x_2(y)} - 1\right)} \right)^a. \quad (5)$$

Определим частное решение уравнения (5) при начальном условии:

$$G(x, y, 0) = g(x) = \left(\frac{1 - \frac{b}{\mu(1-r)}}{1 - \frac{b}{\mu(1-r)}x} \right)^{\frac{a}{b}}.$$

где $g(x)$ – производящая функция стационарного распределения вероятностей числа занятых приборов в данной системе.

Имеем

$$\left(\frac{1 - \frac{b}{\mu(1-r)}}{1 - \frac{b}{\mu(1-r)}x} \right)^{\frac{a}{b}} = \frac{\Phi\left(\frac{x-x_1(y)}{x-x_2(y)}\right)}{\left(\frac{x-x_1(y)}{x-x_2(y)} - 1\right)^a}.$$

Полагая, что $\frac{x-x_1(y)}{x-x_2(y)} = z$, получим

$$\Phi(z) = (z-1)^a \left(\frac{\frac{\mu(1-r)}{b} - 1}{\frac{\mu(1-r)}{b} - \frac{\sqrt{D(y)}}{b(z-1)} - x_2(y)} \right)^{\frac{a}{b}}.$$

Подставляя это выражение для функции $\Phi(z)$ в (5), имеем

$$G(x, y, t) = \left(\frac{\frac{\mu(1-r)}{b} - 1}{\frac{\mu(1-r)}{b} - \frac{\sqrt{D(y)}}{b(\exp\{\frac{\sqrt{D(y)}}{b}t\} \frac{x-x_1(y)}{x-x_2(y)} - 1)} - x_2(y)} \right)^{\frac{a}{b}} \times \left(\frac{\exp\{(x_2(y)-1)t\}(x-x_1(y)) - \exp\{(x_1(y)-1)t\}(x-x_2(y))}{\frac{\sqrt{D(y)}}{b}} \right)^a, \quad (6)$$

где

$$x_{1,2}(y) = \frac{-(b + \mu(1-ry)) \pm \sqrt{D(y)}}{-2b},$$

$$D(y) = (b - \mu(1-ry))^2 + 4b\mu r(1-y).$$

4. Производящая функция числа повторных обращений в системе

Из вида производящей функции двумерного распределения можем найти производящие функции любого из одномерных маргинальных распределений [2]. Для (6) имеем:

$$F(y, t) = G(1, y, t).$$

Найдем ее вид:

$$F(y, t) = G(1, y, t) = \left(\frac{\frac{\mu(1-r)}{b} - 1}{\frac{\mu(1-r)}{b} - \frac{\sqrt{D(y)}}{b(\exp\{\frac{\sqrt{D(y)}}{b}t\} \frac{1-x_1(y)}{1-x_2(y)} - 1)} - x_2(y)} \right)^{\frac{a}{b}} \times \left(\frac{\exp\{(x_2(y)-1)t\}(1-x_1(y)) - \exp\{(x_1(y)-1)t\}(1-x_2(y))}{\frac{\sqrt{D(y)}}{b}} \right)^a. \quad (7)$$

Заключение

В настоящей статье проведено исследование случайного процесса, характеризующего изменение числа повторных обращений в систему вида $M(i)|M|\infty$ с интенсивностью входящего потока, зависящей от числа заявок в системе. Получено аналитическое выражение для совместной производящей функции числа занятых приборов и числа повторных обращений в систему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полин Е. П., Моисеева С. П., Моисеев А. Н. Исследование бесконечнолинейной СМО с интенсивностью входящего потока, зависящей от состояния системы. // Автоматика и телемеханика. 2020. № 9. С. 105–119.
2. Назаров А. А. Теория массового обслуживания: учебное пособие. // Томск: Изд-во НТЛ, 2010. 228 с.
3. Меликов А. З., Алиева С. Г., Шахмалыев М. О. Методы расчета системы с мгновенной обратной связью и переменной интенсивностью входящего потока. // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь. 2020. № 1. С. 638–644.
4. Даммер Д. Д. Математическая модель страховой компании в виде системы массового обслуживания с неограниченным количеством приборов с учетом одновременных страховых выплат. // XV Междунар. конф. имени А. Ф. Терпугова. 2016. № 2. С. 18–23.
5. Княжева Ю. В. Повышение эффективности системы массового обслуживания торгового предприятия посредством численного статистического моделирования // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Социально-экономические науки. 2014. Т. 14. № 2. С. 83–100.

Чегодаева Елизавета — студент кафедры ТВиМС ТГУ. E-mail: liza_chegodaeva@mail.ru

Меликов Агаси Зарбали оглы — д-р тех. наук, профессор, член-корреспондент НАН Азербайджана. E-mail: agassi.melikov@rambler.ru

Моисеева Светлана Петровна — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры ТВИМС ТГУ. E-mail: smoiseeva@mail.ru

Полин Евгений Павлович — ассистент кафедры ТВиМС ТГУ. E-mail: polin_evgeny@mail.ru

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ
КОЛИЧЕСТВА ТОВАРА В ВИДЕ СМО**

$$M^{(n)}|M_1|M_2|\dots|M_n|\infty$$

Д. А. Королев, Т. В. Бушкова, С. П. Моисеева

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В работе рассматривается математическая модель изменения численности единиц товаров в виде системы массового обслуживания с входящим пуассоновским потоком требований на ресурсы случайного объема. Получен вид многомерной производящей функции для стационарного многомерного распределения вероятностей количества занятых ресурсов. **Ключевые слова:** СМО, система массового обслуживания, потоки отрицательных заявок, метод производящей функции.

Введение

В настоящее время внимание к теории массового обслуживания в значительной степени стимулируется необходимостью применения её результатов для важных практических задач, возникающих в жизнедеятельности человека.

Системы с неограниченным числом приборов являются наиболее приближенными к реальным системам. Первые результаты для бесконечнолинейных систем массового обслуживания были получены еще в середине прошлого века, однако, интерес к таким системам сохраняется и в наши дни. Системы с бесконечным числом обслуживающих приборов применяются в процессах иммиграции, в биологических системах, в финансовых моделях, в надежности больших систем [1, 2, 3, 4].

1. Постановка задачи

Рассмотрим склад продовольственных товаров. Будем считать, что поставки продовольственных товаров происходят в случайные моменты времени, которые образуют пуассоновский простейший поток с интенсивностью λ . Каждая поставка может включать в себя несколько групп товаров. Так как товары продуктовые, то они имеют срок реализации. Будем считать, что срок реализации – это экспоненциально распределенная случайная величина с параметрами μ_k , $k = \overline{1, 2, \dots, n}$. После окончания срока годности товар «уничтожается». Кроме того, по-

токи покупателей, поступающие за определёнными видами товаров тоже будем считать пуассоновскими с интенсивностями α_k , $k = \overline{1, 2, \dots, n}$. Тогда, пришедший покупатель осуществляет покупку любой единицы товара определенного типа и покидает систему. Ставится задача нахождения распределения вероятностей единиц товара каждого типа, находящихся на складе.

Рассматривается система с n блоками обслуживания, каждый из которых содержит неограниченное число приборов. Моменты прихода поставок образуют простейший с параметром λ . В момент наступления события в рассматриваемом потоке в систему одновременно поступают n различающихся по типу требований (групп товаров). Дисциплина обслуживания определяется тем, что каждая группа товаров отличается сроком реализации. Будем считать, что этот срок реализации описывается случайной величиной, распределённой по экспоненциальному закону с параметрами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ для каждой группы соответственно. Кроме того, в систему поступают n пуассоновских потоков отрицательных заявок с заданными интенсивностями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, имеющих смысл интенсивности поступления запросов на определённые группы товаров.

Заявка соответствующего потока уничтожает одну заявку в блоке (осуществляет покупку единицы товара). Если в блоке нет заявок, то на состояние системы не влияет, клиент уходит неудовлетворённый.

В качестве математической модели рассмотрим систему массового обслуживания $M^{(n)}|M_1|M_2|\dots|M_n|\infty$ (рисунок 1), где товары объединены в блоки по своему типу, и проведем исследование числа единиц товаров, находящихся на складе.

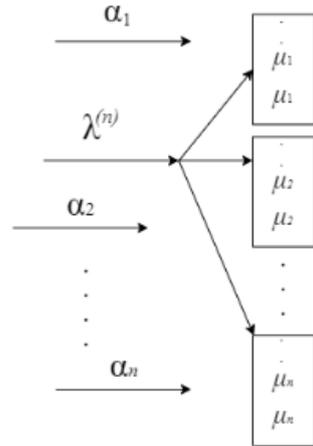


Рис. 1. СМО $M^{(n)}|M_1|M_2|\dots|M_n|\infty$ с параллельным обслуживанием и n потоками отрицательных заявок

Обозначим $i_k(t)$ — число единиц товара k -ого типа, $k = \overline{1, \dots, n}$. Ставится задача нахождения распределения вероятностей многомерной цепи Маркова $\{i_1(t), i_2(t), \dots, i_n(t)\}$.

2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Обозначим

$P(i_1, i_2, \dots, i_n, t) = P\{i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, \dots, i_n(t) = i_n\}$ — распределение вероятностей состояний многомерной цепи Маркова, характеризующей число единиц товара в каждом блоке в момент времени t . Составим прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(i_1, i_2, \dots, i_n, t)}{\partial t} = & -(\lambda + i_1(\mu_1 + \alpha_1) + i_2(\mu_2 + \alpha_2) + \dots + \\ & i_n(\mu_n + \alpha_n)) + \lambda P(i_1 - 1, i_2 - 1, \dots, i_n - 1, t) + \\ & (i_1 + 1)(\mu_1 + \alpha_1)P(i_1 + 1, i_2, \dots, i_n, t) + \\ & (i_2 + 1)(\mu_2 + \alpha_2)P(i_1, i_2 + 1, \dots, i_n, t) + \dots + \\ & (i_n + 1)(\mu_n + \alpha_n)P(i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n + 1, t), \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$P(i_1, i_2, \dots, i_n, 0) = \begin{cases} 1, & \text{если } i_1 = i_2 = \dots = i_n = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} .$$

3. Метод производящих функций

Определим производящую функцию многомерного распределения $P(i_1, i_2, \dots, i_n, t)$ в виде

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} P(i_1, i_2, \dots, i_n, t)$$

Для многомерной производящей функции получаем линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}{\partial t} + (\mu_1 + \alpha_1)(x_1 - 1) \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}{\partial x_1} + \\ (\mu_2 + \alpha_2)(x_2 - 1) \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}{\partial x_2} + \dots + \\ (\mu_n + \alpha_n)(x_n - 1) \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}{\partial x_n} = \\ \lambda(x_1 x_2 \dots x_n - 1) F(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{(\mu_1 + \alpha_1)(x_1 - 1)} = \frac{dx_2}{(\mu_2 + \alpha_2)(x_2 - 1)} = \dots = \\ \frac{dx_n}{(\mu_n + \alpha_n)(x_n - 1)} = \frac{dF(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}{\lambda(x_1 x_2 \dots x_n - 1) F(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}, \end{aligned} \quad (3)$$

решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \\ \varphi[e^{-(\mu_1 + \alpha_1)t}(x_1 - 1), e^{-(\mu_2 + \alpha_2)t}(x_2 - 1), \dots, e^{-(\mu_n + \alpha_n)t}(x_n - 1)] \times \\ \exp \left\{ \frac{\lambda \prod_{s=1}^n (x_s - 1)}{\sum_{s=1}^n \mu_s + \alpha_s} + \sum_{l=1}^n \frac{\lambda \prod_{s=1, s \neq l}^n (x_s - 1)}{\sum_{s=1, s \neq l}^n \mu_s + \alpha_s} + \dots + \sum_{l=1}^n \frac{\lambda(x_l - 1)}{\mu_l + \alpha_l} \right\} \times \\ \exp \left\{ \sum_{l=1}^{n-2} \sum_{s=l}^{n-1} \sum_{n=s}^n \frac{\lambda(x_l - 1)(x_s - 1)(x_n - 1)}{(\mu_l + \alpha_l) + (\mu_s + \alpha_s) + (\mu_n + \alpha_n)} \right\} \times \\ \exp \left\{ \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{s=l}^n \frac{\lambda(x_l - 1)(x_s - 1)}{(\mu_l + \alpha_l) + (\mu_s + \alpha_s)} + \sum_{l=1}^n \frac{\lambda(x_l - 1)}{\mu_l + \alpha_l} \right\}. \end{aligned}$$

Используя начальные условия и устремляя $t \rightarrow \infty$ можно записать выражение для стационарной производящей функции финального распределения вероятностей:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp \left\{ \frac{\lambda \prod_{s=1}^n (x_s - 1)}{\sum_{s=1}^n \mu_s + \alpha_s} + \sum_{l=1}^n \frac{\lambda \prod_{s=1, s \neq l}^n (x_s - 1)}{\sum_{s=1, s \neq l}^n \mu_s + \alpha_s} + \dots + \sum_{l=1}^n \frac{\lambda(x_l - 1)}{\mu_l + \alpha_l} \right\}.$$

Из вида производящей функции, очевидно, следует, что одномерные маргинальные распределения вероятностей числа заявок в каждом блоке обслуживания являются пуассоновскими и имеют вид:

$$f_k(x_k) = \sum_{i_k} x_k^{i_k} P\{i_k(t) = i_k\} = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu_k + \alpha_k} (x_k - 1) \right\},$$

$$k = \overline{1, \dots, n},$$

поэтому многомерное распределение вероятностей $P(i_1, i_2, \dots, i_n)$, определяемое производящей функцией $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, будем называть многомерным пуассоновским распределением вероятностей зависимых случайных величин.

Математическое ожидание и дисперсия числа заявок в каждом блоке (подсистеме) будут равны соответственно:

$$M\{i_l\} = \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_l} \Big|_{x_1=\dots=x_n=1} = \frac{\lambda}{\mu_l + \alpha_l}, \quad l = \overline{1, 2, \dots, n}$$

$$D\{i_l\} = \frac{\lambda}{\mu_l + \alpha_l}, \quad l = \overline{1, 2, \dots, n}.$$

В том случае, когда необходимо определить характеристики суммарно занимаемых ресурсов на складе в выражении для производящей функции надо положить $x_1 = x_2 = \dots = x_n = u$. Имеем

$$F(u) = \exp \left\{ \frac{\lambda(u-1)^n}{\sum_{s=1}^n \mu_s + \alpha_s} + \sum_{l=1}^n \frac{\lambda(u-1)^{n-1}}{\sum_{s=1, s \neq l}^n \mu_s + \alpha_s} + \dots + \sum_{l=1}^n \frac{\lambda(u-1)}{\mu_l + \alpha_l} \right\}.$$

Частный случай при $n = 2$:

$$F(x_1, x_2) = \exp \left\{ \frac{\lambda(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{\mu_1 + \mu_2 + \alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\lambda(x_1 - 1)}{\mu_1 + \alpha_1} + \frac{\lambda(x_2 - 1)}{\mu_2 + \alpha_2} \right\}.$$

Если товары хранятся на одном складе, то для того, чтобы рассчитать объём этого склада достаточно из двумерной функции перейти к одномерной, положив $x_1 = x_2 = u$:

$$F(u) = \exp \left\{ \frac{\lambda(u-1)^2}{\mu_1 + \mu_2 + \alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\lambda(u-1)}{\mu_1 + \alpha_1} + \frac{\lambda(u-1)}{\mu_2 + \alpha_2} \right\}.$$

Заключение

В данной работе была построена и исследована математическая модель изменения численности единиц товаров с потоками отрицательных заявок. Был найден вид производящей функции число групп товаров в указанной системе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории Марковских процессов и их приложения. М.: Издательство «Наука», 1969. 512 с.
2. Назаров А. А. Терпугов А. Ф. Теория вероятностей и случайных процессов: учебное пособие. Томск: Издательство НТЛ, 2006. 200 с.
3. Прабху Н. Методы теории массового обслуживания и управления запасами // М.: Издательство «Машиностроение», 1969. С. 356.
4. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М: Физмат-лит., 1963. 236 с.

Королев Данил Анатольевич — студент, Национальный исследовательский Томский государственный университет. E-mail: danilkorolev9999@gmail.com

Бушкова Татьяна Владимировна — аспирант, Национальный исследовательский Томский государственный университет. E-mail: bushkova70@mail.ru

Моисеева Светлана Петровна — д.ф.-м.н., профессор, Национальный исследовательский Томский государственный университет. E-mail: smoiseeva@mail.ru

О ПОДХОДЕ К ОБРАЩЕНИЮ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

А. Л. Благинин, И. Л. Лапатын

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В данной работе рассматривается метод дискретизации характеристических функций инструментами Фурье-анализа. Ввиду использования характеристических функций в качестве инструмента анализа в теории массового обслуживания и теории случайных процессов, их преобразование является важным этапом исследования. Аналитически сложность характеристической функции не играет большой роли, однако при проведении численных экспериментов интегрирование становится трудоемкой задачей, либо вовсе невозможной. По этой причине в работе предлагается использование дискретного преобразования Фурье для обращения характеристических функций, а также проводится оценка эффективности вычисления в сравнении с интегральным преобразованием. **Ключевые слова:** *характеристическая функция, ряд Фурье, дискретное преобразование Фурье, дискретные распределения, теория массового обслуживания.*

Введение

Как известно, любая случайная величина может быть однозначно определена функцией распределения вероятностей или характеристической функцией [1]. При этом характеристическая функция может быть определена для любой случайной величины (дискретной или непрерывной).

Объектом исследования теории массового обслуживания являются случайные величины и случайные процессы, которые могут быть как непрерывными (например, время ожидания заявки до начала обслуживания, период занятости системы, объем занятого ресурса), так и дискретными (например, число заявок в очереди, число событий, наступивших в потоке за некоторый промежуток времени, число занятых каналов обслуживания). При этом эти величины по своей природе принимают в основном неотрицательные значения.

Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030)

Для неотрицательных случайных величин характеристическая функция является частным случаем преобразования Лапласа-Стилтьеса от функции распределения вероятностей с мнимым аргументом. Соответственно, характеристическая функция обладает свойствами преобразования Лапласа-Стилтьеса. С другой стороны, в общем случае взаимное соответствие характеристической функции и функции распределения вероятностей соответствует теории Фурье-анализа, безусловным преимуществом которого является свойство двойственности, то есть схожесть переходов от одной функции к другой. Это позволяет, решая задачу для характеристических функций, в последствии по явным интегральным формулам переходить к функциям распределения.

Для дискретных распределений принято использовать не характеристическую функцию, а производящую [2], но во многих работах [3, 4, 5] для дискретных распределений используется тоже характеристическая функция. Это позволяет получать формулы перехода к распределению в терминах рядов Фурье через интегрирование характеристической функции по периоду 2π . С точки зрения записи формул никаких проблем не возникает, но при проведении численных экспериментов, в зависимости от сложности вида характеристической функции, численное интегрирование является задачей либо очень трудоемкой, либо вообще невозможной.

В данной работе предлагается использовать теорию Фурье-анализа сигналов для обращения характеристических функций дискретных распределений. Идея заключается в применении принципов теоремы Котельникова [6, 7] для дискретизации характеристических функций и применении дискретного преобразования Фурье, которое вместо интегрирования использует суммирование и умножение.

1. Связь характеристических функций с сигналами и их спектрами

Характеристической функцией $h(u)$ случайной величины ξ называется

$$h(u) = M\{e^{ju\xi}\}. \quad (1)$$

Характеристической функцией $h(u)$ дискретной случайной величины ξ с распределением вероятностей p_i называется

$$h(u) = M\{e^{ju\xi}\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{ju\xi_i} p_i. \quad (2)$$

Характеристической функцией $h(u)$ дискретной неотрицательной целочисленной случайной величины $\xi (\xi = 0, 1, 2, \dots)$ с распределением

вероятностей $p_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ называется

$$h(u) = M\{e^{ju\xi}\} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} p_i. \quad (3)$$

При этом для нахождения распределения вероятностей $p_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ по характеристической функции $h(u)$ используется формула обращения

$$p_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ju i} h(u) du. \quad (4)$$

Можно заметить, что формулы (2) и (3) являются формулами разложения сигнала $h(u)$ в ряд Фурье в комплексной форме [9], а формула (4) нахождения вероятностей p_i совпадает с формулой вычисления коэффициентов ряда Фурье [9]. Таким образом, в терминах теории сигналов характеристическая функция (3) является непрерывным комплекснозначным периодическим сигналом, а распределение вероятностей $p_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ является спектром этого сигнала.

2. Дискретизация характеристической функции

Основные вычислительные сложности в задачах теории массового обслуживания возникают как раз при интегрировании по формуле (4) для нахождения распределения вероятностей p_i . При усложнении вида полученной характеристической функции $h(u)$ в зависимости от вычислительных ресурсов компьютера вероятности p_i либо считаются долго, либо их вовсе не удается вычислить.

Для уменьшения вычислительной сложности нахождения вероятностей предлагается воспользоваться аппаратом Дискретного преобразования Фурье [10], которое в соответствие дискретному сигналу h_k (последовательность N значений) ставит в соответствие его спектральные отсчеты p_i^* (последовательность N значений)

$$p_i^* = \left| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h_k \cdot e^{-j \cdot i \cdot \frac{2\pi}{N} k} \right|, i = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (5)$$

Таким образом, необходимо дискретизировать характеристическую функцию $h(u)$ на периоде 2π таким образом, чтобы дискретное преобразование Фурье p_i^* от него было максимально близко к p_i

$$\Delta u = \frac{2\pi}{N}, h_k = h(k * \Delta u), k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6)$$

При дискретизации сигнала (характеристической функции $h(u)$) с шагом Δu его спектр (распределение вероятностей p_i^*) начинает дублироваться с периодом Ω

$$\Omega = \frac{2\pi}{\Delta u} = N. \quad (7)$$

В этом случае, если распределение вероятностей p_i на интервале от 0 до N равно или близко к 1, то периодизация спектра не внесет в него значимых изменений на периоде N . Если же интервал от 0 до N не содержит всей или почти всей информации о распределении, то при дискретизации характеристической функции и периодизации спектра будет происходить наложение копий с периодом N , что приведет к расхождению вычисленного p_i^* и истинного p_i . Факт дублирования спектра при периодизации сигнала и возможного его наложения лежит в основе теоремы Котельникова, которая определяет выбор частоты дискретизации, позволяющее избежать такого наложения спектров.

3. Иллюстрация работы подхода на биномиальном распределении

Рассмотрим пример дискретизации характеристической функции на примере биномиального распределения с параметрами n (число испытаний) и p (вероятность наступления события).

Характеристическая функция будет иметь вид

$$h(u) = (q + pe^{iu})^n. \quad (8)$$

Продemonстрируем, что обращение характеристической функции можно провести как при помощи интегрального обратного преобразования Фурье для дискретных случайных величин (4), так и при помощи дискретного преобразования Фурье (5). Результат вычислений представлен на графике

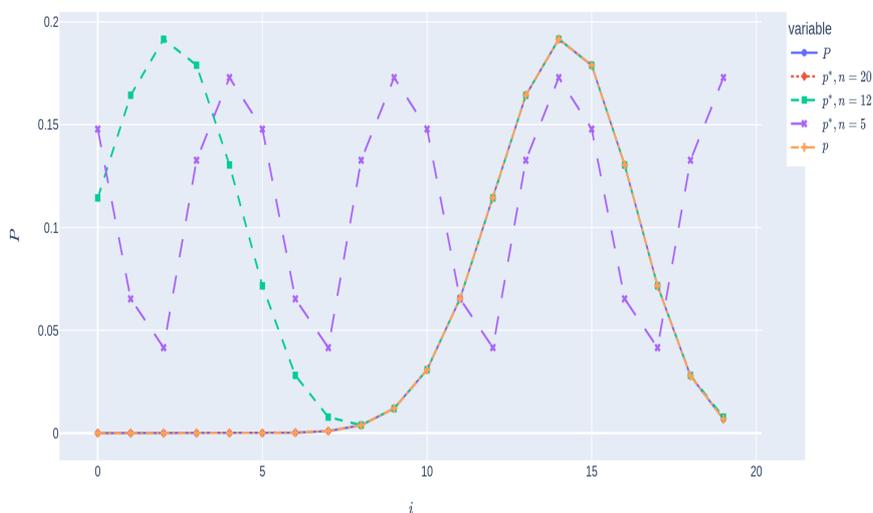


Рис. 1. Обращение характеристической функции

Вычисление было произведено на языке Python с заданными параметрами

$$n = 20, p = 0.7, N = \{20, 12\}.$$

Из рисунка 1 видно, что теоретическое биномиальное распределение P , результат обратного интегрального p (4) и дискретного p^* (5) преобразований совпадают при $N = 20$. Однако, как показывает график, при неверном выборе шага дискретизации (в данном случае $N < n$, $N = 12$) распределение начинает искажаться, так как условие теоремы Котельникова [6] не выполняется.

4. Иллюстрация работы подхода на задаче теории массового обслуживания

В данном разделе продемонстрируем эффективность предлагаемого подхода при реализации численных расчетов в задаче из [11]. В данной работе получено асимптотическое приближение характеристической функции $h(u, t)$ числа обслуженных заявок в системе с повторными обращениями и вызываемыми заявками

$$h(u, t) = \mathbf{R}e^{\mathbf{G}(u)t} \mathbf{E}, \quad (9)$$

которая при фиксированном t является функцией только от u .

Здесь матрица $\mathbf{G}(u)$ содержит коэффициенты системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Ее элементы выражаются через параметры модели. \mathbf{R} — вектор-строка, \mathbf{E} — единичный вектор-столбец.

Для вычисления характеристической функции необходимо вычислять матричную экспоненту $e^{\mathbf{G}(u)}$, что безусловно делает задачу трудоемкой. Здесь матричную экспоненту вычисляем при помощи преобразования подобия матриц [8]:

$$e^{\mathbf{G}(u)} = \mathbf{T}(u) \cdot \mathbf{GJ}(u) \cdot \mathbf{T}(u)^{-1},$$

где $\mathbf{T}(u)$ — матрица собственных векторов $\mathbf{G}(u)$, $\mathbf{GJ}(u)$ — диагональная матрица собственных чисел Λ_n матрицы $\mathbf{G}(u)$.

Вычисление распределения вероятностей числа обслуженных заявок в системе за некоторое фиксированное время t через интегрирование с помощью формулы (4) является, как уже было упомянуто, достаточно трудоемкой вычислительной задачей. Для решения этой проблемы предлагается воспользоваться формулой (5) ДПФ.

На рисунке 2 видно, что результат дискретного преобразования Фурье (p^*) полностью совпадает с результатом вычисления при помощи интегрирования (p)

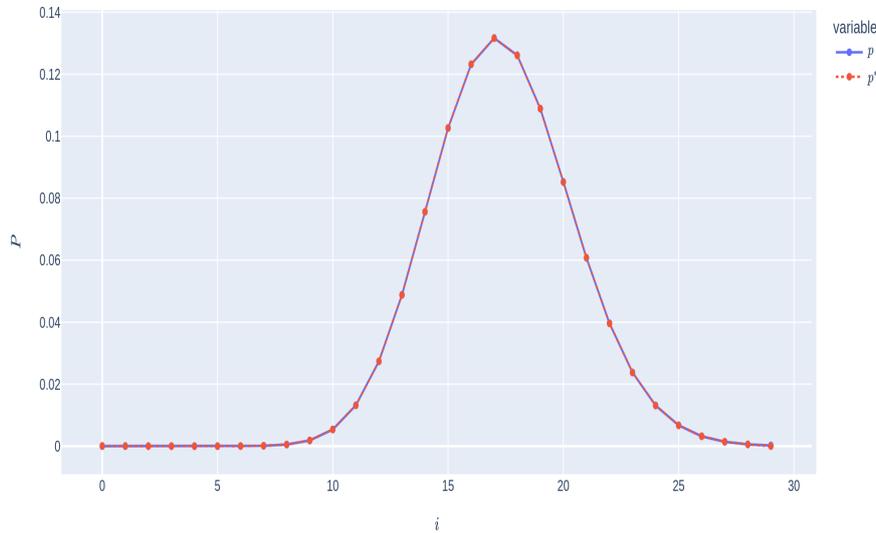


Рис. 2. Сравнение распределений вероятностей, полученных с помощью интегрирования и ДПФ

Для проверки скорости работы данного подхода к вычислению был проведен ряд тестов (400 запусков) со сравнением скорости работы алгоритмов и точности получаемого распределения при помощи расстояния Колмогорова

$$\Delta = \max_{0 < i < \infty} \left| \sum_{v=0}^i (P_0(v) - P_1(v)) \right|.$$

В среднем ДПФ быстрее интегрирования более, чем в 100 раз, а среднее расстояние Колмогорова — $4.16 \cdot 10^{-6}$.

Заключение

Так, можно заключить, что метод обращения с применением дискретного преобразование Фурье не проигрывает в точности и, в то же время, существенно эффективнее, что позволяет его применять на реальных задачах, содержащих обращение характеристической функции и требующих масштабных вычислений.

Реализация данного подхода позволяет существенно оптимизировать процесс проведения экспериментов для решения задач теории массового обслуживания и случайных процессов, а также других областей исследования, где фигурируют характеристические функции, так как время вычисления дискретного преобразования Фурье во много раз меньше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей, URSS, 2010. 314 с.
2. *Калинина Е. С., Кудрявцева М. В.* О применении аппарата производящих функций в теории вероятностей // Современные тенденции развития науки и технологий. 2016. № 3–1. С. 18–22.
3. *Назаров А. А., Лапатин И. Л.* Асимптотический анализ выходящего потока системы $MAR|GI|_{\infty}$ // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2009. Т. 315. № 5.
4. *Paul S., Phung-Duc T.* Retrial queueing model with two-way communication, unreliable server and resume of interrupted call for cognitive radio networks // Information technologies and mathematical modelling. Queueing theory and applications, 2018. С. 213–224.
5. *Назаров А. А., Моисеева Е. А.* Исследование RQ-системы $MMPP|M|1$ методом асимптотического анализа в условии большой загрузки // Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет им. НИ Лобачевского, 2012.

6. *Ястребов И. П.* Дискретизация непрерывных сигналов во времени. Теорема Котельникова // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2013. Т. 322. № 2. С. 19–23.
7. *Кузнецов Н. А., Козякин В. С.* Теорема Котельникова–основа цифрового оценивания и моделирования непрерывных процессов // Общество с ограниченной ответственностью "Издательство "Радиотехника". 2008. Т. 8.
8. *Bronson R.* Matrix methods: An introduction // Gulf Professional Publishing, 1991.
9. *Долгополов В. П., Долгополов М. В., Рыкова Э. Н., Родионова И. Н.* Ряды Фурье // Универс-групп, 2011.
10. *Тимошенко Л. И.* Дискретное преобразование Фурье и его быстрые алгоритмы // Современные наукоемкие технологии. 2014. № 12–2. С. 188–193.
11. *Blaginin A., Lapatin I.* Approximation of the Two-Dimensional Output Process of a Retrial Queue with MMPP Input // International Conference on Distributed Computer and Communication Networks, 2021. P. 333–345.

Благинин Алексей Леонидович — лаборант, научное управление, научно-исследовательская лаборатория прикладного анализа больших данных. E-mail: alex-b.l@yandex.ru

Лапатин Иван Леонидович — канд. физ.-мат. наук, доцент, Институт прикладной математики и компьютерных наук. E-mail: ilapatin@mail.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ G-СЕТИ С СИСТЕМАМИ С КАРАНТИННЫМИ И КОНТРОЛЬНЫМИ ОЧЕРЕДЯМИ, ПАРАМЕТРАМИ ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ, И СЛУЧАЙНЫМИ ДОХОДАМИ ОТ ПЕРЕХОДОВ МЕЖДУ ЕЕ СОСТОЯНИЯМИ

Д. Я. Копать

*Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, г. Гродно,
Республика Беларусь*

Статья посвящена анализу математической модели информационно-телекоммуникационной сети (ИТС), в котором многопроцессорном устройстве которой установлено антивирусное программное обеспечение (АПО) - G-сети с системами с контрольными и карантинными очередями. Целью исследования является получение выражения для ожидаемых доходов систем сети и нахождение оптимального количества ядер в каждом компьютере КС. Вначале статьи приведено описание вышеуказанной вероятностной модели сети в случае, когда заявки, поступившие в системы сети, переходят на обслуживание в случае успешности проверки на стандартность, а в противном случае проходят лечение в карантине. Проверка заявок на обслуживание является ненадежной: с ненулевой вероятностью отрицательная заявка попадает в очередь на обслуживание и удаляет одну положительную заявку. Во второй части получены выражения для ожидаемых доходов систем сети и приведена задача оптимизации такой сети. **Ключевые слова:** *Ожидаемые доходы, оптимизация G-сети с системами с карантинными и контрольными очередями, компьютерная сеть*

Введение

Первая модель поведения информационных систем и сетей (ИСС) с учетом попадания в них компьютерных вирусов в стационарном режиме была исследована в статье [1], а моделирование текущего поведения G-сетей с течением времени исследовалось в статье [2]. Математические модели ИСС с учётом установки в них АПО, но без учета поведения вирусов с помощью сетей массового обслуживания (СеМО) впервые были исследованы только в статье [3] через 26 лет после выхода в свет статьи [1]. Статья была посвящена [4] получению выражений для ожидаемых доходов G-сети с системами с карантинными и контрольными очередями

ми в случае функционирования в сети однопроцессорных компьютеров. Данная статья обобщает результаты статьи [4] на случай наличия в сети многопроцессорных устройств, и зависимости от времени параметров обслуживания сети с приемственностью поведения отрицательных заявок со статьёй [1].

1. Описание стохастической модели ИСС с АПО

Приведем описание многолинейной G-сети, состоящую из n систем массового обслуживания (СМО). Система $S_i, i = \overline{1, n}$, состоит из $m_i + 1$ линий обслуживаний (ЛО). Данная сеть является стохастической моделью ИСС с антивирусным ПО, состоящей из многопроцессорных устройств. В ИСС поступают простейшие потоки положительных заявок (неопасных файлов) и отрицательных (файлы представляющие угрозу для компьютера) заявок с интенсивностями $\lambda_{0i}^+(t), \lambda_{0i}^-(t), i = \overline{1, n}$, соответственно.

Перед поступлением на обслуживание заявка, поступившая в i -ю СМО, становится в контрольную очередь для проверки на стандартность, что соответствует проверке файла на наличие вируса. После завершения ожидания заявки в очереди она проверяется на стандартность в течении времени, имеющего экспоненциальное распределение с параметром $\mu_i^{(v)}(t), i = \overline{1, n}$. Под контрольной очередью будем понимать часть места RAM одного ядра процессора, отведенное для антивирусного ПО. По результатам проверки на стандартность в контрольной очереди i -й СМО положительная заявка признается таковой с вероятностью p_i^+ и переходит в очередь этой системы для обработки; а с противоположной вероятностью $1 - p_i^+$ положительная заявка будет признана отрицательной (соответствует тому, что файл будет признан вредоносным) и отправится в карантин на лечение. С вероятностью p_i^- отрицательная заявка после проверки на стандартность в контрольной очереди i -й СМО признается таковой и переходит в карантинную очередь на лечение; с вероятностью $1 - p_i^-$ отрицательная заявка признается положительной и поступит в очередь i -й СМО на обработку, где она активизируется немедленно уничтожает положительную заявку в непустой системе или покидает сеть в противном случае.

После успешной проверки на стандартность в системе $S_i, i = \overline{1, n}$, положительная заявка, после завершения ожидания в очереди на обслуживание, обрабатывается одной из свободных ЛО в течении времени распределенного экспоненциально с параметром $\mu_i(t), i = \overline{1, n}$ и по завершении обслуживания с вероятностью p_{ij}^+ переходит в контрольную очередь системы S_j как положительная заявка, с вероятностью p_{ij}^- —

как отрицательная заявка и с вероятностью $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n (p_{ij}^+ + p_{ij}^-)$ покидает сеть, $i, j = \overline{1, n}$.

Заявки, не прошедшие проверку на стандартность, становятся в очередь на лечение в карантине. Предположим, что длительность лечения заявки в карантине i -й СМО - это СВ экспоненциально распределенная с параметром $\mu_i^{(c)}(t), i = \overline{1, n}$. При лечении файл достаётся из папки по дисциплине FIFO. Определим вероятность $p_i^{(s)}, i = \overline{1, n}$, что заявка в карантине будет вылечена, после чего она направляется на обслуживание в очередь i -й СМО. Тогда с вероятностью $1 - p_i^{(s)}, i = \overline{1, n}$ заявка из карантина удаляется из сети. Состояние описанной сети определяется вектором размерности $4n$:

$$(\mathbf{k}, \mathbf{l}, t) = (\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n, \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n, t) \quad (1)$$

где $\mathbf{k}_i = (k_i^{(p)}, k_i^{(s)})$, $\mathbf{l}_i = (l_i^{(n)}, l_i^{(c)})$, $k_i^{(p)}, k_i^{(s)}$ - это количество положительных заявок в очереди на проверку стандартности и на обслуживании i -й СМО соответственно, а $l_i^{(n)}, l_i^{(c)}$ - число отрицательных заявок в контрольной очереди i -й СМО и число заявок в карантине i -й СМО соответственно. Пусть заявки выбираются на проверку на стандартность из очереди случайным образом. Тогда вероятность того, что будет проверена на стандартность положительная заявка может быть аппроксимирована отношением ожидаемого числа положительных заявок в контрольной очереди к ожидаемому числу всех заявок в контрольной очереди: $q_i = \frac{E[k_i^{(p)}]}{E[k_i^{(p)} + l_i^{(n)}]}$.

2. Нахождение ожидаемых доходов систем сети

Рассмотрим динамику изменения доходов некоторой системы S_i сети. Воспользуемся методикой, описанной в [9]. Обозначим через $V_i(t)$ ее доход в момент времени t . Пусть в начальный момент времени доход системы равен $V_i(0) = v_{i0}$. Доход этой СМО в момент времени $t + \Delta t$ можно представить в виде

$$V_i(t + \Delta t) = V_i(t) + \Delta V_i(t, \Delta t), \quad (2)$$

где $\Delta V_i(t, \Delta t)$ - изменение дохода системы S_i на интервале времени $[t, t + \Delta t)$. Введя обозначение $v_i(t) = E\{V_i(t)\}$, используя определение производной и линейность математического ожидания (м.о.), получим:

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E\{\Delta V_i(t, \Delta t)\}}{\Delta t}, \quad (3)$$

Запишем возможные изменения дохода системы S_i на интервале времени $[t, t + \Delta t)$ и их вероятности:

- 1) в контрольную очередь системы S_i поступает положительная заявка из внешней среды и приносит системе доход R_{0i}^+ с вероятностью $\lambda_{0i}^+(t)\Delta t + o(\Delta)$, где R_{0i}^+ – СВ с математическим ожиданием (м.о.) $E\{R_{0i}^+\} = a_{0i}^+$, $i = \overline{1, n}$, характеризующая ценность поступившей информации;
- 2) в контрольную очередь i -й СМО за время Δt поступит отрицательный файл и доход системы уменьшится на величину R_{0i}^- с вероятностью $\lambda_{0i}^-(t)\Delta t + o(\Delta)$, где R_{0i}^- – СВ с м.о. $E\{R_{0i}^-\} = a_{0i}^-$, характеризующая потенциальную опасность заражения узла сети;
- 3) положительный файл после проверки на стандартность в i -й СМО будет признана таковым и перейдет в очередь для обслуживания, при этом доход системы составит $-r_i^+$ с вероятностью $\mu_i^{(v)}(t)q_i^+p_i^+u(k_i^{(p)})\Delta t + o(\Delta t)$, где $-r_i^+$ – СВ с м.о. $E\{-r_i^+\} = b_i^+$ соответствует снижению производительности системы во время проверки файла;
- 4) отрицательная заявка после проверки на стандартность в i -ой СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание и удалит 1 положительную заявку, доход системы составит $-R_i^+$ с вероятностью $\mu_i^{(v)}(t)q_i^+(1-p_i^+)u(l_i^{(c)})u(k_i^{(p)})\Delta t + o(\Delta t)$, где $-R_i^+$ – СВ с м.о. $E\{R_i^+\} = a_i^+$, соответствует инфицированию файла в узле сети, за счет чего он становится недоступным для обработки. Если в системе в этот момент времени нет заявок на обслуживании, то отрицательный файл покидает сеть и доход системы составит r_i^- с вероятностью $\mu_i^{(v)}(t)q_i^+(1-p_i^+)u(l_i^{(c)})(1-u(k_i^{(p)}))\Delta t + o(\Delta t)$, где r_i^- – СВ с м.о. $E\{r_i^-\} = b_i^-$, $i = \overline{1, n}$, соответствует устранению потенциальной угрозы инфицирования всей сети;
- 5) положительный файл после проверки на стандартность в i -й СМО будет признан отрицательным и перейдет в карантин для лечения доход системы составит $-R_i^{(c)}$ с вероятностью $\mu_i^{(v)}(t)q_i^+(1-p_i^+)u(l_i^{(c)})\Delta t + o(\Delta t)$, где $R_i^{(c)}$ – СВ с м.о. $E\{R_i^{(c)}\} = a_i^{(c)}$, $i = \overline{1, n}$, характеризует убытки связанные с блокированием антивирусом легитимного ПО;
- 6) отрицательный файл после проверки на стандартность в i -й СМО будет признан отрицательным и перейдет в карантин для лечения, доход системы составит r_i^- с вероятностью $\mu_i^{(v)}(t)(1-q_i^+)p_i^-u(l_i^{(n)})\Delta t + o(\Delta t)$, где r_i^- – СВ с м.о. $E\{r_i^-\} = b_i^-$, $i = \overline{1, n}$, соответствует устранению потенциальной угрозы инфицирования всей сети;
- 7) карантинному узлу i -й СМО удастся вылечить зараженный файл и она отправляется в очередь на обслуживание в i -ю СМО с веро-

яностью $\mu_i^{(c)}(t)p_i^{(s)}u(k_i^{(s)})\Delta t + o(\Delta t)$, доход системы будет равен количеству восстановленной информации и составит R_i^+ , $i = \overline{1, n}$; в противном случае зараженный файл покидает сеть с вероятностью $\mu_i^{(c)}(t)(1 - p_i^{(s)})u(k_i^{(s)})\Delta t + o(\Delta t)$, не принеся ей вреда, расход системы будет равен количеству потерянной информации и составит $-R_i^+$, $i = \overline{1, n}$;

8) время обслуживания файла в j -й СМО закончилось и он направится в контрольную очередь i -й СМО как положительный файл, доход системы составит R_{ji}^+ с вероятностью $\sum_{j=1}^n \mu_j(t) \min(k_j^{(s)}, m_j) p_{ji}^+ u(k_i^{(s)}) \Delta t + o(\Delta t)$, где R_{ji}^+ – СВ с м.о. $E\{R_{ji}^+\} = a_{ij}^+$, $i, j = \overline{1, n}$, характеризующая ценность поступившей информации; при этом доход системы S_j не уменьшится, так как все процессы, связанные с обработкой этого файла в системе, будут уже выполнены;

9) время обслуживания заявки в j -й СМО закончилось и она направляется в контрольную очередь i -й СМО как отрицательный файл, доход системы составит R_{ji}^- с вероятностью $\sum_{j=1}^n \mu_j(t) \min(k_j^{(s)}, m_j) p_{ji}^- u(k_i^{(s)}) \Delta t + o(\Delta t)$, где R_{ji}^- – СВ с м.о. $E\{R_{ji}^-\} = a_{ij}^-$, $i, j = \overline{1, n}$, характеризующая потенциальную опасность потери информации за счет инфицирования узла сети; при этом доход системы S_j не уменьшится, так как все процессы, связанные с обработкой этого файла в системе, будут уже выполнены;

10) с вероятностью $\mu_i(t) \min(k_i^{(s)}, m_i) \Delta t + o(\Delta t)$ время обслуживания заявки в i -й СМО закончилось и она уходит из системы, не изменяя доход системы S_i , $i = \overline{1, n}$;

11) с вероятностью $1 - \sum_{i=1}^n \left(\lambda_{0i}^+(t) + \lambda_{0i}^-(t) + \mu_i(t) \min(k_i, k_i^{(s)}) + \mu_i^{(v)} + \mu_i^{(c)} \right) \Delta t + o(\Delta t)$ состояние сети не изменится.

Кроме того, за каждый малый промежуток времени Δt система S_i несет убытки (уменьшение производительности, снижение скорости выполнения рутинных операций за счет потребления АВ ПО ресурсов процессора) в размере $r_i \Delta t$, где r_i – СВ с м.о. $E\{r_i\} = b_i$, $i = \overline{1, n}$. Будем также считать, что СВ $R_{ij}^+, R_{ij}^-, r_i^+, R_i^c$ являются независимыми по отношению к СВ r_i , $i, j = \overline{1, n}$.

Пусть $N_i^{(s)} = E\{k_i^{(s)}\}$, $N_i^{(p)} = E\{k_i^{(p)}\}$, $L_i^{(n)} = E\{l_i^{(n)}\}$, $E\{\min(k_i^{(s)}, m_i)\} = \min(N_i^{(s)}, m_i)$, $u(k_i^{(p)}) = \min(N_i^{(p)}, 1)$, $u(l_i^{(c)}) = \min(L_i^{(c)}, 1)$, $u(l_i^{(n)}) =$

$\min(L_i^{(n)}, 1)$. При фиксированной реализации процесса $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, t)$ и после усреднения по $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, t)$, м.о. изменения дохода i -й СМО в режиме насыщения будет равно:

$$\begin{aligned} \frac{dv_i(t)}{dt} = E[\Delta V_i(\Delta t, t)] = & \left[a_{0i}^+ \lambda_{0i}^+ + a_{0i}^- \lambda_{0i}^- + -b_i + \mu_i^{(v)} ((a_i^c - b_i^+) p_i^- a_i^c) q_i + \right. \\ & + a_i^+ \mu_i^{(c)} \min(L_i^{(c)}, 1) + \mu_i^{(v)} (1 - q_i) (b_i^- a_i^+ a_i^+ p_i^+) - \\ & \left. - b_i^- \mu_i^{(v)} (1 - p_i^-) (1 - q_i) \min(L_i^{(n)}, 1) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^n \mu_j (a_{ji}^+ p_{ji}^+ - a_{ji}^- p_{ji}^-) m_i \right] \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (4)$$

Зная начальные условия $v_i(0) = v_{i0}$, $i = \overline{1, n}$, и средние характеристики можно найти ожидаемые доходы систем сети. Средние характеристики $L_i^{(n)}$, $L_i^{(c)}$, $N_i^{(p)}$, $N_i^{(s)}$ могут быть найдены из следующей системы дифференциальных уравнений (ДУ):

$$\begin{aligned} \frac{dN_i^{(p)}(t)}{dt} &= \frac{dE[k_i^{(p)}(t)]}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[k_i^{(p)}(t, \Delta t)]}{\Delta t}, \\ \frac{dN_i^{(s)}(t)}{dt} &= \frac{dE[k_i^{(s)}(t)]}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[k_i^{(s)}(t, \Delta t)]}{\Delta t}, \\ \frac{dL_i^{(n)}(t)}{dt} &= \frac{dE[l_i^{(n)}(t)]}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[l_i^{(n)}(t, \Delta t)]}{\Delta t}, \\ \frac{dL_i^{(c)}(t)}{dt} &= \frac{dE[l_i^{(c)}(t)]}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[l_i^{(c)}(t, \Delta t)]}{\Delta t}, \end{aligned}$$

где изменения числа заявок в системе S_i , а значит и производные среднего числа заявок по времени находятся из системы ДУ:

$$\begin{aligned} \frac{dN_i^{(p)}(t)}{dt} &= \lambda_{0i}^+(t) - \frac{\mu_i^{(v)}(t) N_i^{(p)}(t)}{N_i^{(p)}(t) + L_i^{(n)}(t)} + \sum_{j=1}^n \mu_j(t) p_{ji}^+ \min(N_j^{(s)}(t), m_j), \\ \frac{dL_i^{(n)}(t)}{dt} &= \lambda_{0i}^-(t) - \frac{\mu_i^{(v)}(t) L_i^{(n)}(t)}{N_i^{(p)}(t) + L_i^{(n)}(t)} + \sum_{j=1}^n \mu_j(t) p_{ji}^- \min(N_j^{(s)}(t), m_j), \\ \frac{dL_i^{(c)}(t)}{dt} &= \mu_i^{(v)}(t) \frac{(1 - p_i^+) N_i^{(p)}(t) + p_i^- L_i^{(n)}(t)}{N_i^{(p)}(t) + L_i^{(n)}(t)} - \mu_i^{(c)}(t) \min(L_i^{(c)}(t), 1), \\ \frac{dN_i^{(s)}(t)}{dt} &= \mu_i^{(v)}(t) \frac{p_i^+ N_i^{(p)}(t) - (1 - p_i^-) L_i^{(n)}(t) \min(m_i, N_i^{(s)}(t))}{N_i^{(p)}(t) + L_i^{(n)}(t)} + \\ & + \mu_i^{(c)}(t) p_i^{(s)} \min(L_i^{(c)}(t), 1) - \mu_i(t) \min(N_i^{(s)}(t), m_i). \end{aligned}$$

Пусть сеть функционирует в режиме насыщения, т.е. $\min(N_i^{(s)}, m_i) = m_i$, $\forall t > 0$. Введя обозначения

$$a_i(t) = \mu_i^{(v)}(t) \left[\int_0^t (\lambda_{0i}^+(\tau) + \lambda_{0i}^-(\tau) - \mu_i^{(v)}(\tau) + \sum_{j=1}^n \mu_j m_j (p_{ji}^+ + p_{ji}^-)) d\tau + \right.$$

$N_i^{(p)}(0) + L_i^{(n)}(0) \Big]^{-1}$, $k_i(t) = \int_0^t (\lambda_{0i}^+(\tau) + \lambda_{0i}^-(\tau) - \mu_i^{(v)}(\tau) + \sum_{j=1}^n \mu_j m_j (p_{ji}^+ + p_{ji}^-)) d\tau$, $A(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau$ можно получить следующее решение вышеуказанного ДУ:

$$N_i^{(p)}(t) = N_i^{(p)}(0)e^{A(0)}e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_0^t e^{A(\tau)} \left(\lambda_{0i}^+(\tau) + \sum_{j=1}^n \mu_j m_j p_{ji}^+ \right) d\tau,$$

$$L_i^{(n)}(t) = L_i^{(n)}(0)e^{A(0)}e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_0^t e^{A(\tau)} \left(\lambda_{0i}^-(\tau) + \sum_{j=1}^n \mu_j m_j p_{ji}^-(\tau) \right) d\tau,$$

$$L_i^{(c)}(t) = \frac{(1-p_i^+)N_i^{(p)}(t) + p_i^-L_i^{(n)}(t)}{N_i^{(p)}(t) + L_i^{(n)}(t)} \int_0^t \mu_i^{(v)}(\tau) d\tau - \int_0^t \mu_i^{(c)}(\tau) d\tau + L_i^{(c)}(0),$$

$$N_i^{(s)}(t) = \int_0^t \left(\mu_i^{(v)}(\tau) \frac{p_i^+ N_i^{(p)}(\tau) - (1-p_i^-)L_i^{(n)}(\tau)m_i}{N_i^{(p)}(\tau) + L_i^{(n)}(\tau)} + \mu_i^{(c)}(\tau)p_i^{(s)} - \mu_i(\tau)m_i \right) d\tau$$

Обозначим через d_i – затраты на содержание одной заявки в i -ой СМО (в очереди и на обслуживании), E_i – затраты на содержание одной ЛО в i -ой СМО, $i = \overline{1, n}$. Задача оптимизации доходов данной сети при ограничениях на число ЛО имеет вид:

$$W(t, m) = W(t, m_1, m_2, \dots, m_n) = \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n (v_i(\tau) - d_i k_i(\tau) - E_i m_i) d\tau, \quad (5)$$

$$\begin{cases} W(T, m_1, m_2, \dots, m_n) \rightarrow \max_{m_1, m_2, \dots, m_n}, \\ m_i \leq a_i, \quad i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (6)$$

Заключение

В статье впервые представлена модель КС с антивирусным ПО с многопроцессорными устройствами в КС. Найдены ожидаемые доходы систем КС с антивирусным ПО и указан критерий оптимальности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gelenbe E. Product form queueing networks with negative and positive customers // Journal of Applied Probability. 1991. Vol. 28, № 3. P. 656–663.
2. Matalytski M., Naumenko V. Non-stationary analysis of queueing network with positive and negative messages // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2013. Vol. 12, № 2. P. 61–71.

3. *Летунович Ю. Е., Якубович О.* Открытые марковские сети массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. №. 41. С. 32–38.
4. *Kosarava K., Kopats D.* Analysis of the Probabilistic and Cost Characteristics of the Queueing Network with a Control Queue and Quarantine in Systems and Negative Requests by Means of Successive Approximations // International Conference on Distributed Computer and Communication Networks. 2022. Cham: Springer, 2022. С. 259–271.

Копать Дмитрий Ярославович — кандидат физико-математических наук, ст. преп. кафедры логистики и методов управления, ГрГУ им. Янки Купалы. E-mail: dk80395@mail.ru

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ЦИКЛИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОНФЛИКТНЫМИ ПОТОКАМИ

В. Л. Цодиков, А. В. Зорин

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

В работе изучается система массового обслуживания, отражающая, в частности, функционирование системы управления транспортными потоками в классе циклических алгоритмов с фиксированным ритмом переключения. Подробно рассматривается процесс управления конфликтными потоками однородных требований с периодической интенсивностью. Строятся последовательности случайных величин, описывающих процессы, происходящие в системе. Получены рекуррентные соотношения для векторной последовательности, которая определяет момент времени с начала суток, состояние обслуживающего устройства и величины очередей по потокам, доказано марковское свойство. **Ключевые слова:** конфликтные потоки, нестационарный поток Пуассона, циклическое управление с фиксированным ритмом, счётная цепь Маркова, функционально-статистическое описание.

Введение

Большое число задач теории массового обслуживания предполагает, что входной поток в систему является стационарным, ординарным, без последствия, т. е. простейшим. На практике, многие реальные потоки не обладают некоторыми из этих свойств. В этой связи большой популярностью пользуются дважды стохастические потоки, рекуррентные потоки или потоки общего типа, обладающие моментами регенерации. По-видимому, для задач управления транспортным движением полезно рассмотреть потоки с периодической интенсивностью. СМО с такими потоками рассматривались, например, в [1].

В работе рассматривается транспортный перекрёсток как управляющая система массового обслуживания. Применяется функционально-статистический (кибернетический подход), предложенный в [2, 3].

1. Описание системы

В систему обслуживания поступают $m < \infty$ входных потоков $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$. Требования по потоку Π_j образуют нестационарный поток Пуассона, $\lambda_j(t)$ — мгновенная интенсивность потока Π_j в момент t . Требования потока Π_j помещаются в накопитель O_j неограниченной вместимости. Подчёркнём, что рассматриваем мгновенную интенсивность не как константу, а как величину, зависящую от времени. Поскольку в течение дня интенсивность дорожного движения меняется, и изо дня в день некоторые закономерности сохраняются (например, утром большая интенсивность трафика в сторону центра города, а вечером — наоборот, в сторону спальных районов), то целесообразно рассматривать функцию $\lambda_j(t)$ как *периодическую*: $\lambda_j(t+T_D) = \lambda_j(t)$, где $T_D > 0$ — некоторая константа, к примеру, сутки, 24 часа. Так как известна функция $\lambda_j(t)$, то будем считать известной и функцию $\Lambda_j(x) = \int_0^x \lambda_j(t) dt$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Обслуживающее устройство представляет собой светофор, который имеет $2m$ внутренних состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m)}$. В состоянии вида $\Gamma^{(2j-1)}$ обслуживаются только требования потока Π_j . В состоянии вида $\Gamma^{(2j)}$ требования не обслуживаются: эти состояния вводятся для разрешения конфликтности потоков (состояния переналадки и переориентации, т.н. «жёлтый свет»). Время пребывания обслуживающего устройства в состоянии $\Gamma^{(r)}$ неслучайно и равно T_r . За время T_{2j-1} из очереди Π_j может обслужиться не более, чем ℓ_j требований (в порядке очереди, FIFO. Требования как те, что были в начале промежутка, так и поступившие за сам промежуток). Данную величину также называют *потоком насыщения*.

Введём некоторые обозначения. Пусть $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$ — моменты смены состояния обслуживающего устройства, Γ_i обозначает состояние обслуживающего устройства на промежутке $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i = 1, 2, \dots$; $\eta_{j,i}$ — число требований потока Π_j , поступивших на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\varkappa_{j,i}$ — число требований в очереди O_j в момент τ_i ; $\xi_{j,i}$ — максимально возможное число требований из очереди O_j , которые можно обслужить на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$, а $\bar{\xi}_{j,i}$ — число фактически обслуженных требований из очереди O_j на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Введём величины $\tau'_i = \tau_i \pmod{T_D}$, то есть остаток от деления τ_i на T_D (будет иметь смысл времени суток).

Будем предполагать, что все величины T_1, T_2, \dots, T_{2m} и T_D соизмеримы, то есть существует некоторый отрезок времени Δ , который укладывается целое число раз в каждый из всех указанных времён. Из

этого предположения следует, что у величин τ'_i существует лишь *конечное* число значений.

2. Формализация работы обслуживающего устройства

Установим рекуррентные по $i = 0, 1, \dots$ соотношения для состояния обслуживающего устройства, длины очереди и последовательности $\{\tau'_i; i = 0, 1, \dots\}$.

Видно, что $\bar{\xi}_{j,i} \leq \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}$: число реально обслуженных машин в интервал $[\tau_i, \tau_{i+1})$ не может быть больше, чем число машин в очереди O_j в начале интервала (в момент τ_i) плюс число машин, поступивших в данный поток за этот интервал времени. В результате в момент времени τ_{i+1} получим:

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \bar{\xi}_{j,i}. \quad (1)$$

Также понятно, что $\bar{\xi}_{j,i} \leq \xi_{j,i}$: число реально обслуженных машин в интервал $[\tau_i, \tau_{i+1})$ не может быть больше, чем максимально возможное. При этом мы знаем, что $\xi_{j,i} = 0$, если в данный временной интервал горит запрещающий сигнал для потока Π_j и $\xi_{j,i} = \ell_j$, если в данный временной интервал горит разрешающий сигнал для потока Π_j .

Учитывая два приведённых неравенства, можем записать: $\bar{\xi}_{j,i} \leq \min\{\xi_{j,i}, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}\}$. Так как целью является уменьшение числа требований в очереди, то оптимальным является использование *экстремальной стратегии* обслуживания. Значит, $\bar{\xi}_{j,i} = \min\{\xi_{j,i}, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}\}$. Если $\xi_{j,i} > \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}$, то $\bar{\xi}_{j,i} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}$. Значит, используя формулу (1), получим: $\varkappa_{j,i+1} = 0$. Если же $\xi_{j,i} \leq \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}$, то $\bar{\xi}_{j,i} = \xi_{j,i}$, и тогда $\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}$.

Таким образом, изменение длины очереди O_j за один интервал времени кратко можем описать следующим рекуррентным соотношением:

$$\varkappa_{j,i+1} = \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}. \quad (2)$$

Будем наблюдать систему только в дискретные моменты времени $0, \tau_1, \tau_2, \dots$. Положим $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m)}\}$, $X = \{0, 1, \dots\} \times \{0, 1, \dots\} \times \dots \times \{0, 1, \dots\}$, m раз. Обозначим через $\Gamma_i \in \Gamma$, $i = 0, 1, \dots$ состояние обслуживающего устройства на промежутке $(\tau_{i-1}, \tau_i]$, через $\varkappa_{j,i} \in \{0, 1, \dots\}$ — число требований в очереди O_j в момент τ_i . Введём вектор $\varkappa_i = (\varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \dots, \varkappa_{m,i})$. Для натурального числа r определим операцию $r \oplus 1$ равенствами $r \oplus 1 = r + 1$ для $r < 2m$ и $(2m) \oplus 1 = 1$. Далее, для натуральных $r, a \geq 2$ положим по индукции $r \oplus a = (r \oplus (a - 1)) \oplus 1$. Алгоритм управления потоками формализован в виде отображения $u: \Gamma \rightarrow \Gamma$. Будем считать, что

$u(\Gamma^{(j)}) = \Gamma^{(j\oplus 1)}$. Введем также отображение $v: \Gamma \rightarrow \{T_1, T_2, \dots, T_{2m}\}$ равенством $v(\Gamma^{(j)}) = T_{j\oplus 1}$.

Тогда формализация работы светофора имеет вид рекуррентных соотношений:

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_{i+1} = \tau_i + v(\Gamma_i), \quad \Gamma_{i+1} = u(\Gamma_i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Было получено следующее соотношение, в котором видно нелокальное задание входных потоков и потоков насыщения:

$$\mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = \tilde{b} \mid \bigcap_{l=0}^i \{\tau'_l = t_l, \Gamma_l = \Gamma^{(j_l)}, \varkappa_l = x^{(l)}\}) = \begin{cases} \prod_{s=1}^m \left[(e^{-(\Lambda_s \{t_i + v(\Gamma^{(j_i)})\} - \Lambda_s \{t_i\})}) \times \right. & \text{при } u(\Gamma^{(j_i)}) = \Gamma^{(r)}, r = 2k, \\ \left. \times \frac{(\Lambda_s \{t_i + v(\Gamma^{(j_i)})\} - \Lambda_s \{t_i\})^{b_s}}{b_s!} \right] & \tilde{b} = (0, 0, \dots, 0) \\ & \text{или при } r = 2k - 1, \\ & \tilde{b} \neq (0, \dots, 0, \ell_k, 0, \dots, 0); \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (3)$$

В дальнейшем будем считать, что величины T_1, T_2, \dots, T_{2m} и T_D соизмеримы. Отсюда следует, что существуют такие целые числа p, q , что $pT = qT_D$, где $T = T_1 + T_2 + \dots + T_{2m}$. Пусть функция $\text{rem}(x, d)$ дает остаток от деления x на d . Рассмотрим для $j = 1, 2, \dots, 2m$ множества

$$G_j = \bigcup_{s=0}^{p-1} \{(\text{rem}(sT, T_D), \Gamma^{(j)}), (\text{rem}(sT + T_{j\oplus 1}, T_D), \Gamma^{(j\oplus 1)}), (\text{rem}(sT + T_{j\oplus 1} + T_{j\oplus 2}, T_D), \Gamma^{(j\oplus 2)}), \dots, (\text{rem}(sT + T_{j\oplus 1} + T_{j\oplus 2} + \dots + T_{j\oplus (2m-1)}, T_D), \Gamma^{(j\oplus (2m-1))})\}.$$

Каждое из множеств $G_j, j = 1, 2, \dots, 2m$ содержит одинаковое число $2mp$ элементов.

Основной результат работы содержится в следующей теореме:

Теорема 1. При заданном распределении вектора $(\tau'_0, \Gamma_0, \varkappa_0)$ последовательность

$$\{(\tau'_i, \Gamma_i, \varkappa_i); i = 0, 1, \dots\} \quad (4)$$

является однородной марковской цепью с пространством состояний вида $(G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{2m}) \times X$.

Из теоремы 1 следует, что если все множества G_1, G_2, \dots, G_{2m} совпадают, то все состояния принадлежат одному классу существенных сообщающихся состояний. А если среди указанных множеств есть не совпадающие, то могут быть несколько классов существенных сообщающихся состояний.

Заключение

В результате исследования системы массового обслуживания конфликтных периодических потоков по циклическому алгоритму с фиксированным ритмом переключения, используя кибернетический подход, было выполнено нелокальное описание входных потоков, потоков насыщения, установлены рекуррентные соотношения для длин очередей и состояния обслуживающего устройства. Было доказано марковское свойство многомерной последовательности $\{(\tau'_i, \Gamma_i, \varkappa_i); i = 0, 1, \dots\}$ и выявлено её минимальное пространство состояний. В дальнейшем это позволит установить условия существования стационарного режима в системе, а также разработать эффективный вычислительный алгоритм для отыскания стационарного распределения вероятностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Afanas'eva L. G.* On periodic distribution of waiting-time process. // Kalashnikov, V.V., Zolotarev, V.M. (eds) *Stability Problems for Stochastic Models. Lecture Notes in Mathematics.* 1985. Vol 1155. P. 1–20.
2. *Федоткин М. А.* Нетрадиционные проблемы математического моделирования экспериментов. М.: Физматлит, 2018. 424 с.
3. *Зорин А. В.* Теория конфликтных систем обслуживания при их функционально-статистическом задании. Дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.05. — Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, 2016. 351 с.

Цодиков Владимир Леонидович — студент 4 курса по направлению «Прикладная математика и информатика» Института информационных технологий, математики и механики. E-mail: vovatsodikov@gmail.com

Зорин Андрей Владимирович — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой Теории вероятностей и анализа данных, Институт информационных технологий, математики и механики. E-mail: andrei.zorine@itmm.unn.ru

ТАНДЕМНАЯ ГИБРИДНАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ И ВЕРОЯТНОСТНЫМ ПЕРЕХОДОМ

Н. В. Петрива, С. В. Пауль

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В статье рассматривается тандемная гибридная система массового обслуживания с повторными вызовами. Поступившая в систему заявка входящего потока проходит последовательное обслуживание на двух фазах. На первой фазе системы — конечный бункер для ожидания и два обслуживающих прибора. На второй фазе — система с орбитой и повторными вызовами. После обслуживания на первой фазе, заявки с вероятностью p переходят на вторую фазу. В статье представлено нахождение распределения вероятностей числа заявок на орбите на второй фазе в условии большой задержки заявок на орбите методом асимптотического анализа. **Ключевые слова:** *система массового обслуживания, тандемная система с повторными вызовами, гибридная система, RQ-система, метод асимптотического анализа.*

Введение

В данной работе исследуется тандемная система массового обслуживания (СМО) с конечным бункером на первой фазе и орбитой на второй фазе. Из-за различий дисциплин ожидания, система была названа гибридной [1,2,3]. Ранее была рассмотрена СМО с повторными вызовами [4] без потерь на второй фазе. Благодаря вероятностному переходу с первой на вторую фазу можно смоделировать реальную систему обслуживания клиента чат-ботом на первой фазе и, при необходимости, оператором на второй. Данное исследование показывает как внедрение чат-бота в чат обслуживания пользователей влияет на загруженность оператора.

1. Математическая модель

Заявки поступают в систему согласно пуассоновскому потоку с интенсивностью λ и проходят две фазы обслуживания.

На первой фазе системы находится система состоящая из двух обслуживающих приборов и конечного бункера. На второй фазе системы

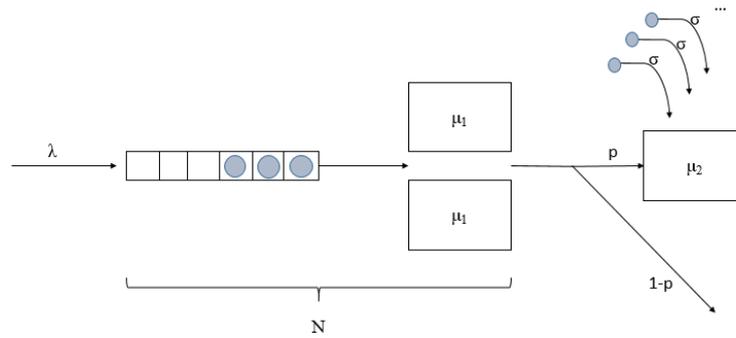


Рис. 1. Тандемная гибридная система массового обслуживания с повторными вызовами и вероятностным переходом

– СМО с бесконечной орбитой. Если заявка при поступлении на первую фазу, обнаруживает хотя бы один свободный прибор, то она занимает его для обслуживания в течении случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ_1 . В противном случае, когда оба прибора заняты, заявка встает в бункер на ожидание обслуживания и занимает одно из $N - 2$ места.

После того как заявка прошла обслуживание на первой фазе, она либо с вероятностью $p - 1$ покидает систему, либо с вероятностью p переходит на вторую фазу. При этом, в случае если заявка застаёт прибор второй фазы свободным, она занимает его и обслуживается время, распределенное по экспоненциальному закону с интенсивностью μ_2 . Иначе, данная заявка переходит на орбиту для совершения случайной задержки, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ . После задержки заявка вновь пытается занять прибор. Если он занят, то заявка мгновенно возвращается на орбиту для совершения очередной задержки, а если же он свободен, то заявка занимает его на случайное время обслуживания, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ_2 . После обслуживания на второй фазе, заявка покидает систему.

Введем обозначения:

- процесс $i_1(t)$ – число заявок на первой фазе,
- процесс $i_2(t)$ – число заявок орбите,
- процесс $k(t)$ определяет состояние прибора на второй фазе. 0 – свободен, 1 – занят.

2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Ставится задача нахождения стационарного распределения числа заявок $i_2(t)$ на орбите. Для этого рассмотрим трехмерный марковский процесс $\{i_1(t), i_2(t), k(t)\}$. Для распределения вероятностей $P_k(i_1, i_2, t) = P\{i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, k(t) = t\}$ составим систему Колмогорова. Введем частичные характеристические функции, обозначив $j = \sqrt{-1}$: $H_k(i_1, u) = \sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju i_2} P_k(i_1, i_2), k = 0, 1$. Сделаем замены, получим систему для функций $\mathbf{H}_k(u)$, которую будем решать методом асимптотического анализа в условии большой задержки на орбите ($\sigma \rightarrow 0$).

3. Асимптотика первого порядка

Выполним следующие замены: $\sigma = \varepsilon, u = \varepsilon w, \mathbf{H}_k(u) = \mathbf{F}_k(w, \varepsilon)$.

Теорема 1. Пусть $i_2(t)$ — число заявок на орбите второй фазы в тандемной гибридной системе, тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{jw\sigma i_2(t)} &= e^{jw\kappa_1}, \\ \mathbf{r}_0[\lambda\mathbf{B} - \mathbf{A} + \mu_1(1-p)\mathbf{D} - \kappa_1\mathbf{I}] + \mu_2\mathbf{r}_1\mathbf{I} &= 0, \\ \mathbf{r}_1[\lambda\mathbf{B} - \mathbf{A} - \mu_2\mathbf{I} + \mu_1\mathbf{D}] + \mathbf{r}_0(\mu_1p\mathbf{D} + \kappa_1\mathbf{I}) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где κ_1 является положительным корнем уравнения:

$$\mu_1p\mathbf{r}_1\mathbf{D}\mathbf{e} - \mathbf{r}_0\kappa_1\mathbf{I}\mathbf{e} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{r}_k, k = 0, 1$ - векторы с компонентами $r_{i_1k}, i_1 = 0 \dots N$, где r_{i_1k} вероятность того, что на первой фазе i_1 заявок, а на второй фазе прибор находится в состоянии k : $(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1)\mathbf{e} = \mathbf{r}\mathbf{e} = 1$.

4. Асимптотика второго порядка

В системе для функций $\mathbf{H}_k(u)$ положим $\mathbf{H}_k(u) = \mathbf{H}_k^{(2)}(u)e^{ju\frac{\kappa_1}{\sigma}}$. Далее сделаем следующую замену: $\sigma = \varepsilon^2, u = \varepsilon w, \mathbf{H}_k^{(2)}(u) = \mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon)$

Теорема 2. Пусть $i_2(t)$ — число заявок на орбите второй фазы в тандемной гибридной системе, тогда

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{jw\sqrt{\sigma}(i_2(t) - \frac{\kappa_1}{\sigma})} = e^{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2}, \quad (3)$$

где κ_2 определяется равенством:

$$\kappa_2 = \frac{\kappa_1\mathbf{r}_0\mathbf{e} - \kappa_1\varphi_0\mathbf{e} + \mu_1p\mathbf{D}\varphi_1\mathbf{e}}{\mathbf{r}_0\mathbf{e} - \kappa_1\psi_0\mathbf{e} - \mu_1p\mathbf{D}\psi_1\mathbf{e}}. \quad (4)$$

Здесь вектора \mathbf{r}_k определены выше, величины $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ определяются системами:

$$\begin{aligned} \varphi_0[\lambda\mathbf{B} - \mathbf{A} + \mu_1(1-p)\mathbf{D} - \varkappa_1\mathbf{I}] + \mu_2\varphi_1\mathbf{I} &= 0, \\ \varphi_0[\mu_1p\mathbf{D} + \varkappa_1\mathbf{I}] + \varphi_1[\lambda\mathbf{B} - \mathbf{A} + \mu_2\mathbf{I} + \mu_1\mathbf{D}] &= \varkappa_1\mathbf{r}_0\mathbf{I} - \mu_1p\mathbf{r}_1\mathbf{D}, \\ (\varphi_0 + \varphi_1)\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \psi_0[\lambda\mathbf{B} - \mathbf{A} + \mu_1(1-p)\mathbf{D} - \varkappa_1\mathbf{I}] + \mu_2\psi_1\mathbf{I} &= \mathbf{r}_0, \\ \psi_0[\mu_1p\mathbf{D} + \varkappa_1\mathbf{I}] + \psi_1[\lambda\mathbf{B} - \mathbf{A} + \mu_2\mathbf{I} + \mu_1\mathbf{D}] &= -\mathbf{r}_0, \\ (\psi_0 + \psi_1)\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Возвращаясь к функциям $\mathbf{H}_k(u)$, выполнив обратные замены, получим аппроксимацию $h(u) = \mathbf{H}_k(u)\mathbf{e}$ для характеристической функции числа заявок на орбите исследуемой системы

$$h(u) = e^{\{ju\frac{\varkappa_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2}{2}\frac{\varkappa_2}{\sigma}\}}. \quad (7)$$

5. Численный анализ области применимости асимптотического результата

Распределение вероятностей числа $i_2(t)$ заявок на орбите является гауссовским с математическим ожиданием $\frac{\varkappa_1}{\sigma}$ и дисперсией $\frac{\varkappa_2}{\sigma}$. Построим дискретную аппроксимацию числа $P(i)$ заявок на орбите вида:

$$P(i) = (L(i+0.5) - L(i-0.5))(1 - L(-0.5))^{-1}, \quad (8)$$

где $L(x)$ — функция нормального распределения с параметрами $\frac{\varkappa_1}{\sigma}$ и $\frac{\varkappa_2}{\sigma}$.

Точность полученной аппроксимации будем определять с помощью расстояния Колмогорова:

$$\Delta = \max_{k \geq 0} \left| \sum_{i=0}^k (P_i - P_{sim}) \right|, \quad (9)$$

где P_{sim} — распределение вероятностей числа заявок на орбите, полученных в результате работы имитационной модели.

Приведем значения расстояний при различных интенсивностях входящего потока для $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2$. Из данных таблицы 1 можно увидеть основную тенденцию: точность аппроксимации растет с уменьшением интенсивности повторных вызовов и применима для значений $\sigma < 0.05$, когда относительная погрешность, в виде расстояния Колмогорова, не

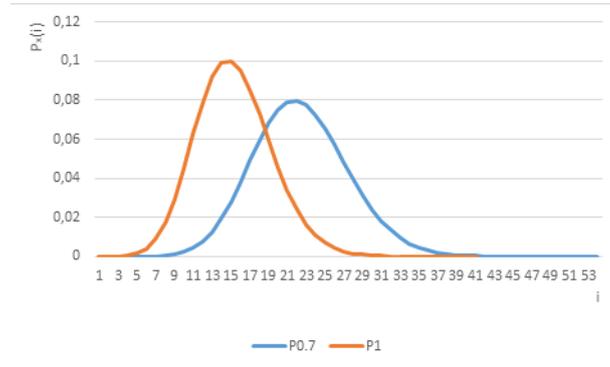
Таблица 1

Расстояние Колмогорова

σ	$\lambda = 0.3$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.7$	$\lambda = 0.$
0.5	0.009	0.09	0.153	0.184
0.1	0.131	0.079	0.066	0.122
0.05	0.106	0.036	0.039	0.128
0.01	0.043	0.048	0.032	0.046

превышает 0.05. Оно является приемлемым при точности имитационной модели 0.002.

Рассмотрим систему с входными параметрами $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \lambda = 0.7, \sigma = 0.01$ для $p = 1$, когда после обслуживания чат-ботом пользователей обязательно переводят на оператора (P_1), и для $p = 0.7$, когда после обслуживания чат-ботом 30% пользователей получают ответы на свои вопросы и покидают систему без обслуживания оператором ($P_{0.7}$) (рисунок 2).

Рис. 2. Сравнение распределений P_1 и $P_{0.7}$

Для P_1 математическое ожидание равно 21.3, а для $P_{0.7}$ равно 9.9. Это говорит о том, что с внедрением чат-бота, снимающего с оператора 30% пользователей, в среднем ожидать ответа оператора будет примерно в 2 раза меньше пользователей.

Заключение

Используя метод асимптотического анализа в условии большой загрузки на орбите, получена гауссовская характеристическая функция

с асимптотическим средним $\frac{\lambda_1}{\sigma}$ и дисперсией $\frac{\lambda_2}{\sigma}$ числа заявок на орбите исследуемой системы.

Исследование области применимости показало, что точность аппроксимации растет с уменьшением интенсивности повторных вызовов.

Полученное распределение вероятностей числа заявок на орбите позволило продемонстрировать, что введение не самого умного чат-бота в разы уменьшает нагрузку на оператора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Paul S., Phung-Duc T. Retrial Queueing Model with Two-Way Communication, Unreliable Server and Resume of Interrupted Call for Cognitive Radio Networks // CCIS 2018. Vol. 912. P. 213–214.
2. Судыко Е. А., Назаров А. А. Допредельные характеристики RQ-системы с конфликтами заявок // Научное творчество молодежи: материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции, Томск, 2010. Ч. 1. С. 97–100.
3. Назаров А. А., Пауль С. В., Лизюра О. Д. Асимптотический анализ RQ-системы с N типами вызываемых заявок в предельном условии большой задержки заявок на орбите // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 48. С. 13–20.
4. Петрива Н. В., Пауль С. В. Гибридная система массового обслуживания с повторными вызовами // Материалы VIII Международной молодежной научной конференции "Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем Томск, 2021. Т. 306. С. 136–140.
5. Боровков А. А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания // Москва: Наука, 1980. 382 с.
6. Бочаров П. П., Печникин А. В. Теория массового обслуживания // Москва: Изд-во РУДН, 1995. 520 с.
7. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания // Москва: Наука, 2010. 400 с.

Петрива Наталья Владимировна — магистрантка I курса, ИПМиКН.
E-mail: nata0338@yandex.ru

Пауль Светлана Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры
ТВиМС, ИПМиКН. E-mail: paulsv82@mail.ru

Математическое и
компьютерное
моделирование в технике,
естествознании, экономике,
образовании,
гуманитарных науках и
других областях

ASYMPTOTIC BOUNDS FOR CELLULAR CIRCUIT DECODER WITH REPEATED INPUTS

V.S. Zizov

*The faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Lomonosov
Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

In general the cellular circuit of functional and commutation elements (CC) is a mathematical model of integrated circuits (IC), which takes into account the features of their physical synthesis. The fundamental difference of this model from the wellstudied classes of boolean circuit (BC) is the presence of additional requirements to the geometry of the circuit, which take into account necessary routing resources when creating an IC. The subject of many authors study became the complexity of implementation of decoder. Lower bounds for the area complexity of boolean circuits implementing decoder with repeating inputs are shown in this paper. **Keywords:** *cellular circuit, boolean circuit, decoder, planar schemes, lower bounds.*

1. Introduction

The model of **Celullar circuit** in standard basis of functional and commutation elements had been proposed for the first time by Kravcov S.S. in 1967 in the work [4], where the complexity of the Celullar circuit was understood as its area. In general the Celullar circuit of functional and commutation elements (**Celullar circuit**) is a mathematical model of integrated circuits (IC), which takes into account the features of their physical synthesis. The fundamental difference of this model from the well-studied classes of boolean circuit (BC) is the presence of additional requirements to the geometry of the circuit, which take into account necessary routing resources when creating an IC.

Albrecht A. showed in his work that the Shannon function $A(n)$, characterizing the complexity of the most complex boolean function (BF) from n variables at $n = 1, 2, \dots$, in the model [4] has asymptotically¹ tight bound $\sigma 2^n$, where σ is some constant. Herewith the exact value of the constant σ remains unknown, although it follows from works [1] and [4] that it is in the segment $[\frac{1}{4}, \frac{9}{2}]$.

¹Let's say that consequences $a(n), b(n), n = 1, 2, \dots$ holds the asymptotic inequality $a(n) \lesssim b(n)$, if $a(n) \leq b(n)(1 + o(1))$. Moreover, the asymptotic equality $a(n) \sim b(n)$ is equivalent to that $a(n) \lesssim b(n)$ and $b(n) \lesssim a(n)$

The asymptotically tight bound estimates of the complexity for some special BF and systems of BF were also received within the **Celullar circuit** model. Shkalikova N.A. investigated [2] the complexity of implementation by planar circuits of some specific systems of BF, including systems of symmetric functions. She established, in particular, that $Cn2^n$ is the asymptotically tight bound for the decoder complexity, i.e. a system of all 2^n elementary conjunctions of the rank n from n variables. The lower and upper estimates for one specific Boolean function from n variables with the asymptotically tight bound n^2 were received in the work by Hromkovic Ju., Lozhkin S.A. etc. [3]

In work [6] were received asymptotically tight bounds for the area of circuits, implementing the decoder of power n . These estimates coincide in the first term of the expansion, have the type $n2^{n-1}(1 \pm O(\frac{1}{n}))$. In present work we establish asymptotically upper bounds of the area of **Celullar circuit**, implementing decoder of the power n with repeated inputs.

We introduce several definitions of complexity functionals for the case of long circuits.

Definition 1. The complexity of the BF (BF system) $f(x_1, \dots, x_n)$ with n significant variables in the model of cellular circuits with k -multiple inputs is the minimum area of a cellular circuit with no more than kn inputs, in which any input corresponds to one input variable, and can be repeated any number of times.

$$A_{r(k)}(f) = \min_{S \in r(k): S \text{ implements } f} A(S)$$

Definition 2. The complexity of the BF (BF system) $f(x_1, \dots, x_n)$ with n significant variables in the model of cellular circuits with repeated inputs is called the minimum area of a cellular circuit with an arbitrary number of repetitions of arbitrary inputs.

$$A_R(f) = \min_k A_{repeatk}(f)$$

2. Upper bounds for decoders

Lemma 1. (about re-decoder). For the complexity of the S scheme implementing the Q_n decoder, the upper bound of

$$A(S) \leq 2^n \log_2(n) + O(2^n)$$

is correct in the **CS** model with multiple inputs.

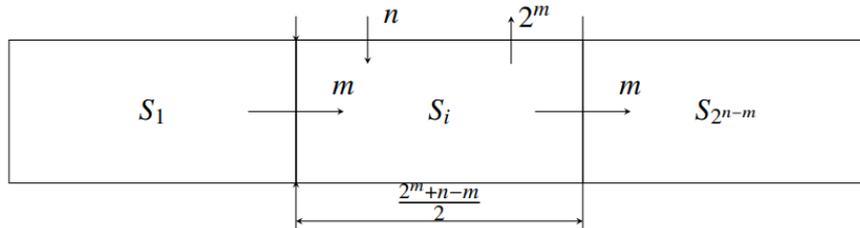


Figure 1. General view of the S scheme implementing the Q_n decoder

Proof.

Let's build a single cellular circuit implementing a decoder with outputs located on two sides. To do this, we will build a line consisting of primitive decoder blocks. Each block is a rectangle, the blocks are joined on the narrow side. The conditional scheme is shown in Fig. 1. Each boundary between blocks contains m variables that are the inputs of one and simultaneously the outputs of the previous block. The first block in the row accepts the variables x_1, \dots, x_m as input. Other variables x_{m+1}, \dots, x_n will be duplicated in each block. The upper and lower sides of the circuit are tightly covered with decoder outputs. Each block will implement a decoder from m variables.

Let's estimate the number of required blocks. The total number of outputs of the circuit is 2^n . It can be seen that 2^m outputs are implemented in one block. Then there are only $\frac{1}{2^m} 2^n$ or, otherwise, 2^{n-m} . Everywhere else, when calculating, we will assume that calculations are used in integers, and rounding is performed up.

Let's estimate the size of one block. An example of such a block is shown in the figure 2. Densely planted outputs require a length of 2^{m-1} . Duplicated variable inputs, totaling $n - m$, require the length $\frac{n-m}{2}$. The height of the scheme of additional rows for disjunctions, and two rows for wiring. Additionally, one column is required to transmit the signal from disjunctions. The height of the circuit is $m+9$, the length is $2^{m-1} + \frac{n-m}{2} + 1$.

Scaling of the block at large n is provided by increasing the number of outputs and variables in the central line of the block. In the figure 2, the scheme repeats the first $m = 4$ of its variables. The choice of $m = \log_2(n)$, which is close to optimal, is shown here. It can be seen that this arrangement of inputs and outputs occupies the perimeter almost completely. The block shown corresponds to a set of $(1, \dots, 1)$ variables x_5, \dots, x_{20} . Other blocks are constructed similarly, but the negation series are replaced with

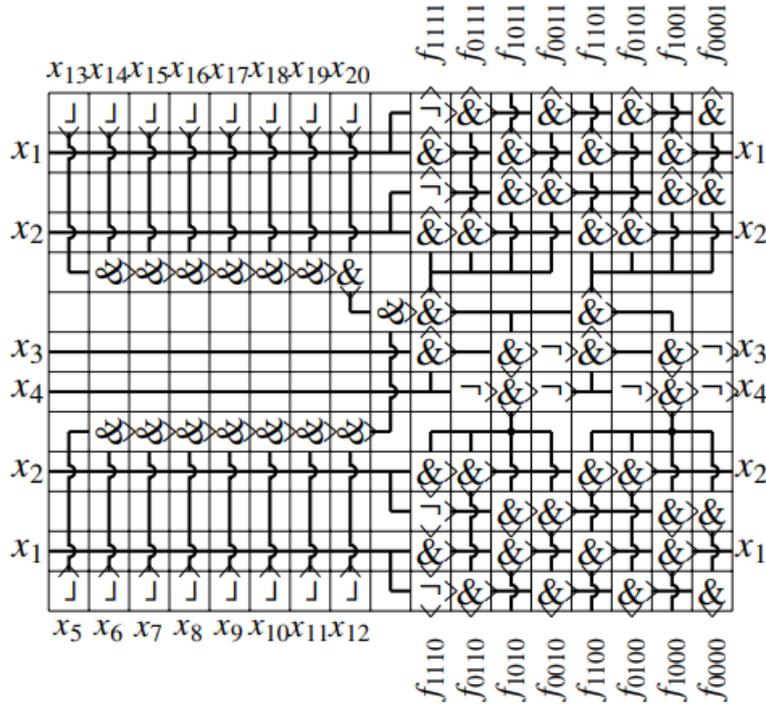


Figure 2. An example of a schematic implementation of a decoder block of order 20 at $m = 4$

the necessary sets of elements. For example, the set $(0, \dots, 0)$ will not contain any negation in this part.

Let's estimate the area of the block.

$$A(S_i) = (m + 9)(2^{m-1} + \frac{n - m}{2} + 1)$$

Then the total area of the circuit is

$$A(S) = 2^{n-m}(m + 9)(2^{m-1} + \frac{n - m}{2} + 1) + O(m).$$

Let $m = o(n)$, then

$$A(S) = (m + 9)2^{n-1} + m(n - m)2^{n-m-1} + 9n2^{n-m-1} - O(2^{n-m}m).$$

It can be seen that the minimum area of $A(S)$ is reached if

$$m \sim \frac{mn}{2^m}.$$

Let's choose $m = \lceil \log_2(n) \rceil$, then this is done, and the total area has an estimate of

$$A(S) = (\lceil \log_2(n) \rceil + 18)2^n - 2^{n-1} \frac{\lceil \log_2(n) \rceil^2}{n} - O\left(2^n \frac{\log_2(n)}{n}\right)$$

$$A(S) = 2^n(\log_2(n) + O(1)),$$

whence follows the statement of the present lemma. ■

Corollary 1.

$$A_R(Q_n) \leq 2^n(\log_2(n) + 6) + O\left(\frac{2^n \log(n)}{n}\right).$$

3. Conclusion

In present work asymptotically upper bounds of the area of **Cellular circuit**, implementing decoder of the power n with repeated inputs was established.

REFERENCES

1. *A. Albrecht* On circuits of cellular elements // Problemi Kibernetiki. 1978. Vol. 33. P. 209–214. (in Russian).
2. *N.A. Shkalikova* On the implementation of Boolean functions by schemes of cellular elements // Mathematical Problems of Cybernetics. Moscow: Nauka, 1989. Vol. 2. P. 177–197. (in Russian).
3. *Hromkovich Yu., Lozhkin S., Rybko A., Sapozhenko A., Shkalikova N.* Lower bounds on the area complexity of Boolean circuits // Theoretical Computer Science. 1992. Vol. 97. P. 285–300.
4. *Kravicov S.S.* Realization of Boolean functions in a class of circuits of functional and switching elements // Problems of Cybernetics M.: Nauka, 1967. Vol. 19. P. 285–292. (in Russian)
5. *Thompson Clark D.* A complexity theory for VLSI // Carnegie Mellon University. 1980.
6. *Lozhkin S.A., Zizov V.S.* Refined estimates of the decoder complexity in the model of cellular circuits with functional and switching elements. // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2020. Vol. 162. № 3. P. 322–334. doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.322-334 (In Russian)

Zizov V.S. — The faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Lomonosov Moscow State University. E-mail: *vzs815@gmail.com*

THE NONLINEAR KLEIN-GORDON EQUATION ON METRIC GRAPHS

Q. U. Asadov, K. K. Sabirov

*Tashkent University of information technologies named after Al-Khwarizmi,
Tashkent, Uzbekistan*

In this paper we consider the nonlinear Klein-Gordon equation on the metric star graph with three semi-infinite bonds. At the branched point we put two types of vertex boundary conditions: the weight continuity and the condition for derivatives of wave functions as the generalized Kirchhoff rule. We solve this equation satisfying vertex boundary conditions. We also show reflectionsless propagations of the kink soliton solution. **Keywords:** *nonlinear Klein-Gordon equation, vertex boundary conditions, generalized Kirchhoff rule, reflectionsless transmission, kink soliton, metric graphs.*

Introduction

In this paper we focus on one of the exact solutions and transmission of the kink soliton of the nonlinear Klein-Gordon equation through the vertices of the networks. The present work is organized as follows: in the section 1 the nonlinear Klein-Gordon equation on the metric star graph with derivations the vertex boundary conditions is obtained; in the section 2 the kink soliton solution of the formulated problem with the sum rule for the reflectionless transmission is analytically given; in the last section the conclusions are given.

1. Formulation of the problem

We consider a star graph with three bonds e_j , for which a coordinate x_j is assigned. Choosing the origin of coordinates at the vertex, 0, for bond e_1 we put $x_1 \in (-\infty, 0]$ and for $e_{2,3}$ we fix $x_{2,3} \in [0, +\infty)$. In what follows, we use the shorthand notation $q_j(x)$ for $q_j(x_j)$ where x is the coordinate on the bond j to which the component q_j refers. Klein-Gordon equation on the each bond e_j of the star graph is written as

$$\partial_{tt}^2 q_j - \partial_{xx}^2 q_j - q_j + b_j q_j^3 = 0. \quad (1)$$

Now we define the vertex boundary conditions at the branched point of the star graph, therefore we derive these boundary conditions from conserva-

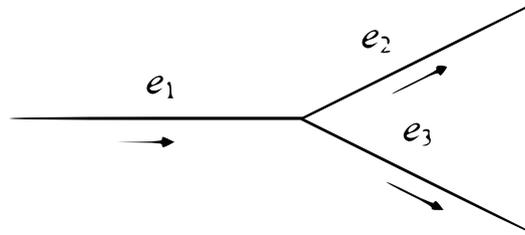


Figure 1. The metric star graph

tion laws. One of the conservation laws is energy. The energy conservation law is defined as

$$E = \sum_{j=1}^3 E_j, \tag{2}$$

where

$$E_j = \int_{e_j} \left[\frac{1}{2}(\partial_t q_j)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x q_j)^2 - \frac{1}{2}q_j^2 + \frac{b_j}{4}q_j^4 \right] dx. \tag{3}$$

From $\dot{E} = 0$ we can get the following nonlinear boundary condition as

$$\partial_x q_1 \partial_t q_1|_{x=0} = \partial_x q_2 \partial_t q_2|_{x=0} + \partial_x q_3 \partial_t q_3|_{x=0}. \tag{4}$$

We need two types of boundary conditions to find a solution of (1) and to fulfil the nonlinear vertex boundary condition (4). Therefore the first type of vertex boundary conditions is the following weight continuity

$$\alpha_1 q_1|_{x=0} = \alpha_2 q_2|_{x=0} = \alpha_3 q_3|_{x=0}, \tag{5}$$

the second type of vertex boundary conditions is given derivatives of wave functions at the branched point as Kirchhoff rule

$$\frac{1}{\alpha_1} \partial_x q_1|_{x=0} = \frac{1}{\alpha_2} \partial_x q_2|_{x=0} + \frac{1}{\alpha_3} \partial_x q_3|_{x=0}. \tag{6}$$

2. The kink soliton solution of Klain-Gordon equation on the star graph with three edges

The kink (antikink) soliton solution of Klein-Gordon equation (1) on the each bond e_j of the metric star graph is the following

$$q_j(x, t) = \mp \frac{1}{\sqrt{b_j}} \tanh \left(\frac{x - l - vt}{\sqrt{2(1 - v^2)}} \right), \quad (7)$$

where l is the initial center of mass of soliton (the kink and antikink soliton solutions are with the signs $-$ and $+$, respectively). Fulfilling the vertex boundary conditions (5)-(6) we can get the following constrains

$$\frac{\alpha_1}{\sqrt{b_1}} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{b_2}} = \frac{\alpha_3}{\sqrt{b_3}}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\alpha_1 \sqrt{b_1}} = \frac{1}{\alpha_2 \sqrt{b_2}} + \frac{1}{\alpha_3 \sqrt{b_3}}. \quad (9)$$

From Eq.s(8) and (9) we obtain the following sum rule for nonlinearities

$$\frac{1}{b_1} = \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3}. \quad (10)$$

Using the kink (antikink) soliton solution of Klein-Gordon equation (1) with the sum rule for the nonlinearities (10) we can also show that another conservation law, i.e. the momentum is conserved from the last expression the momentum is constant.

3. Conclusion

In this paper we studied the nonlinear Klein-Gordon equation on the simplest metric graphs as the star graph with three semi-infinite bonds. First of all we derived the nonlinear boundary condition from the energy conservation law. Satisfying this boundary conditions at the vertex (branched point) we obtained the weight continuity and the condition for derivatives of the wave function as Kirchhoff rule. We obtained the soliton solution on the metric star graph and the constrain as inverses of nonlinearities for the reflectionless transmission. Using the soliton solution we can get that the total momentum is conserved. We can show the conservation of the total energy and can calculate the reflection coefficient as the ratio of the momentum on the first bond, respectively. We can also extend obtained results as the formulation problems and the constrains for the nonlinearities to other topologies of metric graphs such as the tree and loop graphs.

REFERENCES

1. *Ablowitz M.J. and Segur H.* Solitons and the Inverse Scattering Transform. City: Philadelphia, 1981.

2. Ablowitz M.J. and Clarkson P.A. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. London: Cambridge University Press, 1991.
3. Greiner W. Relativistic Quantum Mechanics-Wave Equations // Berlin: Springer-Verlag, 2000.
4. Ablowitz M.J., Kruskal M.D. and Ladik J.F. Solitary wave collisions SIAM // Appl. Math. 1979. Vol. 36. № 3.
5. Jim'enez S. and V'azquez L. Analysis of Four Numerical Schemes for a Non-linear Klein-Gordon Equation // Appl. Math. 1990. Vol. 35. P. 61–94.
6. Sabirov K.K., Babajanov D.B., Matrasulov D.U. and Kevrekidis P.G. Dynamics of dirac solitons in networks // Phys. A: Math. Theor. 2018. Vol. 51. P. 435203.
7. Sabirov K.K., Yusupov J.R., Matyokubov Kh.Sh., Susanto H., Matrasulov D.U. Networks with point-like nonlinearities // Nanosystems: Phys. Chem. Math. 2022. Vol. 13. № 1. P. 3035.
8. Yusupov J.R., Sabirov K.K., Asadov Q.U., Ehrhardt M., and Matrasulov D.U. Dirac particles in transparent quantum graphs: Tunable transport of relativistic quasiparticles in branched structures // Phys. Rev. E. 2020. Vol. 101. P. 062208.
9. Sabirov K.K., Asadov Q.U. Transparent relativistic quantum networks // International Conference on Information Science and Communications Technologies: Applications, Trends and Opportunities, ICISCT 2021, Tashkent. 2021.

Asadov Quvonchbek — researcher, senior-teacher, department of Algorithmization and mathematical modelling. E-mail: quvonchbekurinovichasadov@gmail.com

Sabirov Karimjon — PhD, associate professor, Lecturer, department of Algorithmization and mathematical modelling. E-mail: karimjonsabirov80@gmail.com

АЛГОРИТМ ИМИТАЦИИ ОТЖИГА ДЛЯ ЗАДАЧИ RCPSP С NPV-КРИТЕРИЕМ

А. М. Булавчук¹, Д. В. Семенова^{1,2}

¹ *Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия*

² *Красноярский государственный медицинский университет имени профессора В.Ф. Войно-Ясенецкого, г. Красноярск, Россия*

Рассматривается задача календарного планирования инвестиционных проектов с ограниченными ресурсами (RCPSP), целью которой выступает максимизация чистой приведённой стоимости (NPV). Авторами предложен алгоритм имитации отжига, основанный на методах идемпотентной алгебры. Проведенные вычислительные эксперименты демонстрируют хорошее качество получаемых решений. **Ключевые слова:** календарное планирование, инвестиционный проект, NPV, имитация отжига.

Введение

Задача календарного планирования является классической оптимизационной задачей, имеющей широкое практическое приложение. Доказанная NP-трудность задачи обусловила популярность эвристических методов для её решения [1]. Относительно редким алгоритмом, применяемым для решения данной задачи, является метод имитации отжига. Как правило, этим методом решается задача с критерием минимизации общего срока выполнения проекта. Например, в работе [2] рассматривается применение метода имитации отжига к задаче с несколькими видами ресурсов. В качестве переменных авторы рассматривают векторы приоритетов проектных работ.

В работе [3] предложен гибридный алгоритм, комбинирующий метод имитации отжига и метод MINSLK, который используется для нахождения стартового решения. Авторы делают вывод о том, что данный подход приводит к значительному сокращению числа шагов по сравнению со стандартной процедурой генерации случайного стартового решения. Для нахождения стартового решения могут применяться и другие известные эвристики. Например, в работе [4] для этих целей используется метод, ранжирующий работы по их длительности (SPT).

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу календарного планирования инвестиционного проекта с ограниченными ресурсами в денежной форме [5]. Оптимизационная модель задачи имеет вид:

$$NPV(S) = \sum_{j=1}^N \sum_{\tau=0}^{q_j} \frac{c_j(\tau)}{(1+r_0)^{\tau+s_j}} \rightarrow \max_S, \quad (1)$$

$$s_i + q_i \leq s_j, (i, j) \in E, \quad (2)$$

$$\sum_{t=0}^{t^*} \frac{K(t)}{(1+r_0)^t} + \sum_{t=0}^{t^*} \sum_{j \in N_t} \frac{c_j(t-s_j)}{(1+r_0)^t} \geq 0, \quad t^* = 0, 1, \dots, T-1. \quad (3)$$

Цель задачи (1) заключается в нахождении расписания $S = (s_1, \dots, s_N)$, максимизирующего NPV проекта при заданной ставке дисконтирования r_0 и прибыли(убытке) $c_j(\tau)$ для каждой из работ $j = 1, 2, \dots, N$ в моменты времени $\tau = 0, 1, 2, \dots, q_j$. Неравенства (2) задают порядок следования работ, а ограничения (3) соответствуют требованиям достаточности средств в каждый момент времени $t^* = 0, 1, \dots, T-1$, где T – общий срок реализации проекта в целых периодах. Источником финансирования проекта в каждый момент t выступают собственные средства компании $K(t)$, а также реинвестированная прибыль.

2. Имитация отжига

Имитации отжига представляет собой метод упорядоченного случайного поиска. Метод был создан на основе модели кристаллизации вещества и нашел применение при решении различных оптимизационных задач. Применение метода к конкретной задаче предполагает описание следующих составляющих [6]:

- пространства переменных модели;
- оптимизируемой функции;
- закона изменения температуры;
- функции вероятности принятия;
- правила генерации новых значений переменных.

Охарактеризуем названные компоненты в контексте модели (1)–(3).

Для решения рассматриваемой задачи авторами ранее был предложен генетический алгоритм GASPIA, базирующийся на методах идемпотентной алгебры. В качестве особой популяции в упомянутом алгоритме выступают векторы u из идемпотентного полумодуля \mathbb{X}^N [5]. Эти векторы при применении к ним генетических операторов позволяют

получать расписания, удовлетворяющие ограничениям (2). Используем аналогичный подход при реализации метода отжига.

В качестве оптимизируемой функции рассмотрим NPV проекта, скорректированную на величину штрафа за нарушение бюджетных ограничений:

$$F(S(v)) = \sum_{j=1}^N \sum_{\tau=0}^{q_j} \frac{c_j(\tau)}{(1+r_0)^{s_j+\tau}} + \alpha_L \cdot \min\{0, L(S(v))\}, \quad (4)$$

где $\alpha_L > 0$ – настраиваемый параметр, а $L(S(v))$ – совокупный для данного расписания дефицит средств, необходимых для выполнения работ. Использование штрафа позволяет отделить в процессе отжига недопустимые по бюджету расписания от допустимых.

На практике используются различные законы изменения температуры, отличающиеся скоростью её убывания [6]. Для сравнения рассмотрим следующие схемы:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(k) &= \frac{\mathcal{T}_0}{k}, \\ \mathcal{T}(k+1) &= \delta \mathcal{T}(k), \end{aligned}$$

где \mathcal{T}_0 – начальное значение температуры, δ – параметр, отвечающий за скорость убывания, а k – номер шага.

В качестве функции вероятности принятия будем использовать следующую зависимость:

$$h(\Delta F, \mathcal{T}) = \exp(\Delta F/\mathcal{T}).$$

При положительных значениях ΔF величина $h(\Delta F, \mathcal{T})$ будет больше 1. Это гарантирует переход к решению с большим значением функции $F(S(v))$. Для того, чтобы получить новое решение v' , изменим случайно выбранную координату вектора v . Данное преобразование позволяет получить расписания $S(v)$, удовлетворяющие ограничениям (2).

3. Вычислительные эксперименты

Для проверки качества и скорости работы предложенного алгоритма были проведены эксперименты на персональном компьютере с процессором 2,3 GHz CPU и 8 Gb RAM с операционной системой Windows 10. В качестве сетевых графиков проектов использовались модели из базы тестовых задач PSLIB [7]. Для примеров из набора j60 генерировались случайные потоки платежей. В таблице 1 приведены результаты 10 экспериментов для двух схем изменения температуры. Условием

остановки эксперимента было прохождение 5000 шагов. Температура обновлялась, даже если на текущем шаге переход к новому решению не происходил. Параметры схем изменения температуры были подобраны предварительно.

Таблица 1

Результаты экспериментов для проекта из 60 работ

Температура	Средняя NPV	Отклонение, %
$T(k) = \frac{100}{k}$	11,132	0,649
$T(k+1) = 0,9T(k)$	11,139	0,585

Результаты экспериментов для обеих схем показывают высокое качество найденных решений. В каждом случае в серии экспериментов было найдено и оптимальное значение $NPV^* = 11,205$. Необходимые для оценки работы алгоритма точные решения были найдены с помощью пакета программ IBM ILOG CPLEX. Вторая схема изменения температуры демонстрирует несколько более высокое качество решений. На рисунке 1 ей соответствует пунктирная линия.

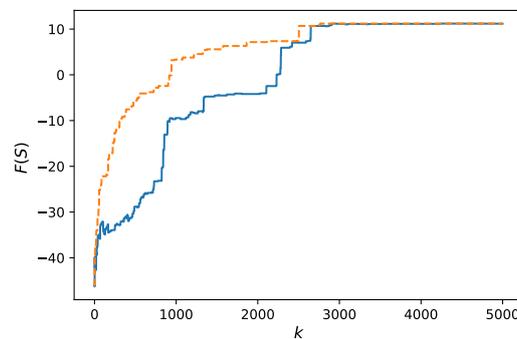


Рис. 1. Изменение целевой функции в ходе эксперимента

Сравнение результата работы алгоритма имитации отжига с результатами алгоритма GASPIA показало, что для сопоставимого качества генетическому алгоритму требуется больше времени. Среднее время на один эксперимент для алгоритмов составляет 14 и 28 секунд соответственно.

Заключение

Проведенное исследование показало, что метод имитации отжига может быть успешно применен для решения задачи календарного планирования инвестиционных проектов с NPV-критерием. В ходе вычислительных экспериментов были подобраны параметры алгоритма, а также проведено сравнение различных схем изменения температуры. В ходе дальнейших исследований предполагается рассмотреть влияние способа генерации стартового решения на качество работы алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Казаковцева Е. А., Сервах В. В. Сложность задачи календарного планирования с кредитованием // Дискретный анализ и исследование операций. 2015. Т. 22. № 4. С. 35–49.
2. Cho J.-H., Kim Y.-D. A Simulated Annealing Algorithm for Resource Constrained Project Scheduling Problems // The Journal of the Operational Research Society. 1997. Vol. 48. № 7. P. 736-744.
3. Pan N.-H., Lin Y.-Y. Using hybrid simulated annealing algorithm in resource constrained project scheduling problem // Journal of Statistics and Management Systems. 2011. Vol. 14. № 3. P. 555–582.
4. Bouleimen K., Lecocq H. A new efficient simulated annealing algorithm for the resource-constrained project scheduling problem and its multiple mode version // European Journal of Operational Research. 2003. Vol. 14. P. 268–281.
5. Bulavchuk A. M., Semenova D. V. Genetic Algorithm Based on Idempotent Algebra Methods for RCPSP // 2021 IEEE 15th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT), 2021. P. 1–4.
6. Лопатин А. С. Сложность задачи календарного планирования с кредитованием // Стохастическая оптимизация в информатике. 2005. Т. 1. С. 133–149.
7. <https://www.om-db.wi.tum.de/psplib/> — Project scheduling problem library, 2022.

Булавчук Александр Михайлович — старший преподаватель, Институт экономики, государственного управления и финансов СФУ. E-mail: abulavchuk@sfu-kras.ru

Семенова Дарья Владиславовна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент, Институт математики и фундаментальной информатики СФУ. E-mail: DVSeменова@sfu-kras.ru

ЛОКАЛЬНЫЕ КОМБИНИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ ДОЛИ

М. А. Бахчаева, Ю. Г. Дмитриев

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В работе приводятся комбинированные оценки доли, являющиеся взвешенной суммой обычной эмпирической оценки и априорной догадки, которая представляется в виде некоторого заданного значения искомой доли, высказываемой исследователем или экспертом на основании своего опыта и знаний. Рассматривается вопрос оценки оптимального весового коэффициента на основании локальных аппроксимаций и построения локальных адаптивных комбинированных оценок доли. Анализируются свойства оценок при конечном объеме наблюдений.

Ключевые слова: *априорная догадка, локальная оценка, комбинированная оценка, адаптивная оценка.*

Введение

Статистическая обработка экспериментальных данных включает в себя ряд проблем, одна из которых это оценка неизвестной доли объектов в генеральной совокупности с заданным значением признака. Широкое практическое применение данная проблема имеет место в задачах оценки и контроле надежности, оценки и управления качеством продукции и т.д. Для сокращения объема дорогостоящих экспериментальных данных или повышения точности оценивания при фиксированном объеме наблюдений, разумно привлекать дополнительную информацию, которая может быть разнообразной и иметь различные источники поступления.

В данной работе предлагаются локальные адаптивные комбинированные оценки доли, учитывающие совместно обычную эмпирическую оценку и априорную догадку в форме некоторого заданного значения искомой доли, которое высказывается исследователем или экспертом на основании своего опыта и знаний. Анализируются среднеквадратические ошибки таких оценок при конечном объеме наблюдений. Указываются условия, при которых локальные комбинированные оценки предпочтительнее обычной эмпирической оценки.

1. Постановка задачи и структура оценки

Пусть имеется конечная генеральная совокупность объема N и случайным образом производится выборка без возвращения объема n из этой генеральной совокупности. Под $P(B)$ будем понимать долю объектов в генеральной совокупности с заданным значением B признака. Пусть p_a – априорная догадка, которая выступает в качестве возможного значения доли $P = P(B)$. Требуется оценить долю объектов в генеральной совокупности с заданным значением признака, учитывая совместно эмпирическую оценку $\hat{P} = \sum_{i=1}^n I_B(X_i)$ и p_a , здесь $I_B(X_i)$ – индикаторная функция, равная 1, если у объекта X_i признак принимает значение B .

Следуя работам [1, 2, 4, 4, 5], рассмотрим комбинированную оценку доли

$$\hat{P}_\lambda = (1 - \lambda)\hat{P} + \lambda p_a, \quad (1)$$

где оптимальный весовой коэффициент λ выбран из условия минимума среднеквадратической ошибки (СКО) $S^2(\lambda) = M[\hat{P}_\lambda - P]^2$ и определяется выражением

$$\lambda = \lambda(P) = \left(1 + n \frac{(P - p_a)^2}{P(1 - P) \frac{N-n}{N-1}}\right)^{-1} = \left(1 + n \frac{\Delta^2}{\sigma^2}\right)^{-1}, \quad (2)$$

Здесь $\sigma^2 = P(1 - P) \frac{N - n}{N - 1}$, $\Delta = P - p_a$ – величина отклонения априорной догадки от истинного значения искомой доли. Оптимальный весовой коэффициент λ изменится в пределах $0 < \lambda \leq 1$ и показывает, какое влияние оказывает каждое из слагаемых в комбинированной оценке.

В соответствии с (1) минимум СКО представляется в виде:

$$S^2 = M[\hat{P} - P]^2 - \frac{[M(\hat{P} - P)]^2}{D\hat{P} + (P - p_a)^2} = D\hat{P} - \frac{(D\hat{P})^2}{D\hat{P} + \Delta^2} = (1 - \lambda)\sigma^2/n, \quad (3)$$

где дисперсия $D\hat{P} = P(1 - P)(N - n)/(N - 1)n$ характеризует точность оценки \hat{P} , а коэффициент $(1 - \lambda)$ показывает, во сколько раз уменьшается СКО комбинированной оценки (1) по сравнению с \hat{P} .

Величина $(D\hat{P})^2/(D\hat{P} + \Delta^2)$ в (3) задает выигрыш в точности оценивания за счет привлечения априорной догадки p_a при оптимальном λ , если исходной оценкой является \hat{P} .

2. Локальные аппроксимации весового коэффициента

Незнание оптимального коэффициента λ в (2) затрудняет практическое использование комбинированной оценки (1). Выходом из этого положения является нахождение той или иной оценки весового коэффициента и построения адаптивной комбинированной оценки. Рассмотрим подход, основанный на локальной аппроксимации λ , и изучим вопрос, при каких условиях локальные адаптивные комбинированные оценки являются предпочтительнее обычной оценки \hat{P} по величине СКО.

Рассмотрим первую аппроксимацию весового коэффициента (2) в окрестности априорной догадки p_a . Используя разложение Тейлора, получим

$$\lambda_T(P) = 1 - n \frac{N - 1}{N - n} \frac{(P - p_a)^2}{p_a(1 - p_a)} + R_n,$$

где R_n - остаточный член. Пренебрегая R_n , получим первый локальный весовой коэффициент

$$\lambda_1 = 1 - n \frac{N - 1}{N - n} \frac{(P - p_a)^2}{p_a(1 - p_a)}. \tag{4}$$

Из (4) следует, что значения λ_1 изменяются в пределах $0 < \lambda_1 \leq 1$, если выполнено условие

$$P \in \left(p_a - \sqrt{\frac{p_a(1 - p_a)(N - n)}{n(N - 1)}}; p_a + \sqrt{\frac{p_a(1 - p_a)(N - n)}{n(N - 1)}} \right)$$

Данному коэффициенту соответствует локальная комбинированная оценка $\hat{P}_{\lambda_1} = \hat{P} - \lambda_1(\hat{P} - p_a)$ с СКО в виде

$$S_{\lambda_1}^2 = (1 - \lambda_1)^2 \sigma^2 / n + \lambda_1^2 (P - p_a)^2. \tag{5}$$

Рассмотрим оценку \tilde{P} , которая отличается от \hat{P} только тем, что $\tilde{P} = p_a$ при $\hat{P} = 0$ или 1. Заменяя в (4) неизвестное P на \tilde{P} , получим оценку локального весового коэффициента $\hat{\lambda}_1$

$$\hat{\lambda}_1 = 1 - n \frac{N - 1}{N - n} \frac{(\tilde{P} - p_a)^2}{p_a(1 - p_a)}$$

и соответствующую ему первую локальную адаптивную комбинированную оценку $\hat{P}_1 = \hat{P} - \hat{\lambda}_1(\hat{P} - p_a)$. СКО этой оценки можно вычислить, используя гипергеометрический закон, по которому распределено $n\hat{P}$:

$$\pi_k = P\{n\hat{P} = k\} = \frac{(NP)! [N(1 - P)]! n!(N - n)!}{k!(NP - k)!(n - k)![N(1 - P) - (n - k)]! N!}, k = \overline{0, n}.$$

$$S_1^2 = M[\hat{P}_1 - P]^2 = \sum_{k=0}^n [\Psi_1(k, n, p_a, N) - P]^2 \pi_k, \quad (6)$$

$$\text{где } \Psi_1(k, n, p_a, N) = p_a + n \frac{N-1}{N-n} \frac{(k/n - p_a)^3}{p_a(1-p_a)}.$$

Рассмотрим второй локальный весовой коэффициент в виде

$$\lambda_2 = 1 - n \frac{N-1}{N-n} (P - p_a)^2 p_a(1-p_a)$$

и соответствующую ему вторую локальную комбинированную оценку $\hat{P}_{\lambda_2} = \hat{P} - \lambda_2(\hat{P} - p_a)$. СКО данной оценки представляется в следующем виде

$$S_{\lambda_2}^2 = (1 - \lambda_2)^2 \sigma^2 / n + \lambda_2^2 (P - p_a)^2. \quad (7)$$

Заменяя неизвестное P на \tilde{P} , получаем оценку $\hat{\lambda}_2 = 1 - n \frac{N-1}{N-n} (\tilde{P} - p_a)^2 p_a(1-p_a)$ весового коэффициента λ_2 и вторую локальную адаптивную комбинированную оценку $\hat{P}_2 = \hat{P} - \hat{\lambda}_2(\hat{P} - p_a)$. СКО представляется в следующем виде

$$S_2^2 = M[\hat{P}_2 - P]^2 = \sum_{k=0}^n [\Psi_2(k, n, p_a, N) - P]^2 \pi_k, \quad (8)$$

$$\text{где } \Psi_2(k, n, p_a, N) = p_a + n \frac{N-1}{N-n} (k/n - p_a)^3 p_a(1-p_a).$$

Для сравнения СКО оценок введем отношения

$$E_{\lambda_1} = \frac{S_{\lambda_1}^2}{D\hat{P}}, E_1 = \frac{S_1^2}{D\hat{P}}, E_{\lambda_2} = \frac{S_{\lambda_2}^2}{D\hat{P}}, E_2 = \frac{S_2^2}{D\hat{P}}.$$

Формулы (5)–(8) позволяют рассчитать значения отношений СКО в зависимости от значений P, n, p_a, N . Данные величины позволяют выделить интервалы значений P , при которых эти отношения меньше единицы. Наличие таких интервалов для P совместно с объемом генеральной совокупности N , объемом выборки n и значениями p_a указывают условия, при которых локальные адаптивные комбинированные оценки предпочтительнее обычной оценки \hat{P} по величине СКО. Результат для различных локальных комбинированных оценок и их адаптаций представлен в виде графиков на рис.1-4.

Рис.1 и рис.2 показывают сравнение СКО первой локальной оценки с эмпирической оценкой при различном объеме наблюдений $n = 1, 2, 3, 4$,

$N = 40$ и $p_a = 0.5$ (комбинированная оценка – слева, адаптивная – справа, оптимальная – пунктирная линия)

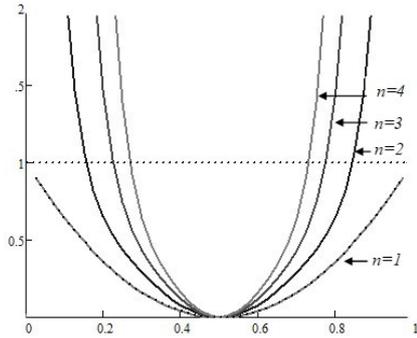


Рис. 1. Сравнение СКО первой локальной оценки с эмпирической оценкой

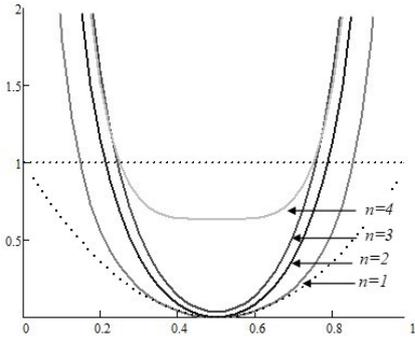


Рис. 2. Сравнение СКО первой локальной адаптивной оценки с эмпирической

Рис.3 и рис.4 показывают сравнение СКО второй локальной оценки с эмпирической оценкой при различном объеме наблюдений $n = 1, 4, 8, 12, 16$, $N = 40$ и $p_a = 0.5$ (комбинированная оценка – слева, адаптивная – справа, оптимальная – пунктирная линия)

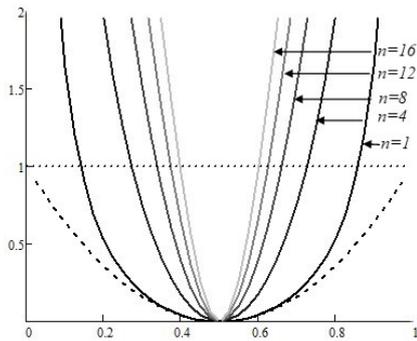


Рис. 3. Сравнение СКО второй локальной оценки с эмпирической оценкой

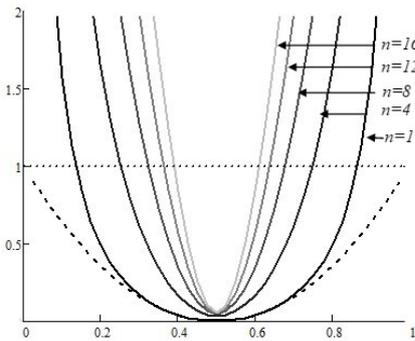


Рис. 4. Сравнение СКО второй локальной адаптивной оценки с эмпирической

Заключение

В работе были рассмотрены локальные комбинированные оценки доли, проанализированы их точности по величине СКО при конечном объеме наблюдений. В частности, локальная аппроксимация в окрестности априорной догадки с применением формулы Тейлора дает хороший результат для теоретических значений весового коэффициента, в то время как локальная адаптивная оценка дает результат только при небольшом объеме наблюдений, а при возрастании объема наблюдений имеет большую погрешность из-за нарушения условия применимости весового коэффициента.

Вторая локальная аппроксимация показывает приемлемые результаты как для теоретических значений, так и для выборочных, оказываясь достаточно близко к оптимальной оценке. Следует отметить, что с ростом объема наблюдений сужается интервал значений P , где данные оценки предпочтительнее по величине СКО обычной эмпирической оценки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dmitriev Yu., Tarassenko P., Ustinov Yu.* On Estimation of Linear Functional by Utilizing a Prior Guess // ITMM2014, CCIS 487. 2014 P. 82–90.
2. *Дмитриев Ю. Г., Тарасенко П. Ф.* Использование априорной информации в статистической обработке экспериментальных данных // Известия вузов. Физика. 1992. № 9. С. 136–142.
3. *Дмитриев Ю. Г., Кошечая Т. О.* Комбинированные оценки доли // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015): Материалы XIV Международной конференции им. А. Ф. Терпугова (18-22 ноября 2015). 2015. Т. 1. С. 50–55.
4. *Дмитриев Ю. Г., Кошечая Т. О.* О комбинированных оценках вероятности // Известия вузов. Физика. 2015. Т. 58. № 11/2. С. 242–247.
5. *Дмитриев Ю. Г., Кошечая Т. О.* Оценки вероятности с учетом априорных догадок // Известия вузов. Физика. 2016. Т. 59. № 8/2. С. 25–28.

Бахчаева Мария Андреевна — аспирант, ассистент каф. системного анализа и математического моделирования ИПМКН ТГУ. E-mail: m.bakhchaeva@mail.ru

Дмитриев Юрий Глебович — д.ф.-м.н., доц., проф. каф. системного анализа и математического моделирования ИПМКН ТГУ. E-mail: dmit70@mail.ru

МЕТОД GD-ICP В ЗАДАЧЕ ПОДБОРА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ТИТАНОВЫХ ПЛАСТИН ДЛЯ КРАНИОПЛАСТИКИ

А. М. Кирилин

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

Исследуется вопрос о зависимости оптимальных параметров модели стандартного имплантата от градации черепа по черепному указателю. Для этого используется разработанный метод GD-ICP. Метод применяется к экспериментальным данным в виде КТ-снимков голов 40 людей. Для каждого снимка экспертом выделена зона интереса и определена градация черепного указателя. **Ключевые слова:** *краниопластика, модель имплантата, градиентный метод, алгоритм ICP, метод GD-ICP.*

Введение

Краниопластика — это хирургическая операция по исправлению дефектов черепа, вызванных предыдущими травмами или операциями. В современной хирургии для исправления дефектов используются титановые сетчатые имплантаты [1, 2, 3] двух видов: индивидуальные и стандартные.

В настоящее время компьютерное 3D моделирование в краниопластике позволяет выполнить закрытие дефектов костей черепа любых размеров и конфигураций, используя индивидуальные имплантаты. С одной стороны, изготовление имплантата происходит до начала операции, что существенно сокращает длительность оперативного вмешательства. С другой стороны, персонализация каждого клинического случая в условиях обычной клинической больницы не всегда возможна, что связано с бюджетными ограничениями и отсутствием необходимого оборудования и специалистов для проектирования и изготовления индивидуальных 3D имплантатов. Это приводит к тому, что в клиникеских больницах, финансируемых из бюджета, широкое распространение получило применение нейрохирургами стандартных имплантатов, в виде заготовок титановых пластин, для краниопластики. Несмотря на

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

то что титановые пластины и винты, используемые в нейрохирургии, имеют широкий ассортимент по размерам, актуальна задача подбора геометрических параметров стандартной пластины для конкретной области черепа в зависимости от его формы. В работе рассматриваются три основные градации формы черепа, в соответствии с черепным указателем [4]: долихокрания или узкоголовость, мезокрания или среднеголовость, брахикрания или широкоголовость.

1. Постановка задачи

Задачу нахождения оптимальной формы стандартных имплантатов можно разбить на два этапа.

1. Определение параметров оптимальной формы имплантата для конкретных черепов из имеющейся выборки.
2. Поиск параметров оптимальных форм имплантатов для групп черепов внутри выборки.

Формально, задачу первого этапа можно поставить следующим образом.

Заданы: $B(param)$ — модель стандартного имплантата с параметрами $param$; $param_0$ — начальные значения параметров модели; H_{concr} — конкретный КТ-снимок головы из набора $Heads$; Q — функция ошибки; $work_zone$ — границы рабочей зоны черепа.

Требуется: для конкретного КТ-снимка H_{concr} найти оптимальные параметры $param_{opt}$, минимизирующие ошибку

$$Q(R \cdot A_{concr} + t, B(param_{opt})) \rightarrow \min, \quad (1)$$

где A_{concr} — множество точек рабочей зоны черепа из КТ-снимка H_{concr} , R — матрица поворота, t — вектор смещения такие, что при фиксированных $param_{opt}$ выполняется

$$(R, t) = \arg \min_{R, t} Q(R \cdot A_{concr} + t, B(param_{opt})). \quad (2)$$

Будем рассматривать ошибку Q из (1) в виде функции

$$Q(A, B) = \sum_{i=1}^N \min_{j=1, M} \|a_i - b_j\|_2, \quad (3)$$

где $A = \{a_i \in \mathbb{R}^3 \mid i = 1, \dots, N\}$, $B = \{b_i \in \mathbb{R}^3 \mid i = 1, \dots, M\}$ есть множества точек в пространстве \mathbb{R}^3 мощностями N и M соответственно.

Моделью стандартного имплантата избран полигон эллипсоида, который преобразуется в множество точек вида

$$B(r, borders) = \{b_j \in \mathbb{R}^3 \mid j = 1, \dots, M\}, \quad (4)$$

где b_j — точка в \mathbb{R}^3 , являющаяся частью полигона эллипсоида с полуосями $r = (r_x, r_y, r_z)$ и границами $borders$, M — количество таких точек. Иначе говоря, каждая точка $b_j = (b_j^x, b_j^y, b_j^z)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} b_j^x = r_x \sin(\theta_j) \cos(\varphi_j) \in [x_{min}, x_{max}], \\ b_j^y = r_y \sin(\theta_j) \sin(\varphi_j) \in [y_{min}, y_{max}], \\ b_j^z = r_z \cos(\theta_j) \in [z_{min}, z_{max}], \end{cases} \quad (5)$$

где $\theta_j \in [0, \pi]$ — зенитальный угол в сферической системе координат, $\varphi_j \in [0, 2\pi)$ — азимутальный угол в сферической системе координат, а $borders = (x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}, z_{min}, z_{max})$ определяют границы полигона.

В данной работе представлен метод GD-ICP решения задачи первого этапа. В частности, исследуется вопрос о взаимосвязи черепного указателя черепа и оптимальных параметров модели стандартного имплантата.

2. Метод GD-ICP

На рисунке 1 представлена общая схема решения задачи первого этапа, состоящего из двух блоков: предобработки и нахождения оптимальных полуосей.

В рамках блока предобработки, входные данные (H_{concr} — КТ-снимок головы из набора и $work_zone$ — заданные границы рабочей зоны черепа) преобразуются в A_{concr} — множество точек рабочей зоны черепа.

В рамках блока нахождения оптимальных полуосей, был разработан двухшаговый итерационный метод GD-ICP [7]. Предварительно проводится грубое сближение множеств точек A_{concr} и $B(r, borders)$ посредством совмещения центра тяжести первого множества со вторым. Затем осуществляется подбор оптимальных полуосей r итеративным выполнением двух шагов:

- 1) шаг ICP: приближение A к B посредством алгоритма ICP (Iterative Closest Point) [5];

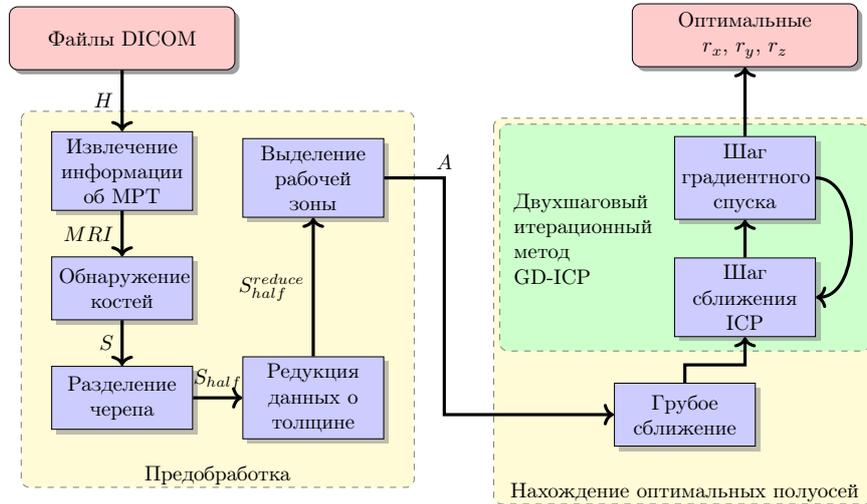


Рис. 1. Общая схема решения задачи первого этапа

- 2) шаг GD: изменение полюсов r , посредством модифицированного градиентного спуска с целью минимизации $Q(A, B)$.

Модифицированный градиентный спуск на шаге GD базируется на обычном градиентном спуске с численным вычислением градиента [6] для минимизации функции. Необходимость модификации возникла в силу того, что в данной работе минимизируется функция ошибки $Q(A, B(r, borders))$ по полюсам r . Однако, при изменении r , различия в пространственной форме A и $B(r, borders)$ могут уменьшиться, в то время как Q наоборот увеличится, как продемонстрировано на рисунке 2 в блоках а)-b). Такое несоответствие внесёт помехи в вычисление конечных разностей для градиентного спуска. Чтобы этого избежать, необходимо модифицировать алгоритм приближением A к каждому варианту B при вычислении членов конечных разностей, что схематично продемонстрировано на рисунке 2 в блоках с)-d).

3. Вычислительные эксперименты

Целью серии экспериментов является нахождение оптимальных полюсов при фиксированных границах полигона эллипсоида для долихо-, мезо- и брахикранов и проверка кластеризуемости полученных полюсов, при условии отсутствия дефектов на черепах. В качестве входных данных использовались КТ-снимки головы 40 пациентов в формате DICOM без дефектов в области интереса, разделённые на группы

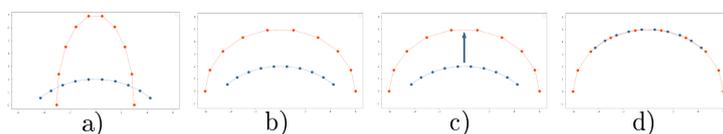


Рис. 2. Иллюстрация модификации градиентного спуска. Синие точки — множество A ; оранжевые — $B(r, borders)$; на b) и d) полуоси эллипсоида B одинаковы, но Q на b) больше, чем на d)

по черепному указателю. Для каждого снимка нейрохирургом указана рабочая зона. Результаты вычислительных экспериментов представлены на рисунке 3. Из рисунка нетрудно заметить, что предложение о разделении черепов по типу черепного указателя в данном эксперименте неудачно, так как полученные полуоси не кластеризуются по этому правилу.

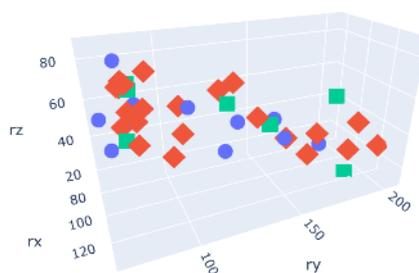


Рис. 3. Пространственное распределение найденных полуосей в эксперименте. Цветом и формой выделены группы черепов одного типа: синие круги — брахикраны, зелёные квадраты — мезокраны, оранжевые ромбы — долихокраны

Заключение

Данная работа продолжает исследования автора по подбору оптимальных геометрических параметров титановых сетчатых имплантатов для краниопластики. В качестве модели титановой пластины рассматривается полигон эллипсоида. Основным результатом работы является метод GD-ICP подбора оптимальных полуосей этой модели для отдельного черепа. На основании предложенного метода проведена серия экспериментов с целью проверить предположение, высказанное оперирующим нейрохирургом, о кластеризуемости полуосей в зависимости от

градации формы черепа по черепному указателю. Результаты экспериментов показывают, что гипотеза врача, в данном случае, не подтвердилась. Дальнейшая работа будет направлена на расширение диапазона применяемых методов нахождения оптимальных полуосей и повышение их точности.

Автор благодарит отделение нейрохирургии КГБУЗ «Красноярской межрайонной клинической больницы скорой медицинской помощи имени Н.С. Карповича» и Иванова Олега Викторовича за постановку задачи и предоставление данных для экспериментов

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левченко О. В.* Современные методы краниопластики // Название конференции или сборника, Нейрохирургия. 2010. № 2. С. 5–13.
2. *Потапов А. А., Кравчук А. Д., Лихтерман Л. Б., Охлопков В. А., Чобулов С. А., Маряхин А. Д.* Реконструктивная хирургия дефектов черепа. Клинические рекомендации // Ассоциация нейрохирургов России, Москва, 2015. С. 22.
3. *Aydin S., Kucukyuruk B., Abuzayed B., Aydin S., Sanus GZ.* Cranioplasty: Review of materials and techniques // Journal of Neurosciences in Rural Practice. 2011. Vol. 2. № 2. P. 162–167.
4. *Прхоров А. М.* Большая Советская Энциклопедия. 3-е изд. Т. 29. Чаган-Экс-ле-Бен. Москва: Советская энциклопедия, 1978. 640 с.
5. *Chen Y., Medioni G.* Object modelling by registration of multiple range images // Image and Vision Computing. 1992. Vol. 10. № 3. P. 145–155.
6. *Верхбшцкий В. М.* Основы численных методов : Учебник для вузов Москва: Высшая школа, 2002. 840 с.
7. *Кирилин А. М.* Моделирование титановых сетчатых имплантатов оптимальной формы и кривизны для краниопластики в соответствии с черепным указателем // Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование, Омск: Омский государственный технический университет, 2022. С. 173–178.

Кирилин Артём Максимович — магистрант 1-го курса ИМиФИ СФУ.
E-mail: kirilinarTEM@yandex.ru

МНОГОСТАДИЙНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД КОЛЛОКАЦИЙ РЕШЕНИЯ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

К. П. Ловецкий¹, Д. С. Кулябов^{1,2}, Л. А. Севастьянов^{1,2}, С. В. Сергеев¹

¹ *Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, д. 6,
117198, Москва, Россия*

² *Объединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6,
141980, Дубна, Московская область, Россия*

Реализуется алгоритм численного решения граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на методе коллокации и представлении решения в виде разложения по полиномам Чебышева. Предлагается вместо традиционного подхода — слияния всех условий (дифференциальных и граничных) в одну систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) — перейти к методике решения задачи в несколько отдельных этапов. Вначале выделяются спектральные коэффициенты определяющие «общее» решение исходной задачи. Трудоемкость приведения матрицы СЛАУ к диагональной форме (в случае систем ОДУ с постоянными коэффициентами) на этом этапе эквивалентна сложности умножения чебышевской матрицы коэффициентов на вектор правой части системы. На втором этапе учёт граничных условий выделяет «частное» искомого решение, однозначно доопределяя недостающие коэффициенты искомого разложения. **Ключевые слова:** *обыкновенные дифференциальные уравнения, спектральный метод, двухточечные краевые задачи.*

Введение

Обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) второго порядка и системами ОДУ 2-го порядка описывается подавляющее большинство задач классической механики. Большинство колебательных процессов описывается ОДУ второго порядка или их системами. Существует много различных методов точного и приближенного решения начальных/краевых задач для разных классов обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Методы разложения по полиномам Чебышева стабильно занимают заслуженное место.

Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН

В 1991 году Л. Грингард в работе [1] сформулировал метод решения двухточечной краевой задачи для ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, основанный на разложении решения в ряд по полиномам Чебышева I-го рода. Метод получил устойчивое название «псевдо-спектральный метод коллокаций». В этой же статье были введены в обиход и конструкции, которые в дальнейшем получили названия «матрица дифференцирования» и «матрица интегрирования» (или антидифференцирования). Подробное описание свойств матриц, определяющих связь коэффициентов разложения в ряд аппроксимируемых функций, их производных и первообразных по одному набору базисных функций приводится в работах [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15, 16].

Однако во всех используемых методах результирующие матрицы систем алгебраических уравнений получаются либо полностью заполненными (метод коллокации в физическом пространстве), либо слабо разреженными (метод коллокации в спектральном пространстве с предобуславливанием) матрицами. Основную сложность с точки зрения получения разреженной матрицы представляет необходимость включения начальных или граничных условий в систему уравнений.

1. Постановка задачи

В работе рассматривается приближенное решение двухточечной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка вида [12]:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (1)$$

где $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ — достаточно регулярные функции. Единственность решения для любых α , β обеспечивают граничные условия:

$$\alpha_0 y(0) - \alpha_1 y'(0) = \alpha, \quad \beta_0 y(1) + \beta_1 y'(1) = \beta, \quad (2)$$

при неотрицательных константах α_0 , α_1 , β_0 , β_1 . Например, условие непрерывности $p(x) = q(x)$, положительности $q(x) > 0$, $x \in [-1, 1]$, и отличие от нуля величин $\alpha_0 + \alpha_1 \neq 0$, $\alpha_0 + \beta_0 \neq 0$, $\beta_0 + \beta_1 \neq 0$ гарантирует существование решения задачи (1), (2) [13].

2. Методы

Спектральные методы являются по-настоящему популярным инструментом решения многих типов дифференциальных и интегральных уравнений. Основная идея спектральных методов состоит в том, чтобы представить решение в виде разложения в виде усеченного ряда по известным базисным функциям. Желателен такой их выбор, который обеспечивал бы быстрое и точное вычисление как коэффициентов

Чебышевская матрица дифференцирования является верхней треугольной матрицей с нулевыми элементами на диагонали и всеми поддиагональными элементами. Фактически, это прямоугольная матрица с нулевым первым столбцом. Умножение ее слева на любой вектор приводит к обнулению первого элемента результирующего вектора. Такая структура определяется тем, что производная полинома Чебышева k -ой степени является полиномом степени $k-1$. Матрицу дифференцирования конечного порядка, являющуюся усечением бесконечной матрицы, будем обозначать через \mathbf{D} .

Если в рассматриваемом ОДУ коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ не являются константами, то матрица системы уравнений является полностью заполненной. Сложность решения определяется ее размерностью.

В случае, когда уравнение (1) является уравнением с постоянными коэффициентами, возможно использование эффективного метода решения соответствующей системы с постоянными коэффициентами при использовании свойства дискретной ортогональности чебышевской матрицы \mathbf{T} . Сложность решения в этом случае соответствует сложности умножения матрицы на вектор.

4. Решение модельных примеров

Таблица 1

Сравнение точного решения модельного уравнения с численным

Число точек коллокации	Средняя величина отклонения $abs(y_{\text{exact}}(x) - y_{\text{calc}}(x))/N$	Максимальное отклонение вычисленного решения от точного
6	2.11452089171615e-11	3.4380942537382e-11
7	1.29645475466233e-10	2.2133717081374e-10
8	1.69888608181346e-09	2.78141176757174e-09
9	3.8575500034721e-07	6.52799436506868e-07
10	3.49408645680371e-05	5.68326034007249e-05
11	0.000584699246805603	0.00100519454709158
12	10.1776618777544	16.5527569854908

Для иллюстрации возможностей предлагаемого алгоритма рассматривался пример решения простого ОДУ. В уравнении (1) задаём $p(x) = 0$, $q(x) = -4$, $r(x) = -x$ с граничными условия Дирихле $y(-1) = 1$, $y(1) = 3$.

$$\begin{cases} y'' + 4y = x & x \in (-1, 1) \\ y(-1) = 1 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Точное решение имеет вид $y(x) = x^2 + x + 1$. Сравнение точного решения модельного уравнения с численным приведено в таблице 1.

Заключение

Даже в самых благоприятных случаях при использовании матриц дифференцирования на произвольных сетках количество арифметических операций для решения задач с приемлемой точностью оказывается довольно значительным. Этот факт является следствием включения в СЛАУ, получающуюся при переходе от дифференциальных соотношений к алгебраическим, и уравнений, задающих начальные и граничные условия. В настоящей работе предложено использовать модифицированный (усовершенствованный) метод псевдо-спектральной коллокации, то есть решать задачу в два этапа. На первом искать лишь «общее» решение ОДУ, определяемое старшими коэффициентами разложения решения по полиномиальному базису. Такой подход позволяет построить алгоритм, использующий для получения решения соответствующей СЛАУ лишь матрицы простой структуры. Недостающие же коэффициенты разложения можно определить на втором этапе с использованием дополнительных (начальных либо граничных) условий, решая простую систему из пары линейных уравнений.

Корректность работы предлагаемого алгоритма проверялась в численных экспериментах при решении ряда краевых задач с известными решениями. Результаты демонстрируют высокую точность и эффективность предложенного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Greengard L.* Spectral Integration and Two-Point Boundary Value Problems // *SIAM J. Numer. Anal.*. Vol. 28. № 4. P. 1071–1080. doi: 10.1137/0728057
2. *Amiraslani A., Corless R. M., Gunasingam M.* Differentiation matrices for univariate polynomials // *Numer. Algorithms*. Vol. 83. № 1. P. 1–31. doi: 10.1007/s11075-019-00668-z
3. *Boyd J. P.*, Chebyshev and Fourier Spectral Methods: Second Revised Edition // Second Rev. Dover Books on Mathematics, 2013.
4. *Zhang X., Boyd J. P.* Asymptotic Coefficients and Errors for Chebyshev Polynomial Approximations with Weak Endpoint Singularities: Effects of Different Bases // Mar. 2021. arXiv: 2103.11841

5. *Mason J. C. and Handscomb D. C.* Chebyshev polynomials. Chapman and Hall/CRC Press, 2002.
6. *S. Olver and A. Townsend* A Fast and Well-Conditioned Spectral Method // SIAM Rev. 2013. Vol. 55. № 3. P. 462–489. doi: 10.1137/120865458
7. *Trefethen L. N.* Spectral Methods in MATLAB. 2000.
8. *Gottlieb D., Orszag S. A.* Numerical Analysis of Spectral Methods // Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977.
9. *El-gendi S. E.* Chebyshev Solution of Differential, Integral and Integro-Differential Equations // Comput. J. 1969. Vol. 12. № 3. P. 282–287. doi: 10.1093/comjnl/12.3.282
10. *Trefethen L. N.* Is Gauss Quadrature Better than Clenshaw–Curtis? // SIAM Rev. 2008. Vol. 50. № 1. P. 67–87. doi: 10.1137/060659831
11. *Muite B. K.* A numerical comparison of Chebyshev methods for solving fourth order semilinear initial boundary value problems // J. Comput. Appl. Math. 2010. Vol. 234. № 2. P. 317–342. doi: 10.1016/j.cam.2009.12.029
12. *Egidi N., Maponi P.* A spectral method for the solution of boundary value problems // Appl. Math. Comput. 2021. Vol. 409. P. 125812. doi: 10.1016/j.amc.2020.125812
13. *Keller H. B.* Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems. Boston: Ginn-Blaisdell, 1968.
14. *Fornberg B.* A Practical Guide to Pseudospectral Methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
15. *Sevastianov L. A., Lovetskiy K. P., Kulyabov D. S.* Multistage collocation pseudo-spectral method for the solution of the first order linear ODE // VIII International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT), 2022. P. 1–6. doi: 10.1109/ITNT55410.2022.9848731

Ловецкий Константин Петрович — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент, кафедра прикладной информатики и теории вероятностей РУДН. E-mail: *lovetskiy-kp@rudn.ru*

Кулябов Дмитрий Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор, кафедра прикладной информатики и теории вероятностей РУДН. E-mail: *kulyabov-ds@rudn.ru*

Севастьянов Леонид Антонович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор, кафедра прикладной информатики и теории вероятностей РУДН. E-mail: *sevastianov-la@rudn.ru*

Сергеев Степан Викторович — аспирант, кафедра прикладной информатики и теории вероятностей РУДН. E-mail: *1032202195@rudn.ru*

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ СВОЙСТВ ЭВРИСТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА КЛАСТЕРИЗАЦИИ ЗНАКОВЫХ ГРАФОВ

Э. И. Ибрагимова¹, Д. В. Семенова^{1,2}, А. А. Солдатенко¹

¹ Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

² Красноярский государственный медицинский университет им.
Войно-Ясенецкого, г. Красноярск, Россия

В настоящей работе рассматривается задача кластеризации для неориентированных и невзвешенных знаковых графов без кратных ребер и петель с функционалом ошибки в виде линейной комбинации межкластерной и внутрикластерной ошибок. Данная задача относится к классу NP-трудных задач. Также известно, что ее решение может быть не единственным. Исследуются свойства разработанного ранее эвристического алгоритма $SGClust_\alpha$. Основное внимание уделено исследованию зависимости результата работы данного алгоритма от начальной перенумерации вершин графа и предлагается подход, который специальным образом игнорирует нумерацию вершин, что приводит к нахождению для каждой перенумерации множества кластеров. При этом подход учитывает изоморфные друг другу перенумерации, что значительно сокращает пространство перебора. В результате строится дерево решений данного алгоритма.

Ключевые слова: *знаковый граф, задача кластеризации графа, дерево решений.*

Введение

В настоящее время актуальны исследования задач сбалансированности и кластеризации знаковых графов [1, 2, 3]. Знаковый граф — это граф каждому ребру которого приписан знак: «+» или «-» [4]. Известно, что алгоритмы для задачи распознавания k -сбалансированности выполнимы за полиномиальное время [5]. Однако, для произвольного знакового графа свойство k -сбалансированности может не выполняться. В этом случае интересен поиск такого разбиения множества вершин графа, для которого, с помощью изменения знака минимального числа ребер, можно получить k -сбалансированный граф. Данная задача

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

рассматривается как задача кластеризации графа со специальным видом функционала ошибки. Задача кластеризации графа может иметь различные постановки: когда количество кластеров изначально задано, ограничено каким-либо числом или неограничено. Также могут быть введены различные функционалы ошибок [6]. В связи с NP-трудностью задач кластеризации графов актуален поиск эвристических алгоритмов, которые находят решение за приемлемое время.

Задача кластеризации знакового графа состоит в поиске такого разбиения множества вершин графа, что функционал ошибки будет минимальным. При этом в большинстве работ, исследующих эту задачу, функционал ошибки вводится как линейная комбинация межкластерной и внутрикластерной ошибок [7, 2]. Также при решении задач, связанных со знаковыми графами, исследователи рассматривают ориентированные [8, 9], неориентированные [11, 10] и взвешенные знаковые графы [8, 2].

В настоящей работе рассматривается задача кластеризации для неориентированных и невзвешенных знаковых графов без кратных ребер и петель с функционалом ошибки в виде линейной комбинации межкластерной внутрикластерной ошибок. Данная задача относится к классу NP-трудных задач [12, 6]. Также известно, что решение задачи может быть не единственным. В работе исследуются свойства разработанного ранее эвристического алгоритма $SGClust_\alpha$ [13]. Основное внимание уделено исследованию зависимости результата работы алгоритма $SGClust_\alpha$ от начальной перенумерации вершин графа.

1. Задача кластеризации знакового графа

Под знаковым графом понимается пара $\Sigma = (G, \sigma)$, где $G = (V, E)$ является неориентированным графом, на ребрах которого задана функция знака $\sigma : E \rightarrow \{+, -\}$, $n = |V| \geq 2$, $m = |E| \geq 1$. Знаковый граф называется k -сбалансированным, если множество его вершин можно разбить на k попарно непересекающихся непустых кластеров так, что все положительные рёбра находятся внутри кластеров, а отрицательные между кластерами [4]. В [2] предложены алгоритмы решения задачи кластеризации знакового графа в общем виде. Основная идея предложенных методов состоит в том, что берется некоторое начальное разбиение множества вершин графа, а затем вершины перемещаются из одного кластера в другой, либо две вершины из разных кластеров меняются местами пока не будет минимизирована функция суммарной ошибки для некоторого α . В зависимости от метода меняется правило, по которому выбираются перемещаемые вершины и кластеры. Так как данные алгоритмы являются приближенными, востребована разра-

ботка точных алгоритмов для частных случаев задачи кластеризации знакового графа и все еще актуальна разработка алгоритма для поиска приближенного решения.

Обозначим систему множеств, образующих разбиение множества вершин V , как $C = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ [14]. Пусть Φ_k — множество разбиений на k подмножеств, а $\Phi = \bigcup_{k=1}^n \Phi_k$ — множество всех возможных разбиений V [7]. Мощность пространства решений Φ равна количеству всех возможных разбиений множества вершин графа V , то есть числу Белла B_n , где $n = |V|$. Под отрицательной ошибкой $N(C)$ будем понимать число отрицательных ребер внутри подмножеств для некоторого разбиения графа C . Под положительной ошибкой $P(C)$ будем понимать число положительных ребер между подмножествами для какого-либо разбиения графа C . Тогда суммарная ошибка будет представлять собой выпуклую комбинацию положительной и отрицательной ошибок:

$$E_\alpha(C) = \alpha N(C) + (1 - \alpha)P(C). \quad (1)$$

В общем случае задача кластеризации знакового графа ставится следующим образом [7].

Условие: задан знаковый граф $\Sigma = (G, \sigma)$, где $G = (V, E)$ — неориентированный граф, $n = |V| \geq 2$, $m = |E| \geq 1$.

Вопрос: для заданного $\alpha \in [0, 1]$ требуется найти разбиение C множества вершин V знакового графа Σ с минимальной суммарной ошибкой $E_\alpha(C)$

В работе [12] показано, что задача минимизации суммарной ошибки (1) является NP-полной. Решением задачи кластеризации знакового графа будет множество кластеров C^* , доставляющих минимум функции ошибки (1):

$$C^* = \arg \min_{C \in \Phi} [\alpha N(C) + (1 - \alpha)P(C)] \quad (2)$$

и $k = |C^*|$ — количество кластеров. При $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ данная задача вырождается в полиномиально разрешимые случаи минимизации положительной и отрицательной ошибок, соответственно [5]. Следует отметить, что решение (2) может быть не единственным.

2. Построение дерева решений

Ранее был предложен эвристический алгоритм $SGClust_\alpha$, который находит некоторое решение задачи кластеризации знакового графа в виде (2), однако, результат работы сильно зависит от исходной нумерации вершин графа.

Для каждой перенумерации вершин графа алгоритм $SGClust_\alpha$ находит определенное множество кластеров. Данные множества могут быть различными. Это обусловлено тем, что на некотором шаге алгоритма может быть несколько вершин, обладающих одинаковым числом отрицательных ребер, при этом алгоритм выбирает вершину с наименьшим номером. Чтобы найти множество кластеров обладающее наименьшей ошибкой (1), необходимо запустить алгоритм $SGClust_\alpha$ для всех возможных перенумераций вершин графа, число которых равно $(n!)$. В работе предлагается подход, который специальным образом игнорирует нумерацию вершин, что приводит к нахождению для каждой перенумерации множества кластеров. При этом подход учитывает изоморфные друг другу перенумерации, что значительно сокращает пространство перебора. В результате строится дерево решений для алгоритма $SGClust_\alpha$. Изложенный подход реализован в виде алгоритма $DTSGClust_\alpha$.

На рисунке 1 изображен знаковый граф, состоящий из восьми вершин. Черные ребра являются положительными, а красные отрицательными. На рисунке 2 изображено дерево решений задачи кластеризации для этого графа при $\alpha = 0,75$, полученное алгоритмом $DTSGClust_\alpha$. Диаметр узла дерева решений обратно пропорционален значению ошибки на соответствующем шаге алгоритма $SGClust_\alpha$. Как видно из рисунка 2 можно получить четыре разбиения, приводящих к наименьшей ошибке $E_{0,75}(C^*) = 0,5$. Раскраска вершин знакового графа на рисунке 1 соответствует одному из решений с наименьшей ошибкой, а путь к этому решению по дереву выделен чёрным цветом (рис. 2). В данном случае $C^* = \{C_1, C_2\}$, где кластер C_1 содержит вершины 1, 2, 3, 4, 8, а в кластер C_2 попали вершины 5, 6, 7.

Как видно из рисунка 2, оптимальное решение всегда находится в листьях дерева, так как алгоритм $SGClust_\alpha$ жадный. Алгоритм $DTSGClust_\alpha$ позволяет избежать перебора всех возможных перенумераций вершин графа и сокращает пространство поиска алгоритма с $(8!)$ до 20 случаев. Поскольку всякая перенумерация вершин графа изоморфна одному из этих 20 случаев.

Заключение

Разработан алгоритм $DTSGClust_\alpha$, который позволяет построить дерево всех возможных решений задачи кластеризации знакового графа алгоритмом $SGClust_\alpha$. Дальнейшее исследование включает в себя оценку сложности алгоритма $DTSGClust_\alpha$ по времени и по памяти. Перспективно исследование по применению технологий параллельного программирования для ускорения работы алгоритма $DTSGClust_\alpha$.

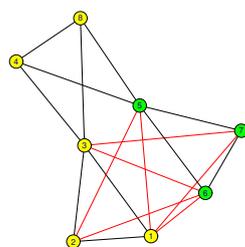


Рис. 1. Исходный знаковый граф

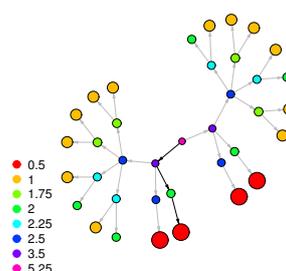


Рис. 2. Дерево решений

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Srinath A. S., Johnson H., Dagher G. G., Long M.* Observability of Leader-Based Discrete-Time Multi-Agent Systems Over Signed Networks // *IEEE Transactions On Computational Social Systems*. 2021. Vol. 8. № 2. P. 332–334.
2. *Brusco M. J., Doreian P.* Partitioning signed networks using relocation heuristics, tabu search, and variable neighborhood search // *Social Networks*. 2019. № 56. P. 70–80.
3. *Liu Bo, Su Housheng, Wu Licheng, Shen Xixi* Observability of Leader-Based Discrete-Time Multi-Agent Systems Over Signed Networks // *IEEE Transactions On Network Science And Engineering*. 2021. Vol. 8. № 1. P. 25–39.
4. *Harary F.* Structural Balance: A Generalization of Heider's Theory // *Psychological Review*. 1956. Vol. 63(5). P. 227–293.
5. *Ибрагимова Э. И.* О двух задачах кластеризации знакового графа // *Материалы VIII Международной молодежной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем»*, Томск: Издательство Томского государственного университета, 2021. С. 38–41.
6. *Ильев В. П., Ильева С. Д., Моршинин А. И.* Алгоритм приближенного решения одной задачи кластеризации графа // *Прикладная дискретная математика*. 2019. Т. 45. С. 64–77.
7. *Doreian P., Mrvar A.* Structural balance and partitioning signed graphs // In *A. Ferligoj & A. Kramberger (Eds.), Developments in data analysis*. Ljubljana, Slovenia: FDV. № 12. P. 195–208.
8. *Doreian P., Mrvar A.* A partitioning approach to structural balance // *Social Networks*. 1996. № 18. P. 149–168.

9. *Zaslavsky T.* Negative (and positive) circles in signed graphs: A problem collection // AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics. 2018. № 15. P. 31–48.
10. *Zaslavsky T.* Balance and clustering in signed graphs // Unpublished manuscript, New York. 2010.
11. *Figueiredo R., Frota Y.* The maximum balanced subgraph of a signed graph: Applications and solution approaches // European Journal of Operational Research. 2014. № 236. P. 437–487.
12. *Bansal N., Blum A., Chawla S.* Correlation clustering // Machine Learning. 2004. Vol. 56. P. 89–113.
13. *Ибрагимова Э. И., Семенова Д. В., Солдатенко А. А.* Модификация алгоритма *SGClust α* для задачи кластеризации знакового графа // Материалы IV Всероссийской с международным участием научно-практической конференции студентов, аспирантов и работников образования и промышленности «Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование», Омск: Изд-во ОмГТУ, 2022. С. 166–172.
14. *Емеличев В. А.* Лекции по теории графов. М: Наука, 1990. 383 с.

Ибрагимова Эллада Ибрагимовна — аспирант Института математики и фундаментальной информатики СФУ. E-mail: ibragimovaei@mail.ru

Семенова Дарья Владиславовна — канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей и прикладной математики Института математики и фундаментальной информатики СФУ. E-mail: DVSeменова@sfu-kras.ru

Солдатенко Александр Александрович — канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры высшей и прикладной математики Института математики и фундаментальной информатики СФУ. E-mail: asoldatenko@sfu-kras.ru

ОЦЕНКА КОНСТАНТЫ В ВЫРАЖЕНИИ ДЛЯ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

В. Л. Брызгалов¹, А. В. Войтишек^{2,3}

¹ Лицей № 130, г. Новосибирск, Россия

² Институт вычислительной математики и математической геофизики
СО РАН, г. Новосибирск, Россия

³ Национальный исследовательский Новосибирский государственный
университет, г. Новосибирск, Россия

В данной работе реализован подход компьютерного приближения константы H в выражении для погрешности метода Монте-Карло, использующий замеры погрешности статистических средних для заданных математических ожиданий случайных величин с известными дисперсиями и формулами численного моделирования выборочных значений; получено $H \approx 0,80\dots$

Ключевые слова: общая схема метода Монте-Карло, компьютерное приближение математического ожидания с помощью выборочного среднего, погрешность метода Монте-Карло, численная оценка константы в выражении для погрешности метода Монте-Карло.

1. Оценка сверху для погрешности метода Монте-Карло

Общая схема широко применимого метода Монте-Карло выглядит следующим образом (см., например, Введение книги [1] и раздел 1.4 книги [2]).

Пусть требуется приближенно вычислить на компьютере некоторую величину I . Предполагается, что можно построить (выбрать) случайную величину ζ , математическое ожидание $\mathbf{E}\zeta$ которой равно I (или достаточно близко к этой величине), дисперсия $\mathbf{D}\zeta = \mathbf{E}(\zeta - \mathbf{E}\zeta)^2$ конечна, и кроме того, выборочные значения ζ_i случайной величины ζ могут быть достаточно эффективно (экономично) численно смоделированы (реализованы на компьютере).

АЛГОРИТМ. Численно моделируем (реализуем на компьютере) достаточно большое количество n выборочных значений ζ_1, \dots, ζ_n случайной величины ζ и, используя закон больших чисел, получаем приближение требуемой величины:

$$I = \mathbf{E}\zeta \approx Z_n = \frac{S_n}{n}, \quad \text{где } S_n = \zeta_1 + \dots + \zeta_n. \quad (1)$$

Исследования выполнены в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (0251-2021-0002).

При исследовании погрешности приближения (1) $\delta_n = |I - Z_n| = \left| \frac{S_n - nI}{n} \right|$ можно использовать следующие известные рассуждения по построению приближенного доверительного интервала для статистической оценки математического ожидания (см., например, параграфы 31, 32 из книги [3]). Величина δ_n может быть представлена в виде

$$\delta_n = \left| \frac{S_n - nI}{n} \right| = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left| \frac{S_n - n\mathbf{E}\zeta}{\sigma\sqrt{n}} \right|, \text{ где } \sigma = \sqrt{\mathbf{D}\zeta}.$$

В свою очередь, согласно центральной предельной теореме для одинаково распределенных случайных величин (см., например, параграф 2 главы 7 книги [4]), при достаточно больших $n \gg 1$ выражение $\frac{S_n - n\mathbf{E}\zeta}{\sigma\sqrt{n}}$ воспроизводит выборочное значение стандартной нормальной (гауссовской) случайной величины $\xi^{(0,1)}$, имеющей плотность распределения

$$f_{\xi}^{(0,1)}(u) = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad -\infty < u < +\infty. \quad (2)$$

Отсюда получаем, что для любого малого $\varepsilon > 0$ найдется константа $H(\varepsilon)$ такая, что для достаточно большого $n \gg 1$ может быть построен следующий доверительный интервал для погрешности δ_n :

$$\mathbf{P} \left\{ \delta_n \leq H(\varepsilon) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} \approx \mathbf{P} \left\{ \left| \xi^{(0,1)} \right| < H(\varepsilon) \right\} \geq 1 - \varepsilon.$$

Например, для $\varepsilon = 0,003$ имеем $H(\varepsilon) \approx 3$ (что соответствует «правилу трех сигма»). Последнее соображение отражает существование практически (с высокой вероятностью) гарантированной *оценки сверху для погрешности метода Монте-Карло* $\delta_n \leq \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$ для $n \gg 1$.

2. Приближенная формула для погрешности метода Монте-Карло

При исследовании и оптимизации методов прикладной статистики (в частности, вычислительных, компьютерных методов) предполагается выполнение приближенного равенства

$$\delta_n \approx H \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (3)$$

Например, в теории методов Монте-Карло (конкретнее, при введении понятия *трудоемкости* $S = t \times \mathbf{D}\zeta$ основной схемы (1), где t – среднее время моделирования значения ζ_i , – см. раздел 3.1.3 книги [1]

и раздел 1.9 книги [2]) соотношение (3) в предположении, что уровень погрешности фиксирован (т. е. $\delta_n = \Delta = \text{const}$), позволяет утверждать, что требуемое число n выборочных значений ζ_i из (1) для обеспечения уровня погрешности Δ пропорционально дисперсии $\mathbf{D}\zeta$.

При практических расчетах среднего по формуле (1) в качестве предполагаемой погрешности расчета берут величину $\frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}$, где $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} (\sum_{i=1}^n \zeta_i)^2$ – статистическая оценка дисперсии. Здесь, таким образом, используется соотношение (3) для $H = 1$.

Наконец, в нашей работе [5] рекомендовано использовать значение $H \approx 0,6745$, для которого при достаточно больших $n \gg 1$ выполнено $\mathbf{P} \left\{ \delta_n \leq 0,6745 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} \approx \frac{1}{2} \approx \mathbf{P} \left\{ \delta_n \geq 0,6745 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$. Величина $0,6745 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ называется *вероятной ошибкой метода Монте-Карло* (1) [6].

3. Компьютерные приближения константы H

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. *Константа H из соотношения (3) является пределом случайной последовательности*

$$H_n = \frac{\delta_n \sqrt{n}}{\sigma}. \quad (4)$$

Теоретическое обоснование предположения 1 вряд ли возможно – похоже, здесь можно построить контрпример (впрочем, это требует отдельного изучения). Что касается численной (компьютерной) проверки этого предположения, то его несложно провести для приближений известного математического ожидания I (для простоты в дальнейшем полагаем $I = 0$) случайной величины ζ с известной дисперсией σ^2 и с удобными моделирующими формулами для компьютерной реализации выборочных значений ζ_i . В таких расчетах легко удается контролировать поведение последовательности H_n , фиксируя погрешность $\delta_n = \left| \frac{\zeta_1 + \dots + \zeta_n}{n} \right|$. В расчетах мы брали $n = 1, 2, \dots, 10^6$ и фиксировали ряд значений величины H_n из этого диапазона.

Расчеты для стандартного гауссовского распределения. В наших расчетах основным («идеальным») считался случай, когда случайная величина ζ является стандартной гауссовской $\zeta = \xi^{(0,1)}$ с плотностью распределения (2) и с известными моделирующими формулами Бокса–Мюллера $\xi_1^{(0,1)} = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \sin 2\pi\alpha_2$, $\xi_2^{(0,1)} = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cos 2\pi\alpha_2$ (см., например, раздел 1.10.1 книги [1] и раздел 13.1 книги [2]); здесь $\alpha_1, \alpha_2 \in U(0, 1)$ – стандартные случайные числа, т. е. выборочные значения случайной величины $\alpha \in U(0, 1)$, равномерно распределенной в интервале $(0, 1)$ (эти выборочные значения получаются на компьютере с помощью соответствующих генераторов *RAND* или *RANDOM*).

Таблица 1

Результаты расчетов для стандартного гауссовского распределения (2)

ζ	H_{1200}	H_{61457}	H_{189537}	H_{500164}	H_{756344}
(2)	0,79858893	0,79910039	0,79863890	0,79965280	0,80082134

Результаты расчетов для распределения (2) показаны в таблице 1. Эти результаты, на первый взгляд, подтверждают предположение 1: последовательность H_n из (4) стремится к значению $H \approx 0,80\dots$ (причем это значение устанавливается уже для относительно небольших n). В качестве необъясненного пока эффекта получилось то, что у константы H устанавливаются только два десятичных знака после запятой (и с ростом n этот эффект не исчезает). Возможно, здесь, учитывая достаточно большое количество моделируемых выборочных значений, мы столкнулись с вычислительными ограничениями генератора стандартных случайных чисел $\{\alpha_i\}$ (в расчетах применялся широко используемый в новосибирской школе методов Монте-Карло генератор, реализующий метод вычетов с множителем $Q = 5^{17}$ и контролируемой мантиссой длины $m = 40$ – см. раздел 1 книги [1] и раздел 9 книги [2]). Последнее предположение требует отдельного подробного исследования.

3.3. Расчеты для негауссовских распределений. «Идеальность» случая $\zeta = \xi^{(0,1)}$ связана с тем, что в произвольном случае для достаточно больших натуральных t и s , таких, что $n = t \times s$, используя центральную предельную теорему для одинаково распределенных случайных величин, имеем

$$\frac{\zeta_1 + \dots + \zeta_n}{n} \approx \frac{\xi_1^{(0,1)} + \dots + \xi_t^{(0,1)}}{t} \times \frac{\sigma}{\sqrt{s}}.$$

В связи с этим у нас возникло следующее предположение.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Для распределений случайной величины ζ , отличных от стандартного гауссовского распределения (2), предельное значение $H \approx 0,80\dots$ для последовательности H_n вида (4) будет устанавливаться позднее (для больших n), чем для «идеального» гауссовского случая.

Проведенные нами многочисленные расчеты показали, что в целом предположение 2 неверно. Например, для случайной величины ζ с экспоненциальным распределением

$$f_\zeta(u) = e^{-u}, \quad u > 0 \quad (5)$$

с математическим ожиданием и дисперсией $\mathbf{E}\zeta = \mathbf{D}\zeta = 1$ и моделирующей формулой метода обратной функции распределения $\zeta_0 =$

$-\ln \alpha_0$; $\alpha_0 \in U(0, 1)$ (см., например, раздел 1.4.1 книги [1] и разделы 2.5, 2.6 книги [2]) результаты расчетов, показанные в таблице 2, практически не отличаются от результатов из таблицы 1 (включая эффект установления только двух десятичных знаков после запятой). Анало-

Таблица 2

Результаты расчетов для экспоненциального распределения (5)

ζ	H_{1200}	H_{61457}	H_{189537}	H_{500164}	H_{756344}
(5)	0,79782403	0,79877724	0,79833021	0,79958466	0,80097567

гичные результаты получились для распределения Парето

$$f_{\zeta}(u) = \frac{3}{u^4}, \quad u > 1 \quad (6)$$

с математическим ожиданием $\mathbf{E}\zeta = \frac{3}{2}$, дисперсией $\mathbf{D}\zeta = \frac{3}{4}$ и моде-

Таблица 3

Результаты расчетов для распределения Парето (6)

ζ	H_{1200}	H_{61457}	H_{189537}	H_{500164}	H_{756344}
(6)	0,78779090	0,79477335	0,79877375	0,79947979	0,79931648

лирующей формулой метода обратной функции распределения $\zeta_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha_0}}$; $\alpha_0 \in U(0, 1)$ (результаты расчетов приведены в таблице 3), а также для равномерного распределения

$$f_{\zeta}(u) \equiv \frac{1}{2}, \quad -1 < u < 1 \quad (7)$$

с математическим ожиданием $\mathbf{E}\zeta = 0$, дисперсией $\mathbf{D}\zeta = \frac{1}{3}$ и моделирующей формулой метода обратной функции распределения $\zeta_0 = -1 + 2\alpha_0$; $\alpha_0 \in U(0, 1)$ (результаты расчетов приведены в таблице 4).

4. Заключение

В данной работе реализован подход компьютерного приближения константы H в выражении (3) для погрешности метода Монте-Карло, использующий замеры погрешности статистических средних для заданных математических ожиданий случайных величин с известными дисперсиями и формулами моделирования выборочных значений ζ_i .

Таблица 4

Результаты расчетов для равномерного распределения (7)

ζ	H_{1200}	H_{61457}	H_{189537}	H_{500164}	H_{756344}
(7)	0,79637712	0,80145697	0,79735481	0,79784677	0,79845013

Полученное значение $H \approx 0,80\dots$ (устанавливаются только два десятичных знака после запятой) несколько больше предлагаемого для использования в работе [5] значения $H \approx 0,6745$, соответствующего вероятной ошибке метода Монте-Карло (1) [6], а также несколько меньше часто используемого в практических статистических выводах значения $H = 1$.

Таким образом, мы рекомендуем использовать выражение $\delta_n \approx 0,80 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, где $\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} (\sum_{i=1}^n \zeta_i)^2$, в качестве предполагаемой погрешности приближения (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов Г. А., Войтишек А. В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Изд. центр «Академия», 2006. 368 с.
2. Войтишек А. В. Лекции по численным методам Монте-Карло. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018. 314 с.
3. Боровков А. А. Математическая статистика. М.: Наука, 1984. 472 с.
4. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1976. 352 с.
5. Войтишек А. В., Андорный Е. Н. О выборе константы в выражении для погрешности метода Монте-Карло // Тезисы Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики–2015», посвященной 90-летию со дня рождения академика Гурия Ивановича Марчука. Новосибирск: Академиздат, 2015. С. 32.
6. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. 312 с.

Брызгалов Виктор Леонидович — ученик 9М класса Лицея № 130 г. Новосибирска. E-mail: fitpowerc4acc@gmail.com

Войтишек Антон Вацлавович — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории стохастических задач ИВМиМГ СО РАН, профессор кафедры вычислительной математики НГУ. E-mail: vav@osmf.sccc.ru

ПОДБОР ПАРАМЕТРОВ ЗАДАЧИ MARLIN ДЛЯ СВЕТОФОРНОЙ СЕТИ

Т. И. Тисленко

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

В работе рассматривается проблема подбора входных параметров для модели, решающей задачу минимизации времени движения транспортных средств через участок дорожной сети. В качестве математической модели используется управляемый марковский процесс с конечным числом действий и состояний. Принцип работы модели основан на выборе сигналов светофорных объектов, находящихся в дорожной сети. Решаемая задача сводится к задаче мультиагентного обучения с подкреплением (MARLIN). Для исследования представленной модели был разработан комплекс программ в среде имитационного моделирования AnyLogic и проведены серии вычислительных экспериментов. **Ключевые слова:** *MARLIN, Q-learning, MDP, система управления светофорами.*

Введение

Потребность эффективно распределять время появилась вместе с необходимостью выживать в условиях жесткого рынка труда. Один из способов освобождения времени — уменьшение пробок. Когда речь идет о пробках, имеются в виду не потерянные часы для отдельно взятого индивидуума, а тысячи часов для всех тех, кто в них стоял. Проблему пробок решают с помощью настройки системы управления светофорными объектами. Причем, возможна такая ситуация, когда ряд происшествий частично или полностью блокирует движение по артериям города. В таком случае как никогда актуальны адаптивные системы светофорных объектов. Использование моделей, основанных на управляемом марковском процессе принятия решений с конечным числом действий и состояний, является одним из доступных, на данный момент, вариантов адаптивных систем. Заранее обучив такую модель на статистических данных, можно также сэкономить на времени обучения в реальных условиях.

При решении задачи минимизации времени движения транспорта через участок дорожной сети использовался мультиагентный подход.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

В качестве агентов рассмотрены светофорные объекты, взаимодействующие в среде, представленной дорожной сетью. Предполагается, что состояние среды отражает активность фаз светофорных объектов. В обучении с подкреплением используются вознаграждения агента, определенные на каждом шаге t и зависящие от текущего состояния среды s и совершенного действия a . В качестве вознаграждения R_t на шаге t используется суммарное время, затраченное машинами на преодоление перекрестка. Отсчёт времени проезда начинается за 70 м до стоп-полосы и заканчивается при преодолении перекрестка. Задача каждого агента — выбрать допустимый сигнал, который обеспечит максимальное суммарное вознаграждение. В качестве математической модели светофорной сети используется управляемая однородная марковская цепь с конечным числом действий и состояний, а задача минимизации задержек движения транспортных средств сводится к задаче мультиагентного обучения с подкреплением (MARLIN — Multiagent Reinforcement Learning) [3, 2]. Так как остановленные машины рано или поздно поедут, то выполняется условие на обновление каждой пары состояния и действия. А значит, для нахождения решения можно использовать алгоритм Q -обучения [3], определяющий оптимальный выбор действий каждого из агентов в текущем состоянии среды с учетом совокупных вознаграждений. Для исследования представленной модели была разработана программа имитационного моделирования в системе AnyLogic и проведены серии вычислительных экспериментов.

1. Задача MARLIN для сети светофорных объектов

В работе рассматривается участок дорожной сети г. Красноярск, состоящий из двух перекрестков: пр. Свободный — ул. Лесопарковая, пр. Свободный — ул. Высотная. Модель данной дорожной сети, реализованная в среде AnyLogic, изображена на рисунке 1а. Рядом с каждым светофорным объектом имеются оптические датчики, которые фиксируют проезд машин через зону дороги, отмеченную желтым цветом и находящуюся на расстоянии 70 метров до стоп-линии. На рисунке 1б представлен пример оптического датчика. Требуется уменьшить суммарное время, затраченное на проезд через перекрестки дорожной сети.



Рис. 1. а) Модель рассматриваемого участка дорожной сети, реализованная в системе ApyLogic; б) зоны дороги (жёлтый цвет), фиксируемые оптическими датчиками

Рассмотрим задачу обучения с подкреплением на сети из двух светофорных объектов с разным количеством фаз [2]. Рассматриваются два агента, для которых описаны множества состояний $S^0 = \{s^{(0)}, s^{(1)}\}$, $S^1 = \{s^{(0)}, s^{(1)}, s^{(2)}\}$. Для перекрестка пр. Свободный — ул. Лесопарковая фаза $s^{(0)} \in S^0$ активирует движение с ул. Лесопарковая на пр. Свободный, $s^{(1)} \in S^0$ — движение вверх по пр. Свободному. Для перекрестка пр. Свободный — ул. Годенко фаза $s^{(0)} \in S^1$ активирует движение по ул. Годенко, $s^{(1)} \in S^1$ — движение по пр. Свободному в обоих направлениях, $s^{(2)} \in S^1$ — движение по ул. Высотной. Множество действий для перекрестка пр. Свободный — ул. Лесопарковая $A^0 = \{a^{(0)}, a^{(1)}\}$, для перекрестка пр. Свободный — ул. Годенко $A^1 = \{a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}\}$, где $a^{(k)}$ интерпретируется как «активировать фазу s^k ». Обозначим $\mathbf{s}_t = \{s_t^0, s_t^1\} \in S^0 \times S^1$ — совокупное состояние среды в момент времени t , а $\mathbf{a}_t = \{a_t^0, a_t^1\} \in A^0 \times A^1$ — совокупное управление в момент времени t . Отметим, что смена фазы любым агентом приводит к изменению общего состояния среды \mathbf{s} .

В таком случае функция оценки эффективности управления примет вид

$$V(\mathbf{s}) = \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t), \tag{1}$$

где \mathbb{E} — оператор математического ожидания по случайным величинам $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots$, $\gamma \in [0; 1)$ — коэффициент переоценки, $r(\mathbf{s}, \mathbf{a})$ — функция вознаграждений, $r(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) = R_t$.

Решение задачи MARLIN ищется методом динамического программирования на основе принципа оптимальности Беллмана и базируется на идее Q -обучения [4], которая заключается в оценке невычислимой

правой части:

$$Q_{t+1}(\mathbf{s}, \mathbf{a}) = Q_t(\mathbf{s}, \mathbf{a}) + \alpha_t \left(r(\mathbf{s}, \mathbf{a}) + \gamma \max_{\mathbf{a}' \in \mathbf{A}} [Q_t(\mathbf{s}', \mathbf{a}')] - Q_t(\mathbf{s}, \mathbf{a}) \right), \quad (2)$$

где α_t — вероятность выбрать пару (\mathbf{s}, \mathbf{a}) в момент времени t .

Оптимальное управление для фиксированного агента k будем искать как решение задачи MARLIN в виде

$$a_t = \arg \max_{a^k \in A^k} \sum_{a^j \in A^j} Q_t(\mathbf{s}, \mathbf{a}) p(\mathbf{s}' | \mathbf{s}, a^k, a^j). \quad (3)$$

Вероятность $p(\mathbf{s}' | \mathbf{s}, a^k, a^j)$ — это вероятность того, что агент j выберет действие a^j с учётом текущего совместного состояния \mathbf{s} и выбранного агентом k действия a^k .

2. О подборе параметров методе Q -обучения

Покажем как влияет подбор коэффициентов α и γ на Q_{t+1} . В работе [2] рассмотрен способ эмпирического подбора коэффициентов α, γ для решаемой задачи. Также для задачи поиска оптимального управления светофорным объектом с любым количеством фаз при условии сжимаемости $0 \leq \gamma < 1$ справедливы [3] следующие утверждения:

- существует единственное точное решение;
- оценка точности приближенного решения на n -ом шаге итерации

$$\rho(Q_n, Q_0) \leq \frac{\gamma^n \rho(Q_1, Q_0)}{1 - \gamma}, \quad (4)$$

где $Q_t \in \mathbb{R}_\infty^{|A|+|S|}$ — вектора значений функции $Q(s, a)$ на шаге t ,
 $\forall q, w \in \mathbb{R}_\infty^{|A|+|S|}$ определена функция $\rho(q, w) = \max_{1 \leq j \leq |A|+|S|} |q_j - w_j|$.

На рисунках 2, 3 продемонстрировано различие в скорости сходимости числовой последовательности $\{Q_t\}$ при выборе различных коэффициентов скидki α и переоценки γ .

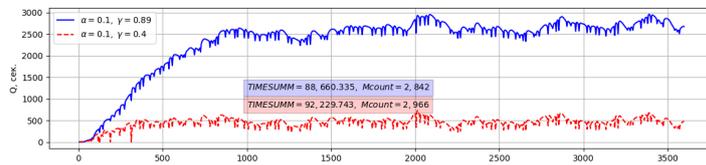


Рис. 2. Сравнение функции Q при различных коэффициентах γ

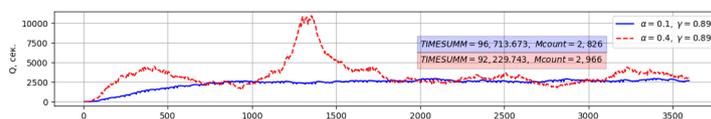


Рис. 3. Сравнение функции Q при различных коэффициентах γ

В [2] установлен критерий сходимости итерационного процесса (2). Заметим, что если используемая стратегия приводит к тому, что с единичной вероятностью каждая пара (\mathbf{s}, \mathbf{a}) будет бесконечное число раз встречаться на бесконечном горизонте наблюдения, то из отмеченного выше условия сжимаемости: $\sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t(\mathbf{s}, \mathbf{a}) = \infty, \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t^2(\mathbf{s}, \mathbf{a}) \leq \infty$.

Последовательность принимаемых функцией Q значений (2) при условии $Q_0 = 0$ можно переписать как

$$Q_{t+1} = (1 - \alpha_t)^t Q_1 + \sum_{i=1}^t \alpha_t (1 - \alpha_t)^{t-i} R_i, \quad (5)$$

где R_i — полученные в момент i вознаграждения.

Заметим, что $(1 - \alpha_t)^t + \sum_{i=1}^t \alpha_t (1 - \alpha_t)^{t-i} = 1$ и Q_{t+1} — средневзвешенное [5] для значений Q_1, R_1, \dots, R_t . При $0 < \alpha_t < 1$ выполняется оценка $Q_1 < Q_{t+1} < \frac{1}{4} \sum_{i=1}^t R_i$. В вырожденных случаях при $\alpha_t = 0$ функция $Q_{t+1} = Q_1$, при $\alpha_t = 1$ функция $Q_{t+1} = R_t$.

Параметры α_0 можно задать любым распределением. В частности, значения α_0 можно задать равными α'_t из прошлой сессии. На рисунке 4, на котором сравниваются два графика функции Q : синим цветом отрисован график функции при $\alpha_0 = 0$, красным цветом — при $\alpha_0 = \alpha'_t$, зеленым цветом — их абсолютная разность.

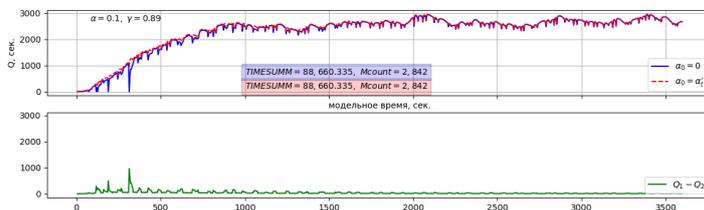


Рис. 4. Сравнение функции Q при различных α_0

Заключение

Решение задачи минимизации задержки трафика рассматривается как итерационный процесс, для которого получен критерий сходимости, представлен алгоритм поиска решения и описаны начальные значения. В работе были предложены способы подбора начальных параметров, помогающие увеличить число проезжающих машин, уменьшить их общее время движения, а также ускорить обучение модели MARLIN и оценить параметры итерационного процесса реализующего решение. Таким образом выбор коэффициента переоценки γ отвечает за скорость сходимости (2) и выбирается исходя из оценки точности приближенного решения (4), выбор коэффициента α — за отклонение от точного решения и подбирается либо эмпирически, либо исходя из оценок α_t . Задача MARLIN с начальными ненулевыми параметрами формулируется как для двух, так и для любого числа светофоров на перекрестке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *El-Tantawy S., Abdulhai B. and Abdelgawad H.* Multiagent Reinforcement Learning for Integrated Network of Adaptive Traffic Signal Controllers (MARLIN -ATSC): Methodology and Large-Scale Application on Downtown Toronto // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2013. Vol. 14, № 3, P. 1140–1150.
2. *Тисленко Т. И.* Задача MARLIN для светофора на перекрёстке // Материалы VIII Международной молодежной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», Томск: Издательство Томского государственного университета, 2021. С. 144–234.
3. *Гасников А. В., Горбунов Э. А., Гуз С. А.* Лекции по случайным процессам: учебное пособие. // Москва: МФТИ, 2019. 208 с.
4. *Иванов, С.* Конспект по обучению с подкреплением. // <https://arxiv.org/abs/2201.09746> (дата обращения: 03.04.2022).
5. Sutton, R. S. Reinforcement Learning: An Introduction // London: The MIT Press Cambridge, 2014. 352 p.

Тисленко Тимофей Иванович — студент 1-го курса магистратуры, Институт математики и фундаментальной информатики СФУ. E-mail: timtisko@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В ЗАДАЧЕ РАСПОЗНАВАНИЯ ПНЕВМОНИИ

Н. А. Лукьянова^{1,2}, С. Е. Потылицина³

¹ *Красноярский государственный медицинский университет имени профессора В. Ф. Войно-Ясенецкого МЗ РФ, г. Красноярск, Россия*

² *Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия*

³ *Новосибирский государственный медицинский университет, г. Новосибирск, Россия*

В работе построены и обучены 10 моделей сверточных нейронных сетей на основе трансферного подхода и без него для классификации пневмонии на рентгенологических снимках. Проведен сравнительный анализ полученных результатов обучения с целью выявления наиболее точной модели для классификации рентгенологических снимков по признаку отсутствия или наличия пневмонии вирусной или бактериальной этиологии. Наиболее точной моделью для классификации снимков является модель ResNeXt. Построенные модели протестированы на рентген снимках грудной клетки пациентов Красноярского края и оценено качество классификации каждой модели. Наилучшими моделями признаны ResNet без предобучения и VGG16.

Ключевые слова: *сверточные нейронные сети, классификация, пневмония.*

Введение

Проблема качественной расшифровки рентгенологических снимков в современном мире стоит остро [1–3]. При этом скорость обработки информации играет немаловажную роль. Поэтому врачам-рентгенологам важно обладать необходимыми компетенциями, наработанным опытом и способностью быстро и точно анализировать медицинские изображения и ставить верный диагноз, что довольно сложно бывает при высоком потоке пациентов, особенно в период пандемии. Здесь на помощь могут прийти методы глубокого обучения.

Решением задачи классификации пневмонии по рентгенологическим снимкам занимались как отечественные, так и зарубежные исследователи. Например, в работе [4] автор использует нейросетевую модель, которая классифицирует рентгенологические снимки на 2 класса (здоровый

или пневмония), а в работе [5] авторы предлагают нейросеть для классификации рентгенологических снимков на 3 класса (здоровые, бактериальная пневмония, вирусная пневмония) с характеристиками метрик порядка 99%. Зарубежные исследователи [6–8] также занимаются классификацией рентгенологических снимков на 3 вышеперечисленных класса и диапазон точностей их моделей составляет от 87,02% до 98,8%. При этом в части экспериментов используются инструменты предварительного обучения нейронных сетей. У каждого свой подход, свои датасеты, свои результаты. Востребованность исследований заключается в отсутствии универсальных моделей для качественной классификации изображений.

1. Материалы исследования

Цель нашего исследования: моделирование архитектур сверточных нейронных сетей для повышения качества классификации рентгенологических изображений с наличием или отсутствием признаков вирусной или бактериальной пневмонии.

В работе использовалась база данных из Kaggle, представленная изображениями рентгенограмм органов грудной клетки в прямой проекции от медицинского центра Guangzhou Women and Children's Medical Center, Гуанчжоу. Рентгенограммы были отобраны среди группы педиатрических пациентов в возрасте от года до пяти лет. Все рентгенограммы грудной клетки изначально прошли проверку на качество, при этом все нечитаемые снимки и изображения низкого качества были удалены. База данных состоит из 5856 изображений, поделенных на три категории: тестовые (Test), тренировочные (Train) и валидационные (Validation) данные (таблица 1).

Таблица 1
Распределение данных базы Chest X-Ray Images (Pneumonia) по классам

Тип данных	Train	Test	Validation	Итого
Нормальные	1341	234	8	1583
Бактериальная пневмония	2524	242	8	2774
Вирусная пневмония	1341	148	10	1499
Итого	5206	624	26	5856

В некоторых случаях пневмонии может иметь смешанную этиологию (вирусная и бактериальная инфекции). Однако набор данных, использованный в этом исследовании, не включает ни одного случая ви-

русной и бактериальной коинфекции. Также в ходе эксперимента использовались 15 рентгенологических снимков пациентов Красноярского края, предоставленных клинической больницей № 51 ФМБА России (г. Железногорск), по 5 снимков по каждому классу.

2. Экспериментальные исследования и результаты

Были построены и обучены 10 моделей сверточных нейронных сетей (рис. 1). Применена аугментация данных и метод регуляризации dropout для преодоления эффекта переобучения нейронных сетей.

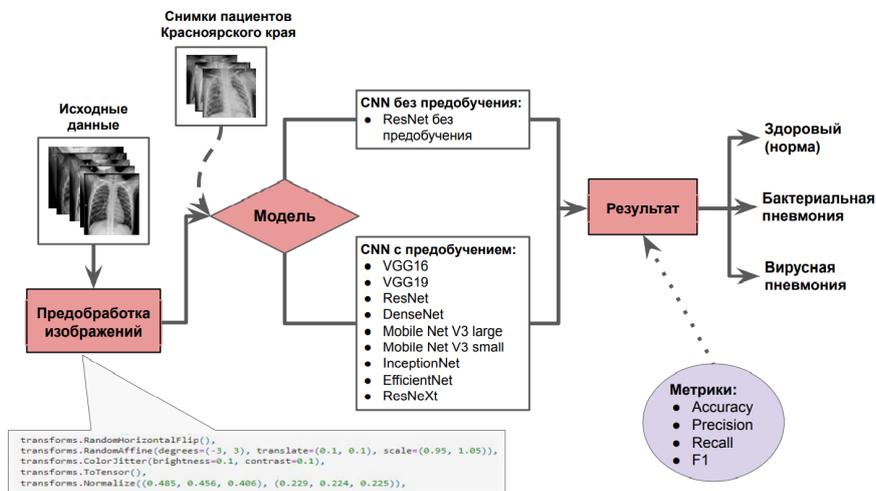


Рис. 1. Этапы работы

Модели классифицировали рентгенологические снимки на 3 класса: здоровый (healthy), бактериальная пневмония (bacteria), вирусная пневмония (virus), а также рассматривалась классификация по парным сочетаниям классов. Программный код реализовывался на языке Python. В ходе работы использовался компьютер со следующими техническими характеристиками: видеокарта NVIDIA GeForce 3090, процессор AMD Ryzen 9 5950X 16-Core Processor, 64 GB RAM памяти.

Построенная модель VGG16 состоит из 13 сверточных слоев и 4 полносвязных. В качестве функции активации используется ReLU, в последнем слое – softmax. Пространственное объединение осуществляется пятью объединяющими слоями (maxpooling). Оптимизатором является Adam.

Модель VGG19 состоит из 16 сверточных и 4 полносвязных слоев. В качестве функции активации используется ReLU, в последнем слое — softmax. Пространственное объединение осуществляется объединяющими слоями (maxpooling). Оптимизатором является Adam.

Модель ResNet состоит из 8 остаточных блоков, 17 сверточных слоев и 5 полносвязных слоев. В качестве функции активации используется ReLU, в последнем слое — softmax. В архитектуре сети применяется метод Batch Normalization. Оптимизатором является Adam.

Модель DenseNet состоит из 4 плотно связанных блоков и 5 полносвязных слоев. В качестве функции активации используется ReLU, в последнем слое — softmax. В архитектуре сети применяется метод Batch Normalization. Оптимизатором является Adam.

Полученная модель MobileNet V3 large состоит из слоев, объединенных в блоки. В качестве функции активации используется ReLU и Hard Swish, в последнем слое — softmax. В архитектуре сети применяется метод Batch Normalization. Оптимизатором является Adam.

Полученная модель MobileNet V3 small состоит из слоев, объединенных в блоки. В качестве функции активации используется ReLU и Hard Swish, в последнем слое — softmax. В архитектуре сети применяется метод Batch Normalization. Оптимизатором является Adam.

Полученная модель InceptionNet состоит из 10 Inception модулей. В качестве функции активации используется ReLU, в последнем слое — softmax. В архитектуре сети применяется метод Batch Normalization. Оптимизатором является Adam.

Модель EfficientNet-B0 состоит из 7 блоков, включающих в себя 16 сверточных слоев. В качестве функции активации используется ReLU, в последнем слое — softmax. В архитектуре сети применяется метод Batch Normalization. Оптимизатором является Adam.

Модель ResNeXt состоит из 49 слоев свертки. В качестве функции активации используется ReLU, в последнем слое — softmax. В архитектуре сети применяется метод Batch Normalization. Оптимизатором является Adam.

Сравнительный анализ полученных результатов обучения моделей с целью выявления наиболее точной модели для классификации рентгенологических снимков по признаку отсутствия или наличия пневмонии вирусной или бактериальной этиологии показал, что лучшей моделью является модель с архитектурой ResNeXt (таблица 2).

ResNeXt является одной из лучших моделей для классификации любого из трех классов (нормальные данные, бактериальная пневмо-

Таблица 2

Основные метрики модели ResNeXt

класс/метрики	accuracy	precision	recall	F1-score
healthy	92,8	94,8	85,5	90,0
bacteria	93,9	90,8	93,8	92,2
virus	90,2	76,7	84,4	80,3

ния, вирусная пневмония) и обладает наивысшими значениями метрик accuracy, precision, recall и F1. Модель обучалась на 100 эпохах.

При классификации рентген снимков пациентов Красноярского края наиболее точными моделями являются модели ResNet без предобучения (accuracy = 93,3, precision = 83,3, recall = 100, F1 = 90,9) и ResNeXt (accuracy = 86,7, precision = 71,4, recall = 100, F1 = 83,3), так как эти модели характеризуются наибольшими значениями оцениваемых параметров.

Наиболее точными моделями при классификации снимков бактериальной пневмонии пациентов Красноярского края стали модели MobileNet V3 small (accuracy = 73,3, precision = 55,6, recall = 100, F1 = 71,4) и ResNeXt (accuracy = 73,3, precision = 57,1, recall = 80,0, F1 = 66,7).

Наиболее точными моделями при классификации снимков вирусной пневмонии пациентов Красноярского края стали модели VGG16 (accuracy = 66,7, precision = 50,0, recall = 20,0, F1 = 28,6) и ResNet (accuracy = 66,7, precision = 50,0, recall = 20,0, F1 = 28,6).

По имеющимся показателям самыми точными моделями классификации рентгенологических снимков по признаку отсутствия или наличия пневмонии вирусной или бактериальной этиологии среди пациентов Красноярского края являются модель ResNet без предобучения и VGG16, так как они обладают наиболее высокими значениями показателей accuracy, precision, recall и F1 для классификации всех трех классов. Невысокие показатели метрик по классификации снимков легких по Красноярскому краю объясняется малым объемом данных, а также получением изображений на оборудовании отличном от исходного датасета с Kaggle.

Заключение

Применение сверточных нейронных сетей способно улучшить процедуру проведения диагностики, увеличив возможности для принятия верного решения, снизив нагрузку на врачей-специалистов и уменьшив

временные затраты, что в свою очередь влечет за собой ускорение времени начала корректного лечения заболевания. Тем не менее, существует определенный ряд ограничений при повсеместном использовании данной технологии в виде необходимости детальной донастройки каждой модели к конкретному типу изображений, а также проведения клинических испытаний и получения разрешения на ее использование.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Верзун С. Н.* Диагностика различных видов пневмонии по рентгеновским снимкам грудной клетки // Проблемы автоматизации и управления. 2022. Т. 43, № 1. С. 84–94.
2. *Гусев А. В.* Перспективы нейронных сетей и глубокого машинного обучения в создании решений для здравоохранения // Врач и информационные технологии. 2017. № 3. С. 92–105.
3. *Зеленина Л. И., Хаймина Л. Э., Деменкова Е. А. [и др.]*. Сверточные нейронные сети в задаче классификации медицинских изображений // Современные наукоемкие технологии. 2021. № 9. С. 68–73.
4. *Арбузова А. А.* Диагностика пневмонии по рентгеновским снимкам с помощью сверточных нейронных сетей // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2021. № 2. С. 107–114.
5. *Ефремцев В. Г., Ефремцев Н. Г., Тетерин Е. П. [и др.]*. Классификация рентгеновских изображений грудной клетки больных вирусной пневмонией и COVID-19 с помощью нейронных сетей // Компьютерная оптика. 2021. Т. 45, № 1. С. 149–153.
6. *Hashmi M. F., Katiyar S., Keskar A. G. [et al.]*. Efficient Pneumonia Detection in Chest Xray Images Using Deep Transfer Learning // Diagnostics. 2020. Vol. 10, № 10. P. 2–22.
7. *Militante S. V., Sibbaluca B. G.* Pneumonia Detection Using Convolutional Neural Networks // International Journal of Scientific & Technology Research. 2020. Vol. 9. P. 1332–1337.
8. *Kundu R., Das R., Geem Z. W. [et al.]*. Pneumonia detection in chest X-ray images using an ensemble of deep learning models // PLOS ONE. 2021. Vol. 16, № 9. P. 1–29.

Лукьянова Наталья Александровна — к.ф.-м.н., доцент кафедры медицинской кибернетики и информатики, КрасГМУ, доцент кафедры высшей и прикладной математики, СФУ. E-mail: nalukyanovakrsk@gmail.com

Потылицина Софья Евгеньевна — ординатор 1-го курса НГМУ, рентгенология. E-mail: Sofya1539@yandex.ru

ПРИМЕНЕНИЕ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ УЧАСТКОВ С ПАКЕТНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

М. Л. Жарков, А. Л. Казаков, А. А. Лемперт

*Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова
СО РАН, г. Иркутск, Россия*

В статье предложена методика математического моделирования участка железной дороги с пакетным (групповым) движением поездов. В ней применяются отдельные *ВМАР-потоки* (*Branch Markovian Arrival Process*) для описания поступления групп поездов с разных направлений. Процесс их движения по участку моделируется с помощью сети массового обслуживания, в которой допустимо групповое обслуживание заявок. Это позволяет учесть различные параметры работы станций и путей между ними, а также групповое движение поездов по системе. В качестве объекта исследования выбран участок пути от станции Наушки (Россия) до станции Сухэ-Батор (Монголия). По результатам численного исследования его модели сделаны выводы о пропускной способности участка. **Ключевые слова:** *сеть массового обслуживания, ВМАР, математическое моделирование, железнодорожный участок.*

Введение

В настоящее время сети массового обслуживания (СеМО) широко применяются для моделирования работы различных технических систем, в первую очередь компьютерных и телекоммуникационных сетей [1]. СеМО позволяют учесть при моделировании нелинейную структуру системы, различную производительность ее отдельных элементов, а также стохастическую природу поступления заявок и процесса их обслуживания [2]. Таким свойствам отвечает и, в частности, объекты железнодорожного транспорта [3]. Поэтому математический аппарат СеМО оказался эффективен для описания и долгосрочного прогнозирования работы развязок, станций и железнодорожных магистралей [4, 5, 6] в условиях неопределенности.

На основе СеМО авторы предложили методику моделирования работы сортировочных и грузовых железнодорожных станций [7, 8], а затем адаптировали ее для участка российской железнодорожной сети [9],

которая электрифицирована и имеет двухпутное сообщение. Однако в странах Азии железные дороги не всегда отвечают описанным требованиям. В частности, в Монголии большая часть железнодорожной сети неэлектрифицирована и имеет однопутное сообщение. В этом случае используется пакетный график, т.е. поезда поступают (отправляются) на станцию группами.

В данной работе предложенная методика усовершенствована для моделирования железнодорожной сети с пакетным графиком. В качестве примера рассматривается железнодорожный участок от станции Наушки (Россия) до станции Сухэ-Батор (Монголия), расположенного на Трансмонгольской железной дороге (ТМЖД).

1. Математическая модель

Типичный железнодорожный участок включает некоторое число станций и путей между ними, на которые поезда прибывают с двух и более направлений. Внутри системы присутствует несколько маршрутов движения транспорта. Станции имеют один или более парк для принятия и обслуживания поездов, включая грузовой двор для их погрузки/разгрузки. При этом станции и пути циклически выполняют однотипные операции, имеют разную производительность и вместимость, а их работа подвержена воздействию случайных факторов (поломки техники, человеческий фактор). Для описания таких систем СеМО оказались эффективным математическим аппаратом [4, 9].

Математическую модель железнодорожного участка с пакетным графиком движения поездов мы строим в виде СеМО специального вида и *ВМАР*-потоками. В отличие от ранее предложенной методики [9], во-первых, для описания поступления пакетов поездов с одного направления применяется отдельный *ВМАР*-поток, заявкой считается один поезд, тогда группа заявок – пакет; во-вторых, работа парков и путей между станциями, в зависимости от типа, описывается одной или более СМО без очереди. Поезда *в парки*, как правило, поступают с двух направлений, поэтому эти элементы моделируются двумя многоканальными СМО, где каналом обслуживания считается отдельный путь этого парка. *Грузовой двор* описывается одним узлом, в котором число каналов зависит от вместимости двора. *Путь между станциями* моделируется двумя одноканальными СМО с групповым обслуживанием заявок, так как по нему пакеты поездов движутся в два направления. Размер обслуживаемой группы равен максимальному размеру пакета, а время его обслуживания – удвоенное время движения поездов по данному пути. Распределения размера поступающей группы заявок и времени их обслуживания в узле определяется на основе результа-

тов статистической обработки данных для конкретного элемента. Для математического описания передвижения поездов внутри системы применяется маршрутная матрица, которая строится на основе структуры выбранного объекта. Для предотвращения потерь заявок между узлами применяются временные блокировки работы каналов.

2. Модель железнодорожного участка Наушки – Сухэ-Батор

Данный железнодорожный участок включает две станции, которые предназначены для проведения таможенных операций, и один путь между ними. По этому участку из России в Монголию следует 3-4 пассажирских поезда в сутки и столько же обратно, грузовых – по 7-8 для каждого направления. Средний размер пакета для направления Россия-Монголия составляет в дневную и ночную смены – 2,75 и 2,56 поездов, обратно – 2,59 и 2,33, а максимальный – 4 поезда для всех случаев. Для описания размеров групп заявок используется биномиальное распределение. Интенсивность поступления групп – 4 в сутки или 0,17 в час. Поступление поездов в систему описывается двумя ВМАР-потоками: ВМАР – R – с России, ВМАР – M – с Монголии, которые задаются матрицами

$$\begin{aligned}
 D_{R0} &= \begin{pmatrix} -0.17 & 0 \\ 0 & -0.17 \end{pmatrix}, & D_{R1} &= \begin{pmatrix} 0,008 & 0,008 \\ 0,012 & 0,012 \end{pmatrix}, \\
 D_{R2} &= \begin{pmatrix} 0,024 & 0,024 \\ 0,027 & 0,027 \end{pmatrix}, & D_{R3} &= \begin{pmatrix} 0,034 & 0,034 \\ 0,032 & 0,032 \end{pmatrix}, \\
 D_{R4} &= \begin{pmatrix} 0,019 & 0,019 \\ 0,014 & 0,014 \end{pmatrix}; & D_{M0} &= \begin{pmatrix} -0.17 & 0 \\ 0 & -0.17 \end{pmatrix}, \\
 D_{M1} &= \begin{pmatrix} 0,011 & 0,011 \\ 0,016 & 0,016 \end{pmatrix}, & D_{M2} &= \begin{pmatrix} 0,026 & 0,026 \\ 0,034 & 0,034 \end{pmatrix}, \\
 D_{M3} &= \begin{pmatrix} 0,035 & 0,035 \\ 0,026 & 0,026 \end{pmatrix}, & D_{M4} &= \begin{pmatrix} 0,013 & 0,013 \\ 0,009 & 0,009 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

На станции *Наушки* имеется приемоотправочный парк (ПОП) на 13 путей и грузовой двор. *Работу этого ПОП* мы описываем двумя многоканальными СМО: **узел 1** – ВМАР – R/G/8/0 и **узел 2** – */G/5/0. Распределение времени обслуживания в узлах описывается усеченным нормальным распределением $N(\mu, \sigma, a, b)$, где μ – математическое ожидание – соответствует среднему времени обслуживания соответствующего поезда, σ – ср. квадратическое отклонение – подобран по правилу «трех сигм», a и b – min и max значения случайной величины [7]. Значения параметров измеряются в минутах. Время обслуживания заявок в каналах узлов 1 и 2 для пассажирских поездов задается $N(100, 3, 90, 110)$, для грузовых – $N(230, 16, 180, 280)$.

На грузовом дворе может обслуживаться только один поезд целиком, поэтому для описания его работы применяется одноканальная СМО: **узел 3** – $*/G/1/0$. Среднее время погрузки (разгрузки) поезда – одни сутки. Поэтому распределение времени обслуживания задается $N(1440; 180; 900; 1980)$.

Функционирование пути между станциями мы моделируем двумя одноканальными СМО с групповым обслуживанием: **узлы 4 и 5** – $*/G^X/1/0$, где $X = 4$ – размер отслуживаемой группы заявок. Среднее время хода от станции Наушки до Сухэ-Батор – 45 мин. Тогда время обслуживания в этих узлах описывается $N(87; 10; 57; 117)$.

На станции Сухэ-Батор имеется один ПОП на 12 путей. Его работа моделируется двумя многоканальными СМО без очереди: **узел 6** – $*/G/6/0$ и **узел 7** – $ВМАР - M/G/8/0$. Время обслуживания пассажирских поездов описывается $N(100; 3; 90; 110)$, грузовых – $N(230; 16; 180; 280)$.

Таким образом, модель работы железнодорожного участка Наушки – Сухэ-Батор включает 7 узлов. К ним следует добавить два фиктивных узла [1, 2] – источники потоков заявок: **узел 0** для $ВМАР - R$, **узел 8** для $ВМАР - M$. Вероятности переходов групп заявок между узлами представлены в виде весов на рис. 1.

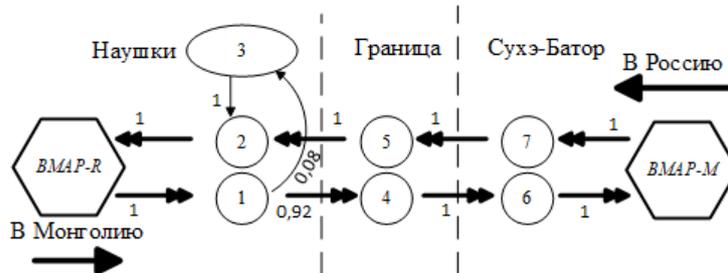


Рис. 1. Схема СеМО

3. Вычислительный эксперимент

Исследование полученной СеМО с ВМАР-потоком, описываемым матрицами (1), выполнялось численно, с помощью разработанной авторами имитационной модели [7]. Время моделирования три недели виртуального времени. В табл. 1 представлены средние результаты за 10 пусков имитационной модели.

Таблица 1

Средние результаты за 10 пусков имитационной модели

Групп Заявок	Поступ.	166,4 450,2	Отказ.	9,00 27,8	P_{loss}	0,054 0,062	
№ узла	1	2	3	4	5	6	7
K	0,19	0,26	0,79	0,36	0,42	0,17	0,21
T	620,4	224,5	1520,2	59,5	57,5	207,5	589,4
Z	202,0	174,2	15,6	185,8	219,2	145,4	220,40
T_{lock}	26,66	-	0,06	0,02	2,29	-	28,32

Здесь: P_{loss} – вероятность отказа; K – коэффициент занятости каналов, T – среднее время в узле (мин), Z – количество поступивших в узел заявок, T_{lock} – среднее время блокировки одного канала (мин).

Переносим полученные результаты на объект исследования получаем следующее. В данном эксперименте вероятность отказа показывает процент остановки поездов на соседних станциях из-за занятости рассматриваемого участка. В нашем случае 6,2 % поездов могут быть остановлены, что не является критическим значением. Грузовой двор (узел 3) имеет наибольшую загрузку, однако объем поездопотока на него незначительный. Поэтому он практически не оказывает влияние на систему в целом. Путь между станциями (узлы 4 и 5) является «узким местом», так как в этих узлах (не считая узел 3) имеются наибольшие значения K и T_{lock} . Более подробная информация об объекте исследования и полученные результаты исследования будут представлены в докладе.

Заключение

Главным итогом проведенного исследования является то, что в ходе него предложенная ранее математическая модель участка железной дороги, в основе которой лежит сеть массового обслуживания, получила развитие и была распространена на случай пакетного графика (группового движения поездов). Подобный способ организации перевозок характерен для некоторых азиатских стран, включая Монголию, через территорию которой проходят важные транспортные коридоры, связывающие центральные регионы России с Китаем. В качестве апробации предложенного математического инструментария была построена и изучена математическая модель железнодорожного участка Наушки – Сухэ-Батор, от которого в значительной степени зависит пропускная способность Трансмонгольской железной дороги (ТМЖД).

Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть связаны с построением на той же математической основе полной модели участка Наушки – Улан-Батор со всеми действующими станциями, и далее – всей монгольской части ТМЖД, что будет способствовать разработке эффективных мер по повышению ее пропускной способности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишневецкий В. М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003. 512 с.
2. *Dudin A., Klimenok V., Vishnevsky V.* The Theory of Queuing Systems with Correlated Flows. Switzerland: Springer, 2019.
3. *Pyrgidis C.* Railway Transportation Systems. Design, Construction and Operation. NY.: CRC Press, 2016. 475 p.
4. *Huisman T., Boucherie R. J., Van Dijk N. M.* A solvable queueing network model for railway networks and its validation and applications for the Netherlands // Eur. J. Operational Research. 2002. № 142. P. 30–51.
5. *Marinov M., Viegas J.* A simulation modelling methodology for evaluating flat-shunted yard operations // Simulation Modelling Practice and Theory. 2009. Vol. 17. № 6. P. 1106–1129.
6. *Любченко А. А., Бартош С. В., Смирнов В. А., Castillo P. A.* Дискретно-событийная модель железнодорожного узла в среде AnyLogic // Динамика систем, механизмов и машин. 2016. № 3. С. 87–92.
7. *Zharkov M., Lempert A., Pavidis M.* Simulation of Railway Marshalling Yards Based on Four-Phase Queuing Systems // In: Dudin A., Nazarov A., Moiseev A. (eds) ITMM. Queueing Theory and Applications. ITMM 2020. № 1391. P. 143–154.
8. *Vychkov I., Kazakov A., Lempert A., Zharkov M.* Modeling of railway stations based on queueing networks // Applied Sciences. 2021. № 11(5). P. 2425.
9. *Жарков М. Л., Сунруновский А. В.* О моделировании железнодорожных узлов на основе теории массового обслуживания // ИМТ. 2022. № 1(25). С. 120–132.

Жарков Максим Леонидович — к.т.н., н.с., Лаб. 6.2. Логических и оптимизационных методов анализа сложных систем. E-mail: zharkm@mail.ru

Казаков Александр Леонидович — д.ф.-м.н., г.н.с., Отд. 2. Прикладных проблем математической физики и теории поля. E-mail: kazakov@icc.ru

Лемперт Анна Ананьевна — к.ф.-м.н., зав.лаб., Лаб. 6.2. Логических и оптимизационных методов анализа сложных систем. E-mail: lempert@icc.ru

ПРИМЕНЕНИЕ СТРУКТУРНОГО МЕТОДА РАСПОЗНАВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ДОРОЖНЫХ ЗНАКОВ

И. В. Баранова, А. А. Судакова

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

В работе решается задача распознавания дорожных знаков на изображениях. Предлагается выполнять классификацию как последовательность следующих действий: распознавание формы дорожного знака, распознавание цвета фона знака и цвета канта, распознавание надписи или рисунка на знаке, распознавание символов на информационной табличке. Перед этапом классификации локализуется область дорожного знака, формируется признаковое описание формы знака и выделяются детали обнаруженной фигуры. Для этого предлагается построчный алгоритм формирования связности фигур. Классификация форм дорожных знаков выполняется с помощью структурного метода классификации, предложенного в данной работе и основанного на деревьях решений. **Ключевые слова:** *распознавание изображений, дорожные знаки, классификация, структурный метод.*

Введение

В настоящее время распознавание изображений используется во многих областях человеческой деятельности: медицине, геологии, логистике, информационной безопасности и т. д. Задача распознавания образов (в общем виде) заключается в том, чтобы отнести изучаемые объекты к определённому классу с помощью выделения существенных признаков из исходных данных.

В работе решается задача распознавания дорожных знаков на изображениях [1]. Данная задача является актуальной и востребованной, поскольку количество машин в мире постоянно растёт, как и количество дорожно-транспортных происшествий. Поэтому разработка систем распознавания дорожных знаков на сегодняшний день является одним из самых развивающихся и перспективных направлений в компьютерном зрении. В данный момент существует ряд систем распознавания дорожных знаков [2]. Но как правило их основным назначением является контроль ограничения скорости и информирование водителей о

необходимости соблюдения скоростного режима — т. е. система определяет дорожные знаки ограничения скорости при их проезде и напоминает водителю значение максимальной разрешенной скорости, если он движется быстрее. У многих производителей современных автомобилей имеются подобные системы распознавания. Типовая конструкция системы распознавания дорожных знаков включает в себя видеокамеру, блок управления и средство вывода информации.

1. Этапы решения задачи распознавания дорожных знаков на изображении

Распознавание дорожных знаков состоит из четырех этапов[3]:

- фильтрация — выделяются интересующие области на изображениях, без их анализа;
- логическая обработка результатов фильтрации — формируются признаки описания выделенных на предыдущем этапе областей. Для обработки результатов фильтрации используются математическая морфология, контурный анализ, особые точки;
- обучение — используются различные методы машинного обучения и принятия решений;
- классификация — по признаковым описаниям, построенным на этапе извлечения признаков, принимается решение о том, к какому заранее известному классу необходимо отнести выделенные элементы.

Этап классификации дорожных знаков в свою очередь можно разбить на следующие шаги:

- распознавание формы дорожного знака;
- распознавание цвета знака (цвет самого знака и цвета канта);
- распознавание надписи или рисунка на знаке;
- распознавание информационной таблички (вид транспорта, время действия и зона действия).

2. Дорожные знаки

В правилах дорожного движения России на настоящий момент насчитывается около 320 различных дорожных знаков. Все знаки разделены на 8 групп, в каждой из которых находятся знаки со схожей смысловой нагрузкой: предупреждающие знаки, знаки приоритета, запрещающие знаки, предписывающие знаки, знаки особых предписаний, информационные знаки, знаки сервиса и знаки дополнительной информации (таблички).

Запрещающие дорожные знаки запрещают водителю выполнять определенные действия. Все они имеют круглую форму, белый фон и

красный кант. Предупреждающие знаки сигнализируют водителям о возможных опасностях. Большая часть знаков этой группы имеет треугольную форму, белый фон и красный кант. Предписывающие дорожные знаки используются для того, чтобы показывать водителям единственно разрешенное действие, например, проезд только прямо. К предписывающим знакам относятся круглые знаки с темно-синим фоном, а также — знаки прямоугольной формы с белым фоном. Знаки приоритета определяют очередность проезда перекрестков, пересечения отдельных проезжих частей и т. д. Знаки этой группы имеют разную форму и цвет.

Из всех вышеперечисленных групп знаков разумнее всего распознавать первые пять, так как именно эти знаки оказывают существенное влияние на дорожную ситуацию. При этом, из указанных пяти групп наибольшую важность представляют запрещающие дорожные знаки, например, знаки ограничения скорости или запрета обгона.

Для решения задач распознавания объектов на изображении применяются различные алгоритмы, среди которых можно выделить: сравнение с шаблоном, нейронные сети, метод опорных векторов, дескрипторы локальных особенностей, алгоритм Виолы–Джонса и т. д.

Однако до сих пор существует ряд нерешенных вопросов, которые снижают эффективность работы современных систем распознавания дорожных знаков[4]:

- системы распознавания работают в основном с запрещающими знаками (ограничения скорости),
- объекты на изображениях могут быть представлены при различном ракурсе, что создает визуальные геометрические и фотометрические искажения,
- на изображениях с видеокамеры может быть сложный, неоднородный по цвету и контрастности фон,
- на изображениях может быть большое количество искомым объектов, перекрывающих и противоречащих друг другу.

Также следует отметить, что большинство методов распознавания требует наличие обучающей выборки большого объема, содержащих различные версии изображения каждого из знаков (нейронные сети и другие алгоритмы с обучением).

Из всего перечисленного можно сделать вывод, что сегодня существует необходимость в разработке и развитии методов и алгоритмов, позволяющих снизить влияние вышеперечисленных особенностей на процесс распознавания. Поэтому в данной работе предлагается выполнять распознавание дорожных знаков пяти групп (предупреждающие

знаки, знаки приоритета, запрещающие знаки, предписывающие знаки и знаки особых предписаний), а на этапе распознавания формы дорожного знака использовать предложенный в работе структурный алгоритм распознавания геометрических фигур.

3. Постановка задачи распознавания образов

Пусть имеется множество объектов $X = x_1, \dots, x_n$, где $x_i \in X$ — объект распознавания. Задано F — пространство признаков, тогда функция $f(x) : F \rightarrow X$ ставит в соответствие каждому объекту x точку $f(x)$. Здесь вектор $f(x)$ является образом объекта x .

Функция $g(x) : X \rightarrow C$, $C = \{C_1, \dots, C_m\}$ — индикаторная функция, разбивающая пространство образов на m непересекающихся классов. Функция $g(x)$ неизвестна. Решающее правило $\hat{g}(x) : F \rightarrow C$, — функция, которая является оценкой $g(x)$ на основании $f(x)$, то есть $\hat{g}(x) = g(f(x))$. Другими словами, задано конечное множество объектов $\tilde{X} \subset X$, для которых известно, к каким классам они относятся (обучающая выборка или множество прецедентов). Классовая принадлежность остальных объектов не известна.

Требуется построить такое решающее правило $\hat{g}(x)$, чтобы распознавание и классификация проводилась с минимальным числом ошибок [5].

Для задачи распознавания геометрических фигур в качестве множества объектов будут выступать фигуры (часть растрового изображения, содержащего фигуру). В качестве признаков будут выступать структурные признаки, описывающие каждую из фигур (замкнутость, количество сторон, точки изгиба, равенство некоторых сторон и т.д.) [6].

4. Выделение деталей и сегментация

Как было сказано выше, решение задачи распознавания состоит из четырех этапов. Этап фильтрации заключается в удалении шумов на изображении и выделении значимых контуров объектов. Для этого в работе используются вейвлеты, свёртки и преобразование Хафа. Далее следует этап логической обработки, на котором происходит выделение деталей и сегментация выделенных отрезков.

Для обнаружения связанных фигур в растровом изображении был предложен построчный алгоритм формирования связности, выполняющий следующие действия:

- 1) Выполняется перемещение по изображению сверху вниз, и выбираются части строк изображения, содержащие контур фигуры.

- 2) В выбранных строках находятся отрезки, содержащие непрерывный набор пикселей контура.
- 3) Из полученных отрезков строятся деревья на основе того, что отрезок считается дочерним второго отрезка, если их пересечение ненулевое, и они находятся достаточно близко друг к другу. Затем с помощью обхода полученных деревьев осуществляется выбор ветвей, которые образуют прямую линию из набора отрезков. На основе первого и последнего отрезка в ветке определяются параметры линии.
- 4) Часть обнаруженных отрезков объединяется в более крупную линию. Множество отрезков с близким наклоном, находящихся на близком расстоянии, задает новую линию. Объединение происходит с помощью методов кластеризации. После этого удаляются линии, которые могли появиться в результате шумов.

В результате выполнения данного этапа алгоритм выдает описание найденного на изображении объекта в виде графа, содержащего набор точек и отрезков между ними.

5. Классификация дорожных знаков

В данной работе решен первый этап классификации дорожных знаков, а именно — распознавание формы дорожного знака.

Для классификации форм (как геометрических объектов) был разработан структурный метод на основе деревьев решений. С помощью выделения структурных признаков из графа, представляющего собой описание найденного на изображении объекта, полученного на предыдущем этапе, создается дерево решений. Проходя по ветвям этого дерева, можно получить ответ на вопрос, какая фигура присутствует на изображении. В рамках работы было разработано программное обеспечение на языке C#, реализующее работу алгоритмов фильтрации, логической обработки и классификации форм дорожных с помощью предложенного структурного метода классификации, базирующегося на деревьях решений. Было выполнено сравнение скорости работы, точности распознавания и вычислительной сложности с шаблонным алгоритмом и нейронной сетью. Предложенный алгоритм работает существенно лучше шаблонного алгоритма по всем перечисленным параметрам и сопоставим с нейронной сетью распознавания. Но при этом он не требует наличия обучающей выборки, что является важным достоинством разработанного метода.

В дальнейшем планируется продолжить разработку системы распознавания дорожных знаков и реализовать следующие этапы распознавания (распознавание цвета знака и цвета канта, распознавание надпи-

си или рисунка на знаке, распознавание символов на информационной табличке).

Заключение

В работе решена задача распознавания дорожных знаков. Предложен построчный алгоритм формирования связности фигур. Также предложен структурный метод классификации геометрических фигур, базирующийся на деревьях решений и использующийся для классификации форм дорожных знаков. Разработана часть системы распознавания дорожных знаков, представляющее собой программное обеспечение на языке C#. Оно реализует работу алгоритмов фильтрации, логической обработки и предложенного алгоритма классификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lopez L., Fuentes O. Color-based road sign detection and tracking. Image Analysis and Recognition // Lecture Notes in Computer Science. 2007. Vol. 39. № 5. P. 795–800.
2. Якимов П. Ю. Отслеживание дорожных знаков в видеопоследовательности с использованием скорости автомобиля // Компьютерная оптика. 2015. Т. 39. № 5. С. 795–800.
3. Mathias M., Timofte R, Benenson R, Gool L. V. Traffic sign recognition — how far are we from the solution? // Proceeding of IEEE International Joint Conference on Neural Networks, Dallas: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2013. P. 1–8.
4. Saadna Ya., Behloul A. An overview of traffic sign detection and classification methods // International Journal of Multimedia Information Retrieval. 2017. № 6. P. 1–18.
5. Лепский А. Е., Броневич А. Е. Математические методы распознавания образов. Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. 155 с.
6. Фу К. Структурные методы в распознавании образов. Москва: Мир, 1977. 319 с.

Баранова Ирина Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент, базовая кафедра вычислительных и информационных технологий Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета. E-mail: irinabar@yandex.ru

Судакова Арина Анатольевна — студент, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета. E-mail: sarinacfg@yahoo.com

ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ГАРМОНИЗАЦИИ МЕЛОДИИ

А. Б. Левский¹

¹ *Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия*

В настоящее время актуальны исследования по созданию компьютерных программ с различными возможностями гармонизации мелодии. Целью работы является разработка приложения по подбору трезвучий (мажорных и минорных) для сопровождения каждого такта введенной мелодии. Аккорд считается расположенным в нижнем регистре. Приложение работает с учетом параметров, заданных пользователем. Эти параметры позволят выделить среди звуков мелодии акцентированные. На экран выводятся все мажорные и минорные трезвучия (возможно, не входящие в тональность), подходящие для сопровождения каждого такта. **Ключевые слова:** *мелодия, трезвучия, диссонансы, гармонизация, ввод, вывод.*

Введение

Актуальной задачей при написании музыки является гармонизация готовой мелодии [1]. Как правило, трудность состоит в выборе аккордов, не диссонирующих с мелодией [2]. Существуют различные приложения, позволяющие облегчить эту задачу (Band-in-a-Box, Harmony Navigator). Эти приложения предлагают богатый набор созвучий, но не позволяют подробно контролировать количество образующихся неаккордовых звуков и их положение в такте. Представленная в статье программа предоставляет пользователю максимальный контроль над видом возникающих диссонансов, а также возможность учесть особенности ритмики.

Описание программы

Пользователем вводится мелодия из восьми тактов, содержащих звуки длины, равной одной восьмой доли, и паузы той же длины. Каждый такт представлен в программе массивом из восьми целых чисел. Каждый элемент массива представляет музыкальный звук от «До» до «Си», с точностью до октавы (если число от 0 до 11), или паузу (если это число равно -1). Пользователь задает четыре параметра, описание и назначение которых представлено в таблице 1. Первые два параметра выделяют

условно акцентированные звуки мелодии [3]. Неакцентированные звуки программа не рассматривает.

Таблица 1

Параметры, принимаемые программой

Параметр	Назначение
Минимальное расстояние в восьмых долях между рассматриваемыми звуками	Параметр позволяет выделить звуки мелодии, стоящие в более ритмически сильных положениях в такте. Ноты, стоящие между ними, не будут рассматриваться программой.
Минимальная длительность (условная) рассматриваемых звуков	Величина представляет собой расстояние в восьмых долях между первым входением рассматриваемой ноты в такт и первым входением следующей ноты (в этом смысле повторения одной ноты подряд эквивалентны паузам). Параметр (как и предыдущий) позволяет выделить акцентированные звуки, но уже в смысле продолжительности. Так, например, достаточно быстро разрешенные диссонансы не будут учитываться программой.
Уровень диссонантности акцентированных звуков	Параметр определяет допустимые интервалы (с точностью до энгармонизма), возникающие между аккордовыми звуками и акцентированными звуками мелодии [4]. Имеется четыре условных «уровня диссонантности»: «консонансы» (без диссонансов), «пентатоника» (допускаются малые септимы и большие секунды, ноны), «септимы» (допускаются большие и малые септимы, большие секунды, ноны), «тритоны» (допускаются все диссонансы, кроме малых нон).
Количество аккордов в такте	Пользователь может гармонизовать каждый такт либо одним, либо двумя аккордами (во втором случае такт разделяется посередине сменой аккорда).

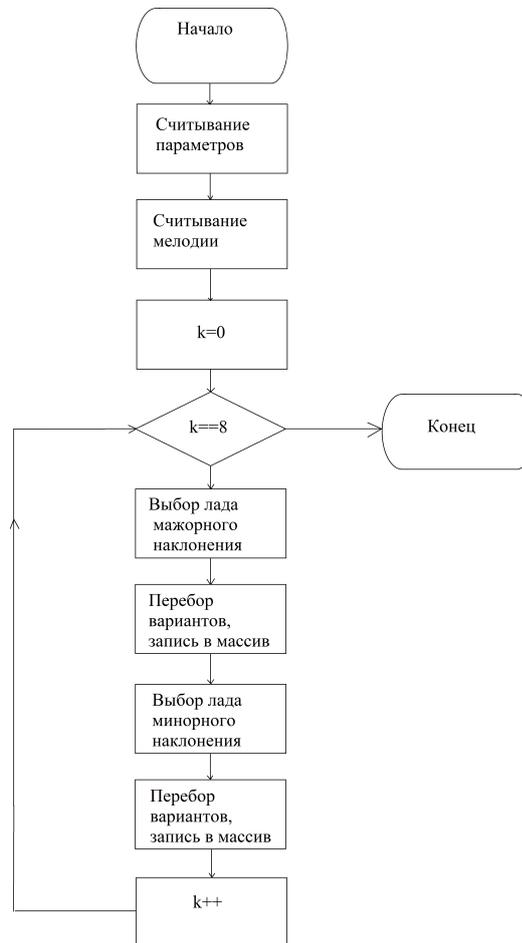


Рис. 1. Алгоритм подбора трезвучий

Принцип работы программы описан в блок-схеме (Рис. 1).

Ввод параметров осуществляется через два раскрывающихся меню и два поля редактирования. В программе разработан интерфейс, позволяющий пользователю вводить мелодию с экрана путем выбора каждого звука мелодии через раскрывающиеся меню. Меню содержат варианты заполнения: двенадцать звуков хроматической гаммы и паузу.

При обработке каждого такта мелодии программа перебирает двенадцать минорных и двенадцать мажорных трезвучий. От каждого трезвучия она строит лад. Если в него должны входить все звуки мелодии, выделенные согласно параметрам, то название аккорда записывается в массив.

В зависимости от выбранного «уровня диссонантности» этот лад будет представлен, соответственно: «консонансы» — только аккордовыми звуками, «пентатоника» — мажорной (минорной) пентатоникой от тоники аккорда, «септимы» — мажорной пентатоникой с добавленным вводным тоном (минорной пентатоникой с добавленной супертоной), «тритоны» — лидийским (дорийским) ладом.

Результат работы программы выводится во всплывающем окне в виде списка строк: «*номер такта*: *наименования аккордов через запятую*».

Пример работы программы

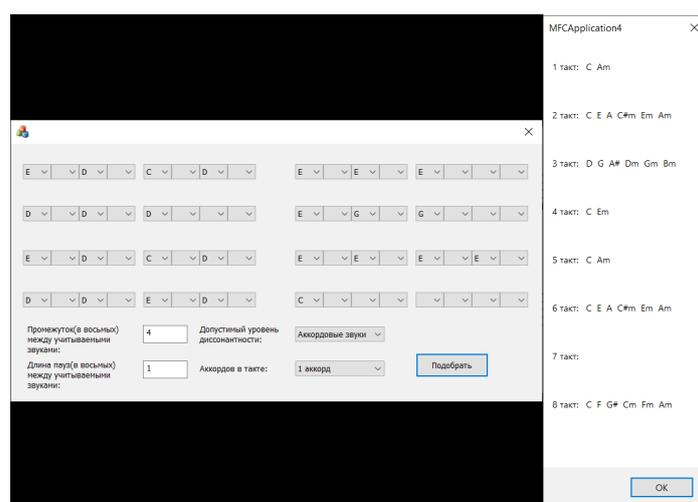


Рис. 2. Пример работы программы: выведены все трезвучия, не диссонирующие с акцентированными звуками

Продемонстрируем работу программы: ввод мелодии, параметров гармонизации и результат работы. Для примера использована старинная английская народная песня «Marry had a little lamb».

Рассмотрим первый и седьмой такты. В массив, представляющий первый такт были записана последовательность: «Ми», пауза, «Ре»,

пауза, «До», пауза, «Ре», пауза (см. Рис. 2). Согласно настройке промежутков между учитываемыми звуками, программа будет рассматривать только звуки «Ми» (приходящийся на сильную долю) и «До» (отстоящий от сильной доли на четыре восьмые). Оба звука имеют достаточную условную длину в восьмых и поэтому допускаются к рассмотрению. Согласно настройке допустимого уровня диссонантности, программа должна выбрать все трезвучия содержащие звуки «До» и «Ми». Таковы трезвучия «До мажор» и «Ля минор» («С» и «Ам»), что мы и видим на экране. В массив, представляющий седьмой такт были записана последовательность: «Ре», пауза, «Ре», пауза, «Ми», пауза, «Ре», пауза. В седьмом же такте по такому же принципу будут рассматриваться звуки «Ми» и «Ре». Однако, не существует трезвучия, содержащего оба эти звука. Поэтому в седьмой строке не вывелось ни одного варианта гармонизации.

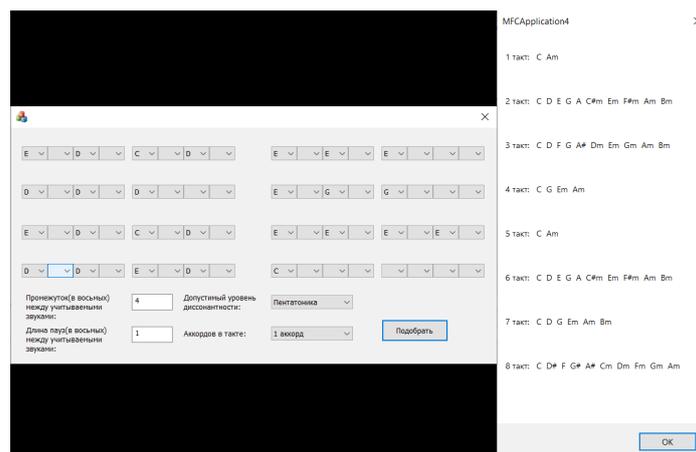


Рис. 3. Пример работы программы: условия выбора трезвучий менее строгие, чтобы найти хотя бы один способ гармонизации седьмого такта

Снова рассмотрим первый и седьмой такты (см. Рис. 3). Программой анализируются те же звуки (т. к. настройка длительностей и промежутков не изменилась). Однако теперь поиск способов гармонизации будет происходить по следующему принципу: рассматриваемые звуки должны входить в пентатонику, соответствующую выбранному аккорду. В первой строке результат тот же, т. к. звуки «Ми» и «До» входят лишь в мажорную пентатонику от «До» и в минорную пентатонику от «Ля». В седьмой же строке теперь выведено шесть названий трезвучий: «До

мажор», «Ре мажор», «Соль мажор», «Ми минор», «Ля минор» или «Си минор». Действительно, звуки «Ми» и «Ре» входят в минорные пентатоники от «Ми» «Ля» «Си» и мажорные пентатоники от «До» «Ре» и «Соль». Итак, сделав известное допущение, седьмой такт можно гармонизовать.

Заключение

В работе был продемонстрирован процесс подбора вариантов гармонизации мелодии с помощью разработанного приложения. Программа, при всех технических ограничениях (музыкальный размер, количество тактов), имеет практическую ценность. Она позволяет не только рассмотреть различные трезвучия, подходящие для сопровождения заданной мелодии, но и контролировать количество диссонансов и, частично, их разрешение на месте акцентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гармонизация // Большая российская энциклопедия. Москва, 2006. Т. 6. С. 406–407.
2. *Холопов Ю. Н.* Гармония. Теоретический курс. М., 1988. С. 15–30.
3. Акцент музыкальный // Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона : в 86 т. (82 т. и 4 доп.). СПб., 1890–1907.
4. *Алексеев Б., Мясоедов А.* Элементарная теория музыки. М.: Музыка, 1986. С. 141–240.

Левский Аркадий Богданович — студент третьего курса бакалавриата Института математики и фундаментальной информатики СФУ. E-mail: learkasha03@gmail.com

ПРОБЛЕМЫ И ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ГУМАНИТАРНЫХ ДАННЫХ

С. А. Парыгина

Череповецкий государственный университет, г. Череповец, Россия

В статье рассмотрены проблемы и особенности, с которыми сталкивается исследователь в ходе моделирования данных, получаемых в результате измерения параметров сложного технологического процесса, в частности, процесса подготовки угольной шихты к коксованию. А также проблемы и особенности, с которыми сталкивается исследователь в процессе обработки данных по трудоустройству лиц с ОВЗ и инвалидностью. Намечены пути решения этих проблем. **Ключевые слова:** угольная шихта, измерительные шкалы, факторный анализ, кластерный анализ, профессионально значимые качества.

Введение

Математическое моделирование технических, в частности, производственных данных, и данных, так называемого, гуманитарного характера, во-многом, различается. Прежде всего - это высокая степень разнородности входных переменных, а также различное соотношение переменных, измеренных в количественных и качественных шкалах. Разный по составу набор входных и выходных переменных определяет, в дальнейшем, различие алгоритмов и методов моделирования.

Однако, есть и общие особенности данного процесса. К ним можно отнести: общие этапы работы с данными в процессе моделирования, известный набор статистических методов и алгоритмов анализа данных, применяемых для моделирования.

В целом, можно отметить, что каждая новая задача моделирования требует как определения общих подходов к ее решению, так и разработки уникального комплекса конкретных методов обработки соответствующих данных.

Исследование выполнено в рамках Гранта “Развитие регионального информационно-аналитического портала “ПЕРСПЕКТИВА-PRO” с применением технологии искусственного интеллекта как инструмента профориентации, образования и содействия трудоустройству инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья”, договор № 22 от 10 декабря 2021 г.

1. Общие положения

Любой анализ данных с целью математического моделирования закономерностей, имеющихся внутри этих данных, начинается с описания структуры данных. При этом возникает первый важный вопрос, от которого, во-многом, зависит дальнейшая схема анализа: "Однородны ли с точки зрения решения задачи моделирования представленные входные переменные или среди них есть некие "функционально независимые структуры"[2]?".

Как правило, в случае моделирования сложных технологических процессов, выделение функционально независимых структур переменных позволяет дифференцировать входные переменные в зависимости от их назначения и провести моделирование более точно [1]. Рассмотрим это во 2-й части статьи на примере построения математической модели прогнозирования качества металлургического кокса, в частности, его показателя истираемости в зависимости от ряда входных переменных (производственных факторов).

В свою очередь, в процессе моделирования непроизводственных данных, в частности, данных по трудоустройству лиц с ОВЗ и инвалидностью, часто требуется изначально разделить модель на составляющие в зависимости от источника моделирования. Это может быть: непосредственно сам инвалид или лицо с ОВЗ, его родители, потенциально возможные работодатели и т.д. Внутри каждого направления моделирования строится отдельная модель данных. Рассмотрим подобный анализ в 3-й части статьи на примере построения математической модели прогнозирования успешности трудоустройства лиц с ОВЗ и инвалидностью в зависимости от ряда входных переменных (характеристик степени нетрудоспособности, уровня образования и др.).

2. Построение математической модели прогнозирования качества металлургического кокса

В качестве гипотезы, было высказано предположение, что грамотно построенная математическая модель позволит с высокой точностью предсказывать значения показателя истираемости кокса в зависимости от входных технологических параметров.

Актуальность данного исследования обусловлена тем, что в настоящее время расчёт параметров коксования и шихтовых условий на металлургических предприятиях происходит путём объединения различных расчётов, производимых разрозненно. Управляющие воздействия носят спонтанный характер и не всегда оптимальны с точки зрения совокупности выходных факторов.

Задача исследования - с помощью методов машинного обучения разработать модель прогнозирования качества кокса, а именно: определить наиболее значимые технологические параметры, влияющие на показатель истираемости кокса М10 и степень влияния этих параметров на данную величину. Необходимым условием работы модели является оптимизация параметров готовой продукции путем задания шихтовых условий на входе технологических переделов.

Исходная выборка представляет собой значения 262 выборочных данных (единиц угольной шихты), для каждой из которых измерены значения 34-х переменных (технологических параметров угольной шихты).

Все 34 входных технологических параметра можно разделить на несколько функционально независимых структур переменных:

- параметры готовой продукции (кокса) (4 переменных);
- параметры, характеризующие процесс коксования (3 переменных);
- параметры, характеризующие шихтовую карту (рецептуру производства кокса) (7 переменных);
- физико-химические параметры угольной шихты (14 переменных);
- гранулометрический состав угольной шихты (6 переменных).

Основная проблема на первом этапе моделирования - это понять: переменные из каких структурных групп (или целые группы), действительно, являются зависимыми от выходной переменной "показатель истираемости кокса М10"; а какие переменные (или группы переменных) - напрямую с выходной переменной не связаны, а определяют, так называемые, базовые характеристики угольной шихты, например, типы шихтовых карт.

После консультации с химиками-технологами металлургического предприятия стало понятно, что набор из 7-ми переменных, характеризующих шихтовую карту, определяет разные типы угольной шихты. Вся эта группа в целом является дифференцирующим фактором, разделяющим все множество выборочных данных на 4 основных типа (5-й тип - нетипичные значения выборки).

В настоящее время, моделирование происходит отдельно по каждому типу угольной шихты. Пока открытым остается вопрос о том, каким образом использовать в ходе анализа данных 6 переменных, характеризующих гранулометрический состав угольной шихты.

3. Построение математической модели прогнозирования трудоустройства лиц с ОВЗ и инвалидностью

Выбор профессии является одной из наиболее актуальных проблем, от правильного решения которой зависит благополучие человека. Но особую остроту и значимость эта проблема приобретает для лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) и инвалидностью. Это обусловлено тем, что состояние их физического и психического здоровья сужает круг профессий, и актуализирует пути профессиональной, а, следовательно, и личностной самореализации. Поэтому важно, чтобы профессиональное самоопределение было бы сознательным, соотнесено с возможностями здоровья и требованиями к нему отдельных профессий.

Для активного содействия трудоустройству инвалидов и лиц с ОВЗ на региональном рынке труда в рамках научного гранта при поддержке Правительства Вологодской области был разработан региональный информационно-аналитический портал «ПЕРСПЕКТИВА-PRO».

Уникальной особенностью данного портала является то, что он разделён на большое количество кабинетов: кабинет для самих лиц с ОВЗ и инвалидностью, кабинет для их родителей, кабинет для работодателей, кабинет для сотрудников региональной службы занятости и т.д. То есть, изначально была проведена дифференциация по источнику моделирования.

На 1-м этапе моделирования по результатам опросов и специально разработанных методик на профессиональное самоопределение, был проведен факторный анализ (с помощью метода главных компонент (МГК)) профессионально важных качеств (ПВК) респондентов [4]

В итоге, удалось выделить 3 фактора (главных компоненты), описывающие в общей сложности 69% общей дисперсии. Эти факторы определяют основные направления деятельности, к которым большинство опрошенных респондентов продемонстрировали склонность (см. табл. 1).

На 2-м этапе моделирования, с учетом предпочитаемых сфер деятельности, был проведен кластерный анализ данных с целью типологизации индивидуальных профессиональных профилей инвалидов и лиц с ОВЗ.

Кластерный анализ респондентов реализован с помощью 3-х иерархических методов кластеризации: метода Уорда, метода межгрупповых связей и метода ближайшего соседа, а также с помощью оптимизационного метода кластерного анализа - метода k-средних. В результате, оптимальным оказалось выделение 4-х кластеров.

Таблица 1

Результаты факторного анализа ПВК с помощью МГК

Номер фактора	Название фактора	Объясненная дисперсия фактора, %
1	Ориентация на высокотехнологические сферы деятельности	25.38
2	Ориентация на эколого-медицинские сферы деятельности	23.42
3	Ориентация на художественные и социально-бытовые сферы деятельности	20.27

Таким образом, с помощью кластерного анализа удалось выделить 4 типа учащихся с ОВЗ и инвалидностью:

- 1 кластер "Селективные": доминирующие ПВК личности - умение выбирать нужную информацию из большого объема, зрительная память, эмоциональная сдержанность; предпочитаемые сферы деятельности - медицинская и спортивно-оздоровительная сфера.
- 2 кластер "Креативные": доминирующие ПВК личности - целеустремленность, желание учиться, творческие способности, умение выбирать нужную информацию из большого объема, предлагать и находить нестандартные решения; предпочитаемые сферы деятельности - экономическая сфера, экологическая сфера, художественная сфера, сфера социального обслуживания, педагогическая сфера.
- 3 кластер "Адаптивные": доминирующее ПВК личности - умение работать в команде; предпочитаемая сфера деятельности - производственно-технологическая сфера.
- 4 кластер "Аналитичные": доминирующие ПВК личности - умение планировать свою деятельность; предпочитаемые сферы деятельности - экологическая сфера, управленческая сфера.

Итак, в качестве особенностей обработки гуманитарных данных, можно отметить большое количество номинальных переменных, и, как следствие, применение для их анализа методов факторного и кластерного анализа [3]. В представленном исследовании эти методы дали хороший содержательный результат.

Заключение

В статье рассмотрены проблемы, с которыми столкнулся автор в ходе математического моделирования данных сложного технологического процесса. Уже на 1-м этапе моделирования было принято решение исключить из математической модели ряд переменных, носящих дифференцирующий характер. В этом состояло отличие предложенной модели от всех предыдущих моделей данного процесса, разработанных сотрудниками самого металлургического предприятия, но не принёсших значительного результата.

Кроме того, в ходе моделирования процесса трудоустройства лиц с ОВЗ и инвалидностью, работая с большими количеством номинальных данных, отмечены особенности применения для анализа этих данных методов факторного и кластерного анализа. В результате, получены комплексные и содержательные выводы о специфике трудоустройства лиц с ОВЗ и инвалидностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика. Теория вероятностей и прикладная статистика. Том 1. Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. 656 с.
2. Степанов Е. Н., Смирнов А. Н., Алексеев Д. И. Особенности формирования значимых факторов работы коксовых батарей и оценки технологических параметров угольной шихты // Качество и жизнь. 2017. № 2. С. 63–73.
3. Холлендер М., Вулф Д. Непараметрические методы статистики. Москва: Финансы и статистика, 1983. 518 с.
4. Denisova O., Lekhanova O., Parygina S. Career Guidance of Disabled People in Sustainable Education Content: Research Experience and Development Prospects. In Proceedings of the International Scientific and Practical Conference on Sustainable Development of Regional Infrastructure (ISSDRI 2021). 2021. № 1. P. 601–606.

Парыгина Светлана Александровна — кандидат психологических наук, доцент, доцент кафедры математики и информатики Череповецкого государственного университета. E-mail: saparygina@chsu.ru

ПРОФИЛАКТИЧЕСКОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ СИСТЕМЫ k -ИЗ- n С ЗАВИСИМЫМИ ОТКАЗАМИ. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В. В. Рыков^{1,2,3}, О. Н. Кочуева¹

¹ “Gubkin University”, Leninsky ave., 65, Moscow, 119991, Russia,

² “RUDN University”, Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, 117198, Russia,

³ ИТП RAS, 19, Building 1, B. Karetny Per., Moscow, 127051, Russia.

Профилактическое обслуживание, наряду с резервированием, является одним из основных средств повышения надёжности оборудования, систем и процессов. В работе рассматривается модель профилактического обслуживания (ПО) системы k -из- n в условиях, когда после отказа одной из её компонент нагрузка на остальные увеличивается, что ведёт к изменению в сторону уменьшения их остаточного времени жизни. Рассматриваемая ситуация моделируется в терминах порядковых статистик, а в качестве критерия качества проведения ПО рассматривается коэффициент готовности системы. При этом особое внимание уделяется исследованию чувствительности принятого решения к виду распределения времени безотказной работы (в.б.р.) компонент системы. **Ключевые слова:** системы k -из- n , профилактическое обслуживание, зависимые отказы, функция надёжности, коэффициент готовности.

Введение

Профилактическое обслуживание, наряду с резервированием, является одним из основных средств повышения надёжности оборудования, систем и процессов. Системы k -из- n представляют собой широкий спектр моделей резервирования и находят многочисленные применения в различных областях, включая технические, экономические, биологические, телекоммуникационные и пр. Благодаря широкому спектру применений моделей k -из- n им посвящены многочисленные исследования, обзор которых можно найти, например в [1]. Применение моделей k -из- n к исследованию проблем надёжности систем трубопроводного транспорта можно найти также в [2], [3], [4] и др.

Исследование моделей ПО имеет длинную историю. Достаточно детальный обзор методов и моделей ПО содержится в монографии Герц-

баха [5]. Современные исследования и обзор моделей построения оптимальных стратегий ПО см. в [6].

Так как подробная информация о распределениях времени безотказной работы (в.б.р.) компонент системы обычно недоступна, большое значение для практики имеет исследование чувствительности принимаемых решений к виду этих распределений. Некоторые исследования в этом направлении содержатся в серии наших работ, обзор которых можно найти в [7], главе 9 монографии [8], а также в [9] и [10].

Настоящая работа посвящена исследованию и сравнению стратегий ПО системы k -из- n на основе наблюдения за её состояниями. Особенностью данного исследования является предположение о том, что отказ каждой из компонент системы ведёт к увеличению нагрузки на оставшиеся и к уменьшению их остаточного в.б.р.

Работа организована следующим образом. В следующем разделе приводится постановка задачи и основные обозначения и предположения. Затем в разделе 2 приведены основные результаты - преобразования порядковых статистик и их распределения. В заключении подведены итоги работы и намечены пути дальнейших исследований.

1. Постановка задачи. Обозначения и предположения

Рассмотрим систему k -из- n , которая состоит из n параллельных компонент и отказывает, когда по крайней мере k из них откажут. При этом предполагается, что отказ каждой компоненты приводит к увеличению нагрузки на оставшиеся, что ведёт к уменьшению их остаточного в.б.р. Это изменение моделируется путём умножения остаточного в.б.р. выживших после отказа i -ой компоненты ($i < k$) на некоторый “весовой” коэффициент $w_i < 1$.

Для увеличения надёжности системы предполагается возможность проведения профилактик по наблюдениям за состоянием системы. Обозначим через $\mathcal{L} = \{1, \dots, k\}$ набор возможных стратегий ПО включая стратегию отказа от ПО с последующим проведением ремонта для стратегии с номером $l = k$. Стратегия с номером l для ($l < k$) означает, что ПО начинается, когда система оказывается в состоянии с l отказавшими компонентами. В статье используются следующие основные обозначения и предположения.

- $\mathbf{P}\{\cdot\}$, $\mathbf{E}[\cdot]$ —символы вероятности и математического ожидания (м.о.);
- $A_i : (i = 1, 2, \dots)$ —последовательность в.б.р. компонент системы, которые предполагаются независимыми одинаково распределёнными (н.о.р.) случайными величинами (с.в.) с общей функцией распре-

- деления (ф.р.) $A(t) = \mathbf{P}\{A_i \leq t\}$, плотностью распределения (п.р.) $a(t) = A'(t)$ и конечным м.о. $a = \mathbf{E}[A_i]$;
- $B_i^{(l)}$ ($i = 1, 2, \dots$), ($l \in \mathcal{L}$)—длительности ПО типа l и ремонта для $l = k$, которые предполагаются н.о.р. с.в. с общей ф.р. $B_l(t) = \mathbf{P}\{B_i^{(l)} \leq t\}$ и конечным м.о. $b_l = \mathbf{E}[B_i^{(l)}]$;
 - $E = \{j = \{0, 1, \dots, k\}\}$ —множество состояний системы, где j представляет собой число компонент, находящихся в состоянии отказа;
 - в начальный момент времени система абсолютно исправна, то есть находится в состоянии $j = 0$;
 - после каждого окончания ремонта или проведения ПО система становится как новая, то есть возвращается в нулевое состояние;
 - после отказа i -ой компоненты ($i = \overline{1, k}$) нагрузка на оставшиеся увеличивается, что ведёт к уменьшению их остаточного в.б.р., которое моделируется путём её умножения на некоторый весовой коэффициент w_i ($0 \leq w_i \leq 1$).

Целью работы является сравнение различных стратегий ПО $l \in \mathcal{L}$ по критерию коэффициента готовности $K_{\text{гот.},l}$,

$$K_{\text{гот.},l} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \{\text{время работы системы за время } t \text{ при стратегии } l\}. \quad (1)$$

Для решения поставленной задачи введём случайный процесс $J = \{J(t) : t \geq 0\}$ с пространством состояний E соотношением

$J(t) = j$, если в момент времени t система находится в состоянии $j \in E$.

Заметим, прежде всего, что благодаря нашим предположениям процесс J является регенерирующим при любой из возможных стратегий ПО $l \in \mathcal{L}$. Его моментами регенерации $S_n^{(l)}$ являются моменты окончания ПО или ремонта для $l = k$. Обозначая через Y_l ($l \in \mathcal{L}$) время до начала ПО l -ого типа на отдельном (скажем, первом) периоде регенерации

$$Y_l = \inf\{t : J(t) = l, t \leq S_1^{(l)}\},$$

а через $M_l = \mathbf{E}[Y_l]$ его среднее время из эргодической теоремы для регенерирующих процессов следует, что коэффициент готовности системы представим в виде

$$K_{\text{ав.},l} = \frac{M_l}{\mathbf{E}[S_1^{(l)}]} = \frac{M_l}{\mathbf{E}[Y_l + B_l]} \quad (l = \overline{1, k}). \quad (2)$$

Так как для любой стратегии ПО $l \in \mathcal{L}$, среднее время профилактики (или ремонта для $l = k$) $b_l = \mathbf{E}[B_l]$ предполагается известным, то

для вычисления коэффициента готовности достаточно вычислить только среднее время наработки на периоде регенерации $M_l = \mathbf{E}[Y_l]$. Таким образом путём сравнения коэффициентов готовности для различных стратегий ПО получим критерий качества стратегий.

Теорема 1. l -ая стратегия ПО предпочтительнее j -ой ($l \succ j$) тогда и только тогда, когда

$$\frac{b_l}{b_j} < \frac{M_l}{M_j}. \quad (3)$$

2. Распределение времени до начала ПО или отказа системы

Очевидно, что время до начала l -ого ПО (включая время до отказа системы для $l = k$) является временем до отказа l -ой компоненты, которое, в свою очередь, представляет собой l -ую порядковую статистику $X_i = A_{(i)}$ из выборки n н.о.р. с.в. A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) с данным распределением $A(t)$. Однако, если после отказа каждой из компонент системы нагрузка на оставшиеся компоненты меняется и, следовательно, изменяются их остаточные в.б.р., то необходимо учесть эти изменения путём преобразования порядковых статистик в соответствии с принятым правилом. Для времени Y_l ($l = \overline{1, k}$) до начала ПО (отказа системы для $l = k$) на отдельном периоде регенерации с учётом изменения нагрузки имеет место

Теорема 2. Время до начала ПО l -ого типа для $l < k$ или до отказа системы для $l = k$ является линейной функцией от порядковых статистик и имеет вид

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \quad \text{и для } l = \overline{2, k}, \\ Y_l &= (1 - w_1)X_1 + w_1(1 - w_2)X_2 + \dots + w_1 \dots w_{l-2}(1 - w_{l-1})X_{l-1} + \\ &+ w_1 \dots w_{l-1}X_l. \end{aligned} \quad (4)$$

Для вычисления распределений с.в. Y_l воспользуемся хорошо изученным (см., например, [11]) распределением порядковых статистик. В частности, совместная п.р. $f_l(x_1, \dots, x_l)$ первых l порядковых статистик

$$X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_l \quad (5)$$

из выборки n н.о.р. с.в. A_1, A_2, \dots, A_n с ф.р. $A(x)$ и п.р. $a(x)$ в области $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_l < \infty$ имеет вид

$$f_l(x_1, x_2, \dots, x_l) = \frac{n!}{(n-l)!} a(x_1)a(x_2) \dots a(x_l)(1 - A(x_l))^{n-l}. \quad (6)$$

Для вычисления совместной п.р. $g(\mathbf{y}_l)$ случайного вектора $\mathbf{Y}_l = (Y_1, \dots, Y_l)'$ в терминах вектора $\mathbf{X}_l = (X_1, \dots, X_l)'$ введём для любого

$l \leq k$ матрицу $\mathbf{W}_l = [w_{ij}]$ и вектора $\mathbf{y}_l = (y_1, \dots, y_l)'$, $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_l)'$, где $w_{11} = 1$ и для всех $i = 2, \dots, l$

$$w_{ij} = w_1 w_2 \cdots w_{j-2} (1 - w_{j-1}) \text{ for } j < i, \text{ and } w_{ii} = w_1 \cdots w_{i-1}$$

В этих обозначениях справедлива теорема.

Теорема 3. Совместная п.р. $g(\mathbf{y}_l) = g(y_1, \dots, y_l)$ случайного вектора \mathbf{Y}_l в области $D(\mathbf{y}_l) = \{0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_l < \infty\}$ имеет вид

$$\begin{aligned} g(\mathbf{y}_l) &= g(y_1, \dots, y_l) = \\ &= \frac{n!}{(n-l)!} \prod_{1 \leq j \leq l} \frac{1}{w_{jj}} a \left(\sum_{1 \leq i \leq j} \frac{y_i - y_{i-1}}{w_{ii}} \right) \times \left(1 - A \left(\sum_{1 \leq i \leq l} \frac{y_i - y_{i-1}}{w_{ii}} \right) \right)^{n-l} \end{aligned} \quad (7)$$

Результаты теоремы позволяют вычислять остальные необходимые характеристики модели. В частности, для ф.р. момента начала ПО l -ого типа, $F_l(t) = \mathbf{P}\{Y_l \leq t\}$ справедлива

Теорема 4. Ф.р. $F_l(t)$ момента отказа l -ой компоненты в условиях увеличения нагрузки после отказа предыдущих равна

$$\begin{aligned} F_l(t) &= \frac{n!}{(n-l)!} \int_0^t a(u_1) du_1 \int_{u_2}^{z_2} a(u_2) du_2 \dots \\ &\int_{u_l}^{z_l} a(u_l) (1 - A(u_l))^{n-l} du_l, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$z_i = \frac{t - w_{11}u_1 - \dots - w_{i-1}u_{i-1}}{w_{ii}} \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (9)$$

Трудно ожидать получить аналитическое решение задачи в общем случае. Предполагается разработка вычислительных алгоритмов для её численного решения.

Заключение

В работе представлены первые теоретические результаты для сравнения различных стратегий ПО для модели k -из- n в условиях, когда отказ каждой из компонент системы ведёт к уменьшению остаточных в.б.р. выживших. В настоящее время разрабатываются алгоритмы и программные средства для проведения численных исследований и проверки чувствительности рекомендуемых решений к виду распределений в.б.р. компонент системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Trivedi K. S.* Probability and Statistics with Reliability, Queuing and Computer Science Applications. New York: Wiley, 2002. 848 p.
2. *Rykov V. V., Sukharev M. G., Itkin V. Y.* Investigations of the Potential Application of k-out-of-n Systems in Oil and Gas Industry Objects // J. Mar. Sci. Eng. 2020. Vol. 8. №11. 928.
3. *Rykov V. V., Kochueva O. N., Farkhadov M. P.* Preventive Maintenance of a k-out-of-n System with Applications in Subsea Pipeline Monitoring. // J. Mar. Sci. Eng. 2021. Vol. 9. №1. 85.
4. *Rykov V. V., Kochueva O. N., Rykov Ya. V.* Preventive Maintenance of k-out-of-n System with respect to Cost-type Criterion. // Mathematics. 2021. Vol. 9. №21. 2798.
5. *Герцбах И. Б.* Теория надёжности с приложениями к профилактическому обслуживанию. М.: Нефть и газ, 2003. 263 с.
6. *Finkelstein M., Cha J. H., Levitin G.* On a new age-replacement policy for items with observed stochastic degradation. // Quality and Reliability Engineering International. 2020. Vol. 3. P. 1132–1146.
7. *Kozyrev D., Kolev N., Rykov V.* Reliability Function of Renewable System under Marshall-Olkin Failure Model. // Reliability: Theory and Applications. 2018. Vol. 13, №1(48). P. 39–46.
8. *Rykov V. V.* On Reliability of Renewable Systems // In Reliability Engineering. Theory and Applications (Eds. by Ilia Vonta and Mangey Ram) CRC Press. 2018. P. 173–196.
9. *Rykov V. V., Kozyrev D. V.* On the reliability function of a double redundant system with general repair time distribution // Applied Stochastic Models in Business and Industry. 2019. Vol. 35. № 2. P. 191–197.
10. *Rykov V. V., Kozyrev D. V., Filimonov A. M., Ivanova N. M.* On reliability function of a k-out-of-n system with general repair time distribution // Probab. Eng. Inform. Sci. 2020. Vol. 35. P. 885–902.
11. *Дэйвид Г.* Порядковые статистики. М.: Наука. Физматгиз, 1979. 336 с.

Рыков Владимир Васильевич — д.ф.-м.н., профессор, профессор, кафедра ПМиКМ. E-mail: vladimir_rykov@mail.ru

Кочуева Ольга Николаевна — к.т.н., доцент, доцент, кафедра ПМиКМ. E-mail: kochueva.o@mail.ru

РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА НА ОСНОВЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ НЕЯВНОЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ С НАСЫЩЕНИЕМ И ПАМЯТЬЮ

Д. А. Твёрдый, Р. И. Паровик

*Институт космических исследований и распространения радиоволн
ДВО РАН, с. Паратунка, Россия*

Основной задачей этой статьи является разработка эффективных параллельных численных алгоритмов для решения задач дробной динамики, в частности дробной модели процессов насыщения. Использовалось модельное уравнение Риккати с переменными коэффициентами и с производной дробного порядка типа Герасимова-Капуто. Для предложенного нелинейного уравнения рассмотрена задача Коши которая решена численно с помощью нелокальной неявной конечно-разностной схемы. За счёт оптимизации численных схем решения поставленной задачи и распараллеливания их с помощью технологии OpenMP на суперкомпьютере при ИМ им. В.И. Романовского АН РУз был получен существенный прирост производительности, по сравнению с последовательной версией программы. **Ключевые слова:** *память, насыщение, численные методы, неявная схема, параллелизм, OpenMP.*

Введение

В настоящей работе был разработан параллельный вариант численного алгоритма, основанного на нелокальной неявной конечно-разностной схеме для решения задачи Коши, которая описывает процесс с насыщением и учета эффекта памяти [1]. Использование дробного уравнения Риккати может иметь ряд приложений, как в случае постоянно порядка дробности, так при переменном порядке дробности [2].

Распараллеливание численного алгоритма проводилось с помощью технологии OpenMP на 20-ти ядерном процессоре на языке программирования C. Тестовые примеры показали, что параллельная реализация численного алгоритма может давать существенный прирост производительности в сравнении с последовательной реализацией.

Работа выполнена при поддержке гранта № 22-11-00064 по теме "Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности".

1. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную задачу, которая представлена дифференциальной задачей Коши для уравнения Риккати с переменными коэффициентами вида:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{x}(\sigma)}{(t-\sigma)^{\alpha(t)}} d\sigma + a(t)x^2(t) - b(t)x(t) - c(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(t) \in C^2[0, T]$ – функция решения, x_0 – заданная константа, $t \in [0, T]$ – текущее время, T – модельное время, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ – непрерывные функции, $\alpha(t) \in C^1(0, 1)$ – показатель производной дробного переменного порядка [1] типа VO Герасимова–Капуто, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

2. Методика решения, численная схема и модифицированный метод Ньютона

Полагаем сетку дискретизации – равномерной, следовательно разделим на N узлов сетки отрезок $[0, T]$ в равных частях с шагом дискретизации $h = T/N$. В итоге $x(t) \in C^2[0, T]$ – функция решения, на сетке, примет вид сеточного аналога $x(t_k)$ или x_k , где $k = 1, \dots, N$. Аналогично и функция $0 < \alpha(t) < 1$ перейдёт в $\alpha(t_k)$ или α_k . Аналогичным образом это верно и для $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ – заданных непрерывных функций уравнения Риккати на отрезке $[0, T]$.

По аналогии со статьёй [3], аппроксимацию производной VO Герасимова–Капуто в уравнении в (1) можно записать так:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha(t)} x(\sigma) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{x}(\sigma) d\sigma}{(t-\sigma)^{\alpha(t)}} \approx A_k \sum_{j=0}^{k-1} w_j^k (x_{k-j} - x_{k-j-1}), \\ A_k &= \frac{\tau^{-\alpha_k}}{\Gamma(2-\alpha_k)}, \quad w_j^k = (j+1)^{1-\alpha_k} - j^{1-\alpha_k}. \end{aligned} \quad (2)$$

аппроксимация оператора (2) VO Герасимова–Капуто в (1) выведена и подробно описана в [1] и исследован вопрос порядка аппроксимации VO оператора ($\tau^{2-\hat{\alpha}}$, $\hat{\alpha} = \max_k(\alpha(t_k))$).

Тогда подстановкой (2) в (1), перейдём от дифференциальной постановки задачи Коши к её дискретному аналогу, представленной в виде

нелокальной неявной конечно-разностной схемы (IFDS):

$$A_k \sum_{j=0}^{k-1} w_j^k (x_{k-j} - x_{k-j-1}) + a_k x_k^2 - b_k x_k - c_k = 0, \quad (3)$$

$$k = 1, \dots, N, \quad x_0 = C.$$

где C - константа, не зависящая от h .

В работе [1] так же исследованы вопросы сходимости и устойчивости нелокальной неявной конечно-разностной схемы для дискретной задачи Коши (3). Показано, что нелокальная IFDS безусловно устойчива, и сходится с порядком точности $(2 - \hat{\alpha})$.

В качестве метода решения (3) используется Модифицированный метод Ньютона (MNM) [4], который для IFDS локально устойчив и сходится с первым порядком, согласно [1]. Дискретный аналог задачи Коши (1) в виде итерационной функции метода имеет вид:

$$F(x_k) = A_k \sum_{j=0}^{k-1} w_j^k (x_{k-j} - x_{k-j-1}) + a_k x_k^2 - b_k x_k - c_k, \quad (4)$$

согласно которой, составим итерационный процесс:

$$X^{m+1} = X^m - \frac{F(X^m)}{J(X^0)}, \quad (5)$$

где матрица Якоби $J(X^0) = (J_{ij}), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N$ имеет вид:

$$J_{ij} = \begin{cases} 0, & j \geq i + 1, \\ A_i - b_i + 2a_i u_i^0, & j = i, \\ A_i (\omega_{i-j}^i - \omega_{i-j-1}^i), & j \leq i - 1. \end{cases} \quad (6)$$

3. Параметры моделирования

Рассмотрим дискретную задачу (3) со следующими параметрами:

- $\alpha(t) = 0.9 - 0.1t/T$ - переменный порядок дробности, монотонно убывающая функция;
- $a(t) = \cos^2(t)/T, b(t) = 1 - 0.1t/T, c(t) = \sin^2(t)/T$ - коэффициенты уравнения, гладкие функции;
- $x(0) = 0.9$ - начальное условие;
- $N = 2000$ - число узлов, $T = 20$ - время, $h = 0.01$ - шаг.

4. Программная реализация

Для решения задачи разработки эффективного параллельного численного алгоритма, в качестве языка программирования выберем язык С, т.к. для него реализована технология OpenMP – стандарт программного интерфейса приложений для параллельных систем с общей памятью. Данный стандарт реализован для языков программирования Fortran и C/C++ и состоит из набора директив для компиляторов, библиотек функций и набора переменных окружения [5].

Рассматриваемый далее пример задачи расчёта дробной модели процесса с насыщением, численно реализуемый нелокальной неявной конечно-разностной схемой (3), будем реализовывать 2-мя способами: последовательным и параллельным алгоритмом.

Для решения схемы (3) IFDS используется модифицированный метод Ньютона (4)–(6), а в качестве начальной итерации можно взять последнее решение $x(N)$ – полученное по EFDS (нелокальной явной конечно-разностной схеме), согласно той же работе [1]. Такое приближение позволяет немного быстрее методу MNM сойтись к решению с заданой точностью, а в данном примере возьмём точность $\varepsilon = 0.0001$.

Решение EFDS так же потребует затрат памяти, и данную операцию нужно провести в самом начале алгоритма IFDS, что бы успеть освободить RAM память для работы самого алгоритма IFDS. Причем последовательная версия IFDS обращается так же к последовательной EFDS, аналогично и параллельные алгоритмы.

IFDS схема потребует большего времени на расчет чем параллельный EFDS алгоритм, но IFDS сходится безусловно. Матрицу Якоби *Jacobian* вычисляем по формуле 6. Однако основную массу расчетов будет занимать процесс обращения матрицы. Согласно итерационной процедуре (5) необходимо знать $\frac{1}{J(X^0)}$ т.е. обратную матрицу к $J(X^0)$, значения которой определяются как:

$$\widetilde{J}_{ij} = \frac{1}{J(X^0)} = \begin{cases} 0, j \geq i + 1, \\ \frac{1}{J_{ij}}, j = i, \\ -\frac{1}{J_{ii}} \left(\sum_{s=0}^{i-1} \widetilde{J}_{sj} \widetilde{J}_{is} \right), j \leq i - 1. \end{cases} \quad (7)$$

т.е. значения в строке независимы друг от друга, но зависимы от уже вычисленных значений в столбцах обратной матрицы расположенных выше. Это можно представить в 3 этапа, как показано в алгоритме 1:

- 1) заполним выделенную под квадратную матрицу *Jacobian_inv* память нулями в одной параллельной области;

- 2) вычислим элементы гл. диагонали, в другой параллельной области;
- 3) вычислим элементы из нижнетреугольной области согласно (7), для чего в цикле последовательно для каждой строки объявим параллельную область, где каждому потоку согласно *schedule(static)* выдадим под расчет равное количество элементов.

5. Алгоритм для OpenMP

Алгоритм 1. Алгоритм обращения нижнетреугольной матрицы

```

1: #pragma omp parallel shared(Jacobian_inv) {
2: #pragma omp for schedule(static) nowait
3: для  $i = 0$  to  $i \leq N - 1$ 
4:   для  $j = 0$  to  $j \leq N - 1$ 
5:     Jacobian_inv[i][j] = 0.0;
6: #pragma omp for schedule(static) nowait
7: для  $i = 0$  to  $i \leq N - 1$ 
8:   Jacobian_inv[i][i] = 1 / Jacobian[i][i];}
9: для  $i = 0$  to  $i \leq N - 1$ 
10: #pragma omp parallel shared(Jacobian_inv) {
11:   #pragma omp for schedule(static) nowait
12:   для  $j = 0$  to  $i > j$ 
13:     sum[j] = 0;
14:     для  $s = 0$  to  $s \leq i - 1$ 
15:       sum[j] += Jacobian_inv[s][j] * Jacobian[i][s];
16:       Jacobian_inv[i][j] = (- 1 / Jacobian[i][i]) * sum[j];}

```

6. Замеры производительности

Таблица 1

Время в сек. для расчёта последовательного и OpenMP алгоритмов

i	Notebook		SuperPC				
	$T_1(N)$	$T_6(N)$	$T_1(N)$	$T_6(N)$	$T_{17}(N)$	$T_{28}(N)$	$T_{39}(N)$
1	96.74	30.06	98.2	21.32	7.86	11.06	8.3
2	88.58	30.28	97.24	21.26	8.0	10.86	8.3
3	94.07	29.09	98.02	21.37	7.86	10.78	7.46
4	97.04	30.67	97.71	21,2	7.9	11.02	8.37
5	91.13	30.25	97.38	20.86	8.19	10.93	8.35

Заключение

В исследовании было проведено эффективное распараллеливание численного алгоритма MNM на основе нелокальной IFDS, на языке C с применением технологии OpenMP. Для задач моделирования процессов с насыщением и памятью, на основе уравнения Риккати с переменными коэффициентами и с производной дробного переменного порядка типа Герасимова-Капуто.

Для проведения тестирования разработанные алгоритмы запускались на следующих ЭВМ ноутбуке с 8 потоковым процессором и суперкомпьютере при ИМ им. В.И. Романовского АН РУз с 40 потоковым процессором. Был проведён анализ времён вычисления предложенных численных алгоритмов на основе нелокальной IFDS, в результате показан прирост производительности в 10 раз уже при использовании 17 из 40 потоков суперкомпьютера. Остальные 22 потока использовались не эффективно, как видно из таблицы. В дальнейшем их можно использовать для запуска других копий алгоритма, на основе принципов вложенного параллелизма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tverdyi D. A., Parovik P. I.* Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation // *Fractal and Fractional*. 2022. Vol. 6(1). № 23. P. 1–27.
2. *Tverdyi D. A., Parovik P. I.* Application of the Fractional Riccati Equation for Mathematical Modeling of Dynamic Processes with Saturation and Memory Effect // *Fractal and Fractional*. 2022. Vol. 6(3). № 163. P. 1–35.
3. *Sun H., et al.* Finite difference schemes for variable-order time fractional diffusion equation // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2012. Vol. 04. № 22. P. 1250085.
4. *Torres-Hernandez A., et al.* Fractional Newton–Raphson Method Accelerated with Aitken’s Method // *Axioms*. 2021. Vol. 2. № 10. P. 47.
5. *Борзунюв С. В., Кургалин С. Д., Флегель А. В.* Практикум по параллельному программированию: учебное пособие. Санкт-Петербург: БХВ, 2017. 236 с.

Твёрдый Дмитрий Александрович — К.ф.-м.н., Ведущий программист, Лаборатория электромагнитных излучений. E-mail: dimsolid95@gmail.com

Паровик Роман Иванович — Д.ф.-м.н., Профессор, Ведущий научный сотрудник, Лаборатория моделирования физических процессов. E-mail: romanparovik@gmail.com

ЭКОНОМИЧНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ПЛОТНОСТИ ПО ЗАДАННОЙ ВЫБОРКЕ

А. В. Войтишек^{1,2}, Н. Х. Шлымбетов²

¹ *Институт вычислительной математики и математической геофизики
СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

² *Национальный исследовательский Новосибирский государственный
университет, г. Новосибирск, Россия*

В данной работе приведена новая классификация вычислительных (компьютерных) алгоритмов приближения вероятностной плотности по заданной выборке, в которой ядерные и проекционные функциональные алгоритмы представлены в качестве обобщений многомерного аналога полигона частот.

Ключевые слова: *приближение вероятностной плотности, вычислительный функциональный ядерный алгоритм, вычислительный функциональный проекционный алгоритм, многомерный аналог полигона частот.*

1. Задача оперативной обработки больших данных

При обработке больших данных (в частности, при применении технологий машинного обучения) актуальной оказывается следующая задача, сформулированная в работах [1–6].

ЗАДАЧА. *По заданной выборке*

$$\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \quad (1)$$

построить численное приближение неизвестной плотности $f_{\xi}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^d$ случайной величины (вектора) $\xi \in X$ с заданным уровнем погрешности и с наименьшими вычислительными затратами.

2. Компьютерное приближение вероятностной плотности

В работах [1–6] для решения сформулированной задачи предлагается использовать следующие вычислительные конструкции из теории функциональных алгоритмов метода Монте-Карло [7, 8].

Исследования выполнены в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (0251–2021–0002).

В первую очередь используются классические конструкции *теории численного (компьютерного) приближения функций* (см., например, главы 2 и 4 книги [9]) вида

$$f_{\xi}(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^M w^{(i)} [\mathbf{f}_{\xi}^{(M)}] \hat{\chi}^{(i)}(\mathbf{x}), \quad (2)$$

где $\hat{\chi}^{(M)} = \{\hat{\chi}^{(1)}(\mathbf{x}), \dots, \hat{\chi}^{(M)}(\mathbf{x})\}$ – заданный набор функций (*аппроксимационный базис*), определенным образом связанный с введенной в области X сеткой $\mathbf{Y}^{(M)} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_M\}$ (чаще всего – равномерной), а $\mathbf{W}^{(M)} = \{w^{(1)} [\mathbf{f}_{\xi}^{(M)}], \dots, w^{(M)} [\mathbf{f}_{\xi}^{(M)}]\}$ – набор аппроксимационных коэффициентов, являющихся комбинациями значений приближаемой функции $f_{\xi}(\mathbf{x})$ в узлах сетки $\mathbf{Y}^{(M)}$: $\mathbf{f}_{\xi}^{(M)} = \{f_{\xi}(\mathbf{y}_1), \dots, f_{\xi}(\mathbf{y}_M)\}$.

В диссертации [6], книгах [7, 8] (см. также классическую работу [10]) сформулирован целый ряд убедительных аргументов (необходимость приближенного вычисления значений $\mathbf{f}_{\xi}^{(M)}$, соображения *теории условной оптимизации функциональных алгоритмов* [5–8]) в пользу применения в качестве $\hat{\chi}^{(M)}$ аппроксимационного базиса т. н. *мультилинейного восполнения*, состоящего из функций вида

$$\hat{\chi}^{(i)}(\mathbf{x}) = \chi^{(i)}(\mathbf{x}) = b \left[\frac{x^{(1)}}{h} - j_i^{(1)} \right] \times \dots \times b \left[\frac{x^{(d)}}{h} - j_i^{(d)} \right], \quad (3)$$

где $b(u) = \begin{cases} u + 1 & \text{при } -1 \leq u \leq 0; \\ -u + 1 & \text{при } 0 \leq u \leq 1; \\ 0 & \text{при } |u| > 1 \end{cases}$ и $\mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)})$, для равномерной сетки $\mathbf{Y}^{(M)}$ с шагом $h > 0$ вида

$$\mathbf{y}_i = (j_i^{(1)} h, \dots, j_i^{(d)} h); \quad j_i^{(k)} \text{ – целые числа} \quad (4)$$

в прямоугольной ограниченной области $X \subset \mathbb{R}^d$.

Одним из весомых аргументов из [6–8, 10] в пользу применения базиса (3) является то, что в представлении (2) можно (и даже целесообразно) использовать простейший вид коэффициентов $\mathbf{W}^{(M)}$:

$$w^{(i)} [\mathbf{f}_{\xi}^{(M)}] = f_{\xi}(\mathbf{y}_i); \quad i = 1, \dots, M. \quad (5)$$

Следуя рекомендациям из [6–8, 10], в данной работе мы будем использовать приближение (2) в виде мульти-линейного восполнения:

$$f_{\xi}(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^M f_{\xi}(\mathbf{y}_i) \chi^{(i)}(\mathbf{x}). \quad (6)$$

Следующее, что нужно учесть при решении задачи оперативной обработки больших данных из раздела 1, это то, что, в отличие от постановок теории численного приближения функций (см., например, главы 2 и 4 книги [9]), значения (коэффициенты) (5) не заданы; их требуется приближать по заданной выборке (1).

Имеется два основных способа приближения значения плотности $f_{\xi}(\mathbf{x})$ в заданной точке $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{y}}$ по заданной выборке (1).

Первый способ – использование *ядерной (точечной) статистической оценки плотности*

$$f_{\xi}(\hat{\mathbf{y}}) \approx \tilde{f}_{\xi}^{(\hat{\mathbf{y}}, ker)}(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \kappa^{(\hat{\mathbf{y}})}(\xi_j) \quad (7)$$

(см., например, [11]); здесь $\kappa^{(\hat{\mathbf{y}})}(\mathbf{z})$ – специально выбираемая ядерная функция, такая, что $f_{\xi}(\hat{\mathbf{y}}) \approx \int_X f_{\xi}(\mathbf{z}) \kappa^{(\hat{\mathbf{y}})}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \mathbf{E} \kappa^{(\hat{\mathbf{y}})}(\xi)$.

Второй способ приближения значения $f_{\xi}(\hat{\mathbf{y}})$ – использование *проекционной (точечной) статистической оценки плотности*

$$f_{\xi}(\hat{\mathbf{y}}) \approx \tilde{f}_{\xi}^{(\hat{\mathbf{y}}, pr)}(n, K) = \sum_{k=1}^K \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \psi^{(k)}(\xi_j) \right] \psi^{(k)}(\hat{\mathbf{y}}) \quad (8)$$

(см., например, [12]); здесь $\Psi^{(K)} = \{\psi^{(1)}(\mathbf{y}), \dots, \psi^{(K)}(\mathbf{y})\}$ – подмножество бесконечной ортонормированной системы функций $\Psi^{(\infty)} = \{\psi^{(1)}(\mathbf{y}), \psi^{(2)}(\mathbf{y}), \dots\}$ такой, что $\int_X \psi^{(i)}(\mathbf{y}) \psi^{(j)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$ при $i = j$ и $\int_X \psi^{(i)}(\mathbf{y}) \psi^{(j)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0$ при $i \neq j$ и $f_{\xi}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E} \psi^{(k)}(\xi) \psi^{(k)}(\mathbf{x})$.

3. Ядерный и проекционный алгоритмы приближения вероятностной плотности

Приближения (6), (7), (8) дают следующие два вычислительных (компьютерных) алгоритма приближения вероятностной плотности $f_{\xi}(\mathbf{x})$ по заданной выборке (1).

АЛГОРИТМ 1 ([1–6], *вычислительный функциональный ядерный алгоритм приближения вероятностной плотности*).

Приближаем значения $\mathbf{f}_{\xi}^{(M)}$ по формуле (7): $f_{\xi}(\mathbf{y}_i) \approx \tilde{f}_{\xi}^{(\mathbf{y}_i, ker)}(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \kappa^{(\mathbf{y}_i)}(\xi_j)$; $i = 1, \dots, M$ (здесь $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ – заданная выборка (1)) и строим окончательную аппроксимацию плотности $f_{\xi}(\mathbf{x})$:

$$f_{\xi}(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^M \tilde{f}_{\xi}^{(\mathbf{y}_i, ker)}(n) \chi^{(i)}(\mathbf{x}).$$

АЛГОРИТМ 2 (вычислительный функциональный проекционный алгоритм приближения вероятностной плотности). Приближаем значения $\mathbf{f}_{\xi}^{(M)}$ по формуле (8): $f_{\xi}(\mathbf{y}_i) \approx \tilde{f}_{\xi}^{(\mathbf{y}_i, pr)}(n, K) = \sum_{k=1}^K \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \psi^{(k)}(\xi_j) \right] \psi^{(k)}(\mathbf{y}_i)$; $i = 1, \dots, M$ и строим окончательную аппроксимацию плотности $f_{\xi}(\mathbf{x})$:

$$f_{\xi}(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^M \tilde{f}_{\xi}^{(\mathbf{y}_i, pr)}(n, K) \chi^{(i)}(\mathbf{x}).$$

Особо отметим, что вычислительный функциональный проекционный алгоритм приближения вероятностной плотности по заданной выборке (алгоритм 2) представлен в этой работе впервые.

4. Многомерный аналог полигона частот, как частный случай ядерного и проекционного алгоритмов

Рассмотрим важный случай, когда ядерная функция $\kappa^{(\hat{\mathbf{x}})}(\mathbf{z})$ выбирается в виде

$$\kappa^{(\hat{\mathbf{x}})}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{I}^{(\Delta^{(\hat{\mathbf{x}})})}(\mathbf{z})}{h^d}; \quad \mathbf{I}^{(A)}(\mathbf{z}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mathbf{z} \in A, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

$\Delta^{(\hat{\mathbf{x}})} = \{\mathbf{z} = (z^{(1)}, \dots, z^{(d)}) : x^{(s)} - h/2 \leq z^{(s)} < x^{(s)} + h/2; s = 1, \dots, d; \mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)})\}$ (здесь $\mathbf{I}^{(A)}(\mathbf{z})$ – индикатор множества A) и одновременно функции $\Psi^{(\infty)}$ имеют вид

$$\psi^{(i)}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{I}^{(\Delta^{(\mathbf{y}_i)})}(\mathbf{z})}{h^d}$$

для всевозможных точек $\{\mathbf{y}_i\}$ вида (4). В этом случае алгоритмы 1 и 2 совпадают и дают следующую известную вычислительную схему.

АЛГОРИТМ 3 ([1–6], многомерный аналог полигона частот). Приближаем значения $\mathbf{f}_{\xi}^{(M)}$ по формулам $f_{\xi}(\mathbf{y}_i) \approx \tilde{f}_{\xi}^{(\mathbf{y}_i, pol)}(n) =$

$\frac{1}{nh^d} \sum_{j=1}^n \mathbf{I}^{(\Delta^{(y_i)})}(\xi_j)$; $i = 1, \dots, M$ (здесь $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ – заданная выборка (1)) и строим окончательную аппроксимацию плотности $f_{\xi}(\mathbf{x})$:

$$f_{\xi}(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^M \tilde{f}_{\xi}^{(y_i, pol)}(n) \chi^{(i)}(\mathbf{x}).$$

Экономичность алгоритмов 1–3 определяется специальным выбором параметров n (число заданных выборочных значений (1)) и M (число узлов сетки $\mathbf{Y}^{(M)}$), обеспечивающих решение задачи оперативной обработки больших данных из раздела 1 (для алгоритмов 1 и 2 для выбора добавляются: вид ядерной функции $\varkappa^{(y)}(\mathbf{z})$ и/или вид и число K используемых специальных ортонормированных функций $\Psi^{(K)}$).

5. Заключение

В данной работе приведена новая классификация вычислительных (компьютерных) алгоритмов приближения вероятностной плотности по заданной выборке, в которой известный ядерный и новый проекционный функциональные алгоритмы 1 и 2 представлены в качестве обобщений широко используемого многомерного аналога полигона частот (алгоритма 3 из [1–6]).

Особо отметим, что и с точки зрения решения сформулированной выше задачи оперативной обработки данных (конкретнее, при использовании разработанной нами теории условной оптимизации компьютерных стохастических функциональных алгоритмов [5–8]), и с точки зрения практической реализации алгоритмов (конкретнее, при подсчете аппроксимационных коэффициентов) многомерный аналог полигона частот имеет ряд принципиальных преимуществ по сравнению с ядерным и проекционным алгоритмами. Последнее обстоятельство требует отдельного подробного обоснования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булгакова Т. Е., Войтишек А. В. Сравнительный анализ функционального «ядерного» алгоритма и метода полигона частот // Труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» (ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, 1–5 июля 2019 года). Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2019. С. 65–71.
2. Булгакова Т. Е., Войтишек А. В. Критерии оптимизации «ядерного» алгоритма приближения вероятностной плотности // Труды XV Международной Азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем» (26–30 августа 2019 года, Российская федерация, Новосибирск). Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2019. С. 15–23.

3. *Voytishchek A. V., Bulgakova T. E.* On conditional optimization of «kernel» estimators of densities // Proceedings of the Fifth International Workshop «Applied Methods of Statistical Analysis. Statistical Computation and Simulation» (Novosibirsk, Russia, 18-20 September, 2019). Novosibirsk: NSTU publisher, 2019. P. 152–159.
4. *Voytishchek A. V., Bulgakova T. E.* Optimization of kernel estimators of probability densities // Jacimovic M., Khachay M., Malkova V., Posypkin M. (eds). Optimization and Applications. OPTIMA 2019. Communications in Computer and Information Science. 2020. Vol. 1145. P. 254–266.
5. *Булгакова Т. Е., Войтишек А. В.* Условная оптимизация функционального вычислительного ядерного алгоритма приближения вероятностной плотности по заданной выборке // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61, № 9. С. 29–44.
6. *Булгакова Т. Е.* Оптимизация функциональных вычислительных статистических оценок и алгоритмов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук / ИВМиМГ СО РАН. Новосибирск, 2020. 170 с.
7. *Михайлов Г. А., Войтишек А. В.* Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Изд. центр «Академия», 2006. 368 с.
8. *Войтишек А. В.* Функциональные оценки метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2007. 76 с.
9. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. М.: Наука, 1975. 632 с.
10. *Voytishchek A. V., Kablukova E. G.* Using the approximation functional bases in Monte Carlo methods // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2003. Vol. 18, № 6. P. 521–542.
11. *Епанечников В. А.* Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятностей и ее применения. 1969. Т. 14. № 1. С. 156–161.
12. *Ченцов Н. Н.* Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М.: Наука, 1972. 520 с.

Войтишек Антон Вацлавович — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории стохастических задач ИВМиМГ СО РАН, профессор кафедры вычислительной математики НГУ. E-mail: vav@osmf.sscc.ru

Шлымбетов Нурлыбай Хамдуллаевич — аспирант механико-математического факультета НГУ. E-mail: n.shlymbetov@g.nsu.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК УГЛОВОЙ ФРЕЗЕРНОЙ ГОЛОВКИ

К. И. Шлаев, Ф. С. Сабиров

*Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»,
г. Москва, Россия*

В настоящее время применяемое на предприятиях оборудование не всегда может обеспечить выполнение требуемых операций для обработки деталей сложной формы. Отсутствие достаточного количества управляемых координат на станках вынуждает использовать различные приспособления для крепления заготовки под необходимым углом. Это приводит к снижению точности обработки и потере времени. Эту проблему решает применение вспомогательной оснастки – навесных головок. Однако, устанавливая на станок такую оснастку, в ее несущую систему добавляется еще один узел, обладающий массой, податливостью и содержащий стыки между деталями. Все эти факторы оказывают влияние на динамические характеристики станка и, как следствие, на ее надежность. Так же на надежность станка напрямую влияет техническое состояние применяемой оснастки. Учитывая, что планово-предупредительное техническое обслуживание станков экономически нецелесообразно, актуальным является техническая диагностика состояния вспомогательного оборудования. **Ключевые слова:** *угловая фрезерная головка, математическое моделирование, метод конечных элементов.*

Введение

В настоящей работе рассмотрено применение метода конечных элементов (КЭ) для моделирования угловых фрезерных головок с фиксированным углом поворота.

Общие положения

Модель угловой головки описывается матричным уравнением

$$[A]\{q''\} + [B]\{q'\} + [C]\{q\} = \{D\} \quad (1)$$

где $[A]$, $[B]$, $[C]$ – соответствующие матрицы инерции, демпфирования и жесткости системы угловой головки, $\{q\}$ и $\{D\}$ – соответственно

векторы обобщенных координат системы и действующих на нее сил. Решая уравнение можно получить перемещения системы под действием на нее возмущающих сил. Расчетная схема угловой головки показана на рисунке 1. В состав схемы входят 7 массивов (точки I, II, III, IV, V, VI, VII), 3 стержня (точки 5-6, 14-15, 17-18) и 11 упруго-вязких стыков (точки 1-2, 3-4, 5-19, 6-20, 7-8, 9-10, 11-12, 12-22, 13-14, 16-17, 18-21). Динамическая система угловой фрезерной головки рассматривается как пространственная [1]. Ее движение описывается вектором

$$\{q\} = \{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6 q_7 q_8 q_9 q_{10} q_{11} q_{12} q_{13} q_{14}\}^T \quad (2)$$

где $\{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6 q_7 q_8 q_9 q_{10} q_{11} q_{12} q_{13} q_{14}\}^T$ - векторы обобщенных перемещений узловых точек «массивов» и «стержней». Решение задачи начинается с построения несвязной матрицы жесткости системы СС [4] для 14 конечных элементов (номера указаны внутри кружков). Для по-

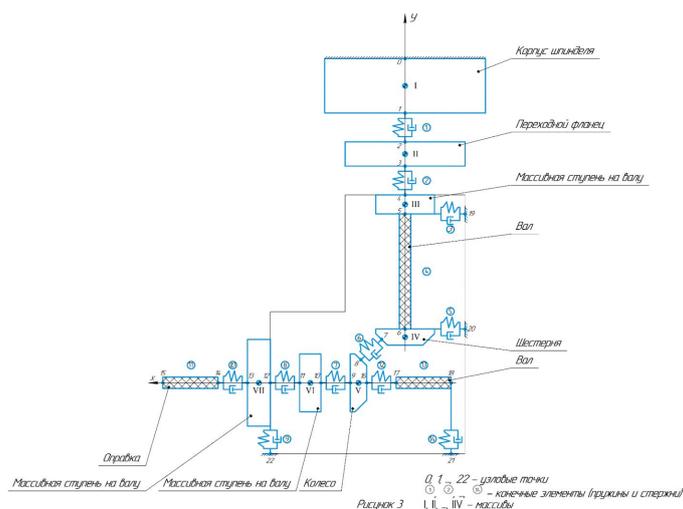


Рис. 1. Расчетная схемы угловой фрезерной головки

лучения матрицы жесткости [С] необходимо связать элементы [1]. Для этого составим матрицу соединений, используя условия непрерывности перемещений в узлах конструкции (рисунок 2). Обычно, матрица соединений является булевой и имеет ненулевые элементы, равные единице. При появлении «массивов» узловые точки в общем случае не совпадают с граничными точками КЭ. В этом случае матрица соединений уже

не является булевой и отражает особенности соединения «массивов» и упругих КЭ системы.

$$[CC]=$$

C ¹	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	C ²	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	C ³	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	C ⁴	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	C ⁵	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	C ⁶	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	C ⁷	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	C ⁸	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	C ⁹	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	C ¹⁰	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C ¹¹	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C ¹²	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C ¹³	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C ¹⁴	0	0	0	0	0

Рис. 2. Матрица жесткости

Матрица соединений $[G]$ для решаемой задачи будет иметь вид, представленный на рисунке 3:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	E*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	E*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	A _{2,3}	E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	A _{3,4}	E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	A _{3,5}	0	E	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	A _{4,6}	0	E	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	A _{4,7}	0	0	E	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	A _{5,8}	0	0	E	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	A _{5,9}	0	0	0	E	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	A _{6,10}	0	0	0	E	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	A _{6,11}	0	0	0	E	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	A _{7,12}	0	0	0	E	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	A _{7,13}	0	0	0	0	E	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	E
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	A _{5,16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 3. Матрица соединений

где $\{q'\} = \{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6 q_7 q_8 q_9 q_{10} q_{11} q_{12} q_{13} q_{14} q_{15} q_{16} q_{17} q_{18}\}^T$ – вектор обобщенных перемещений граничных точек КЭ системы. Каждому векторному компоненту вектора $\{q'\}$ можно по порядку сопоставить соответствующую блочную строку матрицы, а каждому векторному компоненту вектора $\{q\}$ – соответствующий блочный столбец в $[G]$. Против блочных строк матрицы $[G]$ стоят числа, равные номерам граничных точек упругих КЭ схемы по порядку (или номерам соответствующих векторных компонентов вектора $\{q'\}$), а против блочных столбцов матрицы $[G]$ – числа, равные номерам узловых точек схемы (или номерам векторных компонентов в $\{q\}$). При формировании инерционной матрицы $[A]$ динамической системы также приходится учитывать наличие в расчетной схеме одновременно упругих конечных элементов с распределенной массой («стержней») и «массивов», инерционные характеристики которых сосредоточены в точках I-IV [2]. Инерционная матрица $[A]$ системы представляется в виде суммы:

$$[A] = [Ap] + [Ac] \quad (3)$$

где $[Ap] = [G]_T [AA] [G]$ формируется подобно $[C]$ из несвязанной инерционной матрицы $[AA]$ с помощью матрицы соединений $[G]$. Матрица $[AA]$ формируется аналогично матрице $[CC]$. Матрица $[Ac]$ формируется как блочно – диагональная с размещением матриц $[Ai]$ [1] в местах, соответствующих «массивам» расчетной схемы (рисунок 4):

$$[Ac] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline A_I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_{II} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{III} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_{IV} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & A_V & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{VI} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{VII} \\ \hline \end{array}$$

Рис. 4. Матрица A_c

Матрица демпфирования элемента $[B]$ по своей структуре аналогична соответствующей матрице жесткости $[C]$. За основную характеристику демпфирования при динамическом расчете принято относительное рассеивание энергии колебаний a (коэффициент поглощения), равное отношению рассеиваемой за цикл колебаний работы a к потенциаль-

ной энергии колебаний P . Другими характеристиками демпфирующих свойств колебательных систем является логарифмический декремент затухания колебаний v , коэффициент потерь n и коэффициент демпфирования (коэффициент относительного рассеивания) c . Для рассматриваемой схемы примем $a = 2v$. Тогда $n = a/2p = v/p$. Коэффициент демпфирования будет определяться как $c = v/2p$. Собственная частота демпфирования системы с одной степенью свободы: $w = w_k (1 - c^2)^{0.5}$, где w_k собственная частота системы без учета демпфирования. Учитывая вышесказанное, матрицу демпфирования $[B]$ найдём по формуле:

$$[B] = 2[A][V]diag[c_k w_k][V]^{-1} \quad (4)$$

Промежуточные расчеты и построение матрицы $[V]$ приведены в [3]. Для оценки результатов, полученных при моделировании, была проведена серия экспериментальных исследований. Объектом исследования являлись угловая фрезерная головка компании *Alberti T90 – 8* и аналогичная по массогабаритным характеристикам головка *OMGTA40* [3]. Экспериментальное исследование проводилось следующим образом: при неработающем станке с помощью динамометрического молотка наносился удар по контрольной оправке, которая закреплена вместо инструмента на угловой головке.

Так же на корпусе головки крепится два акселерометра (вибродатчики). Удар молотком генерирует некоторое возбуждение в несущей системе станка. Датчики (рисунок 5) регистрируют момент удара и сигнал с них передается на аналогово-цифровой преобразователь (АЦП). Далее оцифрованный сигнал передается в компьютер для анализа.

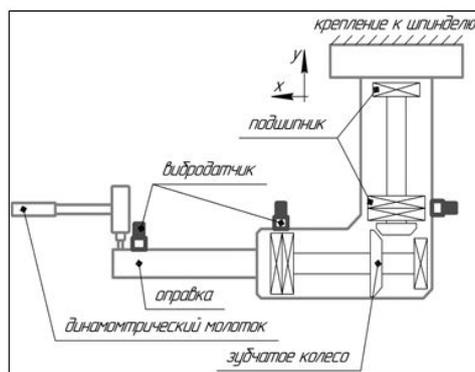


Рис. 5. Схема крепления вибродатчиков

В результате эксперимента была получена амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) угловой головки. Она сравнивалась с АЧХ, полученный в результате моделирования (рисунок 6).

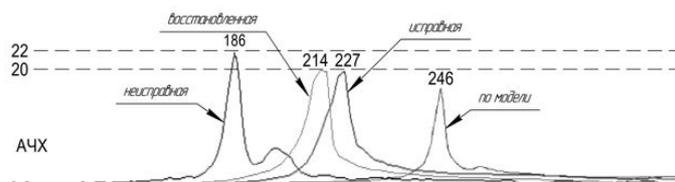


Рис. 6. Схема крепления вибродатчиков

Заключение

Различие в собственной частоте, полученной по модели и экспериментально измеренной головкой, составляет 14 процентов, что позволяет предположить адекватность разработанной модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fish J., Belytschko T.* A First Course in Finite Elements. New York: Wiley, 2007. 336 p.
2. *Шлаев К. И., Сабиров Ф. С.* Экспериментальное исследование и моделирование угловых фрезерных головок // *Машиностроение: традиции и инновации (МТИ - 2020)*. Материалы XIII всероссийской конференции с международным участием. Москва, 2020. С. 417–422.
3. *Shlaev K. I., Sabirov F. S.* Research of the dynamic characteristics of the angular milling head // *Modern high technologies*. Moscow, 2022. Vol. 132. P. 62–66.
4. *Sabirov F. S., Bogan A. N.* Investigation of dynamic characteristics of spindle units of CNC lathes batch // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. Vol. 747. P. 621–625.

Шлаев Кирилл Иванович — аспирант, МГТУ «СТАНКИН». E-mail: kir.shl@ya.ru

Сабиров Фан Сагирович — д.т.н., профессор, МГТУ «СТАНКИН». E-mail: fanira5057@yandex.ru

Современные стохастические модели

A LOCAL LIMIT THEOREM FOR THE POSITIVE RECURRENT Q-PROCESS

A. Imomov^{1,2}, M. Murtazaev², Z. Nazarov²

¹*Karshi State University, Karshi, Uzbekistan*

²*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*

We examine the population growth system called Q-processes. This is defined by the Galton-Watson Branching system conditioned on non-extinction of its trajectory in the remote future. We find an explicit form of the generating function of the distribution of limit states of the system. We prove that this generating function produces an invariant distribution. As a consequence of this result, a local limit theorem with a tail part estimate is established.

Keywords: *branching system, extinction time, Q-process, Markov chain, invariant distribution, local limit theorem.*

1. Introduction

Models of stochastic branching systems form an essential part of the general theory of random processes. The dynamic interest in these models is due to many factors. The first of these, which became the main impetus for the creation of the theory of branching models, is the possibility of estimating, with their help, the probabilities of survival of a population of monotypic individuals. In this regard, the most primitive branching model, initiated by famous English statisticians H.Watson and F.Galton in the second half of the 19th century, is now called the Galton-Watson Branching (GWB) system; see [1], [2], [3], [5] and [8]. Among the random trajectories of branching systems, there are those that continue a long time. In the case of the GWB model, the class of such trajectories forms another stochastic model called Q-process; see [2] and [6]. In the case of continuous-time Markov branching systems, a similar model, called the *Markov Q-process*, was first introduced in [7].

Consider GWB system $\{Z(n), n \in \mathbb{N}_0\}$ with branching rates $\{p_k, k \in \mathbb{N}_0\}$, where $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ and $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, the variable $Z(n)$ denote the population size at the moment n in the system. The evolution of the system occurs according to the following mechanism. Each individual lives a unit length life time and then gives $k \in \mathbb{N}_0$ descendants with probability p_k . This process is a reducible, homogeneous-discrete-time Markov chain with a state space consisting of two classes: $\mathcal{S}_0 = \{0\} \cup \mathcal{S}$, where $\{0\}$ is absorbing

state, and $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$ is the class of possible essential communicating states. Throughout the paper assume that $p_0 > 0$ and $p_0 + p_1 > 0$ which called the Schröder case. We suppose that $p_0 + p_1 < 1$ and $m := \sum_{k \in \mathcal{S}} kp_k < \infty$.

The system n -step transition probabilities

$$P_{ij}(n) := \mathbb{P} \{ Z(n+k) = j \mid Z(k) = i \} \quad \text{for any } k \in \mathbb{N}_0$$

are defined in terms of branching rates $\{p_k, k \in \mathbb{N}_0\}$. In fact, we observe that a probability generating function (GF)

$$\sum_{k \in \mathcal{S}_0} P_{ij}(n)s^k = [f_n(s)]^i, \tag{1}$$

where

$$f_n(s) := \sum_{k \in \mathcal{S}_0} p_k(n)s^k,$$

therein $p_k(n) := P_{1k}(n)$ and, in the same time $f_n(s)$ is n -fold iteration of the offspring GF $f(s) := \sum_{k \in \mathcal{S}_0} p_k s^k$. Needless to say that $f_n(0) = p_0(n)$ is a vanishing probability of the system starting from one individual. Note that this probability tends as $n \rightarrow \infty$ monotonously to q , which called an extinction probability of the system, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_0(n) = q$; see [2]. The extinction probability $q = 1$ if $m \leq 1$ and $q < 1$ when $m > 1$. Based on this, the system is called sub-critical, critical and supercritical if $m < 1$, $m = 1$ and $m > 1$ respectively.

Further we are dealing with the GWB system conditioned on the event $\{n < \mathcal{H} < \infty\}$, where $\mathcal{H} := \min \{n \in \mathbb{N} : Z(n) = 0\}$ is the extinction time. Let $\mathbb{P}_i \{*\} := \mathbb{P} \{* \mid Z(0) = i\}$ and define conditioned probabilities

$$\mathbb{P}_i^{\mathcal{H}(n+k)} \{*\} := \mathbb{P}_i \{* \mid n+k < \mathcal{H} < \infty\} \quad \text{for any } k \in \mathbb{N}.$$

In [2, p. 58] proved, that

$$\mathcal{Q}_{ij}(n) := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_i^{\mathcal{H}(n+k)} \{Z(n) = j\} = \frac{jq^{j-i}}{i\beta^n} P_{ij}(n), \tag{2}$$

where $\beta := f'(q)$. Observe that $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_{ij}(n) = 1$ for each $i \in \mathbb{N}$. Thus, the probability measure $\mathcal{Q}_{ij}(n)$ can determine a new population growth system – a discrete-homogeneous time irreducible Markov chain with the state space $\mathcal{E} \subset \mathbb{N}$ which we denote by $\{W(n), n \in \mathbb{N}_0\}$. This is called in the monograph [2, p. 58] *the Q-process*. Undoubtedly that $W(0) \stackrel{d}{=} Z(0)$ and

$$\mathcal{Q}_{ij}(n) = \mathbb{P} \{W(n) = j \mid W(0) = i\} = \mathbb{P}_i \{Z(n) = j \mid \mathcal{H} = \infty\},$$

so that the Q-process can be interpreted as a “long-living” GWB system.

Put into consideration a GF

$$w_n^{(i)}(s) := \sum_{j \in \mathcal{E}} Q_{ij}(n) s^j.$$

Then from (1) and (2) we obtain

$$w_n^{(i)}(s) = \left[\frac{f_n(qs)}{q} \right]^{i-1} w_n(s), \quad (3)$$

where the GF $w_n(s) := w_n^{(1)}(s) = \mathbf{E} [s^{W(n)} \mid W(0) = 1]$ has a form of

$$w_n(s) = s \frac{f'_n(qs)}{\beta^n} \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Application of iteration for $f(s)$ in the relation (3) leads us to the following functional equation:

$$w_{n+1}^{(i)}(s) = \frac{w(s)}{f_q(s)} w_n^{(i)}(f_q(s)), \quad (5)$$

where $w(s) := w_1(s)$ and $f_q(s) = f(qs)/q$. Thus, Q-process is completely defined by setting the GF

$$w(s) = s \frac{f'(qs)}{\beta}. \quad (6)$$

An evolution of the Q-process is essentially regulated by the structural parameter $\beta > 0$. In fact, as it has been shown in [2, p. 59, Theorem 2], that if $\beta < 1$ then \mathcal{E} is positive recurrent and, \mathcal{E} is transient if $\beta = 1$. On the other hand, it is easy to be convinced that positive recurrent case $\beta < 1$ of Q-process corresponds to the non-critical case $m \neq 1$ of GWP. Note that $\beta \leq 1$ and nothing but.

Further we consider the positive recurrent case. Let $\alpha := w'(1-) < \infty$. Then differentiating (6) on the point $s = 1$ we obtain $\alpha = 1 + (1 - \beta) \gamma_q$, where

$$\gamma_q := \frac{qf''(q)}{\beta(1 - \beta)}. \quad (7)$$

Further, it follows from (3) and (4) that

$$\mathbf{E}_i W(n) = (i - 1) \beta^n + \mathbf{E} W(n),$$

where $\mathbf{E} W(n) = 1 + \gamma_q \cdot (1 - \beta^n)$.

First, we write the following assertion, which is direct consequence from results proved in [4].

Theorem 1. Let $\beta < 1$ and $\alpha < \infty$. Then

$$\rho_n(s) := \left| w_n(s) - \pi_q(s) \right| \rightarrow 0 \tag{8}$$

uniformly in $s \in [0, 1)$, where

$$\pi_q(s) = \frac{s}{(1 - q\gamma_q(1 - s))^2}, \tag{9}$$

at that γ_q is defined in (7).

Our principal result appears in Section 2. Here we improve the formulation of Theorem 1, by specifying the explicit approximation rate of the function $w_n(s)$ to the function $\pi_q(s)$. Next, as a consequence of this, we state a local limit theorem for the positive recurrent Q-processes.

2. Results

We begin by stating our main result which improves Theorem 1, specifying the decreasing rate of the asymptotic estimator $\rho_n(s)$ in (8).

Theorem 2. Let $\beta < 1$ and $\alpha < \infty$. Then

$$\left| w_n(s) - \pi_q(s) \right| = \mathcal{O}(\beta^n) \tag{10}$$

as $n \rightarrow \infty$ uniformly in $s \in [0, 1)$, where $\pi_q(s)$ is defined in (9).

Remark 1. The progress of our results lies in the fact that the limit function $\pi_q(s)$ was found explicitly in Theorem 1 and 2. The rate of convergence to this function is defined in Theorem 2 as well.

Since $\pi_q(s)$ is a limit of power series, it may be written as follows:

$$\pi_q(s) = \sum_{j \in \mathcal{E}} \pi_j s^j, \tag{11}$$

where $\pi_j > 0$. The following result asserting the direct convergence of transition probabilities $\mathcal{Q}_{ij}(n)$ to π_j immediately follows from Theorem 2.

Corollary 1. Let $\beta < 1$ and $\alpha < \infty$. Then

$$\mathcal{Q}_{ij}(n) = \pi_j \cdot (1 + \mathcal{O}(\beta^n)) \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

where numbers $\{\pi_j\}$ are coefficients in the power series expansion (11) and are the invariant distribution for the Q-process, i.e. $\pi_j = \sum_{i \in \mathcal{E}} \pi_i \mathcal{Q}_{ij}(1)$ and $\sum_{j \in \mathcal{E}} \pi_j = 1$. Furthermore

$$\pi_1 = \frac{1}{(1 - q\gamma_q)^2} = \left(\frac{\mathcal{K}_q}{q} \right)^2,$$

where \mathcal{K}_q is the known Kolmogorov constant in theory of GWB system.

REFERENCES

1. *Asmussen S. and Hering H.* Branching processes. Boston: Birkhäuser, 1983.
2. *Athreya K. B. and Ney P. E.* Branching processes. New York: Springer, 1972.
3. *Harris T. E.* The theory of branching processes. Berlin: Springer-Verlag, 1963.
4. *Imomov A. A., Murtazaev M.* On explicit form of the Kolmogorov constant in the theory of Galton-Watson Branching Processes. 2022. *ArXiv*: <https://arxiv.org/abs/2205.03024>
5. *Jagers P.* Branching Progresses with Biological applications. JW & Sons, Pitman Press, GB, 1975.
6. *Imomov A. A.* Limit Theorem for the Joint Distribution in the Q-processes. Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2014. Vol. 7. № 3. P. 289–296.
7. *Imomov A. A.* On Markov continuous time analogue of Q-processes. Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2012. Vol. 84. P. 57–64.
8. *Sevastyanov B. A.* Branching processes. Moscow: Nauka, 1971. (in Russian)

Azam A. Imomov — Doctor of Sciences, Head of Department, Mathematics and Computer Sciences faculty. E-mail: imomov_azam@mail.ru

Misliddin Murtazaev — post-doctoral student, Stochastic analysis department. E-mail: misliddin1991@mail.ru

Zuhriddin Nazarov — post-doctoral student, Stochastic analysis department. E-mail: zuhrov13@gmail.com

CONSTRUCTIVE INTEGRAL REPRESENTATION OF NON-SMOOTH BROWNIAN FUNCTIONAL

O. Purtukhia¹, Z. Zerakidze²

¹*A.Razmadze Mathematical Institute of I. Javakishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia*

²*Gori State Teaching University, Gori, Georgia*

The well-known Clark-Ocone formula (1984) allows constructing a constructive integral representation for smooth (in Malliavin sense) Brownian functionals. In the case of non-smooth functionals, if the conditional mathematical expectation of the functional with respect to the natural filtration of the Brownian Motion is smooth, one can use the Glonti-Purtukhia generalization (2017) of the Clark-Ocone formula. Here we study functional to which the above results cannot be applied and derive a constructive integral representation.

Keywords: *Brownian functional, Malliavin derivative, Clark-Ocone formula, Glonti-Purtukhia representation.*

Introduction

In the 80s of the last century (Harrison and Pliska, 1981), it became clear that stochastic integral representation theorems of Brownian functional (along with Girsanov's absolutely continuous change of measure theorem) play an important role in modern financial mathematics. After Clark (Clark, 1970) obtained the formula for the stochastic integral representation for Brownian functionals, many authors tried to explicitly find the integrand. The works of Hausmann (1979), Ocone (1984), Ocone and Karatzas (1991), Karatzas, Ocone and Li (1991), Shyriaev and Yor (2003), Graversen, Shyriaev and Yor (2006) and Renaud and Remillard (2007) are especially important in this direction.

We study the question of representing of Brownian functionals as a stochastic Itô integral with an explicit form of the integrand. The considered class of functionals also includes functionals that are not smooth in the sense of Malliavin, to which both the well-known Clark-Ocone formula ([1]) and its generalization, the Glonti-Purtukhia representation ([2]), are inapplicable.

1. Auxiliary concepts and results

Let a Brownian Motion $B = (B_t), t \in [0, T]$, be given on a probability space $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, and let $\mathfrak{F}_t^B = \sigma\{B_u : 0 \leq u \leq t\}$.

Let $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ be the set of all infinitely differentiable functions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ such that f and all its partial derivatives have polynomial growth. Denote by S the class of smooth random variables F of the form

$$F = f(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}), \quad f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n), \quad h_i \in L_2([0, T]).$$

It is known that S is dense in $L_2(\Omega)$.

Definition 1. The stochastic derivative (derivative in the Malliavin sense) of a smooth random variable F is defined as a random process $D_t F$ defined by the relation (see, [3])

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}) I_{[0, t_i]}(t).$$

D is closable as an operator from $L_2(\Omega)$ to $L_2(\Omega; L_2([0, T]))$. Denote its domain of definition by $D_{1,2}$. This means that $D_{1,2}$ is equal to the closure of the class of smooth random variables in the norm

$$\|F\|_{1,2} := \{E[F^2] + E[\|DF\|_{L_2([0, T])}^2]\}^{1/2}.$$

Theorem 1. (Clark-Ocone's representation formula, [1]) If F is differentiable in the sense of Malliavin, $F \in D_{1,2}$, then the following integral representation holds

$$F = E[F] + \int_0^T E[D_t F | \mathfrak{F}_t^B] dB_t \quad (P - a.s.). \quad (1)$$

Shiryaev and Yor (2003) and Graversen, Shiryaev and Yor (2006) proposed another method for finding the integrand based on the Itô formula and Levy's theorem for the Levy martingale $M_t = E[F | \mathfrak{F}_t^B]$ associated with the considered functional F (as F they considered the so-called "maximal" type functionals of Brownian Motion).

Later, using the Clarke-Ocone formula, Renaud and Remillard (2007) established an explicit martingale representation for Brownian functionals, which also depend on the trajectory (in particular, here F is a continuously differentiable function of three smooth quantities: from the Brownian Motion with drift and processes of its maximum and minimum).

It is clear that the class of functionals to which the Clark-Ocone formula can be applied is limited by the condition that they must be Malliavin differentiable. We study questions of the stochastic integral representation of stochastically non-smooth functionals. Glonti and Purtukhia (2014-2018) proposed a method for obtaining an integral representation for a non-smooth

Brownian functionals of a special form using the Trotter-Meyer theorem, which establishes a connection between the predictable quadratic characteristic of a semimartingale and its local time.

Further, it turned out that the requirement for the smoothness of a functional can be weakened by the requirement for the smoothness of only its conditional mathematical expectation. It is known that if a random variable is stochastically differentiable in the sense of Malliavin, then its conditional mathematical expectation is also differentiable.

Lemma 1. (see, Proposition 1.2.8 [4]) If $F \in D_{1,2}$, then $E(F|\mathfrak{S}_s^B) \in D_{1,2}$ and $D_t[E(F|\mathfrak{S}_s^B)] = E(D_t F|\mathfrak{S}_s^B)I_{[0,s]}(t)$.

On the other hand, the conditional mathematical expectation may be smooth even if the random variable is not stochastically smooth. For example, it is known that $I_{\{B_T \leq c\}} \notin D_{1,2}$ (the event indicator I_A is Malliavin differentiable if and only if the probability $P(A)$ equals zero or one (see, Proposition 1.2.6 [4])), but for all $t \in [0, T)$:

$$E[I_{\{B_T \leq c\}}|\mathfrak{S}_t^B] = \Phi\left(\frac{c - B_t}{\sqrt{T - t}}\right) \in D_{1,2},$$

where c is some real constant and Φ is the standard normal distribution function.

Glonti and Purtukhia (see, [2]) generalized the Clark-Ocone formula to the case when the functional is not stochastically smooth, but its conditional mathematical expectation is stochastically differentiable, and proposed a method for finding the integrand.

Theorem 2. (Glonti-Purtukhia representation, [2]) Assume that $g_t = E[F|\mathfrak{S}_t^B]$ is a Malliavin differentiable functional ($g_t(\cdot) \in D_{1,2}$) for almost all $t \in [0, T)$. Then the following stochastic integral representation is valid:

$$g_T = F = EF + \int_0^T \nu_u dB_u \quad (P - a.s.), \quad (2)$$

where

$$\nu_u := \lim_{t \uparrow T} E[D_u g_t|\mathfrak{S}_u^B] \quad \text{in } L_2([0, T] \times \Omega).$$

Here we consider Brownian functionals, which includes non-smooth functionals (therefore, it is impossible to use the Clark-Ocone formula (1)), depending on the trajectory, and we propose a method for obtaining a constructive stochastic integral representation. In addition, the class under consideration also includes functionals for which even the conditional mathematical expectation is not stochastically smooth and, therefore, neither the generalization of the Clark-Ocone formula (2) is applicable to them.

To calculate the conditional mathematical expectation, we use the transition probability of Brownian Motion. As is known

$$P\{B_s \in A | \mathfrak{S}_t^B\} = p(t, s, B_t, A),$$

where $0 \leq t \leq s$, A is the Borel subset of the space R^1 , and

$$p(t, s, x, A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(s-t)}} \int_A \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2(s-t)}\right\} dy.$$

Lemma 2. It is well known that for all measurable bounded function h :

$$E[h(B_s) | \mathfrak{S}_t^B] = \int_{R^1} h(y) p(t, s, B_t, dy).$$

2. Main results

Obviously, there are functionals that do not satisfy even the weakened Glonti-Purtukhia condition. It should be noted that we are familiar with such functionals for which when taking the conditional mathematical expectation, a term similar to the original functional is separated from it, either as a term or as a factor. Such, for example, is the integral over the Lebesgue measure $F = \int_0^T f(s, \omega) ds$ of a process $f(s, \omega)$ that does not satisfy the Clark-Ocone condition, but satisfies the weakened Glonti-Purtukhia condition (here the conditional mathematical expectation gives a adapted to filtration term of the same type). Another functional of this type is $I_{\{B_T^* \leq x\}}$ ($B_T^* = \max_{t \in [0, T]} B_t$), which we learned about from Andrei Ionescu (PhD student at King's College London), for which we are grateful (here the conditional mathematical expectation gives a multiplier of the same type adapted to filtration).

It is obvious that the mentioned last functional is not stochastically smooth. Hence, we cannot use the Clark-Ocone formula and we propose here a method for obtaining a constructive martingale representation¹. In addition, even the conditional mathematical expectation of this functional is not stochastically smooth and, therefore, neither the Glonti-Purtukhia generalization of the Clark-Ocone formula (2) is applicable to it.

Theorem 3. Let $h(\cdot, \cdot) : [0, T] \times R^1 \rightarrow R^1$ be a measurable bounded function continuously differentiable with respect to t and $f(s, \omega) = h(s, B_s(\omega))$, then the function $V(t, x) := E[\int_t^T h(s, B_s(\omega)) ds | B_t = x] := E[G(t, T) | B_t = x]$ satisfies the requirements of the Ito formula and for the

¹A different method of obtaining the corresponding representation was proposed by Andrei Ionescu in our personal correspondence.

functional $F(T) = \int_0^T f(s, \omega) ds$ the following stochastic integral representation is fulfilled

$$F(T) = EF(T) + \int_0^T V'_x(t, B_t) dB_t \quad (P - a.s.). \quad (3)$$

Proof. Due to the Markov property of Brownian Motion

$$E[G(t, T)|B_t = x] = E[G(t, T)|B_t]|_{B_t=x} = \int_t^T E[h(s, B_s(\omega))|\mathfrak{F}_t^B] ds|_{B_t=x}.$$

According to Lemma 2, it is not difficult to conclude that $V(\cdot, \cdot) \in C^{1,2}([0, T] \times R^1)$. Hence, using the Itô formula, we have

$$\begin{aligned} V(t, B_t) &= V(0, B_0) + \int_0^t [V'_s(s, B_s) + \frac{1}{2}V''_{xx}(s, B_s)] ds + \\ &+ \int_0^t V'_x(s, B_s) dB_s \quad (P - a.s.). \end{aligned} \quad (4)$$

Again, due to the Markov property of Brownian Motion

$$V(t, B_t) = E[G(t, T)|B_t = x]|_{x=B_t} = E[G(t, T)|\mathfrak{F}_t^B] \quad (P - a.s.)$$

and hence, under the conditions of the theorem, the process

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s, \omega) ds + V(t, B_t) &= E\left[\int_0^t f(s, \omega) ds | \mathfrak{F}_t^B\right] + E[G(t, T)|\mathfrak{F}_t^B] = \\ &= E\left[\int_0^T f(s, \omega) ds | \mathfrak{F}_t^B\right] := M_t \end{aligned}$$

is a martingale.

Moreover, it is obvious that M_t is a continuous martingale. On the other hand, a continuous martingale of bounded variation starting from 0 is identically equal to 0. Therefore, in equality (4) the term of bounded variation plus the additional term $(\int_0^t f(s, \omega) ds)$ of bounded variation of the martingale M is equal to zero and, taking into account the equality

$$M_0 = V(0, B_0) = E[G(0, T)|B_0] = E[F(T)|\mathfrak{F}_0^B] = EF(T) \quad (P - a.s.)$$

the proof of the theorem is easily completed. ■

Theorem 4. The following stochastic integral representation is valid

$$I_{\{B_T^* \leq a\}} = P(B_T^* \leq a) - 2 \int_0^T I_{\{B_s^* \leq a\}} \frac{1}{\sqrt{T-s}} \varphi\left(\frac{a-B_s}{\sqrt{T-s}}\right) dB_s \quad (P - a.s.),$$

where φ is the density function of the standard normal distribution.

Proof. Let $f(t, x, y) = E(I_{\{B_T^* \leq a\}} | B_t = x, B_t^* = y)$. According to the Markov property of the two dimensional process (B_t, B_t^*) we can write

$$f(t, B_t, B_t^*) = E(I_{\{B_T^* \leq a\}} | B_t, B_t^*) = E(I_{\{B_T^* \leq a\}} | \mathfrak{S}_t^B).$$

Hence, $f(t, B_t, B_t^*)$ is a martingale. Moreover, it is not difficult to see that

$$f(t, x, y) = I_{\{y \leq a\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-(a-x)}^{a-x} \exp\left\{-\frac{u^2}{2(T-t)}\right\} du.$$

Therefore, all $y : f(\cdot, \cdot, y) \in C^{1,2}((0, T) \times R)$. At the same time, B_t^* is an increasing process. Hence, according to the Itô formula, for all $t < T$ we obtain that (*P*-a.s.)

$$E(I_{\{B_T^* \leq a\}} | \mathfrak{S}_t^B) = P(B_T^* \leq a) + \int_0^t f'_x(s, B_s, B_s^*) dB_s. \quad (5)$$

Further, (5) can be rewritten in the following form

$$E(I_{\{B_T^* \leq a\}} | \mathfrak{S}_t^B) = P(B_T^* \leq a) - 2 \int_0^t I_{\{B_s^* \leq a\}} \frac{1}{\sqrt{T-s}} \varphi\left(\frac{a-B_s}{\sqrt{T-s}}\right) dB_s.$$

Passing now to the limit in the last relation as $t \rightarrow T$ (the limit of left-hand side exists by the Levy theorem and the limit of the right side - since the integrand is square integrable w. r. t. the Lebesgue measure), we complete the proof of theorem. ■

REFERENCES

1. *Ocone D.* Malliavin calculus and stochastic integral representation formulas of diffusion processes // *Stochastics*. 1984. Vol. 12. P. 161–185.
2. *Glonti O., Purtukhia O.* On one integral representation of functionals of Brownian motion // *SIAM J. Theory of Probability & Its Applications*. 2017. Vol. 61. № 1. P. 133–139.
3. *Nualart D., Pardoux E.* Stochastic calculus with anticipating integrands // *Probability Theory and Related Fields*. 1988. Vol. 78. № 4. P. 535–581.
4. *Nualart D.* The Malliavin calculus and related topics (second edition). Berlin: Springer-Verlag, 2006. 382 p.

Purtukhia Omari — Doctor of Sciences, professor, head of department, department of mathematics. E-mail: *o.purtukhia@gmail.com*

Zerakidze Zurab — Doctor of Sciences, professor, professor, department of mathematics. E-mail: *zura.zerakidze@mail.ru*

IMPROVING EFFICIENCY OF MONTE CARLO ALGORITHMS FOR THE SOLUTION SOME DIRICHLET PROBLEMS

A. Rasulov, G. Raimova

University of World Economy and Diplomacy, Tashkent, Uzbekistan

In this paper we will propose Monte Carlo algorithms for the solution of the interior Dirichlet boundary value problem (BVP) for the Helmholtz operator with a polynomial non-linearity on the right-hand side. The complexity of the proposed algorithms is investigated, and the ways of decreasing the computational work is given. It should be noted, using a priori information about solutions of the equations, of interest one can give recommendations on choosing optimal estimators. The results of on computational experiment show, that with the discussed algorithms we can obtain practically efficient estimators. The parameter, which is used in calculating the probabilities of the branching, gives us the opportunity to control the average quantity of branches and the average number of the particles in the tree. Thus the estimators were constructed on trees with a minimal number of branches. **Keywords:** *Monte Carlo algorithms, Helmholtz operator, dirichlet problem, polynomial non-linearity, unbiased estimators, branching process, decreasing of variance.*

Introduction

We will consider the Dirichlet problem for non-linear elliptic equations in the convex domain D , which is bounded and has a smooth boundary Γ

$$\Delta u(x) = -f(x, u(x)), \quad u(x)|_{\Gamma} = \varphi(x). \quad (1)$$

Here $x \in R^3$, Δ is the Laplace operator, the function $f(x, u)$ has continuous derivatives for all $x \in \overline{D}$ and for all $u(x)$, $\varphi(x) \in C^1(\Gamma)$. Let $f(x, u)$ is $|f(x, u)| \leq N$, where $N = const$, and let it satisfy the following conditions $\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \geq 0$. Under these condition the problem (1) has a unique solution [1]. We consider the case when

$$f(x, u(x)) = \sum_{i=1}^n a_i(x)u^i(x) + a_0(x).$$

Here $a_i(x)$, $i = \overline{0, n}$ are smooth functions.

The Monte Carlo algorithms for the solution (BVP) with Helmholtz operator in linear case deeply developed in work [2]. Using the results of [2], Rasulov and Sipin [3] the proposed the approach connected with branching Markov proceses and applied this approach to the solution of the following nonlinear Dirichlet problem

$$\Delta u(x) = u^2(x) + f(x), \quad u(x)|_{\Gamma} = \varphi(x), \quad x \in D \subset R^3.$$

Futher in [4], Mikhaylov proposed a new approach Monte Carlo solution nonlinear elliptic equations.

Below we generalized the methods which used in [3], [8], [9].

Let $c = \sup_{x \in D} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \geq \varphi(x)$. After transforming (1) we have

$$\Delta u(x) - cu(x) = -(f(x, u(x)) + cu(x)), \quad u(x)|_{\Gamma} = \varphi(x). \quad (2)$$

Let introduce the parameters α_i , $i = \overline{0, n+1}$ and they satisfy the conditions

$$\sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i = 1, \quad \text{where } 0 \leq \alpha_i < 1, \quad \overline{0, n+1}. \quad (3)$$

1. Construction unbiased estimators of the solutions

Now we will construct unbiased estimators for the solution, $u(x)$, of problem (2). Using definition from [2] for the point solution we determine a ball, $K_{\rho}(x)$, and a sphere $S_{\rho}(x)$ with maximal radius ρ and center at x : $K_{\rho}(x) \subset D$. From the theory of fundamental solutions of elliptic equations, it's known that we can use Green's formula to obtain the following integral equation

$$\begin{aligned} u(x) = & (1 - q(x)) \int_{S_{\rho}(x)} u(y_1) \frac{dy_1 S}{4\pi\rho^2} + \\ & + \frac{1}{c} q(x) \int_{K_{\rho}(x)} p(x, y_2) [f(y_2, u(y_2)) + cu(y_2)] dy_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Here $r = |x - y_2|$,

$$q(x) = 1 - \frac{\rho\sqrt{c}}{\sinh(\rho\sqrt{c})}, \quad p(x, y_2) = \frac{c \sinh((\rho - r)\sqrt{c})}{4\pi r q(x) \sinh(\rho\sqrt{c})}$$

Now we transform the equation (4)

$$u(x) = (1 - q(x)) \int_{S_{\rho}(x)} u(y_1) \frac{dy_1 S}{4\pi\rho^2} + \alpha_0 q(x) \int_{K_{\rho}(x)} p(x, y_2) \frac{a_0(y_2)}{c\alpha_0} dy_2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^n \alpha_i q(x) \int_{K_\rho(x)} p(x, y_2) \frac{a_i(y_2)}{c\alpha_i} u^i(y_2) dy_2 + \\
 & + \alpha_{n+1} q(x) \int_{K_\rho(x)} p(x, y_2) \frac{u(y_2)}{\alpha_{n+1}} dy_2.
 \end{aligned}$$

In the works [2]- [5] and [6] , a connection branching Markov process with one type of particle and the solution of polynomial non-linear integral equation is investigated in detail. Using this connection, in a domain D , we define a branching Markov process. On its trajectory we construct the sequence $\xi_t(x)\}_{t=1}^\infty$ of unbiased estimators at the point $x \in D$ for the unknown function $u(x)$.

Suppose initially we have a particle at the point x . For a one step transition, the particle moves with probability $1 - q(x)$ to the point y_1 which is uniformly distributed on the sphere $S_\rho(x)$. In this case the estimator takes the form of $\xi_1(x) = 1 \cdot u(y_1)$. Further, with probability $\alpha_0 q(x)$, the particle is absorbed at the point y_2 , which is distributed in $K_\rho(x)$ with density $p(x, y_2)$. In this case, $\xi_1(x) = \frac{a_0(y_2)}{\alpha_0 c} u(y_2)$. With probability $\alpha_i q(x)$, $i = 1, \dots, n$ at the point y_2 , i particles are generated. Here the estimator has a form $\xi_1(x) = \frac{a_i(y_2)}{\alpha_i c} u^i(y_2)$. With probability $\alpha_{n+1} q(x)$, at the point y_2 , one particle is generated, and $\xi_1(x) = \frac{1}{\alpha_{n+1}} u(y_2)$. New particles behave the same as their parents. The estimator then takes the form $\xi_t(x) = \xi_{t-1}(x)$, if the process terminates up to time, t . Otherwise it is obtained from $\xi_{t-1}(x)$ by substituting $u(y)$ with their estimators. If the particle hits to the boundary, Γ , it is absorbed. In this case $\xi_1(x) = \varphi(y)$, where $y \in \Gamma$. Here we constructed a branching Markov process with one type of particle. For the constructing finite random process "random walks on the sphere with branching" we should derive an expression for the average number of branches. Let's call $M(x)$ the average number of branches in the trajectory beginning from the point $x \in D$. Further we will consider more details the case of quadratic non-linearity. Let D be a bounded domain in R^3 with smooth boundary, Γ . We will study the following problem

$$\begin{aligned}
 \Delta u(x) &= u^2(x) + f(x), \\
 u(x)|_\Gamma &= \varphi(x) \geq 0, \quad x \in D.
 \end{aligned} \tag{5}$$

It assumes that $f(x) \in C(\overline{D})$, $\varphi(x) \in C(\Gamma)$. In [7] it was proved that when $f(x) = 0$, the solution of the problem exists and is non-negative. Using that

idea in our paper [10]- [11] , we obtain necessary and sufficient conditions for the existence of a non-negative solution of (5). Also there was shown with the probability one, the constructed branching random process will be absorbed or hit the boundary with finite number of generated particles and $\sup_t M_x \xi_t^2(x) \leq c^2$., which means the variance of constructed estimators is finite.

2. Improving the Efficiency of the Algorithms

For problem (5) we will give a modified algorithm to construct of unbiased estimators. It is possible to decrease the variance (increase the efficiency of the method) of these estimators. To do this we introduce the parameter α , where $0 < \alpha < 1$. This parameter will control branching and absorption.

With $\alpha = \alpha_0 = 1/2$, we recover the estimators for solving (5).

Let $v(x) = c - u(x)$, where $c > 0$ is such that $c^2 + f(x) \geq 0$.

Then from (5) we get the expression

$$\begin{aligned} -\Delta v(x) + 2cv(x) &= c^2 + f(x) + v^2(x) \\ v(x)|_{\Gamma} &= c - \varphi(x) \end{aligned} \quad (6)$$

Having used the Green's formula and entered the parameter α into the integral form of the problem (6), we obtain

$$\begin{aligned} v(x) &= (1 - q(x)) \int_{s_\rho(x)} v(y_1) \frac{d_y s}{4\pi\rho^2} + \\ &+ \alpha q(x) \int_{k_\rho(x)} p(x, y_2) \frac{1}{2c\alpha} v^2(y_2) dy_2 + \\ &+ (1 - \alpha)q(x) \int_{k_\rho(x)} p(x, y_2) [(c^2 + f(y_2))/2(1 - \alpha)c] dy_2 \end{aligned} \quad (7)$$

where the functions $q(x)$, $p(x, y_2)$ are determined as in (4). We determine the appropriate branching process in D , and the sequence of unbiased estimators analogous to the method described above. In this case, for $M(x)$ the average number of branches the following assertion is true.

Theorem 1. $M(x)$ the solution of the following Dirichlet boundary value problem in D :

$$\begin{aligned} \Delta M(x) + 2c(2\alpha - 1)M(x) &= -2c(1 - \alpha), \\ M(x)|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned}$$

The proof is omitted, as it is analogous to that of theorem 1 from paper [3]

Now we investigate the variance of our estimators. After introducing the generalized kernel, first integral in formula (7) becomes an integral in three dimensions. In the second integral in (7) we introduce a generalized function which transforms the integral on the sphere, $k_\rho(x)$, to an integral over the domain D :

$$v(x) = \int_D k_1(x, y) v(y) dy + \int_D k_2(x, y) v^2(y) dy + \int_D f_1(x, y) dy,$$

where $k_1(x, y) = (1 - q(x)) \delta_x(y)$, $y \in \Gamma$, $k_1(x, y) = 0$ in $y \in \Gamma$, $\delta_x(y)$ – is a generalized density corresponding to points uniformly distributed on the sphere $S_\rho(x)$,

$$k_2(x, y) = \frac{q(x)p(x, y)\sigma(y' - y)}{2c}, \quad y \in k_\rho(x),$$

$$f_1(x, y) = \frac{q(x)p(x, y)(c^2 + f(y))\delta(y' - y)}{2c}.$$

Here

$$\delta(y' - y) = \begin{cases} 1, & \text{if } y' \in k_\rho(x), \\ 0, & \text{if } y' \notin k_\rho(x). \end{cases}$$

Further we denote by: $\Pi_0(x, y) = (1 - \alpha)q(x)p(x, y)\sigma(y' - y)$ the fraction of the density function for the transition to the point $y \in k_\rho(x) \in D$ which is distributed with density function $p(x, y)\delta(y' - y)$, when absorption occurs at that point. $\Pi_1(x, y) = (1 - q(x)\delta_x(y))$ is the fraction of the density function for the transition to the point y , which distributed uniformly on the sphere $S_\rho(x)$ when a particle is born. $\Pi_2(x, y) = \alpha q(x)p(x, y)\delta(y' - y)$ is the fraction of density function for the transition to the point $y \in k_\rho(x) \in D$ which distributed with density $p(x, y)\delta(y' - y)$, when two particles are born at y .

It is obvious that for the constructed sequences the squared unbiased estimators, $\xi_t^2(x)$, it is formally, possible to obtain the following integral equation:

$$u_\alpha(x) = \int_D \frac{k_1^2(x, y)}{\Pi_1(x, y)} u_\alpha(y) dy + \int_D \frac{k_2^2(x, y)}{\Pi_2(x, y)} u_\alpha^2(y) dy + \int_D \frac{f_1^2(x, y)}{\Pi_0(x, y)} dy. \quad (8)$$

It is necessary to complete this expression with the equation

$$u_\alpha(x) = (c - \varphi(x))^2 \text{ when } x \in \Gamma.$$

The above integral equation correspond to the following boundary value problem:

$$\begin{aligned} -\Delta u_\alpha(x) + 2cu_\alpha(x) &= \left(\frac{1}{2}c\alpha\right) u_\alpha^2(x) + \frac{(c^2 + f(x))^2}{2c(1-\alpha)}, \\ u_\alpha(x)|_\Gamma &= (c - \varphi(x))^2 \end{aligned} \quad (9)$$

From (??) follows that the boundary value problem (9) has a unique solution with $0 \leq u_\alpha(x) \leq c^2$. Therefore $\sup_t M_x \xi_t^2(x) \leq c^2$. Thus, the uniform integrability of the sequence of estimators $\{\xi_t(x)\}_{t=1}^\infty$ is shown. Then, $M_x \xi_t(x) = v(x)$.

Let our branching process begin at x , which is distributed with the initial density $p(x)$. Then the variance can be written as [5]

$$\text{Var}_\alpha \xi_t(x) = \left(\frac{h^2}{p}, u_\alpha\right) - (h, v)^2.$$

The following statement is true:

Theorem 2. The variance of the estimator $\xi_t(x)$ with $\alpha < \alpha_0$ satisfies with the inequality

$$\text{Var}_\alpha \xi_t(x) \leq \text{Var}_{\alpha_0} \xi_t(x),$$

where $\alpha_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

Proof. For the proof of our statement it is enough to show, that $u_\alpha(x) < u_{\alpha_0}(x)$ with $\alpha < \alpha_0$ for all $x \in D$. Let $(u_\alpha(x))_{\alpha=\alpha_0} = \omega(x)$ the derivative with respect to α at the point $\alpha = \alpha_0$. Then we obtain:

$$\begin{aligned} -\Delta\omega(x) + 2c\omega(x) &= \\ &= \left(\frac{u_{\alpha_0}(x)}{\alpha_0 c}\right) \omega(x) + \frac{\left[\frac{(c^2 + f(x))^2}{(1-\alpha_0)^2} - \frac{u_{\alpha_0}^2(x)}{\alpha_0^2}\right]}{2c}, \quad \omega(x)|_\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

when

$$\alpha_0 \geq \frac{1}{2}, \quad \tilde{c} = \frac{(2c^2\alpha_0 - u_{\alpha_0}(x))}{\alpha_0 c} \geq 0$$

that value

$$\tilde{f}(x) = \frac{\left[\frac{(c^2 + f(x))^2}{(1-\alpha_0)^2} - \frac{u_{\alpha_0}^2(x)}{\alpha_0^2}\right]}{2c} \geq 0.$$

It can be easily checked.

The boundary value problem (10) has the form $\Delta\omega(x) - \tilde{c}\omega(x) = -\tilde{f}(x)$, $\omega(x)|_{\Gamma} = 0$. Thus it has a positive solution, via the maximum principle.

Hence, $(u_{\alpha}(x))_{\alpha=\alpha_0} \geq 0$ when $\frac{1}{2} \leq \alpha_0 < 1$. \square

This result shows the "inadmissible" domain for α , which should not be used. Of course, the calculation must be conducted as usual, with ε -biased estimators.

3. Conclusion

Thus, using a priori information about solutions of the equations, of interest one can give recommendations on choosing optimal estimators. The results of on computational experiment show, that with the discussed algorithms we can obtain practically efficient estimators. The parameter, which is used in calculating the probabilities of the branching, gives us the opportunity to control the average quantity of branches and the average number of the particles in the tree. Thus the estimators were constructed on trees with a minimal number of branches. In our case, with probability 0.997, the exact solution of the problem will be inside of the confidence interval. Since in the given examples, the exact solutions are known, we can make sure that mathematical expectation of the estimators are inside of the confidence interval. We can consider the case of when $f(x, u(x)) = c \cdot \exp(u)$, $f(x, u(x)) = c \cdot \sin(u)$ and other functions, where c is constant, and after expanding to the Taylor series above proposed algorithms could be applied for the solution corresponding boundary value problems.

REFERENCES

1. Courant R. Partial differential equations. New-York: Wiley, 1962. 820 p.
2. Elepov B., Kronberg A., Mikhailov G., Sabelfeld K. Solution of boundary value problems by the Monte Carlo method. Novosibirsk: Nauka, 1980. 176 p. (in Russian)
3. Rasulov A., Sipin A. The solution of one nonlinear equation by Monte-Carlo method, Metodi Monte-Karlo in computational mathematics and mathematical physics Novosibirsk: Nauka, 1976. P. 149–155. (in Russian)
4. Mikhailov G., Makarov R. Solution of boundary value problems of nonlinear elliptic equations by the Monte Carlo method // Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 1999. Vol. 14. № 5. P. 453–467.
5. Ermakov S., Nekrutkin V., Sipin A. Random Processes for Classical Equations of Mathematical Physics. London: Kluwer Academic Publication, 1989. 302 p.
6. Sevastyanov B. Branching processes. Moscow: Nauka, 1971. 436 p.

7. *Mysovskih I.* About boundary problem for equation $\Delta u = u^2$ // DAN SSSR. 1954. Vol. 94. № 6. P.995–999.
8. *Sipin A.* The solution of Dirichlet problem for equation $\Delta u + a(x)u = f(x)$ by Monte-Carlo method // Vestnik of LGU. 1976. № 1. P. 60–63.
9. *Meyer P.* Probability and potentials. City: Blaisdell Pub. Co, 1st edition, 1966. 266 p.
10. *Rasulov A., Raimova M., Baqoev M.* Solution of some semi-linear Dirichlet problem by Monte Carlo method // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2293. Art.Num. 420107. doi: 10.1063/5.0026724
11. *Rasulov A., Raimova M., Baqoev M.* Monte Carlo Solution of Dirichlet Problem for Semi-linear Equation. In: Dimov, I., Faragi, I., Vulkov, L. (eds), Finite Difference Methods.Theory and Applications, 2018. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 11386. doi: 10.1007/978-3-030-11539-5_51

Rasulov A. — Professor, Head of dept. Mathematical modelling and IT, University of World Economy and Diplomacy, Tashkent. E-mail: *asrasulov@gmail.com*

Raimova G. — University of World Economy and Diplomacy, Tashkent, Uzbekistan. E-mail: *raimova27@gmail.com*

INTERPRET CORRELATION STATISTICS OF HEALTHY EATING IN PRESCHOOL CHILDREN WITH CORRELATIONS

A. A. Imomov, M. A. Chuliyeva

Karshi State University, Karshi, Uzbekistan

In the article presents the results of the study of physiological parameters of preschool children with practical nutrition. The amount of macronutrients in the current diet of children was calculated. Their blood biochemical parameters were studied in the laboratory to determine the relationship between macroelements in the diet and biochemical parameters in the blood. **Keywords:** *correlation, macronutrients, statistical analysis, physiological parameters, body mass index.*

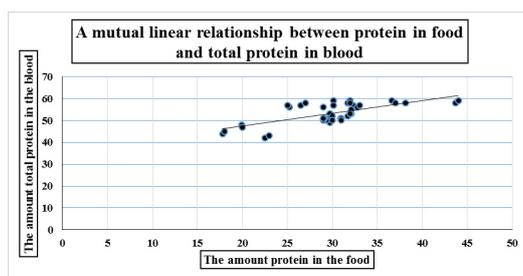
The body of preschool children continues to grow rapidly, the formation of organs and systems, metabolic processes proceed at a high rate. The central nervous system develops rapidly. They are especially characterized by high motor activity, and this requires a lot of energy. This development of the child's body requires a lot of substances necessary for cell formation, primarily proteins, vitamins and minerals [3]. In this regard, special attention should be paid to the healthy nutrition of preschool children. Therefore, one of the important tasks is to determine the correlation between the amount of protein, carbohydrates and fat in the current diet of children of this age and some biochemical parameters in their blood. At the same time, the study of physiological and biochemical parameters and the relationship between these parameters and the functional state of the child's body was an interesting question for us. In our study, we found the Pearson correlation to be more favorable than the correlation relationship. Because the Pearson correlation reflects the linear relationship of the two variables. This clearly indicates the level of correlation relations. Theoretically, the amount of macronutrients in human food should be in proportion to the norm in their body. This means that there can be linear correlations. However, it is difficult to find such accurate statistics in most sources.

In this way, by assessing the correlations, it is possible to select children who have a real nutritional problem in the statistics. As a result, it is possible to explain the causes of physiological backwardness, not due to pathological processes in the internal organ system, but precisely due to the lack of equal nutritional levels of food. Of course, it is not surprising

that such research reveals some of the causes and shortcomings that prevent children from growing physically and mentally mature. To this end, we set the goal of determining the amount of macronutrients in the current diet of children under 5 years of age, total protein, albumin, hemoglobin, glucose, cholesterol in the blood and monitoring the level of physical development of children.

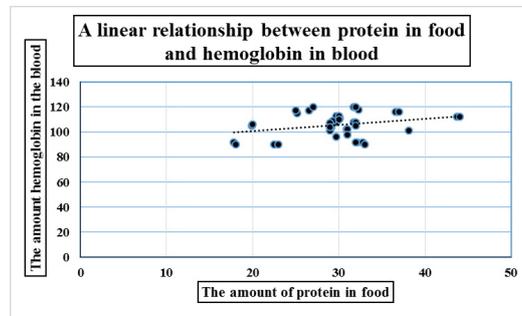
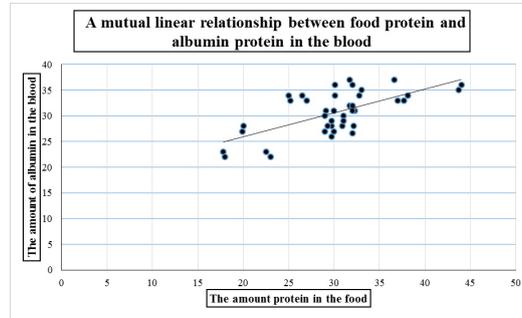
Materials and methods: Observations were made at the Kashkadarya Regional Children's Multidisciplinary Medical Center in the winter of 2020 and in the summer of 2021. A total of 42 children under the age of 5 were surveyed on their current diet using questionnaires. The daily amount of protein, fat and carbohydrates in their diet was calculated according to special tables. In the laboratory department of the center, the methods of quantitative determination of total protein, hemoglobin, albumin, glucose, cholesterol from the biochemical parameters of the blood of these children (biuret, cyanomethemoglobin and bromocresol-based method of quantitative determination of proteins; enzymatic colorimetric test method based on glucose oxidase enzyme for quantitative determination of glucose; cholesterol was determined by the CHOD-PAP method) [1]. The height and weight of the children were measured and the body mass index was calculated. The obtained results have been processed in MS Excel and statistically evaluated.

Obtained results: Observations and studies show that the correlation of total protein in the diet of children in the winter with the biochemical parameters in the blood is equal to the total protein $r = 0.70$ ¹; with albumin $r = 0.65$; correlation with hemoglobin was $r = 0.3$.

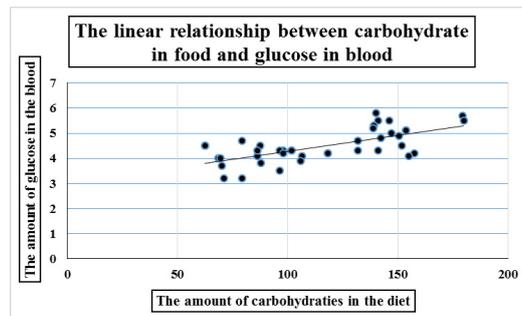


¹ $r = 0.1 - 0.3$ weak linear correlation; $r = 0.3 - 0.5$ linear correlation with average strength; $r = 0.5 - 0.7$ significantly stronger linear correlation; $r = 0.7 - 0.9$ strong linear correlation; $r = 0.9 - 1$ very strong straight-line correlation [2].

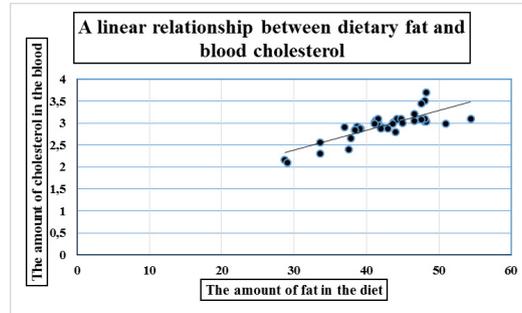
* In the study, the correlation coefficient was calculated at a value of $p = 0.05$



There was a correlation between total carbohydrate intake and blood glucose $r = 0.71$. The correlation between total fat in the diet and total cholesterol in the blood was $r = 0.84$.

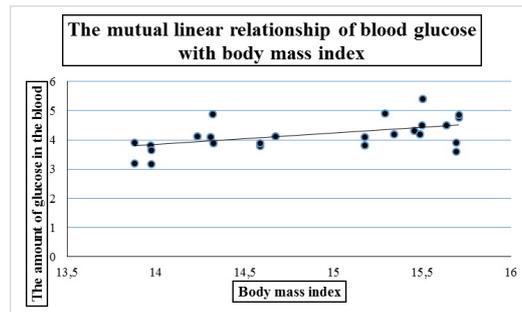
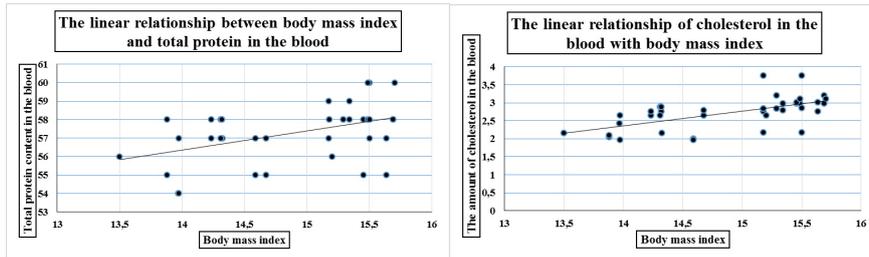


The results obtained in the summer season proved that the protein in the diet and the total protein in the blood were $r = 0.72$; albumin $r = 0.66$; hemoglobin was found to be correlated with $r = 0.35$. Carbohydrates and



blood glucose have a correlation of $r = 0.78$, and fats and cholesterol have a correlation of $r = 0.88$.

Children's body mass index was correlated with food: protein $r = 0.57$, fat $r = 0.66$, and carbohydrates $r = 0.45$. Children's body mass index was found to have a correlation with total protein in the body $r = 0.60$, cholesterol $r = 0.70$, glucose $r = 0.50$.



Evaluation of the results and conclusion: These results mean that in winter and summer there is a strong linear correlation between protein

in the blood. To make the study results clear, total protein and albumin, and with hemoglobin protein showed that there is an average straight-line correlation. It can be seen that carbohydrates and fats in the diet have a strong linear correlation between glucose and cholesterol in the blood.

Children's body mass index is strongly correlated with dietary protein, fat and blood protein, and cholesterol. The correlation between body mass index and carbohydrates in the diet and glucose in the blood is moderately strong. Suffice it to say that the lower correlation of body mass index with blood glucose is the primary source of energy for these carbohydrates, so it is used for more metabolic processes than physical development.

These observations show that there is a linear correlation between the macronutrients in food and the biochemical composition of the blood. The linear correlation between the physical development of the young organism and the composition of the food in accordance with the biochemical analysis of the blood suggests that children with normal physiological status participated in these observations. The next step is to assess statistically the extent to which the average amount of macronutrients in the diet of these children deviates from the norm. As a result, it is easier to explain the extent to which the deviations from the norm related to macronutrients in food affect physiometric parameters. This will help explain some of the nutrition-related deficiencies, make changes to children's diets, and make recommendations.

REFERENCES

1. *Dolgov V. V.* Clinical Laboratory Diagnostics, national manual. Moscow: GEOTAR-Media, 2017. 464 p.
2. *Zaytsev V. M., Lifyandskiy V. G., Marinkin I. V.* Applied medical statistics, textbook. St. Petersburg: Foliant, 2003. 432 p.
3. *Zokirkhodjayev Sh. Ya., Bakhritdinov Sh. S., Khudoyberganov A. S.* Clinical dietology and nutritsiology, textbook. Tashkent. 2021. 536 p.

Azam Imomov — Doctor of Sciences, Head of Department, Mathematics and Computer Sciences faculty. E-mail: *imomov_azam@mail.ru*

Mukhayyo Chuliyeva — Master of Biology, department of Physiology. E-mail: *choliyevamuhayyo@gmail.com*

**LINEARLY INDEPENDENT SOLUTIONS OF THE
SYSTEM OF SECOND-ORDER
HYPERGEOMETRIC EQUATIONS OF PARTIAL
DERIVATIVES FOR FUNCTION $X_{31}^{(4)}$**

A. Hasanov^{1,2}, N. Djuraev³

¹*Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*

²*Institute of Mechanics and Seismic Resistance of Structures, Tashkent,
Uzbekistan*

³*Karshi Engineering Economics Institute, Karshi, Uzbekistan*

When studying boundary value problems for some partial differential equations that arise in applied mathematics, it often becomes necessary to study solutions to a system of partial differential equations that are satisfied by hypergeometric functions of many variables and find explicit linearly independent solutions of the system. Here we choose M.G. Bin-Saad, J.A. Younis function $X_{31}^{(4)}$ among his 50 functions to show how to find linearly independent solutions to PDEs that this function satisfies. **Keywords:** *hypergeometric function; system of partial differential equations; linearly independent solutions.*

1. Introduction and Preliminaries

Solutions of many applied problems involving thermal conductivity and dynamics, electromagnetic oscillation and aerodynamics, quantum mechanics and potential theory are obtainable with the help of hypergeometric (higher and special or transcendent) functions [6], [9], [18], [20]. Functions of such kind are often referred to as special functions of mathematical physics. They mainly appear in the solution of partial differential equations which are dealt with harmonic analysis method [8]. In view of various applications, it is interesting in itself and seems to be very important to conduct continuous research of multiple hypergeometric functions. For instance, in [22], a comprehensive list of hypergeometric functions of three variables as many as 205 is recorded, together with their regions of convergence. It is noted that Riemann's functions and the fundamental solutions of the degenerate second-order partial differential equations are expressible by means of hypergeometric functions of several variables [1]- [6], [10]- [16], [19], [21]. Therefore, in investigation of boundary value problems for these partial differential equations, we need to study the solution of the

system of hypergeometric functions and find explicit linearly independent solutions [11]- [16], [21]. Exton ([24], P. 78-79) introduced 21 complete hypergeometric functions K_1, K_2, \dots, K_{21} of four variables. In [25] Sharma and Parihar introduced 83 complete hypergeometric functions $F_1^{(4)}, F_2^{(4)}, \dots, F_{83}^{(4)}$ of four variables. It is remarkable that out of these 83 functions, the following 19 functions had already appeared in the work of Exton [24] in the different notations:

$$\begin{aligned}
 F_9^{(4)} &= K_1, F_1^{(4)} = K_2, F_{38}^{(4)} = K_3, F_{10}^{(4)} = K_4, F_2^{(4)} = K_5, F_{59}^{(4)} = K_6, \\
 F_{39}^{(4)} &= K_7, F_{11}^{(4)} = K_8, F_{12}^{(4)} = K_9, F_3^{(4)} = K_{10}, F_{60}^{(4)} = K_{11}, F_{40}^{(4)} = K_{12}, \\
 F_{13}^{(4)} &= K_{13}, F_{77}^{(4)} = K_{14}, F_{78}^{(4)} = K_{15}, F_{79}^{(4)} = K_{16}, F_{82}^{(4)} = K_{19}, F_{81}^{(4)} = K_{20}, \\
 F_{83}^{(4)} &= K_{21}.
 \end{aligned}$$

Each hypergeometric function of four variables has the form

$$F^{(4)}(x, y, z, t) = \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \Delta(m, n, p, q) \frac{x^m y^n z^p t^q}{m! n! p! q!},$$

where $\Delta(m, n, p, q)$ is a certain sequence of complex parameters. Here, for example, we choose the function M.G. Bin-Saad, J.A. Younis [26] among its 50 functions

$$\begin{aligned}
 &X_{31}^{(4)}(a_1, a_2, a_3; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t) = \\
 &= \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2m+n} (a_2)_{2p+q} (a_3)_{n+q}}{(c_1)_m (c_2)_n (c_3)_p (c_4)_q} \frac{x^m y^n z^p t^q}{m! n! p! q!}. \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

Let us define linearly independent solutions of partial differential equations that this function $X_{31}^{(4)}$ satisfies.

2. The system of partial differential equations for $X_{31}^{(4)}$.

According to the theory of multiple hypergeometric functions (see [22]), the system of partial differential equations for the Sharma and Parihar hypergeometric function $X_{31}^{(4)}$ is readily seen to be given as follows:

$$\begin{aligned}
 &[(c_1 + x \frac{\partial}{\partial x}) (x \frac{\partial}{\partial x} + 1) x^{-1} - (a_1 + 2x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 1) (a_1 + 2x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})]u = 0, \\
 &[(c_2 + y \frac{\partial}{\partial y}) (y \frac{\partial}{\partial y} + 1) y^{-1} - (a_1 + 2x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) (a_3 + y \frac{\partial}{\partial y} + t \frac{\partial}{\partial t})]u = 0, \\
 &[(c_3 + z \frac{\partial}{\partial z}) (z \frac{\partial}{\partial z} + 1) z^{-1} - (a_2 + 2z \frac{\partial}{\partial z} + t \frac{\partial}{\partial t} + 1) (a_2 + 2z \frac{\partial}{\partial z} + t \frac{\partial}{\partial t})]u = 0, \\
 &[(c_4 + t \frac{\partial}{\partial t}) (t \frac{\partial}{\partial t} + 1) t^{-1} - (a_2 + 2z \frac{\partial}{\partial z} + t \frac{\partial}{\partial t}) (a_3 + y \frac{\partial}{\partial y} + t \frac{\partial}{\partial t})]u = 0,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

where $u(x, y, z, t) = X_{31}^{(4)}(a_1, a_2, a_3; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t)$. Now by making use of some elementary calculations, we find the following system of second

order partial differential equations:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(1-4x)u_{xx} - 4xyu_{xy} - yyu_{yy} + \\ + [c_1 - 2(2a_1 + 3)x]u_x - 2(a_1 + 1)yu_y - a_1(a_1 + 1)u = 0, \\ y(1-y)u_{yy} - 2xyu_{xy} - 2xtu_{xt} - ytu_{yt} - \\ - 2a_3xu_x + [c_2 - (a_1 + a_3 + 1)y]u_y - a_1tu_t - a_1a_3u = 0, \\ z(1-4z)u_{zz} - 4ztu_{zt} - ttu_{tt} + \\ + [c_3 - 2(2a_2 + 3)z]u_z - 2(a_2 + 1)tu_t - a_2(1 + a_2)u = 0, \\ t(1-t)u_{tt} - 2yzu_{yz} - ytu_{yt} - 2ztu_{zt} - a_2yu_y - \\ - 2a_3zu_z + [c_4 - (a_2 + a_3 + 1)t]u_t - a_2a_3u = 0. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Now in order to find the linearly independent solutions of the system (2.2) we consider u as in the form $u = x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta w$ is an unknown function, and α, β, γ and δ are constants which are to be determined. Calculating the corresponding derivatives and substituting them into system (2.2), we have

$$\left\{ \begin{array}{l} x(1-4x)w_{xx} - 4xyw_{xy} - yyw_{yy} + \{c_1 + 2\alpha - \\ 2[2(a_1 + 2\alpha + \beta) + 3]x\}w_x - 2[(a_1 + 2\alpha + \beta) + 1]yw_y + \\ [\alpha(c_1 + \alpha - 1)x^{-1} - (a_1 + 2\alpha + \beta)(a_1 + 2\alpha + \beta + 1)]w = 0, \\ y(1-y)w_{yy} - 2xyw_{xy} - 2xtw_{xt} - ytw_{yt} - 2(a_3 + \beta + \delta)xw_x \\ + \{c_2 + 2\beta - [(a_1 + 2\alpha + \beta) + (a_3 + \beta + \delta) + 1]y\}w_y - (a_1 + \\ 2\alpha + \beta)tw_t + [\beta(c_2 + \beta - 1)y^{-1} - (a_1 + 2\alpha + \beta)(a_3 + \beta + \delta)]w = 0, \\ z(1-4z)w_{zz} - 4ztw_{zt} - ttw_{tt} + \{c_3 + 2\gamma - \\ 2[2(a_2 + 2\gamma + \delta) + 3]z\}w_z \\ - 2[(a_2 + 2\gamma + \delta) + 1]tw_t + [\gamma(c_3 + \gamma - 1)z^{-1} - \\ (a_2 + 2\gamma + \delta)(a_2 + 2\gamma + \delta + 1)]w = 0, \\ t(1-t)w_{tt} - 2yzw_{yz} - ytw_{yt} - 2ztw_{zt} - (a_2 + 2\gamma + \delta)yw_y - \\ 2(a_3 + \beta + \delta)zw_z + \{c_4 + 2\delta - [(a_2 + 2\gamma + \delta) + (a_3 + \beta + \delta) + 1]t\}w_t \\ + [\delta(c_4 + \delta - 1)t^{-1} - (a_2 + 2\gamma + \delta)(a_3 + \beta + \delta)]w = 0. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

It is noted that the system (2.3) is analogical to the system (2.2). Therefore, it is required that the following conditions should be satisfied:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(c_1 + \alpha - 1) = 0, \\ \beta(c_2 + \beta - 1) = 0, \\ \gamma(c_3 + \gamma - 1) = 0, \\ \delta(c_4 + \delta - 1) = 0. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

It is not difficult to see that the system (2.4) satisfies the following solutions:

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\alpha :=$	0	$1 - c_1$	0	0	0	$1 - c_1$	$1 - c_1$	$1 - c_1$
$\beta :=$	0	0	$1 - c_2$	0	0	$1 - c_2$	0	0
$\gamma :=$	0	0	0	$1 - c_3$	0	0	$1 - c_3$	0
$\delta :=$	0	0	0	0	$1 - c_4$	0	0	$1 - c_4$

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\
 \alpha := & 0 & 0 & 0 & 1 - c_1 & 1 - c_1 & 1 - c_1 & 0 & 1 - c_1 \\
 \beta := & 1 - c_2 & 1 - c_2 & 0 & 1 - c_2 & 1 - c_2 & 0 & 1 - c_2 & 1 - c_2 \\
 \gamma := & 1 - c_3 & 0 & 1 - c_3 & 1 - c_3 & 0 & 1 - c_3 & 1 - c_3 & 1 - c_3 \\
 \delta := & 0 & 1 - c_4 & 1 - c_4 & 0 & 1 - c_4 & 1 - c_4 & 1 - c_4 & 1 - c_4
 \end{array} \quad (2.5)$$

Finally, substituting all eight solutions (2.5) into (2.3), we find the following linearly independent solutions of the system (2.2):

$$u_1(x, y, z, t) = X_{31}^{(4)}(a_1, a_2, a_3; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t), \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
 u_2(x, y, z, t) &= \\
 &= x^{1-c_1} X_{31}^{(4)}(a_1 + 2 - 2c_1, a_2, a_3; 2 - c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t), \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_3(x, y, z, t) &= y^{1-c_2} \times \\
 &\times X_{31}^{(4)}(a_1 + 1 - c_2, a_2, a_3 + 1 - c_2; c_1, c_2 + 2 - 2c_2, c_3, c_4; x, y, z, t), \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_4(x, y, z, t) &= z^{1-c_3} \times \\
 &\times X_{31}^{(4)}(a_1, a_2 + 2 - 2c_3, a_3; c_1, c_2, c_3 + 2 - 2c_3, c_4; x, y, z, t), \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_5(x, y, z, t) &= t^{1-c_4} \times \\
 &\times X_{31}^{(4)}(a_1, a_2 + 1 - c_4, a_3 + 1 - c_4; c_1, c_2, c_3, 2 - c_4; x, y, z, t), \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_6(x, y, z, t) &= x^{1-c_1} y^{1-c_2} \times \\
 &\times X_{31}^{(4)}(a_1 + 3 - 2c_1 - c_2, a_2, a_3 + 1 - c_2; 2 - c_1, 2 - c_2, c_3, c_4; x, y, z, t) \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_7(x, y, z, t) &= x^{1-c_1} z^{1-c_3} \times \\
 &\times X_{31}^{(4)}(a_1 + 2 - 2c_1, a_2 + 2 - 2c_3, a_3; 2 - c_1, c_2, 2 - c_3, c_4; x, y, z, t) \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_8(x, y, z, t) &= x^{1-c_1} t^{1-c_4} X_{31}^{(4)}(a_1 + 2 - 2c_1, a_2 + 1 - c_4, \\
 &\quad a_3 + 1 - c_4; c_1 + 2 - 2c_1, c_2, c_3, 2 - c_4; x, y, z, t), \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_9(x, y, z, t) &= y^{1-c_2} z^{1-c_3} X_{31}^{(4)}(a_1 + 1 - c_2, \\
 &\quad a_2 + 2 - 2c_3, a_3 + 1 - c_2; c_1, 2 - c_2, 2 - c_3, c_4; x, y, z, t), \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{10}(x, y, z, t) &= y^{1-c_2} t^{1-c_4} X_{31}^{(4)}(a_1 + 1 - c_2, a_2 + 1 - c_4, \\
 &\quad a_3 + 2 - c_2 - c_4; c_1, 2 - c_2, c_3, 2 - c_4; x, y, z, t), \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{11}(x, y, z, t) &= z^{1-c_3} t^{1-c_4} X_{31}^{(4)}(a_1, a_2 + 3 - 2c_3 - c_4, \\
 &\quad a_3 + 1 - c_4; c_1, c_2, 2 - c_3, 2 - c_4; x, y, z, t) \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{12}(x, y, z, t) &= x^{1-c_1} y^{1-c_2} z^{1-c_3} X_{31}^{(4)}(a_1 + 3 - 2c_1 - c_2, \\
 &\quad a_2 + 2 - 2c_3, a_3 + 1 - c_2; 2 - c_1, 2 - c_2, 2 - c_3, c_4; x, y, z, t) \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{13}(x, y, z, t) &= x^{1-c_1} y^{1-c_2} t^{1-c_4} X_{31}^{(4)}(a_1 + 3 - 2c_1 - c_2, a_2 + 1 - c_4, \\
 &\quad a_3 + 2 - c_2 - c_4; 2 - c_1, 2 - c_2, c_3, 2 - c_4; x, y, z, t) \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{14}(x, y, z, t) &= x^{1-c_1} z^{1-c_3} t^{1-c_4} X_{31}^{(4)}(a_1 + 2 - 2c_1, a_2 + 3 - 2c_3 - c_4, \\
 &\quad a_3 + 1 - c_4; 2 - c_1, c_2, 2 - c_3, 2 - c_4; x, y, z, t) \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{15}(x, y, z, t) &= y^{1-c_2} z^{1-c_3} t^{1-c_4} X_{31}^{(4)}(a_1 + 1 - c_2, a_2 + 3 - 2c_3 - c_4, \\
 &\quad a_3 + 2 - c_2 - c_4; c_1, 2 - c_2, 2 - c_3, 2 - c_4; x, y, z, t) \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{16}(x, y, z, t) &= x^{1-c_1} y^{1-c_2} z^{1-c_3} t^{1-c_4} X_{31}^{(4)}(a_1 + 3 - 2c_1 - c_2, a_2 + \\
 &\quad + 3 - 2c_3 - c_4, a_3 + 2 - c_2 - c_4; 2 - c_1, 2 - c_2, 2 - c_3, 2 - c_4; x, y, z, t) \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Thus, we have constructed a system of second-order partial differential equations of hypergeometric type and determined 16 linearly independent solutions

near the point $(0, 0, 0, 0)$, which are expressed as hypergeometric functions of 4 second-order variables.

REFERENCES

1. Altin A., Some expansion formulas for a class of singular partial differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.* 1982. Vol. 85. № 1. P. 42–46.
2. Appell P., Kampe de Fériet J., *Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes Hermite*, Gauthier-Villars, 1926.
3. Barros-Neto J., Gelfand I. M., Fundamental solutions for the Tricomi operator, *Duke Math. J.* 1999. Vol. 98. № 3. P. 465–483.
4. Barros-Neto J., Gelfand I. M., Fundamental solutions for the Tricomi operator II, *Duke Math. J.* 2002. Vol. 111. № 3. P. 561–584.
5. Barros-Neto J., Gelfand I. M., Fundamental solutions for the Tricomi operator III, *Duke Math. J.* Vol. 128. № 1. P. 119–140.
6. Bers L., *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics*, New York: Wiley, 1958.
7. Maged G. Bin-Saad, Symbolic operational images and decomposition formulas for hypergeometric functions, *J. Math. Anal. Appl.* 2011. Vol. 376. P. 451–468.
8. Erd'elyi A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill Book Company, 1953. Vol. 1.
9. Frankl F.I., *Selected Works in Gas Dynamics*, Moscow: Nauka, 1973.
10. Fryant A. J., Growth and complete sequences of generalized bi-axially symmetric potentials, *J. Differential Equations*. 1979. Vol. 31. № 2. P. 155–164.
11. Hasanov A., Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation, *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2007. Vol. 52. № 8. P. 673–683.
12. Hasanov A., Some solutions of generalized Rassias's equation, *Intern. J. Appl. Math. Stat.* 2007. Vol. 8. № 7. P. 20–30.
13. Hasanov A., The solution of the Cauchy problem for generalized Euler-Poisson-Darboux equation, *Intern. J. Appl. Math. Stat.* 2007. Vol. 8. № 7. P. 30–44.
14. Hasanov A., Fundamental solutions for degenerated elliptic equation with two perpendicular lines of degeneration, *Intern. J. Appl. Math. Stat.* 2008. Vol. 13. № 8. P. 41–49.
15. A. Hasanov A., Karimov E.T., Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients, *Appl. Math. Letters*. 2009. Vol. 22. P. 1828–1832.
16. Hasanov A., Rassias J.M., Turaev M., Fundamental solution for the generalized Elliptic Gellerstedt Equation, *Book: "Functional Equations, Difference*

- Inequalities and ULAM Stability Notions*", Nova Science Publishers Inc. 2010. P. 73–83.
17. Miller K.S., Ross B., *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, New York, 1993.
 18. Lohofer G., Theory of an electromagnetically deviated metal sphere. 1: Absorbed power, *SIAM J. Appl. Math.*. 1989. Vol. 49. P. 567-581.
 19. McCoy P.A., Polynomial approximation and growth of generalized axisymmetric potentials, *Canad. J. Math.*. 1979. Vol. 31. № 1. P. 49–59.
 20. Niukkanen A.W., Generalized hypergeometric series arising in physical and quantum chemical applications, *J. Phys. A: Math. Gen.*. 1983. Vol. 16. P. 1813-1825.
 21. Salakhitdinov M.S., Hasanov F., A solution of the Neumann-Dirichlet boundary value problem for generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation, *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2008. Vol. 53. № 4. P. 355-364.
 22. Srivastava H.M., Karlsson P.W., *Multiple Gaussian Hypergeometric Series*, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), New York: Wiley, 1985.
 23. Srivastava H.M., Manocha H.L., *A treatise on generating functions*, New York: Bristone, 1984.
 24. Exton H., *Multiple Hypergeometric Functions and Applications*, London: Halsted Press, 1976.
 25. Sharma C., Parihar C.L., Hypergeometric functions of four variables, *Indian Acad. Math.*. 1989. Vol. 11. P. 121–133.
 26. Bin-Saad M.G., Younis J.A., Integral representations involving new hypergeometric functions of four variables, *Journal of Fractional Calculus and Applications*. 2019. Vol. 10. № 2. P. 77–91.

Hasanov Anvar — Scientific laboratory of differential equations and their applications, DSc, Leading researcher, Professor. E-mail: anvarhasanov@yahoo.com

Djurayev Norqul — Associate Professor of the department of Higher Mathematics. E-mail: norqul.djurayev@mail.ru

ON LOCAL LIMIT PROPERTIES OF MARKOV BRANCHING PROCESSES ALLOWING IMMIGRATION WITHOUT HIGH-ORDER DISTRIBUTION MOMENTS

Azam A.Imomov, Abror Kh. Meyliev, S. Hazratqulov

Karshi State University, Karshi, Uzbekistan

We consider the Markov branching process allowing immigration. We are dealing with the critical case, in which the immigration law has infinite mean and the offspring law have an infinite variance. We study the asymptotic properties of transition functions and their asymptotic expansion, in the case when the process is transient. The main mathematical tool of our research is the generating functions with regularly varying tails in the sense of Karamata. **Keywords:** *slow variation, Markov branching process, immigration, transition functions, state space classification, generating functions, local limit theorem.*

1. Background, aim and basic assumptions

We consider a continuous-time Markov branching process allowing immigration. Our main analytical tool is the slow variation (or more general, a regular variation) conception in the sense of Karamata. The slow variation property arises in many issues, but it usually remains rather hidden. For example, denoting by $p(n)$ the perimeter of an equilateral polygon with n sides inscribed in a circle with a diameter of length d , one can check that the function $\pi(n) := p(n)/d$ converges to π in the sense of Archimedes, but it slowly varies at infinity in the sense of Karamata. In fact, it is known that $p(n) = dn \sin(\pi/n)$ and then it follows $\pi(\lambda x)/\pi(x) \rightarrow 1$ as $x \rightarrow \infty$ for each $\lambda > 0$. Thus, $\pi(x)$ is so slowly approaching π that it can be suspected that “ π is not quite constant”.

Application of Karamata functions in the branching processes theory allows one to bypass severe constraints concerning existence of the higher-order moments of the infinitesimal characteristics of the process under study. Zolotarev was one of the first who demonstrated an encouraging prospect of application of the slow variation conception in the theory of Markov branching processes and has obtained principally new results on asymptote of the survival probability of the process without immigration.

We deal with the model of population growth called continuous-time Markov branching process allowing immigration (MBPI). This process can have a simple physical interpretation: a population size changes not only as a result of reproduction and disappearance of existing individuals, but also at the random stream of inbound “extraneous” individuals from outside. The population of individuals evolves as follows. Each individual existing at time $t \in \mathcal{T} := [0, +\infty)$ independently of his history and of each other for a small time interval $(t, t + \varepsilon)$ transforms into $j \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ individuals with probability $a_j\varepsilon + o(\varepsilon)$ and, with probability $1 + a_1\varepsilon + o(\varepsilon)$, stays to live or makes evenly one descendant as $\varepsilon \downarrow 0$, where $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ and \mathbb{N} is the set of natural numbers. Here $\{a_j\}$ are the intensities of individuals transformation such that $a_j \geq 0$ for $j \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ and

$$0 < a_0 < -a_1 = \sum_{j \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}} a_j < \infty.$$

Independently of these processes, for each time interval $j \in \mathbb{N}$, new individuals leave the population with a probability $b_j\varepsilon + o(\varepsilon)$ and the immigration does not occur with a probability $1 + b_0\varepsilon + o(\varepsilon)$. The immigration intensities $b_j \geq 0$ for $j \in \mathbb{N}$ and

$$0 < -b_0 = \sum_{j \in \mathbb{N}} b_j < \infty.$$

Newly arrived individuals undergo transformation in accordance with the reproduction law generated by the intensities $\{a_j\}$, see [9, Ch. VII, Sect. 1]. Thus, the process under consideration is completely determined by infinitesimal generating functions

$$f(s) = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} a_j s^j \quad \text{and} \quad g(s) = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} b_j s^j \quad \text{for} \quad s \in [0, 1).$$

Let $X(t)$ be the population size at a time $t \in \mathcal{T}$ in MBPI. This is a homogenous continuous-time Markov chain with the state space $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}_0$ and transition functions

$$p_{ij}(t) := \mathbb{P}_i \{X(t) = j\} = \mathbb{P} \{X(t + \tau) = j \mid X(\tau) = i\} \quad \tau, t \in \mathcal{T}$$

for all $i, j \in \mathcal{S}$. An appropriate probability generating function, see [4],

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij}(t) s^j = \left(F(t; s) \right)^i \exp \left\{ \int_0^t g(F(u; s)) du \right\},$$

where $F(t; s)$ is generating function of $Z(t)$ is the Markov branching process initiated by a single particle without immigration components.

It is known that the classification of the state space \mathcal{S} depends on a value of the parameter $m := f'(1-)$. According to the general classification of continuous-time Markov chains, the process $X(t)$ is called *subcritical*, *critical*, and *supercritical* if respectively $m < 0$, $m = 0$ and $m > 0$, see [9, Ch VII, Sect. 2]. We consider the critical case only.

We will substantially use the approaches of the theory of regularly varying functions in the sense of Karamata, see, for instance, [2] and [8]. We recall that a function $L(x)$ is called *slowly varying at infinity* (\mathbf{SV}_∞) if it is defined on $(0, \infty)$, positive and

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1$$

for each $\lambda > 0$. The representation theorem states that each \mathbf{SV}_∞ -function may be written in the form

$$L(x) = c(x) \exp \left(\int_a^x \left(\frac{\varepsilon(u)}{u} \right) du \right)$$

for some $a > 0$, where $c(x)$ is a bounded function such that $c(x) \rightarrow c > 0$ and $\varepsilon(x)$ – continuous function and $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$. If $c(x) \equiv c$ then $L(x)$ is said to be the *normalised* \mathbf{SV}_∞ . A function $V(x)$ is called *regularly varying at infinity* (\mathbf{RV}_∞) with index ρ if it is defined on $(0, \infty)$ and

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(\lambda x)}{V(x)} = \lambda^\rho \quad \text{for all } \lambda > 0.$$

This is why each \mathbf{RV}_∞ -function can be expressed as $V(x) = x^\rho L(x)$ for some $L(x)$ being an \mathbf{SV}_∞ -function.

We make the following assumptions on $f(s)$ and $g(s)$:

$$[f_\nu] \quad f(s) = (1-s)^{1+\nu} \mathcal{L} \left(\frac{1}{1-s} \right)$$

and

$$[g_\delta] \quad g(s) = -(1-s)^\delta \ell \left(\frac{1}{1-s} \right)$$

for all $s \in [0, 1)$, where $0 < \nu, \delta < 1$ and functions $\mathcal{L}(\cdot)$, $\ell(\cdot)$ are \mathbf{SV}_∞ . By the criticality of our process, the assumption $[f_\nu]$ implies $2b := f''(1-) = \infty$.

If $b < \infty$ then $[f_\nu]$ holds with $\nu = 1$ and $\mathcal{L}(t) \rightarrow b$ as $t \rightarrow \infty$. Similarly, a generating function $g(s)$ of the form $[g_\delta]$ generates the law of immigrants arrival having the moment of δ -order. If $g'(1-) < \infty$ then $[g_\delta]$ holds with $\delta = 1$ and $\ell(t) \rightarrow g'(1-)$ as $t \rightarrow \infty$.

Throughout the paper $[f_\nu]$ and $[g_\delta]$ will be our Basic assumptions.

2. Main Results

Let

$$L(x) := \frac{\ell(x)}{\mathcal{L}(x)},$$

and $\gamma = \delta - \nu$.

All appearances, the three cases can be divided concerning the classification of the state space \mathcal{S} , depending on a sign of γ . It was shown in [6], that \mathcal{S} is positive-recurrent if $\gamma > 0$, and it is transient if $\gamma < 0$. The special case $\gamma = 0$ implies that $g(s) = f'(s)$ and that $L(t) \rightarrow 1 + \nu$ as $t \rightarrow \infty$. And we get another population process called *Markov Q-process* instead of MBPI. We refer the reader to [3] and [5] for the details on the Markov Q-process; see also [2, Ch I, Part D, §14] and [7] for the discrete-time case.

Our theorems observe asymptotic expansion of transition function $p_{00}(t)$. Further we use a designation

$$\tau(t) := \frac{(\nu t)^{1/\nu}}{\mathcal{N}(t)},$$

where the function $\mathcal{N}(x)$ is \mathbf{SV}_∞ such that

$$\mathcal{N}^\nu(t)\mathcal{L}(\tau(t)) \rightarrow 1 \quad \text{as} \quad t \rightarrow \infty.$$

Theorem 1. Let Basic assumptions hold. If $\gamma > 0$, then

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{00}(t) = \text{constant} \neq 0.$$

More precisely there exists a \mathbf{SV}_∞ -function $L_0(t)$, such that $L_0(t)L^{-1}(t) \rightarrow 1$ and

$$-\ln p_{00}(t) = \frac{1}{\gamma}L_0(1)(1 + o(1)) \quad \text{as} \quad t \rightarrow \infty.$$

Theorem 2. Let Basic assumptions hold. If $\gamma < 0$, then

$$-(\tau(t))^{-|\gamma|} \ln p_{00}(t) = \frac{1}{|\gamma|}L(\tau(t))(1 + o(1)) \quad \text{as} \quad t \rightarrow \infty.$$

The above limit theorems allow us to obtain complete information about all possible states of the process under consideration. After all, it is known that the ratio limit

$$\left\{ \mu_j := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p_{ij}(t)}{p_{00}(t)} \right\} \quad \text{for } i, j \in \mathcal{S}$$

is an invariant measure, which is unique up to multiplicative constants. Besides, it is known that the GF $\mathcal{M}(s) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_j s^j$ satisfies the Schroeder type functional equation; see [4]. And therefore, the asymptotic form of transition functions $p_{ij}(t)$ follows from that of $p_{00}(t)$.

REFERENCES

1. *K. B. Athreya, P. E. Ney.* Branching processes. New York: Springer, 1972.
2. *N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels.* Regular Variation. Cambridge, 1987.
3. *A. A. Imomov.* On conditioned limit structure of the Markov branching process without finite second moment // Malaysian Jour. Math. Sci. 2017. Vol. 11. № 3. P. 393–422.
4. *A. A. Imomov.* On long-term behavior of continuous-time Markov branching processes allowing immigration // J Siberian Fed. Univ.: Math. and Phys. 2014. Vol. 7. № 4. P. 443–454.
5. *A. A. Imomov.* On Markov analogue of Q-processes with continuous time // Theory of Prob. and Math. Stat. 2012. Vol. 84. P. 57–64.
6. *J. Li, A. Chen, A. G. Pakes.* Asymptotic properties of the Markov branching process with immigration // J of Theor. Prob. 2012. Vol. 25. № 1. P. 122–143.
7. *A. G. Pakes.* Revisiting conditional limit theorems for the mortal simple branching process // Bernoulli. 1999. Vol. 5. № 6. P. 969–998.
8. *E. Seneta.* Regularly varying functions. Berlin: Springer, 1976.
9. *B. A. Sevastyanov.* Branching processes. Moscow: Nauka, 1971. (Russian).

Azam A.Imomov — Doctor of Sciences, Head of Department, Faculty of Mathematics and Computer Sciences. E-mail: *imomov_azam@mail.ru*

Abror Kh.Meyliev — Researcher. E-mail: *abror_meyliyev@mail.ru*

Sardor Hazratqulov — Student.

ON THE DYNAMICS OF THE FORMATION OF INDEPENDENT WORK ON THE PROBABILITY THEORY FOR STUDENTS

E. O. Sharipov¹, S. Yu. Shodiyev², B. A. Tursunov³

¹*Karshi Engineering-Economics Institute, Karshi, Uzbekistan*

^{2,3}*Karshi State University, Karshi, Uzbekistan*

In this article, the dynamics of the formation of independent learning skills of the students of “5130100 – Mathematics” educational direction in learning the practical application of the theoretical knowledge acquired from the theory of probability by logical thinking and then using proof is presented. **Keywords:** *asymptotic formula, event probability, hypothesis, competence, experiment, mathematical expectation.*

Introduction

The level of students’ assimilation of the subject material explained to the students in the training sessions of higher education institutions depends on the concepts and the pedagogical skills of the professors and teachers, innovative activities, as well as the teaching method used, the use of demonstration tools and technical means, the use of information and communication technologies. Therefore, the most important thing is to effectively organize educational activities with broad and deep knowledge of one’s subject on a scientific basis.

As a result of the analysis of educational literature based on the qualification requirements, curriculum, science programs accepted in all bachelor’s education areas of higher education institutions, students are required to know the logical basis for proving theorems in the teaching of mathematics, advanced education it was determined that it is necessary to form independent learning skills using lim technologies. As a result, this process leads students to think freely and independently.

1. Literature review

The role of event and process modeling in subjects probability theory and mathematical statistics was studied by Laplace, Pearson, M. I. Grabar, K. A. Krasnyanskaya, G. I. Ivchenko, Yu. I. Medvedev, Sh. Farmonov and others [1], [2].

The scheme of development of independent learning skills using the algorithm of logical proof of theorems in mathematics bachelor's education programs of higher education institutions is presented in Figure 1 [3].

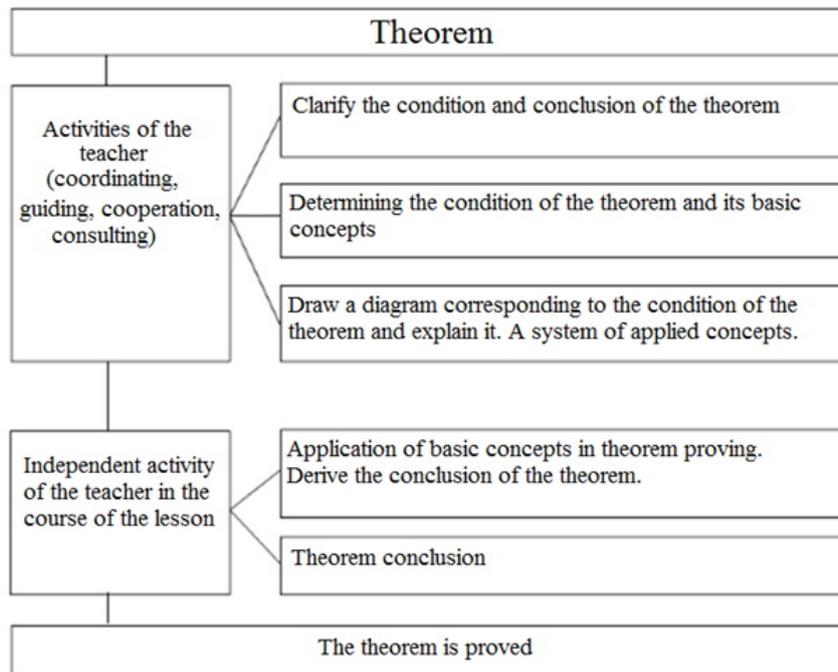


Figure 1. Scheme of logical proof of theorems

Below we present examples of increasing the motivation of independent theorem proving based on the integration of teacher and student activities in proving theorems.

2. DISCUSSION

Example 1. Bernoulli's formula in which the event A occurs m times in n independent experiments or trials are in the form of $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$. When m and n are large numbers in this formula $P_n(m)$, its calculation leads to certain difficulties, therefore, the question arises of finding another asymptotic formula for the probability $n \rightarrow \infty$.

Where, when $p = q = \frac{1}{2}$, the asymptotic formula was found by the French mathematician Mouvre in 1730, for $p \in (0, 1)$ in 1783, english scientist Laplace found an asymptotic formula.

Theorem. If $P(A) = p$ ($0 < p < 1$) is equal in n independent experiments (trials), the probability that event A will occur m times is equal to $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$ at $n \rightarrow \infty$. In this case, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $x = x_{n,m} = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{|m-np|}{\sqrt{npq}} < c$.

1. Teacher’s activity (coordinating, guiding, cooperation, consulting).

1.1. **The condition of the theorem** is that the probability of event A in n independent experiments (tests) is constant and equal to $P(A) = p(0 < p < 1)$.

Summary of the theorem. The probability that event A will occur at least m times in $n \rightarrow \infty$ is approximately equal to $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$.

1.2. **Basic concepts:** the probability that event A will occur exactly m times in n independent experiments (trials) Bernoulli’s formula: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

Basic Concept Summary: Applying Stirling’s formula: $s! = \sqrt{2\pi s} \cdot s^s \cdot e^{-s} \cdot e^{\theta_s}$, where $\theta_s \leq \frac{1}{12s}$ to Bernoulli’s formula: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

1.3. **The system of basic concepts used.**

- 1) Using the Stirling formula for $n!$, $m!$ and $(n - m)!$
- 2) Simplify a fractional expression.
- 3) Using mathematical expressions $|z| < 1$, $\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$ and $\ln(1 - z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots$.
- 4) Simplifying expression $\binom{np}{m} \binom{nq}{n-m}^{n-m}$ and evaluation of subtraction $|\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}|$.
- 5) Determination of m , $n - m$ and $\frac{m}{np}$ from equation $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

2. Student’s independent activity in the course of the lesson.

2.1. Application of basic concepts in theorem proving:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \tag{1}$$

$$P_n(m) = \frac{\sqrt{2\pi \cdot n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot e^{\theta_n}}{\sqrt{2\pi \cdot m} \cdot m^m \cdot e^{-m} \cdot e^{\theta_m}} \times \frac{p^m \cdot q^{n-m} \cdot n^{-m} \cdot n^m}{\sqrt{2\pi \cdot (n-m)} \cdot (n-m)^{n-m} \cdot e^{-(n-m)} \cdot e^{\theta_{n-m}}},$$

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} \cdot \left(\frac{np}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} \cdot e^{\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}} \tag{2}$$

$$|\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}| = |\theta_{nm}| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} \right) \quad (3)$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \Rightarrow m = np + \sqrt{npq}x = np \left(1 + \sqrt{\frac{q}{np}}x \right) \quad (4)$$

from this,

$$n - m = n - np - \sqrt{npq}x = nq - \sqrt{npq}x = nq \left(1 - \sqrt{\frac{p}{nq}}x \right) \quad (5)$$

$$\frac{m}{np} = \frac{np \left(1 + \sqrt{\frac{q}{np}}x \right)}{np} = \left(1 + \sqrt{\frac{q}{np}}x \right) \quad (6)$$

$$\frac{n - m}{nq} = \frac{nq - \sqrt{npq} \cdot x}{nq} = 1 - \sqrt{\frac{p}{nq}}x \quad (7)$$

$$\begin{aligned} A_n &= \left(\frac{np}{m} \right)^m \left(\frac{nq}{n-m} \right)^{n-m} = \left(\frac{m}{np} \right)^{-m} \left(\frac{n-m}{nq} \right)^{-(n-m)} \stackrel{(6),(7)}{=} \\ &= \left(1 + \sqrt{\frac{q}{np}}x \right)^{-m} \left(1 - \sqrt{\frac{p}{nq}}x \right)^{-(n-m)} \end{aligned} \quad (8)$$

Now let's take the natural logarithm of this equation and according to equations (4), (5):

$$\ln A_n = -np \left(1 + \sqrt{\frac{q}{np}}x \right) \ln \left(1 + \sqrt{\frac{q}{np}}x \right) - nq \left(1 - \sqrt{\frac{p}{nq}}x \right) \ln \left(1 - \sqrt{\frac{p}{nq}}x \right) \quad (9)$$

According to the basic concept 3:

$$\begin{aligned} \ln A_n &= -np \left(1 + \sqrt{\frac{q}{np}}x \right) \left[\sqrt{\frac{q}{np}}x - \frac{1}{2}x^2 \frac{q}{np} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right] - \\ &- nq \left(1 - \sqrt{\frac{p}{nq}}x \right) \left[-\sqrt{\frac{p}{nq}}x - \frac{1}{2}x^2 \frac{p}{nq} - o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right] = -\frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

from this, $A_n = e^{-\frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$ is derived.

$$\begin{aligned} |\theta_{nm}| &\leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} \right) = \frac{1}{12n} \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{n}} + \frac{1}{\frac{n-m}{n}} \right) = \\ &\stackrel{(4),(5)}{=} \frac{1}{12n} \left(1 + \frac{1}{p + \sqrt{\frac{qp}{n}}x} + \frac{1}{q - \sqrt{\frac{qp}{n}}x} \right) \end{aligned}$$

2.1. As a result of the application of basic concepts, the conclusion of the theorem is derived:

$$\sqrt{npq} \cdot P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{npq} \cdot \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} \cdot \left(\frac{np}{m} \right)^m \cdot \left(\frac{nq}{n-m} \right)^{n-m} \times$$

$$\begin{aligned}
 \times e^{\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{npq} \cdot \sqrt{\frac{n}{np\left(1 + \sqrt{\frac{q}{np}}x\right) nq\left(1 - \sqrt{\frac{p}{nq}}x\right)}} \times \\
 &\times e^{-\frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \cdot e^{\frac{1}{12n}\left(1 + \frac{1}{p + \sqrt{\frac{qp}{n}}x} + \frac{1}{q - \sqrt{\frac{qp}{n}}x}\right)} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(1 + \sqrt{\frac{q}{np}}x\right) \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{p}{nq}}x\right)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \times \\
 &\times e^{\frac{1}{12n}\left(1 + \frac{1}{p + \sqrt{\frac{qp}{n}}x} + \frac{1}{q - \sqrt{\frac{qp}{n}}x}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}
 \end{aligned}$$

3. So, for the natural number $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, from this follows the proof of the theorem.

3. RESULTS

In this case, we express the H_0 null hypothesis: there is no significant difference between two samples in the formation of mathematical competence when using the scheme of logical proof of theorems, H_1 alternative hypothesis: there is a significant difference between the samples in the formation of professional competence when using the scheme of logical proof of theorems. In the experiment, the results of 145 students were analyzed for the experimental and control groups using the method of selection from groups based on the criterion of proximity of knowledge levels (see Table 1).

Table 1

The results of theoretical written work on the subject “Theory of Probability and Mathematical Statistics” of the 2nd year students at Karshi State University at the beginning of the fall semester of 2021

Groups	5 “excellent”	4 “good”	3 “satisfactory”	2 “unsatisfactory”	All
EG	19	22	24	9	74
CG	17	20	24	10	71
Total:	36	42	48	19	145

H_0 : “The experimental group (EG) and the control group (CG) have the same distribution of grades”. We will test this hypothesis with the value level $\alpha = 0,05$. Here is an alternative hypothesis H_1 : “Experimental group

and control group have different grade distributions". We use Pearson's compatibility criterion:

$$\chi^2 = n_1 \cdot n_2 \cdot \sum_{j=1}^m \frac{1}{n_{1j} + n_{2j}} \left(\frac{n_{1j}}{n_1} - \frac{n_{2j}}{n_2} \right)^2 = \frac{1}{n_1 n_2} \cdot \sum_{j=1}^m \frac{(n_{1j} n_2 - n_{2j} n_1)^2}{n_{1j} + n_{2j}}.$$

According to Pearson's theorem, this statistic tends to χ^2 distribution with degrees of freedom equal to $v = m - 1$ under the condition that the H_0 hypothesis is true [49, 80].

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{1}{n_1 n_2} \cdot \sum_{j=1}^m \frac{(n_{1j} n_2 - n_{2j} n_1)^2}{n_{1j} + n_{2j}} = \frac{1}{74 \cdot 71} \left(\frac{(19 \cdot 71 - 17 \cdot 74)^2}{19 + 17} + \right. \\ &\left. + \frac{(22 \cdot 71 - 20 \cdot 74)^2}{22 + 20} + \frac{(24 \cdot 71 - 24 \cdot 74)^2}{24 + 24} + \frac{(9 \cdot 71 - 10 \cdot 74)^2}{9 + 10} \right) = 0,19 \end{aligned}$$

From χ^2 distribution table, we obtain the critical value corresponding to the degree of freedom $v = 4 - 1 = 3$ and $1 - \alpha = 0,95$. The critical point is that $\chi_{eg.}^2 = \chi_{1-\alpha}^2 = \chi_{0,95}^2(3) = 7,815$ and $\chi_{cg.}^2 = 0,19 < \chi_{eg.}^2 = 7,815$ have the same grade distribution for both groups.

Table 2

The results of theoretical written work on the subject "Theory of Probability and Mathematical Statistics" at the end of the 2nd year students at Karshi State University in the fall semester of 2021

Groups	5 "excellent"	4 "good"	3 "satisfactory"	2 "unsatisfactory"	All
EG	31	30	11	2	74
CG	17	21	24	9	71
Total:	48	51	35	11	145

While,

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{1}{74 \cdot 71} \left(\frac{(31 \cdot 71 - 17 \cdot 74)^2}{31 + 17} + \frac{(30 \cdot 71 - 21 \cdot 74)^2}{30 + 21} + \right. \\ &\left. + \frac{(11 \cdot 71 - 24 \cdot 74)^2}{11 + 24} + \frac{(2 \cdot 71 - 9 \cdot 74)^2}{2 + 9} \right) = 14,90. \end{aligned}$$

$\chi_{eg.}^2 = 14,90 > \chi_{cg.}^2 = 7,815$ here it can be seen that the hypothesis H_1 is reasonable.

Now we compare them by calculating the mathematical expectation and variance for each group.

$$M(X_{exp.}) = \frac{5 \cdot 31 + 4 \cdot 30 + 3 \cdot 11 + 2 \cdot 2}{74} = 4,21;$$

$$M(X_{theory}) = \frac{5 \cdot 17 + 4 \cdot 21 + 3 \cdot 24 + 2 \cdot 9}{71} = 3,64.$$

Now we calculate the quadratic mathematical expectation to calculate the variance:

$$M(X_{exp.}^2) = \frac{5^2 \cdot 31 + 4^2 \cdot 30 + 3^2 \cdot 11 + 2^2 \cdot 2}{74} = 18,40;$$

$$M(X_{theory}^2) = \frac{5^2 \cdot 17 + 4^2 \cdot 21 + 3^2 \cdot 24 + 2^2 \cdot 9}{71} = 14,26.$$

From this we calculate and find $D(X_{exp.}) = M(X_{exp.}^2) - (M(X_{exp.}))^2 = 0,67$ and $D(X_{theory}) = M(X_{theory}^2) - (M(X_{theory}))^2 = 1,01$.

In the control group, the situation did not change much, but in the experimental group, the average score increased and the deviation of the scores from the average score decreased even more. That is, the students' knowledge levels have almost reached each other.

In Tables 1 and 2, we present diagrams of the level of mastery in the experimental and control groups at the beginning and end of the experiment, respectively (Figures 2 and 3).

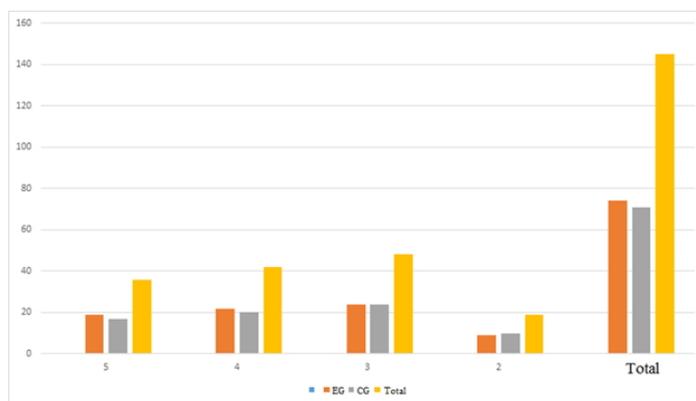


Figure 2. A diagram of students' mastery at the beginning of the experiment in "Probability Theory and Mathematical Statistics"

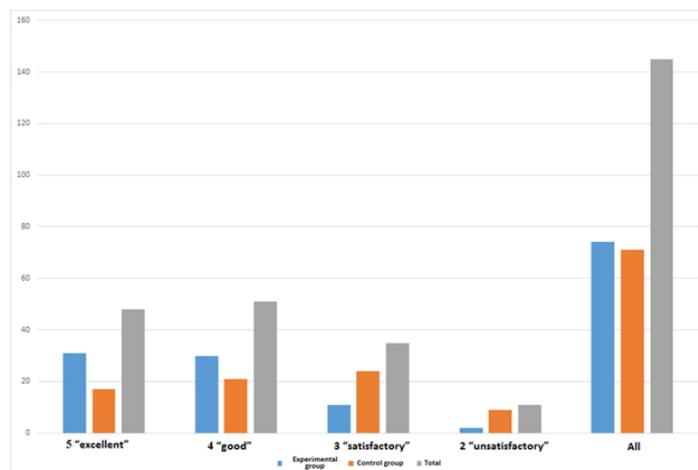


Figure 3. Diagram of students' mastery at the end of the experiment in "Probability Theory and Mathematical Statistics"

4. CONCLUSION

All the work carried out on the implementation of the logical scheme of proving theorems on the basis of basic concepts of the formation of mathematical competence in students of higher educational institutions allows us to draw the following conclusions:

- The level of assimilation by students of the subject material explained to students in the training sessions of higher education institutions has increased;
- the teacher's coordinating, guiding, cooperation, consulting activity - performs the independent activity of the future mathematics specialist in the course of the lesson;
- teacher and student activity creates a space for individual cognitive activity using integration based on "Person-oriented" educational technology;
- one of the new conditions for teacher-student interaction is effective use of information technologies, educational subjects are interested, time is saved in publishing information, intellectual activity of the student is improved by organizing two-way communication, brought to develop logical thinking.

The study showed that the integration of education based on information technologies and educational technologies makes students' knowledge ver-

satire, multifunctional, and fundamental. It also expands their worldview, prepares them to act correctly in difficult and non-standard situations.

REFERENCES

1. *Grabar M. I., Krasnyanskaya K. A.* Primeneniye matematicheskoy statistiki v pedagogicheskix issledovaniyax. Moskva, 1977. 127 p.
2. *Ivchenko G. I., Medvedev Yu. I.* Matematicheskaya statistika. Moskva: «Viysshaya shkola». 1994. 223 p.
3. *Sharipov E. O.* Akademik litseylarda matematik analiz asoslarini o'qitish metodikasi. dis. Tashkent: UzMU. 2019. 144 p.
4. *Karasev A. I.* Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika. Moskva: Statistika. 1977. 274 p.
5. *Borovkov A. A.* Teoriya veroyatnostey Moskva: Nauka. 1987.

Sharipov Ergash Oripovich — Associate Professor of the department of Higher Mathematics, Karshi Engineering-Economics Institute, Karshi, Uzbekistan.

Shodiyev Sadulla Yusupovich — Senior teacher of the department of Algebra and geometry, Karshi State University, Karshi, Uzbekistan. E-mail: shodiyevsyu@mail.ru

Tursunov Bayramali Akbarovich — Senior teacher of the department of Algebra and geometry, Karshi State University, Karshi, Uzbekistan. E-mail: bakbarovich@mail.ru

REFINED LIMIT THEOREMS FOR THE NON-CRITICAL GALTON-WATSON BRANCHING SYSTEMS

A. Imomov^{1,2}, M. Murtazaev², Z. Nazarov²

¹*Karshi State University, Karshi, Uzbekistan*

²*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*

We consider the Galton-Watson branching system. We deal only with the non-critical case. We will improve our recent result on convergence to the well-known Kolmogorov constant by indicating the rate of convergence. This statement will allow us to determine the approximation rate in the classical limit theorems. **Keywords:** *Galton-Watson branching system, extinction time, Kolmogorov constant, basic Lemma, limit theorems.*

1. Introduction and backgrounds

Stochastic branching systems are famous mathematical models describe a population size evolution of reproductive individuals. The Galton-Watson model, originally evolved as a family survival model in the second half of the 19th century, is the simple branching system. Modern branching systems models have arisen and progress due to modifications of the Galton-Watson model; see [1], [2], [3], [5].

Let $Z(n)$ be a population size at the moment $n \in \mathbb{N}_0$ in the Galton-Watson branching (GWB) system with branching rates $\{p_k, k \in \mathbb{N}_0\}$, where $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ and $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Namely, each individual in the system lives a unit length life time and then gives $k \in \mathbb{N}_0$ descendants with probability p_k . This is a reducible, homogeneous-discrete-time Markov chain with a state space consisting of two classes: $\mathcal{S}_0 = \{0\} \cup \mathcal{S}$, where $\{0\}$ is absorbing state, and $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$ is the class of possible essential communicating states.

We assume throughout this paper that $p_0 > 0$ and consider a Schröder case, i.e. $p_0 + p_1 > 0$. We also assume that

$$p_0 + p_1 < 1 \quad \text{and} \quad m := \sum_{k \in \mathcal{S}} kp_k < \infty.$$

We are interested in the sub-critical and supercritical where $m < 1$ and $m > 1$ respectively. Denoting q be an extinction probability of the system starting from one individual, we recall that it is smallest root of the equation

$f(s) = s$ on $s \in [0, 1]$, where

$$f(s) := \sum_{k \in \mathcal{S}_0} p_k s^k$$

is the offspring generating function (GF). The extinction probability is 1 in sub-critical case and is less than 1 when the system is supercritical. So, the supercritical system survives with positive probability.

Put into consideration n -step transition probabilities

$$P_{ij}(n) := \mathbb{P} \{ Z(n+k) = j \mid Z(k) = i \} \quad \text{for any } k \in \mathbb{N}_0.$$

A corresponding probability GF $\sum_{k \in \mathcal{S}_0} P_{ij}(n) s^k = [f_n(s)]^i$, where

$$f_n(s) := \sum_{k \in \mathcal{S}_0} p_k(n) s^k,$$

therein $p_k(n) := P_{1k}(n)$. Needless to say that $f_n(0) = p_0(n)$ is a vanishing probability of the system starting from one individual. It tends as $n \rightarrow \infty$ monotonously to q , i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_0(n) = q$; see [2].

Consider a function $R_n(s) := q - f_n(s)$. It is clear that $R_n(0) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Now denoting

$$\mathcal{H} := \min \{ n \in \mathbb{N} : Z(n) = 0 \}$$

be an extinction time of the system starting from single individual,

$$Q(n) := R_n(0) = \mathbb{P} \{ n < \mathcal{H} < \infty \}$$

is a survival probability of the system in the finite time n . In sub-critical case we see $\mathbb{P} \{ \mathcal{H} < \infty \} = 1$, hence $Q(n) = \mathbb{P} \{ Z(n) > 0 \}$. In this case, A.Kolmogorov [6] proved that if $f''(1-) < \infty$, then $Q(n)$ admits the following asymptotic representation:

$$Q(n) = \mathcal{K} m^n (1 + o(1)), \tag{1}$$

where \mathcal{K} is the well-known Kolmogorov constant, but it does not have an explicit form. In this regard, V.Zolotarev [8] expressed regret at the absence of an explicit expression for this constant in a continuous-time case. Formula (1) was later re-established under a weaker condition by A.Nagaev and I.Badalbaev [7], but and wherein the Kolmogorov constant remained not explicitly calculated. The Kolmogorov result (1) motivates to write an asymptotic representation $Q(n) = \mathcal{K}_q \beta^n (1 + o(1))$ for the case $m \neq 1$,

where $\beta := f'(q)$ and \mathcal{K}_q is a positive and it by right can be called the extended Kolmogorov constant. Recently, in the paper [4], the explicit form of \mathcal{K}_q was calculated under the Kolmogorov conditions. Furthermore, formula (1) has been extended to $R_n(s)$ for the the case $m \neq 1$ and for all $s \in U_q[0, 1)$, where

$$U_q[0, 1) := \{[0, q) \cup (q, 1)\}$$

is a unit interval with a punctured point q .

First, we recall the following Basic Lemma, which was proved in [4] (but in a slightly different form) and essentially underlies the principal arguments in calculating the constant \mathcal{K}_q .

Lemma 1 [4]. Let $m \neq 1$ and $f''(1-) < \infty$ for $m < 1$. Then

$$\sup \left\{ \left| \frac{\beta^n}{R_n(s)} - \frac{1}{\mathcal{A}_q(s)} \right| : s \in U_q[0, 1) \right\} = \rho(n) \quad (2)$$

where $\rho(n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, and

$$\frac{1}{\mathcal{A}_q(s)} = \frac{1}{q-s} + \gamma_q,$$

at that

$$\gamma_q := \frac{f''(q)}{2\beta(1-\beta)}.$$

This lemma contributes to the completion of a number of limit theorems, which has not yet been done till now. Primarily an immediate consequence is the fact that in sub-critical case $\mathcal{A}_\gamma(0)$ is an explicit expression of the Kolmogorov constant \mathcal{K} mentioned in the formula (1), i.e. $q = 1$ and

$$\mathcal{K} = \mathcal{A}_1(0) = \frac{1}{1+\gamma},$$

where $\gamma := b/(m - m^2)$ and $2b := f''(1-) < \infty$.

Continuing the discussion from the proof of the Lemma 1 in [4], we obtain the following asymptotic representation for $\partial R_n(s)/\partial s$ as $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{\partial R_n(s)}{\partial s} = -\frac{\mathcal{A}_q^2(s)}{(q-s)^2} \beta^n (1 + r_n(s)), \quad (3)$$

where $r_n(s) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ uniformly in $s \in U_q[0, 1)$. Formula (3) plays an essential role in the theory of non-critical GWB systems. In confirmation of the above, we can, in particular, refer to the fact that taking $s = 0$ this

formula immediately implies the following limit representation for the local probabilities:

$$\frac{p_1(n)}{\beta^n} = \frac{1}{q^2} \mathcal{K}_q^2(1 + r_n), \tag{4}$$

where $\mathcal{K}_q = \mathcal{A}_q(0)$ and $r_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.

Undoubtedly, of particular interest is the establishment of the approach rate in (4) as well. In accordance with what was said in the last point, we will focus on the task of determining the approximation rate at which the function $\beta^n/R_n(s)$ converges its limit function $\mathcal{A}_q(s)$.

Our principal result appears in Section 2. Here we first improve the formulation of Lemma 1, by specifying the explicit approximation rate of the function $\beta^n/R_n(s)$ to the function $\mathcal{A}_q(s)$. Next, using this result, we complete several incomplete limit theorems from non-critical GWB systems theory.

2. Results

Our proof discussions are based on the following assertion which improves Lemma 1, specifying the decreasing rate of the asymptotic estimator $\rho(n)$ in (2).

Lemma 2. Let $m \neq 1$ and $f''(1-) < \infty$ for $m < 1$. Then

$$\sup \left\{ \left| \frac{R_n(s)}{\beta^n} - \mathcal{A}_q(s) \right| : s \in U_q[0, 1) \right\} = \mathcal{O}(\beta^n) \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

where

$$\mathcal{A}_q(s) = \frac{q - s}{1 + \gamma_q \cdot (q - s)},$$

at that

$$\gamma_q := \frac{f''(q)}{2\beta(1 - \beta)}.$$

Since $\mathcal{A}_q(s)$ is a limit of power series, it may be written as follows:

$$\mathcal{A}_q(s) = \sum_{j \in \mathcal{S}_0} v_j s^j, \tag{5}$$

where $v_j > 0$. Our first result asserting the geometric decay expansion of transition probabilities $p_j(n)$ immediately follows from Lemma 2.

Theorem 1. Let $m \neq 1$ and $f''(1-) < \infty$ for $m < 1$. Then

$$\frac{p_j(n)}{\beta^n} = v_j \cdot (1 + \mathcal{O}(\beta^n)) \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \tag{6}$$

where numbers $\{v_j\}$ are coefficients in the power series expansion (5).

Remark 1. The asymptotic representation (6) combines and refines statements (1) and (4), indicating the decreasing rate of remainders. In fact, first we can see that

$$v_0 = \mathcal{K}_q \quad \text{and} \quad v_1 = \left(\frac{\mathcal{K}_q}{q}\right)^2.$$

Next, we find the following uniform estimate for the remainder $r_n(s)$ in (3):

$$\sup\{|r_n(s)| : s \in U_q[0, 1)\} = \mathcal{O}(\beta^n) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Theorem 2. Under the conditions of Theorem 1 and on the finite survival-time trajectories, the mathematical expectation of the number of descendants has the form

$$\mathbb{E}[Z(n) \mid n < \mathcal{H} < \infty] = \frac{1}{\mathcal{K}_q} \cdot (1 + \mathcal{O}(\beta^n)) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

REFERENCES

1. *Asmussen S. and Hering H.* Branching processes. Boston: Birkhäuser, 1983.
2. *Athreya K. B. and Ney P. E.* Branching processes. New York: Springer, 1972.
3. *Harris T. E.* The theory of branching processes. Berlin: Springer-Verlag, 1963.
4. *Imomov A. A., Murtazaev M.* On explicit form of the Kolmogorov constant in the theory of Galton-Watson Branching Processes. 2022. *ArXiv*: <https://arxiv.org/abs/2205.03024>
5. *Jagers P.* Branching Progresses with Biological applications. JW & Sons, Pitman Press, GB, 1975.
6. *Kolmogorov A. N.* К reshениyu odnoy biologicheskoy zadachi. Reports of SRI Math. and Mech. at Tomsk Univ., 1938, **2**, pp. 7–12. (Russian)
7. *Nagaev A. V and Badalbaev I. S.* A refinement of certain theorems on branching random process. Litovskiy Mat. Sbornik. 1967. Vol. 7. № 1. P. 129–136. (Russian)
8. *Zolotarev V. M.* More exact statements of several theorems in the theory of branching processes. Theory of Probability and its Applications, 1957. Vol. 2. № 2. P. 256–266. (Russian)

Azam A. Imomov — Doctor of Sciences, Head of Department, Mathematics and Computer Sciences faculty. E-mail: imomov-azam@mail.ru

Misliddin Murtazaev — post-doctoral student, Stochastic analysis department. E-mail: misliddin1991@mail.ru

Zuhriddin Nazarov — post-doctoral student, Stochastic analysis department. E-mail: zuhrov13@gmail.com

RESEARCH OF TRANSVERSE ROPE OSCILLATIONS MOVING IN THE LONGITUDINAL DIRECTION

V. Litvinov^{1,2}, K. Litvinova^{1,2}

¹*Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

²*Samara State Technical University, Samara, Russian Federation*

The article researches the oscillations of a rope moving in the longitudinal direction. The model takes into account the tension of the rope, flexural stiffness and resistance of the external environment. The object of the study refers to a wide range of oscillating one-dimensional objects with moving boundaries. At a constant speed of longitudinal motion, the rope oscillations are characterized by a set of eigen frequencies. The problem in the presence of medium resistance was solved by the Kantorovich-Galerkin method. The equation obtained allows us to find approximate values of the first two eigen frequencies. The solution was made in the Matlab environment of dimensionless variables, which allows one to use the obtained results to calculate oscillations of a wide range of technical objects. **Keywords:** *oscillations of objects with moving boundaries, boundary value problems, mathematical models, resonant properties.*

Introduction

The article examines the transverse vibrations of a rope moving in the longitudinal direction. The model takes into account the rope tension, Flexural stiffness, and environmental resistance. The object of research refers to a wide range of oscillating one-dimensional objects with moving boundaries and loads. Such objects are widely used in engineering. These are ropes of load-lifting installations [1, 4, 8, 11, 12, 13], flexible links of gears [1, 2, 5], beams, belt mechanisms, conveyors, etc. The presence of moving boundaries makes classical methods of mathematical physics inapplicable to solving such boundary value problems, so they are currently insufficiently studied.

1. Statement of the problem

The equation that takes into account the bending stiffness, rope tension, and resistance of the external environment has the form:

$$u_{tt}(x, t) + bu_{xxxx}(x, t) - a^2u_{xx}(x, t) + Gu_t(x, t) = 0. \quad (1)$$

Here $u(x, t)$ is a transverse displacement of the point of a rope with a coordinate x at time t ; $b = \frac{EI}{\rho}$ (E is the modulus of elasticity of the material of the rope; I is an axial moment of inertia of the cross section of the rope; ρ is the mass per unit length of the rope); $a^2 = \frac{T}{\rho}$ (T is a rope tension); G is a coefficient of resistance of the medium (the force acting per unit length of the string in single speed cross traffic).

The boundary conditions have the form:

$$u(vt, t) = 0; \quad u(vt + l, t) = 0; \quad u_x(vt, t) = 0; \quad u_x(vt + l, t) = 0, \quad (2)$$

where v is the speed of the longitudinal movement of the rope, l is the length of the oscillating part.

Let us introduce dimensionless variables:

$$u(x, t) = U(\xi, \tau); \quad \xi = \frac{2\pi(x - vt)}{l}; \quad \tau = \frac{2\pi\sqrt{a^2 - v^2}}{l}t.$$

The result is a task with the conditions set on the fixed boundary:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + \beta U_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \gamma U_{\xi\tau}(\xi, \tau) + \lambda U_{\tau}(\xi, \tau) - \eta U_{\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (3)$$

$$U(0, \tau) = 0; \quad U(2\pi, \tau) = 0; \quad U_{\xi}(0, \tau) = 0; \quad U_{\xi}(2\pi, \tau) = 0. \quad (4)$$

Here

$$\beta = \frac{4\pi^2 b}{l^2(a^2 - v^2)}; \quad \lambda = \frac{Gl}{2\pi\sqrt{a^2 - v^2}}; \quad \gamma = \frac{2v}{\sqrt{a^2 - v^2}}; \quad \eta = \frac{Gvl}{2\pi(a^2 - v^2)}.$$

The four coefficients of equation (1) can be expressed in terms of three dimensionless parameters:

$$\alpha = \frac{v}{a}; \quad \theta = \frac{4\pi^2 b}{l^2 a^2}; \quad D = \frac{Gl}{2\pi a}.$$

The parameters characterize: α is the speed of the longitudinal movement of the rope; θ is the bending stiffness; D is the resistance of the medium.

In terms of dimensionless parameters, the coefficients of equation (3) are expressed as follows:

$$\beta = \frac{\theta}{1 - \alpha^2}; \quad \gamma = \frac{2\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}; \quad \lambda = \frac{D}{\sqrt{1 - \alpha^2}}; \quad \eta = \frac{\alpha D}{1 - \alpha^2}.$$

2. Solving the Problem

We solve the problem (3), (4) without taking into account the bending stiffness ($\beta = 0$). We will look for a solution in the form: $U(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{\omega\tau}$.

To calculate the function $\mu(\xi)$, we obtain the following boundary value problem:

$$\mu''(\xi) + (\gamma\omega + \eta)\mu'(\xi) - (\omega^2 + \lambda\omega)\mu(\xi) = 0; \tag{5}$$

$$\mu(0) = 0; \mu(2\pi) = 0. \tag{6}$$

The solution of the problem (5), (6) is not difficult. As a result of the solution, an expression for natural frequencies of vibrations is obtained:

$$\omega_n = -\frac{\gamma\eta + 2\lambda}{\gamma^2 + 4} + i\frac{\sqrt{(\gamma^2 + 4)(n^2 + \eta^2) - (\gamma\eta + 2\lambda)^2}}{\gamma^2 + 4}. \tag{7}$$

Here i is the imaginary unit; n is the ordinal number of the frequency. The real part of expression (7) characterizes the attenuation of vibrations, and the imaginary part characterizes the frequency.

If there is no attenuation ($\lambda = \eta = 0$), the expression (7) will take the form:

$$\omega_n = i\frac{n}{\sqrt{\gamma^2 + 4}}. \tag{8}$$

In this case, the proper functions are defined by the expression:

$$\mu(\xi) = \sin\left(\frac{(1 - \alpha)n\xi}{2}\right) + \sin\frac{(1 + \alpha)n\xi}{2}.$$

Using a software package developed in the Matlab environment, the dependences of the eigenfunctions $\mu(\xi)$ on the parameter α , which characterizes the speed of the longitudinal movement of the rope, are studied.

Analysis shows that the higher the speed of the rope, the more distorted the eigenfunctions. Distortion occurs at the boundary moving towards the running waves.

We solve problem (3), (4) by the Kantorovich-Galerkin method [12]. We will look for a solution in the form: $U(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{\omega\tau}$.

To determine $\mu(\xi)$, we obtain the following problem:

$$L[\mu(\xi)] = \beta\mu''''(\xi) - \mu''(\xi) - (\gamma\omega + \eta)\mu'(\xi) + (\omega^2 + \omega\lambda)\mu(\xi) = 0; \tag{9}$$

$$\mu(0) = 0; \mu(2\pi) = 0; \mu'(0) = 0; \mu'(2\pi) = 0. \tag{10}$$

The function $\mu(\xi)$ take the form: $\mu(\xi) = C_1\mu_1(\xi) + C_2\mu_2(\xi)$, where $\mu_1(\xi) = \xi^2(\xi - 2\pi)^2$; $\mu_2(\xi) = \xi^2(\xi - 2\pi)^2(\xi - \pi)$. These functions satisfy the boundary conditions (10) and are orthogonal on the interval $(0, 2\pi)$.

As a result, we get the eigenfrequency equation:

$$\begin{aligned} &\omega^4 + 2\lambda\omega^3 + \omega^2(2.86457\beta + \lambda^2 + 0.27795\gamma^2 + 1.41853) + \\ &\quad + \omega(2.86457\lambda\beta + 1.41852\lambda + 0.55591\gamma\eta) + \\ &\quad + (0.82177\beta^2 + 0.77244\beta + 0.27795\eta^2 + 0.69921) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

This equation allows us to obtain the first two natural frequencies of transverse vibrations of the rope.

3. Conclusion

The article analyzes the transverse vibrations of a rope moving in the longitudinal direction. The model takes into account the rope tension, Flexural stiffness, and environmental resistance. The solution was made in the Matlab environment by exact and approximate methods, which allows us to evaluate the applicability of the Kantorovich-Galerkin method for describing vibrations of systems with moving boundaries.

REFERENCES

1. *Savin G. N., Goroshko O. A.* Dynamics of a thread of variable length. Kiev: Dumka, 1962. 332 p.
2. *Samarin Yu. P.* On a nonlinear problem for a wave equation in a one-dimensional space // Applied mathematics and mechanics. 1964. Vol. 26. № 3. P. 77–80.
3. *Goroshko O. A., Savin G. N.* Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length. Kiev: Dumka, 1971. 270 p.
4. *Vesnitsky A. I.* Waves in systems with moving boundaries and loads. Moscow: Fizmatlit, 2001. 320 p.
5. *Barsukov K. A., Grigoryan G. A.* On the theory of a waveguide with movable boundaries // Izv. higher educational. Radiophysics. 1976. Vol. 2. P. 280–285.
6. *Lezhneva A. A.* Flexural vibrations of beams of variable length // Izv. USSR academy of sciences. Solid-body mechanics. 1970. №. 1. P. 159–161.
7. *Zhu W. D., Chen Y.* Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control // J. Vibr. Acoust. 2006. №. 1. P. 66–78.
8. *Shi Y., Wu L., Wang Y.* Nonlinear analysis of natural frequencies of a cable system // J. Vibr. Eng. 2006. №. 2. P. 173–178.
9. *Wang L., Zhao Y.* Multiple internal resonances and non-planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations // J. Sound Vib. 2009. №. 1-2. P. 1–14.
10. *Litvinov V. L.* Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential

- equations // Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. 2020. Vol. 26. №. 2. P. 188–199.
11. *Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M.* Equations in partial derivatives of mathematical physics. Moscow: Higher school, 1970.
 12. *Litvinov V. L., Anisimov V. N.* Application of the Kantorovich–Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics. 2018. №. 2. P. 70–77.
 13. *Litvinov V. L.* An approximate method for solving boundary value problems with moving boundaries by reducing to integro-differential equations // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2022. Vol. 62. №. 6. P. 977–986.

Litvinov Vladislav — Ph.D. (Technical), Associate Professor, Head of Dept., Dept. of General–Theoretical Disciplines, Samara State Technical University; doctoral student, Moscow State University. E-mail: *vladlitvinov@rambler.ru*

Litvinova Kristina — student, Moscow State University. E-mail: *kristinalitvinova900@rambler.ru*

АКТУАРНЫЕ МОДЕЛИ РАСЧЁТА В МЕДИЦИНЕ

Р. К. Шакенов

ТОО Актуарный Консультант, г. Алматы, Казахстан

Данная работа основана на актуарных вычислениях на базе полученных статистических сведений. Мы называем актуарными вычислениями вычисления страховых ставок, которые основаны на математической статистике. Базой, для данного исследования, были взяты статистические показатели заболеваемости заболеванием сердца. На основе реальных данных, была создана математическая модель и сформулированы две задачи, а именно прямая и обратная. В первом случае очень важно правильно сформулировать постановку самой задачи, решение задачи тривиально, так как вся структура модели и нужные сведения для расчетов заранее известны. При решении обратной задачи нужно определить некоторые параметры модели по заданным характеристикам процесса, порой даже некоторых эмпирических данных. **Ключевые слова:** *страхование, актуарные расчёты, марковская модель, интенсивности перехода, стохастические данные, заболевания сердца, граф состояний, система уравнений Колмогорова-Чепмэна.*

Введение

В последнее время для оценки рисков широко используются актуарные исследования. Существует большое количество моделей, и одна из них — вероятностная модель Уилки. В основе регулирования страховых отношений между страховщиком и застрахованным лежат методы, основанные на математических и статистических закономерностях. Именно эти методы мы называем актуарными расчетами.

В результате математической оценки мы получаем две противоположные задачи: прямую, где необходимо найти вероятности нахождения индивида в определенном состоянии для заданных параметров модели, и обратную, где необходимо определить параметры модели, используя знакомые характеристики из эксперимента. Обратные задачи для марковских процессов начали свое развитие относительно недавно по сравнению с методами решения прямых задач. Используя модель страхования в медицине в качестве примера, мы можем видеть, что

показатели перехода - это количество людей в различных "состояниях" системы за данный период времени. А именно, это больные, выздоравливающие и умершие.

Основная цель работы: формирование метода решения обратных задач процесса заболеваемости сердечно-сосудистым заболеванием на основе статистической основы в математической модели случайного процесса.

Материалы и методы исследования

Марковским процессом мы называем вероятностный процесс в произвольной системе с заранее известным количеством состояний и дискретного времени, которое подчиняется правилу, по которому на риск любого состояния модели в "будущем" влияет только её состояние в "настоящем".

А.Н. Колмогоровым же были заложены основы марковского процесса в случае с непрерывным временем. Колмогоров показал, что данный процесс позволяет нам понять развитие системы в каждый из дискретных "моментов" времени. А именно, используя исходные данные, можно узнать частоту переходов между "состояниями" схемы, эти исходные данные и будут входными данными самой схемы. Основным звеном анализируемой нами цепи будет нахождение индивида в определенном состоянии в определенный момент времени t . Самый тривиальный случай это всего два состояния (рис. 1).

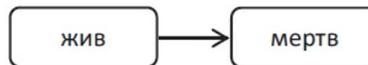


Рис. 1. Схема из двух состояний

Все эти схемы легко рассчитываются.

Нас больше интересует изучение схемы с тремя возможными вариациями: «здоровый», «больной», «умерший» — мы видим, что в этом случае взносы будут уплачиваться, когда страхователь находится в первом состоянии, а выплаты будут производиться, когда страхователь находится в втором состоянии.

Цепь Маркова с непрерывным временем выглядит так: Допустим, $X(t)$ — это состояние человека в возрасте t ($t \geq 0$). Зададим случайный процесс $\{X(t), t \geq 0\}$. Число состояний будем считать счетным $\{1, 2, \dots, n\}$. Тогда $\{X(t), t \geq 0\}$ — марковский процесс для любых $s, t \geq 0$ и $i, j, x(u) \in \{1, 2, \dots, n\}$,

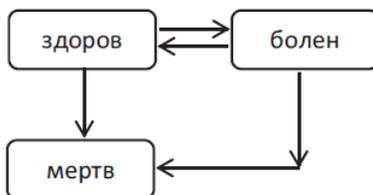


Рис. 2. Схема из трех состояний

$$\begin{aligned} Pr\{X(s+t) = j \mid X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s\} = \\ = Pr\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\} \end{aligned}$$

Функция вероятности перехода определяется следующим образом:

$$p_{ij}(s, s+t) \equiv Pr\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\},$$

предполагаем, что $\sum_{j=1}^n p_{ij}(s, s+t) = 1$ при любых $t \geq 0$ и $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$. При $i \neq j$ μ_{ij} – это интенсивность перехода из положения i в положение j при $s, t, u \geq 0$. Уравнение Колмогорова – Чепмена:

$$p_{ij}(s, s+t+u) = \sum_{l=1}^n p_{il}(s, s+t)p_{lj}(s+t, s+t+u), i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1)$$

Для получения переходных вероятностей необходимо решить систему дифференциальных уравнений. А рассчитанные вероятности перехода связаны с интенсивностью перехода в прямой и обратной задачах [4].

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(s, s+t) = \sum_{l=1}^n p_{il}(s, s+t)\mu_{lj}(s+t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(s, s+t) = - \sum_{l=1}^n \mu_{li}(s+t)p_{lj}(s, s+t) \quad (3)$$

Граничные условия:

$$p_{ij}(s, s) = \delta_{ij}, \text{ где } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i=j \\ 0, & \text{если иначе} \end{cases}$$

В случае, когда интенсивности заданы в начальном процессе, решение дифференциальных уравнений Колмогорова будет являться прямой

задачей. В случае обратной задачи, модель с неизвестными интенсивностями приводит к анализу интенсивностей на основе заранее известной статистической информации.

Во время моделирования схемы марковского процесса необходимо ввести числовую оценку показатель качества, которая находится в некотором интервале. $p_{ij}(t)$ известны нам из статистической базы данных. Зададим характеристику точности измерения следующим образом:

$$|p_i^{cm} - p_i^p| \leq \varepsilon_i \quad (4)$$

где p_i^{cm} — предопределенные табличные данные о вероятности; p_i^p — расчетные вероятности (1). Данная система имеет решение в некотором интервале неопределенности m_{ij} , который характеризуется определенным диапазоном изменения D_{ij} (4).

$$D_{ij} = [\min m_{ij}, \max m_{ij}]. \quad (5)$$

Задача нахождения разрыва, охватывающего диапазон возможных значений, которые можно отнести к характеристикам рассматриваемого параметра (5) при выполнении неравенства (4), была поставлена в 1962 г. основоположником линейного программирования Л.В. Канторовичем [1].

Результаты исследования и их обсуждение

Во время исследования анализировались процессы, где модель многих состояний представляла собой состояние застрахованного лица с заболеванием сердца.

Наблюдаемая модель состоит из четырех состояний: «здоров», «больной пороком сердца, наличие врожденных пороков сердца», «больной пороком сердца, отсутствие врожденных пороков сердца», «умер», где λ_{ij} — частота переходов между состояниями.

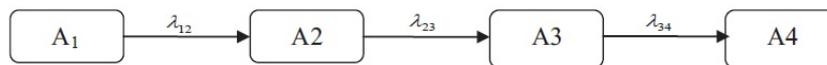


Рис. 3. Схема состояний

По схеме на рис. 3 запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова для нахождения вероятности нахождения человека в каждом из возможных состояний.

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{12}p_1(t), \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{12}p_1(t) - \lambda_{23}p_2(t) \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_{23}p_2(t) - \lambda_{34}p_3(t) \\ \frac{dp_4(t)}{dt} = \lambda_{34}p_3(t) \end{cases} \quad (6)$$

$p_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) – вероятность состояния A_i . Сначала предполагаем, что человек в состоянии «здоров», значит задаем следующие начальные условия:

$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 0, \quad p_3(0) = 0, \quad p_4(0) = 0. \quad (7)$$

Условие нормализации может быть выполнено в любой момент времени, то есть индивидуум находится в одном из четырех состояний:

$$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) = 0, \quad (8)$$

А теперь решаем прямые и обратные задачи. То есть ищем решение уравнений Колмогорова при известных интенсивностях переходов, а в случае, когда интенсивности переходов неизвестны, оцениваем интенсивности переходов по исходным показаниям.

Зная найденные на основе исходных данных средние значения интенсивностей, обратная задача решалась методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Интенсивность перехода для вероятности p_1 из предыдущей схемы мы можем выразить следующим образом:

$$\lambda_{12} = -\frac{\ln\left(\frac{p_1}{0.998458}\right)}{t}.$$

Таким же образом мы выражаем другие интенсивности.

Заключение

Проведенные исследования на основе вероятностно-статистического моделирования, основанные на реальных данных, показали, что разработанная схема-модель, а также компьютерная программа могут служить для прогнозирования и контроля, а собранные результаты могут служить основой для дальнейших исследований в ситуациях кроме рассматриваемого процесса болезни сердца. Анализ дает страховщикам в сфере медицины реальный механизм расчета страховых тарифов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Канторович Л.В.* О некоторых новых подходах к вычислительным методам // Сибирский математический журнал. 1962. Т. 3. № 5. С. 701–709.
2. *Спивак С.И., Райманова Г.К.* Математическая модель процесса заболевания туберкулезом // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 36. С. 293–297.
3. *Фалин Г.И., Фалин А.И.* Введение в математику финансов и инвестиций для актуариев. М: МАКС Пресс, 2017. 327 с.
4. *Спивак С.И., Райманова Г.К., Абдюшева С.Р.* Обратные задачи для марковских моделей медицинского страхования // Страховое дело. 2008. № 9. С. 36–42.

Шакенов Ринат Канатович — к.ф.-м.н. E-mail:
r.shakenov@actuary-consulting.kz

ВЕТВЯЩИЕСЯ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ И МИГРАЦИЕЙ ЧАСТИЦ

Ж. Б. Азимов ¹

¹ *Ташкентский государственный транспортный университет, г. Ташкент,
Узбекистан*

В статье изучено асимптотическое поведение ветвящихся случайных процессов с взаимодействием и миграцией частиц. Получены предельные теоремы для моментов и закона распределения числа частиц ветвящихся случайных процессов с взаимодействием и миграцией частиц. **Ключевые слова:** *ветвящийся процесс, взаимодействие частиц, миграция частиц, предельная теорема, производящая функция.*

Введение

Рассматривается модель ветвящихся процессов с непрерывным временем и с взаимодействием частиц. Предполагается, что в процессе существуют миграционные компоненты. Как известно, в обычных ветвящихся случайных процессах (в.с.п.) предполагается, что частицы размножаются независимо друг от друга. Однако, во многих реальных процессах рождение новых частиц происходит при взаимодействии нескольких уже существующих частиц. В этом случае используемый обычно аппарат производящих функций может применяться ограниченно и не дает значительных результатов. Ветвящиеся процессы с взаимодействием частиц в общей постановке были введены Б.А.Севастьяновым в [1] и изучались в работах [2]-[5]. В работе А.В.Калинкина [4] дается общий обзор Марковских ветвящихся процессов с взаимодействием, а в работе И.С.Бадалбаева, А.В.Дряхлова [5] рассматриваются процессы с парными взаимодействиями частиц и установлено экспоненциальное убывание вероятности продолжения процесса.

Результаты и их обсуждения.

Рассмотрим ветвящийся процесс $\{\mu(t), t \geq 0\}$ с одним типом частиц и взаимодействием k частиц. Пусть $\mu(t)$ – число частиц в момент времени t ветвящегося процесса с взаимодействием, в котором размножение частиц происходит следующим образом. В момент времени t любые k частиц могут превратиться в $j \neq k$ частиц, и переходные вероятности

процесса $P_{ij}(t) = P\{Z(t) = j | Z(0) = i\}$ определяются формулами (при $t \rightarrow 0, k \geq 2$ – целое)

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij} + ip_{j-i+kt} + o(t), \quad i \geq k, \quad j \geq i - k,$$

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq i \leq k - 1,$$

$$P_{ij}(t) = o(t), \quad j < i - k,$$

где $p_j \geq 0, j = 0, 1, \dots, k - 1, k + 1, \dots, p_k < 0, \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 0, \delta_{ij}$ – символ Кронекера.

Процесс $\{\mu(t), t \geq 0\}$ имеет k поглощающих состояний $\{0, 1, \dots, k-1\}$. Подобная модель рассматривалась в работах [6] и [7], где были найдены вероятности вырождения процесса.

Теперь предположим, что в процессе присутствуют миграционные компоненты, т. е. рассмотрим следующую модель процесса с взаимодействием и миграцией частиц. Пусть независимо от наличия какого-либо числа частиц в момент времени t , в промежутке $(t, t + \Delta t)$ с вероятностью $\delta_{0j} + a_j \Delta t + o(\Delta t)$ в систему иммигрируют j ($j = 0, 1, \dots$) частиц, либо с вероятностью $q_r \Delta t + o(\Delta t), q_r \geq 0$ из системы эмигрируют r ($r = 1, 2, \dots, l$) из существующих частиц, где l – произвольное фиксированное натуральное число, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j + \sum_{r=1}^l q_r = 0$. Состояние такого процесса в момент времени t обозначим через $Z(t)$.

Основными результатами настоящей работы являются предельные теоремы, доказанные для числовых характеристик и установление предельного закона распределения для числа частиц ветвящихся процессов с взаимодействием и миграцией частиц. При этом не ограничивая общности, можно предполагать, что процесс начинается с k частиц.

Введем производящие функции (п.ф.)

$$f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j, \quad F(t, s) = \sum_{j=0}^{\infty} P(\mu(t) = j) s^j,$$

$$G(t, s) = \sum_{j=0}^{\infty} P(Z(t) = j) s^j$$

и пусть $g(s)$ – п.ф. числа мигрирующих частиц.

Лемма 1. Производящая функция $F(t, s)$ удовлетворяет при $|s| \leq 1$ линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial F(t, s)}{\partial t} = \frac{f(s)}{s^{k-1}} \left(\frac{\partial F(t, s)}{\partial s} - \sum_{i=1}^k i P(\mu(t) = i) s^{i-1} \right)$$

с начальным условием $F(0, s) = s^k$.

Лемма 2. Производящая функция $G(t; s)$ удовлетворяет при $|s| \leq 1$ линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial G(t; s)}{\partial t} = \frac{f(s)}{s^{k-1}} \left[\frac{\partial G(t; s)}{\partial s} - \sum_{i=1}^{k-1} iP(Z(t) = i) s^{i-1} \right] + g(s)G(t; s)$$

с начальным условием $G(0; s) = s^k$.

Теперь будем предполагать, что выполняются условия

$$f'(1) = 0, \quad 0 < f''(1) = 2b < \infty, \quad (1)$$

$$0 < \lambda = \sum_{j=0}^{\infty} ja_j - \sum_{r=1}^l rq_r < \infty. \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть момент $EZ(t)^n$ существует для некоторого $n \geq 1$. Если выполняются условия (1), (2), то при $t \rightarrow \infty$

$$EZ(t)^n \sim \lambda(b + \lambda)(2b + \lambda) \dots ((n-1)b + \lambda)t^n.$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия (1), (2). Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\frac{Z(t)}{bt} < x\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{b}\right)} \int_0^x y^{\frac{\lambda}{b}-1} e^{-y} dy, \quad x \geq 0,$$

где $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy$.

Доказательство приведенных теорем 1 и 2 проведена с использованием лемм 1 и 2.

Заключение.

Проведено исследование асимптотического поведения ветвящихся случайных процессов с взаимодействием и миграцией частиц. Получены прямые уравнения Колмогорова для производящих функций процессов $\{\mu(t), t \geq 0\}$ и $\{Z(t), t \geq 0\}$. Также получены предельные теоремы для момента n -го порядка и закона распределения числа частиц ветвящихся случайных процессов с взаимодействием и миграцией частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы с взаимодействием частиц. // В сб.: Третья Международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН Литовской ССР, 1981. Т. 1. С. 139–140.

2. Севастьянов Б. А., Калинин А. В. Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц. // Доклады АН СССР. 1982. Т. 264. № 2. С. 306–308.
3. Калинин А. В. Вероятность вырождения ветвящегося процесса с взаимодействием частиц. // Теория вероятностей и ее применение. 1982. Т. 27. № 1. С. 192–197.
4. Калинин А. В. Вероятность вырождения ветвящегося процесса с взаимодействием частиц. // Успехи математических наук. 2002. Т. 57. № 2. С. 23–84.
5. Бадалбаев И. С., Дряхлов А. В. Об асимптотическом поведении вероятности продолжения ветвящегося процесса с парными взаимодействиями частиц. // Теория вероятностей и ее применение. 1996. Т. 41. № 4. С. 721–737.
6. Ежов И. И. Ветвящиеся процессы с групповой гибелью. // Теория вероятностей и ее применение. 1980. Т. 25. № 1. С. 206.
7. Решетняк В. Н. Об одном классе ветвящихся процессов с взаимодействием частиц. // Аналитические методы в теории надежности. 1985. С. 106–114.

Азимов Жахонгир Бахрамович — кандидат физ.-мат. наук, доцент, кафедра «Высшая математика». E-mail: azimovjb@gmail.com

ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ, ПОРОЖДЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Б. А. Турсунов, Ф. Р. Рахимов.

Каршинский государственный университет, г. Карши, Узбекистан

В данной работе показан способ построения римановых субмерсий, которые возникают при исследовании геометрии орбит нескольких динамических систем и изучена его геометрия. Известно, что геометрия орбит динамических систем является объектом многочисленных исследований в связи ее важностью в геометрии и других областях математики. **Ключевые слова:** риманова субмерсия, орбита динамических систем, секционная кривизна, слоения.

Введение

Дифференцируемые отображения максимального ранга состоят из двух классов - погружения и субмерсий. Погружения интенсивно изучались с самого зарождения римановой геометрии. Простыми примерами римановых многообразий являются поверхности, вложенные в трехмерное евклидово пространство. Понятие субмерсии сформировалось относительно недавно, во второй половине двадцатого века. Дифференциальная геометрия субмерсий впервые изложена в работах [1] и [2].

Изучение геометрии субмерсий, в частности римановых субмерсий оказалось очень плодотворным в силу того, что римановы субмерсии имеют приложения во всех разделах современной римановой геометрии. Фундаментальные свойства римановых субмерсий, такие как фундаментальные уравнения, свойства кривизны были получены J. Cheeger, D. Gromoll, R. Hermann, B. O'Neil, G. Walschap. Свойства сохранения геодезических для римановых субмерсий и геометрия слоений, порожденных римановыми субмерсиями были изучены в работах [3], [4]. В настоящее время понятие субмерсии и основные результаты по изучению геометрии субмерсий вошли в учебники по римановой геометрии, они используются не только в геометрии, но во всех смежных науках, таких, как механика, теоретическая физика, теория относительности [7].

В исследованиях узбекских ученых профессора А. Я. Нарманова [6] и его учеников А. Байтураева, Г. Каипназаровой получены полная клас-

сификация слоений евклидова пространства, порожденных римановыми субмерсиями и геометрические характеристики, связанные с секционной кривизной слоев.

1. Основные понятия

Определение 1. Дифференцируемое отображение $\pi : M \rightarrow N$ максимального ранга, где M и N — гладкое многообразие размерности m и n , называется субмерсией при $m > n$.

Далее под гладкостью будем подразумевать гладкость класса C^∞ .

Известно, что по теореме о ранге дифференцируемой функции для каждой точки $p \in N$ полный прообраз $\pi^{-1}(p)$ является подмногообразием размерности $k = m - n$. Таким образом субмерсия $\pi : M \rightarrow N$ порождает слоение F размерности $k = m - n$ на многообразии M , слоями которого являются подмногообразия $L_p = \{q \in M : \pi(q) = p\}$.

Размерность слоения равен размерность слоя, которого он состоит.

Пусть $\frac{\partial x_i}{\partial \lambda} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = \overline{1, n}$ — динамическая система задана в пространстве R^n . Эту динамическую систему можно рассматривать как векторное поле $X = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$.

Пусть F -слоение размерности k , где $0 < k < n$. [8]. Обозначим через $T_q F$ -касательное пространство слоя L_p в точке $q \in L_p$, через $H_q F$ -ортогональное дополнение подпространства $T_q F$. В результате возникают подрасслоения $TF = \{T_q F\}$, $HF = \{H_q F\}$ касательного расслоения TM и имеем ортогональное разложение $TM = TF \oplus HF$. Таким образом каждое векторное поле X разложимо в виде: $X = X^v + X^h$, где $X^v \in TF$, $X^h \in HF$. Если $X^h = 0$ (соответственно $X^v = 0$), то поле X называется вертикальным (соответственно горизонтальным) векторным полем. Напомним, что слоение F называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой точке к слоению, остается ортогональной к слоению во всех своих точках.

Определение 2. Если дифференциал $d\pi$ субмерсии $\pi : M \rightarrow N$ сохраняет длину горизонтальных векторов, то она называется римановой субмерсией.

Для точки $p \in N$ через $t \rightarrow X^t(p)$ обозначим интегральную кривую динамической системы X , проходящую через точку p при $t = 0$. Отображение $t \rightarrow X^t(p)$ определено в некоторой области $I(p) \subset R$, которая в общем случае зависит от динамической системы X , и от начальной точки p .

Орбита L_p семейства D динамических систем, проходящая через точку p , определяется как множество таких точек y из N , для которых существуют действительные числа t_1, t_2, \dots, t_k и динамических систем

X_1, X_2, \dots, X_k из D (где k — произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\dots(X_1^{t_1}(p))\dots)).$$

В [6] доказана следующая теорема, которая показывает, что каждая точка из орбиты $L(x_0)$ достижима из x_0 с помощью конечного числа «переключений» с использованием динамических систем X_1, X_2, \dots, X_m в определенном порядке.

Теорема 1. Множество точек вида $y = X_m^{t_m}(X_{m-1}^{t_{m-1}} \dots (X_1^{t_1}(x_0) \dots))$, где $(t_1, t_2, \dots, t_m) \in R^m$, совпадает с орбитой $L(x_0)$.

Эта теорема позволяет построить различные субмерсии в R^m с помощью динамических систем X_1, X_2, \dots, X_m полагая $\pi(t_1, t_2, \dots, t_m) = X_m^{t_m}(X_{m-1}^{t_{m-1}}(\dots(X_1^{t_1}(x_0) \dots)))$, базой которых служит орбита $L(x_0)$.

2. Основной результат

При изучении римановых субмерсий были получены следующие результаты.

На плоскости R^2 рассмотрим семейство D , состоящее из динамических систем $X_1 = \{1, 0\}$, $X_2 = \{0, 1\}$ и $X_3 = \{-y, x\}$. Для семейства $D = \{X_1, X_2, X_3\}$ по теореме 1 орбита для каждой точки семейства совпадает со всем пространством R^2 . Поэтому, полагая $\pi(t_1, t_2, t_3) = X_3^{t_3}(X_2^{t_2}(X_1^{t_1}(O)))$ мы можем определить следующую субмерсию $\pi : R^3 \rightarrow R^2$ формулой:

$$\pi(t_1, t_2, t_3) = \{t_1 \cos t_3 - t_2 \sin t_3, t_1 \sin t_3 + t_2 \cos t_3, \} \quad (1)$$

где O — начало координат в R^2 .

Теорема 2. Существует риманова метрика \tilde{g} на плоскости такая, что субмерсия (1) является римановой, и порождает риманово слоение. Плоскость с метрикой \tilde{g} является многообразием строго положительной кривизны.

В общем случае, рассмотрим теперь следующие n динамических систем в R^n :

$$\begin{aligned} X_1 &= \{1, 0, 0, \dots, 0\}, & X_2 &= \{0, 1, 0, \dots, 0\}, & \dots, & & X_n &= \{0, \dots, 0, 1\}, \\ X_{n+1} &= \{-x_2, x_1, 0, \dots, 0\}, & X_{n+2} &= \{0, 0, -x_4, x_3, 0, \dots, 0\}, \\ & & & \dots & & & & \\ X_{n+k} &= \{0, \dots, 0, -x_{2k}, x_{2k-1}, 0, \dots, 0\}, \text{ где } n = 2k + l. \end{aligned}$$

В этом случае, используя теорему 1, полагая $\pi(t_1, t_2, \dots, t_{n+k}) = X_{n+k}^{t_{n+k}}(\dots(X_2^{t_2}(X_1^{t_1}(O) \dots)))$ определим субмерсию $\pi : R^{n+k} \rightarrow R^n$ по формуле:

$$\pi(t_1, t_2, \dots, t_{n+k}) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \text{ где} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}x_{2i-1} &= t_{2i-1} \cos t_{n+i} - t_{2i} \sin t_{n+i}, \\x_{2i} &= t_{2i-1} \sin t_{n+i} + t_{2i} \cos t_{n+i}, & i = \overline{1, k} \\x_{2k+j} &= t_{2k+j}, & j = \overline{1, l}\end{aligned}$$

Теорема 3. Существует риманова метрика \tilde{g} на R^n такая, что субмерсия (2) является римановой и порождает риманово слоение, а многообразия (R^n, \tilde{g}) является многообразием неотрицательной кривизны.

Теорема 4. Композиция римановых субмерсий также является римановой.

Применяя теорему 4 к теореме 2, получаем субмерсии $\pi : R^3 \rightarrow R^1$ формулой $\pi(t_1, t_2, t_3) = t_1 \cos t_3 - t_2 \sin t_3$ или $\pi : R^3 \rightarrow R^2 : \pi(t_1, t_2, t_3) = t_1 \sin t_3 + t_2 \cos t_3$. Эта субмерсия также является римановой субмерсией, т.е. проекция является простейшим примером римановой субмерсии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hermann R.* A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds to be a fiber bundle. // Proc. Amer. Math. 1960. Vol. 11. P. 236–242.
2. *O'Neil B.* The Fundamental equations of a submersions. // Michigan Mathematical Journal. 1966. Vol. 13. P. 459–469.
3. *Reinhart B. L.* Foliated manifolds with bundle-like metrics. // Annals of Mathematics, Second Series. 1959. Vol. 69, № 1. P. 119–132.
4. *Escobales R. H. JR.* Riemannian submersions with totally geodesic fibers. // Differential geometry. 1975. Vol. 10. P. 253–276.
5. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. Москва: Мир, 1971. 343 с.
6. *Нарманов А. Я., Саитова С. С.* О геометрии орбит векторных полей Киллинга. // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 12. С. 1582–1589.
7. *Falcitelli M., Pastore A. M., Ianus S.* Riemannian Submersions and Related Topics. World Scientific Pub Co Inc, 2004. 292 p.
8. *Tamura I.* Topology of foliations: an introduction. Translations of mathematical monographs. AMS, 2006. 193 p.

Турсунов Байрамали Акбарович — д.ф.ф.-м.н. (PhD), старший преподаватель кафедры Алгебры и геометрии, Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан. E-mail: bakbarovich@mail.ru

Рахимов Фазлиддин Рузиевич — магистрант кафедры Алгебры и геометрии, Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан. E-mail: fazliddinrahimov821@gmail.com

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

М. О. Абулов

Каршинский государственный университет, г. Карши, Узбекистан

В данной статье рассматривается краевая задача для уравнения третьего порядка смешанно-составного типа в цилиндрической области. С помощью метода Галеркина при некоторых условиях на коэффициенты и правую часть уравнения доказано существование и единственность обобщенного решения в пространстве Соболева. **Ключевые слова:** *краевая задача, цилиндрическая область, смешанно-составной тип, обобщенное решение, уравнение третьего порядка.*

Введение

Работы [1], [2] положили начало целому направлению в исследовании постановок корректных задач для уравнений смешанно-составного типа третьего порядка. В них предложен и исследован ряд задач для модельного уравнения смешанно-составного типа. В. Н. Врагов [3] поставил и исследовал ряд задач для уравнения смешанно-составного типа третьего порядка

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(x, y)\right) (k(x, y)u_{xx} + u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u) = f(x, y)$$

В дальнейшем, в работах М.С.Салахитдинова [4], Т. Д. Джураева, У. О. Рахманова [5], Л. А. Бобылова, М. М. Смирнова [6], С. Г. Пяткова [7], автора данной статьи [8] и других были поставлены и исследованы краевые задачи для уравнения смешанно-составного и составного типа. Отметим, что в работе И.Е. Егорова, В.Е. Федорова [9] исследованы краевые задачи для широких классов неклассических уравнений математической физики высокого порядка, в частности для уравнения смешанно-составного типа. В данной статье обобщаются результаты, полученные в работе [10], т.е. здесь рассматривается краевая задача для многомерных случаев.

В области $Q = \{(x, t) : -1 \leq x_1 \leq 1, (x_2, x_3, \dots, x_n) \in D, 0 \leq t \leq T\} = [-1, 1] \times D \times [0, T] = \Omega \times [0, T]$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{ttt} - \mu(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta u - a(x, t) \Delta u = f(x, t) \quad (1)$$

где $x_1 \mu(x_1) > 0$ при $x_1 \neq 0$, $\mu(0) = 0$ и будем предполагать, что $\mu(x_1) \in C^3[-1, 1]$, $a(x, t) \in C^3(\bar{Q})$, D -ограниченная область, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Краевая задача. Найти в области Q решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям.

$$u|_{\partial Q} = 0 \quad (2)$$

$$u_t|_{t=0} = 0 \quad (3)$$

Определение 1. Обозначим через $H(Q)$ пространство функций, полученное замыканием функций из $C^3(Q)$, удовлетворяющих условиям (2), (3) по норме

$$\|u\|_{H(Q)}^2 = \int_Q (u_{xx}^2 + u_{xt}^2 + u_x^2 + u_t^2 + u^2) dQ \quad (4)$$

Определение 2. Функцию $u \in H(Q)$ будем называть обобщенным решением задачи (1) - (3), если она удовлетворяет следующую интегральному тождеству

$$\int_Q (u_t v_{tt} + \mu(x_1) \Delta u v_{x_1} + \mu'(x_1) \Delta u v - a(x, t) \Delta u v) dQ = \int_Q f(x, t) v dQ \quad (5)$$

при $\forall v(x, t) \in C_0^\infty(Q)$.

Теорема. Пусть выполнены условия

$$a(x, t) - \frac{3}{2} |\mu_{x_1}| \geq \delta > 0. \quad (6)$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$, такой, что $f \in L_2(Q)$, существует единственное решение задачи (1) - (3) из $H(Q)$.

Доказательство. Решение задачи (1) - (3) будем искать методом Галеркина

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m g_i(t) \varphi_i(x),$$

где функции $\varphi_i(x)$ являются решениями задачи

$$-\Delta \varphi_i = \lambda_i \varphi_i, \quad (i = 1, 2, \dots), \quad \varphi_i = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad (7)$$

а коэффициенты $g_i(t)$ находятся из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(u_{mttt}, \varphi_i)_0 - (\mu \Delta u_{mx_1}, \varphi_i)_0 - (a \Delta u_m, \varphi_i)_0 = (f_m, \varphi_i) \quad (8)$$

$$g_i(0) = g_i(T) = g_{it}(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

Теоремы существования для систем обыкновенных дифференциальных уравнений гарантируют нам разрешимость задачи (8), (9). Теперь получим равномерные по m оценки для Галеркинских приближений. Через C , C_1 , C_2 и C_3 будем обозначать различные положительные постоянные, не зависящие от m .

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы, тогда для решения задачи (8), (9) верна оценка

$$\int_Q (u_{mt}^2 + u_{mx}^2 + u_m^2) dQ \leq C \int_Q f^2 dQ \quad (10)$$

Доказательство леммы 1. Умножая уравнение (9) на $e^{\lambda t} u_m$ и интегрируя по области Q , в силу условий (2), (3) и неравенство Коши получим

$$\begin{aligned} \int_Q e^{\lambda t} \left[\frac{3\lambda}{2} u_{mt}^2 + \left(a - \frac{3}{2} \mu_{x_1} \right) u_{mx_1}^2 + \left(a - \frac{1}{2} \mu_{x_1} \right) u_{mx_2}^2 + \dots \right. \\ \left. + \left(a - \frac{1}{2} \mu_{x_1} \right) u_{mx_n}^2 \right] dQ \leq C_1 \int_Q f^2 dQ + C_2 \int_Q u_m^2 dQ. \end{aligned} \quad (11)$$

В силу граничных условий (2), нетрудно видеть, что для решения верная оценка

$$\int_Q u_m^2 dQ \leq C \int_Q u_{mx}^2 dQ. \quad (12)$$

Тогда из (11), в силу (12) и условий теоремы, для решения задачи (8), (9) следует, что верна оценка (10). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы, тогда для решения задачи (8), (9) верна оценка

$$\int_Q (u_{mxt}^2 + (\Delta u_m)^2) dQ \leq C \int_Q f^2 dQ \quad (13)$$

Доказательство леммы 2. Умножая уравнение (9) на $-e^{\lambda t} \Delta u_m$ и интегрируя по области Q , в силу условий (2), (3) и неравенства Коши, получим

$$\begin{aligned} & \int_Q e^{\lambda t} \left[\frac{3\lambda}{2} u_{mxt}^2 + \left(a - \frac{1}{2} \mu_{x_1} \right) (\Delta u_m)^2 \right] dQ \leq \\ & \leq C_1 \int_Q f^2 dQ + C_2 \int_Q (\Delta u_m)^2 dQ + C_3 \int_Q (u_{mt}^2 + u_{mx}^2) dQ. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу условий теоремы и леммы 1, для решения задачи (8), (9) получим оценку (13), где, например, $C_2 = \frac{\delta}{2}$, т.е. $C_2 < \delta$. Лемма 2 доказана.

Так как в силу (13) следует, что $\Delta u_m \in L_2(\Omega)$, из этого, аналогично как в [11], (см. стр. 32), можно показать, что

$$u_m \in W_2^{2,1}(Q) \quad (14)$$

Из оценок (10) и (14) следует ограниченность последовательности приближенных решений $\{u_m(x, t)\}$ в пространстве $H(Q)$. Из этих оценок следует, что задача (8), (9) разрешима. Из последовательностей $\{u_m(x, t)\}$ можно выбрать подпоследовательности $\{u_{m_k}(x, t)\}$ и перейти к пределу по $m_k \rightarrow \infty$ в системе (8). Нетрудно проверить, что предельная функция принадлежит пространству $H(Q)$ и удовлетворяет интегральному тождеству (5), поскольку система $\{\varphi_i(x)\}$ плотна в $L_2(\Omega)$.

Докажем, что решение задачи (1) - (3) единственно.

Если u, v — два решения задачи (1) - (3), то $w = u - v$ удовлетворяет уравнению

$$w_{ttt} - \mu(x_1)w_{xxx} - a(x, t)w_{xx} = 0$$

и условиям (2), (3). Аналогично, как в лемме 1, для $w(x, t)$ получим

$$\int_Q (w_t^2 + w_x^2 + w^2) dQ \leq 0.$$

Откуда следует, что $w = 0$ в Q . Теорема доказана.

Заключение

В данной работе доказаны новые теоремы существования и единственности решения краевой задачи (1) - (3), которые позволяют расширить круг решаемых проблем в теории краевых задач для неклассических уравнений математической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А. В., Салахитдинов М. С. К теории уравнений смешанно-составного типа. // Сиб. мат. журнал. 1961. № 1. С. 7–19.
2. Бицадзе А. В. Об уравнениях смешанно-составного типа. // В сб. «Некоторые проблемы математики и механики (к шестидесятилетию академика М.А. Лаврентьева)». Новосибирск, Изд-во СО АН СССР. 1961. С. 47–49.
3. Брагов В. Н. Об одном уравнении смешанно-составного типа. // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. IX. № 1. С. 169–171.
4. Салахитдинов М. С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент, Фан, 2021. 314 с.
5. Досураев Т. Д., Рахманов У. О. О корректных краевых задачах для уравнений смешанно-составного типа. // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. IX. № 1. С. 32–40.
6. Бобылова Л. А., Смирнов М. М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка. // Известия выс. уч. заведений. Математика. 1972. № 5. С. 15–21.
7. Пятков С. Г. Об одном уравнении составного типа. // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 1. С. 117–123.
8. Абулов М. А. Краевая задача для смешанно-составного типа третьего порядка. // Новосибирск. НГУ 1989. № 1436. С. 89.
9. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. // Новосибирск. 1995. С. 134.
10. Абулов М. А. Краевая задача для одного класса уравнений третьего порядка. // Томск. Материалы конф. «Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2021) 2021. № 1436. С. 314–317.
11. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. // Москва, 1972. 588 с.

Абулов Мумин Орзикулович — к.ф.-м.н., доцент кафедры Алгебры и геометрии, Каршинский государственный университет, г. Карши, Узбекистан.
E-mail: abulov1959@mail.ru

ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ

Г. С. Сайфуллоева

*Навоийский государственный педагогический институт, г. Навои,
Узбекистан*

Разработка соответствующей теории сходимости рассматриваемых эмпирических процессов к гауссовскому процессу была получена многими учеными. В данной работе рассматриваются модифицированные оценки Каца в общей модели случайного цензурирования и ее аппроксимация гауссовскими процессами.

Ключевые слова: *оценки Каца, гауссовский процесс, интегральная функция интенсивности, эмпирические оценки.*

Введение

М.Кац изучал особый класс эмпирических процессов. Эти процессы выбираются в виде эмпирической статистики с помощью специального подбора слагаемых с использованием независимой последовательности случайных величин Пуассона с параметром n . Такие процессы изучали М.Чёргё, Ш.Чёргё, П.Гаенслер, В. Штуте, Я.Ю.Никитин, Л.Бегин, К.Классен, Ж.Веллнер и другие. Проведенное до сих пор исследование было связано с классической статистикой М.Каца. Оказалось, что в этой статистике есть существенный недостаток. Дело в том, что ее значение может быть больше 1, в отличие от других оценок функции распределения. Поэтому мы предлагаем модифицированные оценки типа Каца.

1. Основные результаты для модифицированных процессов Каца

Следуя работам [1-4], определим общую модель случайного цензурирования следующим образом: пусть нам дана случайная величина Z с функцией распределения $H(x)$ на вероятностном пространстве $\{\Omega, A, P\}$:

$$H(x) = P(Z \leq x), x \in \mathbb{R}.$$

Для фиксированного целого числа $k \geq 1$, введем субраспределения

$$H(x; i) = P(Z \leq x, A^{(i)}), i \in J = \{1, \dots, k\}$$

с помощью $A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$ - попарно несовместных и образующих полную группу событий. Пусть на некотором вероятностном пространстве $\{\Omega, A, P\}$ $\{(Z_m, A_m^{(1)}, \dots, A_m^{(k)}), m \geq 1\}$ последовательность независимых реализаций с совокупности $(Z, A^{(1)}, \dots, A^{(k)})$. Существуют такие эксперименты, в которых наряду с случайной величиной Z , вместе с нею приходится наблюдать и события $A^{(i)}$. Такие модели, где наблюдаются $\{(Z, A^{(i)}), i \in J\}$ назовем общей моделью случайного цензурирования. В данной работе оценим некоторые функционалы получаемые с подходящим выбором Z и $A^{(i)}$. Для этого нам сначала необходимо оценить непрерывные функции $H(x), H(x; 1), \dots, H(x; k)$.

Сперва построим следующие модифицированные оценки типа Каца для $H(x)$ и $H(x; i), i = \overline{1, k}$,

$$\begin{aligned}\tilde{H}_n(x) &= 1 - (1 - H_n^*(x))I(H_n^*(x) < 1), x \in \mathbb{R}, \\ \tilde{H}_n(x; i) &= 1 - (1 - H_n^*(x; i))I(H_n^*(x; i) < 1), (x; i) \in \mathbb{R} \times J.\end{aligned}$$

Здесь эмпирические оценки Каца для $H^*(x)$ и $H^*(x; i), i = \overline{1, k}$ имеют вид (см. [3,4]):

$$\begin{aligned}H_n^*(x) &= \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{\nu(n)} I(Z_m \leq x), & \text{если } \nu_n \geq 1 \text{ с вероятностью } 1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ H_n^*(x; i) &= \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{\nu(n)} I(Z_m \leq x, \delta_m^{(i)} = 1), & \text{если } \nu_n \geq 1 \text{ с вероятностью } 1, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}\end{aligned}$$

а также $\{\nu(m), m \geq 1\}$ не зависят от последовательностей $\{(Z_m, \delta_m^{(1)}, \dots, \delta_m^{(k)}), m \geq 1\}$ и случайных величин Пуассона с параметром $E(\nu(m)) = m$.

Во многих задачах нас интересует оценивание экспоненциальных функций интенсивностей

$$\{S^{(i)}(x) = \exp(-\Lambda^{(i)}(x)), i \in J\}.$$

Здесь

$$\Lambda^{(i)}(x) = \int_{(-\infty, x]} \frac{dH(u; i)}{1 - H(u)}, i \in J$$

а также

$$\Lambda^{(1)}(x) + \dots + \Lambda^{(k)}(x) = \Lambda(x) = \int_{(-\infty, x]} \frac{dH(u)}{1 - H(u)},$$

где $\Lambda(x)$ – интегральная функция интенсивности, соответствующая $H(x)$. Построим оценки для $\Lambda^{(i)}(x)$:

$$\tilde{\Lambda}_n^{(i)}(x) = \int_{(-\infty, x]} \frac{d\tilde{H}(u; i)}{1 - \tilde{H}_n(u)}, i \in J.$$

Введем интегральные процессы интенсивности

$$w_n^{(i)}(x) = \sqrt{n}(\tilde{\Lambda}_n^{(i)}(x) - \Lambda^{(i)}(x)), i \in J$$

и построим соответствующие им векторно-значные процессы:

$$w_n(t) = (w_n^{(1)}(t_1), \dots, w_n^{(k)}(t_k)), t = (t_1, \dots, t_k).$$

Эти процессы соответственно аппроксимируются векторным процессом $Y_n(t) = (Y_n^{(1)}(t_1), \dots, Y_n^{(k)}(t_k))$, где

$$Y_n^{(i)}(x) = \int_{(-\infty, x]} \frac{W_n^{(0)}(u)dH(u; i)}{(1 - H(u))^2} + \frac{W_n^{(i)}(x)}{1 - H(x)} - \int_{(-\infty, x]} \frac{W_n^{(i)}(u)dH(u)}{(1 - H(u))^2}, i \in J \tag{1}$$

Здесь подынтегральные центрированные процессы $\{W_n^{(0)}(x), W_n^{(1)}(x), \dots, W_n^{(k)}(x)\}$ с ковариационной структурой

$$\begin{aligned} EW_n^{(0)}(x)W_n^{(0)}(y) &= \min\{H(x), H(y)\}, \\ EW_n^{(i)}(x)W_n^{(j)}(y) &= \min\{H(x; i), H(y; j)\}, \\ EW_n^{(i)}(x)W_n^{(0)}(y) &= \min\{H(x; i), H(y)\}. \end{aligned} \tag{2}$$

по сути являются процессами типа Винера.

В этом работе представлены теоремы аппроксимации гауссовскими процессами эмпирических процессов, построенные с использованием оценки интегральной функции интенсивности в модели пропорционального риска.

Теорема 1 [3]. Пусть последовательности $\{\nu(n), n \geq 1\}$ имеют распределение Пуассона с параметрами $E\nu(n) = n$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ и для n при выполнении неравенства

$$\frac{n}{\log n} \geq \frac{\varepsilon}{8(1 + e/3)^2}, \tag{3}$$

справедливы оценки

$$P(|\nu(n) - n| > \frac{1}{2}(\frac{\varepsilon}{2}n \log n)^{1/2}) \leq 2n^{-\varepsilon w}, \quad (4)$$

$$P(\sup_{-\infty < x < \infty} |H_n^*(x; i) - H(x; i)| > 2(\frac{\varepsilon \log n}{2n})^{1/2}) \leq 4n^{-4\varepsilon w}, i \in J, \quad (5)$$

$$P(\sup_{-\infty < x < \infty} |\tilde{H}_n(x; i) - H(x; i)| > 2(\frac{\varepsilon \log n}{2n})^{1/2}) \leq 4n^{-4\varepsilon w}, i \in J \quad (6)$$

где $w = [16(1 + e/3)]^{-1}$.

Ниже приведена аппроксимация процесса $w_n(t)$ последовательностью $Y_n(t)$.

Теорема 2. Пусть $\{T_n, n \geq 1\}$ последовательность такая, что $T_n < T_H = \inf\{x : H(x) = 1\}$. Для $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{n}{\log n} \geq \max\{32\varepsilon w^2, \frac{2rb_n^2}{w}, \frac{2\varepsilon b_n^2}{w}\}, \quad (7)$$

где $b_n^{-1} = 1 - H(T_n)$ и $r \geq 2$.

На вероятностном пространстве, где выполняются условия теоремы 1, имеет место неравенство

$$P(\sup_{t \in (-\infty; T_n]^{(k)}} \|w_n(t) - Y_n(t)\|^{(k)} > r(n)) \leq k\Phi_1 n^{-\beta}, \quad (8)$$

Здесь $r(n) = \Phi_0 b_n^2 n^{-1/2} \log n$, $\Phi_0 = \Phi_0(\varepsilon, r)$ и Φ_1 — (абсолютное) постоянное число.

Заключение

В данной работе установлен результат аппроксимации модифицированных вариантов, построенных в обобщенной модели случайного цензурирования и доказано аппроксимационные теоремы для эмпирических процессов, составленных из интегральных функций интенсивностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abdushukurov A. A. Nonparametric estimation of the distribution function based on relative risk function // Commun. Statis. Th. and Meth. 1998. № 8. P. 1991–2012.
2. Abdushukurov A. A. On nonparametric estimation of reliability indices by censored samples // Theory Probab. Appl. 1999. № 1. P. 3–11.

3. *Abdushukurov A. A., Saifulloeva G. S.* On approximation of empirical Kac processes under general random censorship model. // Journal of Siberian Federal University, Mathematics and physics. 2022. № 3. P. 292–307.
4. *Abdushukurov A. A., Saifulloeva G. S.* Empirical Kac processes under general random censorship model // ITMM 2021. 20th International Conference named after A.F.Terpugov Information Technologies and Mathematical Modelling, Tomsk: TSU Publishing. P. 304–309.

Сайфуллоева Гулноз Сайфуллоевна — PhD докторант кафедры теории вероятностей и математической статистики. E-mail: sayfullayevagulnoz@gmail.com

Информационные технологии в обучении

АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ СИСТЕМ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТНЫХ ОНЛАЙН-ШКОЛ

В. К. Шудегова, А. А. Семакин, В. И. Бронер

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В настоящей статье рассмотрены требования, предъявляемые к программным продуктам, направленным на организацию и реализацию дистанционного образования; исследованы существующие в российском IT-сегменте программные решения; сделан вывод о необходимости создания платформы, отвечающей современным требованиям образовательной организации дистанционного обучения. **Ключевые слова:** *дистанционное образование, LMS, СДО, CRM, платформа, электронное обучение, онлайн курсы.*

Введение

В современном мире за счет современных технологий образование стало доступным почти для каждого человека. При этом открытым остается вопрос удобства использования технологий в онлайн-образовании.

Компании, предоставляющие образовательные услуги, часто используют различные системы дистанционного обучения в целях эффективной организации образовательного процесса: “Teachbase”, “Moodle”, “Stepik” и многие другие LMS (англ. «learning management system», или система управления обучением).

Несмотря на большое количество систем дистанционного обучения (СДО), на данном рынке нет программных решений, объединяющих в себе и инструменты обучения, и инструменты управления бизнесом. Это вынуждает образовательные организации использовать несколько систем или создавать собственные программные средства. Очевидно, оба варианта имеют свои недостатки: в первом случае система дистанционного образования не устойчива из-за возможных изменений каждого из её элементов, а во втором – создание собственной платформы могут себе позволить лишь крупные компании, поскольку такое решение является дорогостоящим.

Для запуска курсов по разным предметам предприниматели тратят много ресурсов, что не позволяет реализовать эффективное взаимодействие с клиентом на начальном этапе создания бизнеса. В связи с этим целью настоящей статьи является: анализ предложений рынка систем дистанционного обучения и определение инструментов, удовлетворяющих потребности всех пользователей дистанционного образования: учащиеся, родители, преподаватели, администраторы, методисты, предприниматели.

1. Требования к платформе СДО

Минимальные требования, предъявляемые к платформе для обучения, были определены на основе личного опыта авторов статьи, а также путем опроса репетиторов, преподавателей, учеников и родителей учащихся Томской области. Среди опрошенных были также менеджеры и администраторы онлайн-школ, которые занимаются добавлением новых пользователей в систему и отвечают за взаимодействие ученика и преподавателя. Также участниками опроса стали предприниматели, заинтересованные в образовании современного поколения. Ниже приведены агрегированные требования, выведенные по результатам анализа ответов опроса:

1. Преподаватели. Упорядоченные методические материалы, быстрая навигация по платформе, создание тестов и интерактивов с учащимися, возможность изменять расписание всех занятий с учениками, поддержка файлов с различными расширениями, сохранение домашних заданий и запуск видеоконференций – всё это на одной платформе.

2. Родитель и ученик. Быстрый доступ к домашнему заданию и видеоконференции, расписание занятий, связь с преподавателем или менеджером, статистика успехов учащегося.

3. Менеджер и администратор. Удобство и наглядность системы обработки запроса клиента, записи звонков и переписок (позволяющей не забыть ключевые моменты разговора), анализ продаж, возможность автоматического уведомления клиентов о запланированном уроке или о необходимости оплаты абонемента (в случае, если организация коммерческая).

Указанные требования, данные, полученные при опросе пользователей, и исследования Коваленко С.А., Барабанова А.В., Гребенниковой Н.И. и Малиновкина В.А. [5] послужили основанием для анализа существующих СДО.

2. Анализ существующих платформ

В данном разделе приведены выводы, полученные при анализе популярных СДО.

1. Платформа «Moodle» не является самостоятельной СДО, а скорее представляет из себя инструмент для настройки собственной системы. В «Moodle» многое зависит от плагинов, что уменьшает стабильность платформы, увеличивает затраты на управление, при настройке системы отнимает много времени у её пользователей и требует работы специалистов [4].

2. Платформа «iSpring Learn» удовлетворяет большому количеству потребностей пользователей: имеется встроенный редактор курсов, реализована возможность осуществить видеоконференцию внутри платформы, поддержка различного рода файловых расширений, поддержка мобильного приложения, настроено общение среди пользователей системы, можно добавить личное расписание. Несмотря на всё перечисленное, также имеются недостатки. Основными минусами данной системы являются: интуитивно непонятный интерфейс, встроенный редактор курсов не позволяет проводить некоторые виды работ, например, тесты, дополнительное программное обеспечение пользователь получает платно [3].

3. Платформа «Google Classroom» может подходить для репетиторов, поскольку она предлагает взаимодействие ученика и учителя, а так как отсутствует роль менеджера и управляющего компанией, то данная система не подходит для онлайн-школ. Также имеются другие недостатки: невозможность проводить видеоконференции, необходимость иметь аккаунт Google, высокая вероятность использования других сервисов Google в связи с отсутствием альтернативной возможности использования иных сервисов [1].

На данный момент разработана система управления обучением "Odin"компанией, зарегистрированной, как ООО «Лига Спорта»[2]. Данная система используется студентами Томского государственного университета. Как указано на сайте данной платформы, пользователи разделены на три роли: студенты, преподаватели, администраторы, что очень близко ранее представленным требованиям.

Разберем предоставляемые пользователям возможности данной платформой.

Студент имеет свою страницу с заполненными личными данными, доступ к образовательным материалам формата лекции и практики, общаться с преподавателем в чате или в видеозвонке, отслеживать собственный прогресс в обучении и в студенческом рейтинге. Среди препода-

давателей также ведется рейтинг, на основе которого сам студент может выбрать лучшие для него курсы и преподавателя.

Преподаватель может создавать свой курс с занятиями в формате лекций, парктик, контрольных занятий, создавать свое расписание, а автоматизированное сохранение проводимых уроков в формате отчета облегчает процесс преподавания, напоминая об изученных материалах.

Функциональность платформы "Odin" включает в себя биржу образовательных программ, что расширяет возможности дистанционного обучения, улучшая коммуникацию студенческих и преподавательских сообществ среди других вузов.

Данная платформа менее популярна, чем выше упомянутые, однако она покрывает большее количество требований, предъявляемых пользователями к системе дистанционного обучения. Учитывая все положительные стороны, платформа "Odin" является платной, что значительно сужает объем пользовательской аудитории и говорит об её недоступности.

Таким образом было определено, что на данный момент в российском сегменте программных решений отсутствуют платформы, которые бы удовлетворяли требованиям пользователей компаний, предоставляющих образовательные услуги, а именно отсутствие инструментария управления организацией и предоставления образовательных услуг.

На основе анализа далее приводится перечень требований, предъявляемых авторами статьи к теоретически приемлемой платформе для пользователей СДО.

1. Удобная навигация по платформе будет достигнута с помощью интуитивно понятного интерфейса. Таким образом, пользователь не будет тратить много времени на запоминание расположения вкладок и поиск нужной информации;

2. Определенная группа пользователей (учащиеся, родители, преподаватели, администраторы, методисты, предприниматели) должна иметь полную функциональность. Готовое программное обеспечение не должно требовать специальных знаний для настройки. В противном случае неполная функциональность платформы для её дополнения потребует знаний специалистов, тогда подготовка платформы для использования займет больше времени и денежных средств;

3. Преподавателям важно удобство при настройке курса, возможность проводить все виды работ (тесты, лекции, семинары) и видеоконференции прямо на платформе;

4. Доступность расширенной функциональности должна быть в основной версии платформы без загрузки плагинов;

5. В качестве дополнительной функциональности можно использовать интеграцию с CRM (с англ. «customer relationship management» - система управления взаимоотношениями с клиентами). Именно такая интеграция позволит дать определенную функциональность (настроить инструменты менеджеров для работы с клиентами, а также грамотно реализовать общение между пользователями) и настроить взаимодействие всех групп пользователей;

6. Платформа должна иметь возможность поддерживать различного рода файловые расширения. Удовлетворение данного требования позволит преподавателю делиться информацией в любом удобном для него формате, а также получать её от учеников;

7. Поддержка мобильных приложений. Важно, чтобы доступ к платформе не был ограничен ноутбуком или стационарным компьютером. Часто пользователи будучи в поездке, сталкиваются с необходимостью зайти на платформу.

8. Платформа должна быть бесплатной или по доступной для каждого цене.

Заключение

Существует множество различных систем дистанционного обучения, каждая из которых имеет свою функциональность, сильные и слабые стороны. Однако потребности пользователей систем ДО растут, возникают постоянно функционирующие частные онлайн-школы с большим количеством контактных часов. Анализ существующих предложений среди систем управления обучением показал, что ни одна из платформ не может полностью удовлетворять потребности онлайн-школы по оказанию услуг дистанционного образования. Таким образом, формируется актуальность разработки программного продукта, отвечающего минимальным требованиям, который предлагают авторы настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. <https://www.eduneo.ru/google-classroom/> — Google-Classroom: функциональность и краткая инструкция по созданию онлайн-курса. [Электронный ресурс]. 2021.
2. <https://www.odin.study/connect#> — Odin. [Электронный ресурс]. 2021 (дата обращения: 30.11.2022).
3. <https://lmslist.ru/sdo/obzor-ispring-online/> — Обзор СДО iSpring Learn: возможности и решаемые бизнес-задачи. 2019. (дата обращения: 10.09.2022).

4. <https://lmslist.ru/free-sdo/obzor-moodle> — Система электронного обучения Moodle: обзор возможностей и функциональности. 2020. (дата обращения: 10.09.2022).
5. *Коваленко С. Ф., Барабанов А. В., Гребенникова Н. И., Малиновкин В. А.* анализ популярных платформ для систем управления обучением // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2020. С. 1–4.

Шудегова Влада Константиновна — ИПМКН ТГУ, студент группы 932121. E-mail: *vlada.shudegova@gmail.com*

Семакин Александр Александрович — ИПМКН ТГУ, студент группы 932121. E-mail: *alexasemakin@gmail.com*

Бронер Валентина Игоревна — Кандидат физико-математических наук. E-mail: *valsubbotina@mail.ru*

О ПРОБЛЕМЕ ПОПУЛЯРИЗАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСТОРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

А. А. Семакин¹, В. К. Шудегова¹, В. А. Бобров²

¹ *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

² *Санкт-Петербургский государственный экономический университет, Институт дополнительного профессионального образования - "Высшая экономическая школа", г. Санкт-Петербург, Россия*

В рамках настоящей работы авторы представили определение публичной истории как направления исторической науки, оценили проблемы популяризации результатов исторических исследований, выдвинули гипотезу о перспективности использования современных программно-вычислительных и медиаинформационных инструментов в качестве средства развития академической истории посредством популяризации отечественной истории в культурно-развлекательной сфере в условиях четвёртой информационной революции, провели анализ существующих мобильных приложений по популярно-исторической тематике и представили их ограничения с точки зрения решения задачи популяризации результатов исторических исследований и академического исторического знания. **Ключевые слова:** история, публичная история, программное обеспечение, гуманитарные науки, прикладные гуманитарные исследования, социальные сети, программные продукты.

Введение

Коммерциализация технических и гуманитарно-общественных наук, начавшаяся в середине 20 века, как один из основных трендов развития мировой экономики [1] уже сегодня вносит значительные преобразования в сложившуюся систему социально-экономических отношений между акторами сфер бизнеса, политики, науки, культуры, а также социальной сферы общества [2]. Следствием этих преобразований являются продолжающиеся изменения внутри самих научных направлений, в том числе тех – особенно гуманитарных – которые ранее не находили широкого прикладного применения вне академических институтов: психология, социология, антропология, политология и др. [1]. Примером следствия воздействия мировых трендов на вектор развития научного

знания является публичная история, на сегодняшний день являющаяся одним из наиболее молодых направлений академической истории как науки.

1. Публичная история и интерес к истории

Публичная история как направление занимается изучением места исторического знания в массовой культуре и публичной среде. Предпосылки для возникновения рассматриваемой дисциплины складывались с середины 20 века в США. Фактором выхода результатов исторических исследований за сугубо академические рамки стали качественные изменения в массовой культуре общества, а именно рост социально-политической активности населения, что ознаменовало начало становления исторического знания частью политического дискурса США и других западных стран [3]. В качестве драйвера развития публичной истории, как научного направления, называют рост безработицы в 70-х годах 20 века, коснувшегося и профессиональных историков [4]. Кроме того, рост интереса широких слоёв общества к истории может быть связан с общим повышением уровня образованности населения.

На сегодняшний день в России отмечается снижение интереса молодёжи к школьной и академической истории [5], что, безусловно, составляет проблему национального масштаба. В этой связи и формируется актуальность исследований, посвященных решению проблемы низкой востребованности исторического знания у массового потребителя, в том числе истории родной страны. По результатам опроса ВЦИОМ от 6 декабря 2021 года, со снижением возраста респондентов снижался и уровень исторических знаний опрашиваемых. Ниже приводится пример с вопросом о полном названии аббревиатуры “СССР”:

Таблица 1

Ответы на вопрос ВЦИОМ “Вы знаете или не знаете, как расшифровывается СССР? Если знаете, пожалуйста, расшифруйте”, в % [6]

Возраст	18-24	25-34	35-44	45-59	60
Союз Советских Социалистических Республик	59	60	76	94	95
Другой ответ	14	17	12	2	2
Не знаю / затрудняюсь ответить	27	23	12	4	3

Через полгода ВЦИОМ также провёл опрос, в котором у респондентов выясняли наличие в их семьях родственников, участвовавших в Великой Отечественной войне.

Таблица 2
 Ответы на вопрос ВЦИОМ «Были ли среди Ваших родственников участники Великой Отечественной войны? Если были, то знаете ли Вы подробности их жизни в годы войны?», в % [7]

Возраст	18-24	25-34	35-44	45-59	60
Да, я много знаю об этом из рассказов моих близких, семейных архивов (писем, фото)	24	26	42	51	56
Я знаю, что мои родственники воевали, но подробности мне неизвестны	48	46	37	37	32
Среди моих родственников были участники войны, но о них мне ничего неизвестно	11	10	5	7	5
Никто из моих родственников не участвовал в войне	4	6	10	2	3
Я не знаю, участвовал ли кто-то из моих родственников в войне или нет	12	12	5	3	3
Затрудняюсь ответить	1	0	1	0	1

Результаты обоих опросов демонстрируют сравнительно низкие знания молодёжи России об истории своей страны, что демонстрирует наличие проблемы популяризации истории в публичном поле.

При этом с развитием современных средств коммуникации растут и возможности представления исторического знания массовому потребителю. На сегодняшний день исторические блоги являются одним из основных разделов крупнейших мировых видеохостингов. Интерес современного общества, в том числе россиян, к историческим Интернет-каналам демонстрирует популярность медиа-контента, основой которых являются результаты исторических исследований [8].

Вышеописанное явление может быть объяснено заключением ЮНЕСКО, на которое зачастую ссылаются исследователи областей преподавания истории и популяризация исторических знаний: совместное применение человеком аудиальных и визуальных каналов получения информации обеспечивает 65%-е усвоение информации, что создаёт си-

нергичный эффект в сравнении с результатами усвоения информации при применении средств слушания (12%) и чтения (25%) отдельно друг от друга [9].

Другой доступной аналогией является тезис Эдгара Дейла о преподавании изучаемого материала и его использовании в собственной жизни как «наиболее эффективном способе выучить что-либо», а также обычном слушании или чтении как, наоборот, наименее эффективном [10]. И хотя часто приводимые в сети «Интернет» версии так называемого «Конуса Дейла» являются лишь описательной иллюстрацией вышеприведённых слов американского педагога и не позволяют нам опираться на конкретные показатели усвоения учениками или слушателями материала, они также демонстрируют принцип роста усвоения материала при использовании слушателем более и более сложных способов познания, чем классические слушание и чтение.

Задача популяризации исторического знания тесно связана с глобальным явлением распространения информации и информационными технологиями в целом. Выделяют четыре информационных революции, произошедшие в ходе развития человечества:

- 1) Первая информационная революция – письменность;
- 2) Вторая информационная революция – книгопечатание;
- 3) Третья информационная революция – телеграф, телефон, радио, телевидение;
- 4) Четвёртая информационная революция – сеть «Интернет» [11].

Каждый последующий этап был короче, чем предыдущий, что свидетельствует о постоянном росте скорости развития информационных технологий. Также можно отметить, что каждая новая информационная революция усложняет средства её передачи, требуя от человека применять всё большее число аудиальных и визуальных каналов получения информации и средств познания (по Дейлу). При этом каждая очередная информационная революция полностью не отменяет прежние инструменты распространения информации, однако постепенно снижает их актуальность и распространение в пользу более новых.

Из вышеприведенного можно сделать предположение, что основной сложностью развития публичной истории и общего повышения интереса массового потребителя к историческому знанию является относительно низкая эффективность наиболее распространенных на сегодняшний день инструментов передачи информации человеку. Что создает запрос

на исследования применимости существующих средств обработки, подготовки и подачи информации к задаче популяризации истории, в том числе отечественной. В связи с этим создание тематического культурно-развлекательного контента, основой которого являются результаты исторических исследований, представляется в качестве нового драйва развития исторической науки.

2. Популяризация исторического знания в публичном поле

В качестве решения обозначенной проблемы низкого интереса массового потребителя к историческому знанию в рамках настоящей работы рассматривается использование современных инструментов подготовки медиа-контента, средств коммуникации и маркетинга в целях продвижения достижений академической исторической науки в большей степени в качестве культурно-развлекательного, чем просветительского характера. Таким образом, гипотезой настоящего исследования является предположение о низкой эффективности традиционных средств популяризации результатов исторических исследований и исторического знания.

В качестве средства организации продвижения достижений академической науки в публичной среде авторами рассматривается использование пользовательского мобильного программного обеспечения (приложения, далее - ПО), которое бы позволило профильным специалистам представлять результаты научных исследований в качестве культурно-развлекательного контента для массового потребителя.

Авторами был проведён анализ существующих отечественных и зарубежных мобильных ПО популярно-исторической направленности, нацеленных на массового потребителя. Использование иностранных приложений, по мнению авторов, в современных условиях ограничивается целым рядом причин, в число которых попали отсутствие популярного медиа-контента об истории России («Today's Document»), санкционные ограничения на обновления и поддержку приложений («Historypin»), а также стратегическая задача локализации разработки отечественного исторического медиа-контента на территории России. Авторами выделены приложения, предлагающие пользователю пассивное потребление исторического в фоновом режиме мобильного устройства («History Today»), наглядную инфографику и визуализацию («World History Atlas», «History: Maps Of World») или приложения, построенные в виде информационно-справочной системы («Историческая библиотека», «Redigo»). Также авторами статьи были выделены приложения, использующие концепцию игрофикации при потреблении исторического знания («Кругозор») или построенные в качестве игры (Civilization

Revolution 2), что рассматривается как популярное направление увеличения вовлечённости пользователя. Наибольший интерес авторов был вызван мобильными приложениями, подающие медиа-контент в зависимости от поведения пользователя («izi.TRAVEL») и использующие элементы игрофикации при использовании («TripQuest»).

При всём многообразии мобильных решений, посвящённых популярно-историческому контенту, был выведен ряд их ограничений по популяризации результатов исторических исследований и академического исторического знания. К таковым относятся:

- 1) Единицы медиа-контента приложений (видеоролик, статья или сообщение) зачастую «привязаны» к конкретным физическим объектам (зданиям, улицам, достопримечательностям) или историческим личностям, но не учитывают протяжённые или абстрактные объекты, которые могут быть связаны с историческими событиями (предмет спора государств, места сражений или набегов и т.д.);
- 2) Приложения чаще всего представляют исторический медиа-контент, посвящённый городам или, реже, более мелким населённым пунктам, зачастую игнорируя исторические события или места за их пределами;
- 3) В половине случаев приложения ориентированы на туристов в качестве своей целевой аудитории, а не на более широкого потребителя.
- 4) В большинстве случаев приложения не имеют элементов взаимодействия с пользователем или элементов игрофикации;
- 5) В подавляющем большинстве случаев медиа-контент формируется на основе ранее обработанной общедоступной информации, что игнорирует результаты относительно недавних исторических исследований;
- 6) Приложения предлагают непротиворечивое историческое знание, которое в реальности чаще всего имеет спорный и спекулятивный характер, что требует его объективного рассмотрения с различных точек зрения, в том числе противоположных;
- 7) В большинстве приложений отсутствуют системы взаимодействия с «поставщиками» исторического знания, то есть с дипломированными историками;

Таким образом, были определены ограничения представленных на российском и зарубежном рынках мобильных программных решений по популяризации результатов исторических исследований и академического исторического знания, нивелирование которых поможет создать разработчикам устойчивое конкурентное преимущество. Кроме выявления заявленных ограничений, авторы отмечают, что большинство современных приложений популярно-исторической направленности, в том числе, российских, не отвечают требованиям, диктуемым четвёртой информационной революцией, а также задачей усложнения способов познания исторических знаний массовым потребителем и увеличения его вовлечённости в данный процесс. Итогом вышесказанного является уверенность авторов в актуальности разработки в соответствии с результатами конкурентного анализа и заявленными тезисами отечественного мобильного приложения по популяризации результатов исторических исследований.

Концепция планируемого к разработке ПО предполагает публикацию информации об исторических событиях с «привязкой» к координатной сетке некоторой территории (региона или страны), с которой конечный потребитель культурно-развлекательного контента (основу которого составляет историческое знание) может ознакомиться при своём нахождении в соответствующей локации, что обеспечит связь авторов и потребителей результатов исторических исследований в рамках одной информационной системы. В конечном счёте ожидается, что использование элементов развлекательного характера в процессах популяризации исторического знания посредством создания и тиражирования программного продукта повысит интерес массового потребителя к историческому знанию, как к культурно-развлекательному контенту, что, соответственно, повысит востребованность результатов исторических исследований специалистов-историков и общий уровень знания населения Российской Федерации о родной истории.

Заключение

Таким образом, в рамках работы были приведены предпосылки становления публичной истории в качестве нового направления академической истории, а также рассмотрена проблема сравнительно низкого уровня знаний современного российского общества об исторических событиях, в том числе в сегменте отечественной истории. По результатам анализа статистических данных об уровне знаний населения России истории родной страны и данных о популярности исторического Интернет-контента в качестве одной из причин означенной проблемы заявлен нынешний инструментарий преподавания и популяризации ис-

тории, который сегодня не отвечает уровню развития современного общества как общества потребления, в том числе потребления информации. Как представляется авторам настоящей работы, это формирует актуальность научного и маркетингового исследования перспективности применения современных информационных технологий, а именно организации сетевого взаимодействия историков и потребителей посредством создания функционального программного обеспечения (социальной сети) при поддержке инструментов современной публичной науки в качестве способа повышения интереса населения к результатам исторических исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cervantes M. , Meissner D.* Commercialising Public Research under the Open Innovation Model // *New Trends. Foresight-Russia*. 2014. Vol. 8. № 3. P. 70–81.
2. *В. А. Бобров, С. Ю. Шевченко* Фактор риска в конфликте интересов экономических и политических акторов // *Российский экономический интернет-журнал*. 2019. № 4. С. 21.
3. *Wiener J.* Radical Historians and the Crisis in American History, 1959–1980 // *The Journal of American History*., 1989. Vol. 76. № 2. P. 399–434.
4. *Liddington J., Coasmpo И. О.* What Is Public History. Publics and Their Pasts, Meanings and Practices // *Oral History*. 2022. Vol. 30. № 1. P. 85.
5. *Буреева Е. В.*
<https://cyberleninka.ru/article/n/studencheskiy-nauchnyy-proekt/-sovremennik-kak-sposob-povysheniya-interesa-k-izucheniyu-istorii-u-sovremennoy-molodezhi>
— Студенческий научный проект "Современник" как способ повышения интереса к изучению истории у современной молодежи (дата обращения: 15.09.2022).
6. <https://wciom.ru/analytical-reviews/analiticheskii-obzor/tridcat-let-spustja-ili-vspominaja-i-zabyvaja-sssr>
— Тридцать лет спустя, или вспоминая и забывая СССР (дата обращения: 23.09.2022).
7. <https://wciom.ru/analytical-reviews/analiticheskii-obzor/velikaja-otechestvennaja-voina-v-semeinoi-pamjati>
— Великая Отечественная война в семейной памяти (дата обращения: 25.09.2022).
8. *Хут Л. Р.*
<https://cyberleninka.ru/article/n/istoricheskaya-blogosfera-runeta>
— Историческая блогосфера Рунета.

9. *Ануфриева Н.В.* Инновационная педагогическая деятельность в среднем профессиональном образовании // Научный электронный журнал Меридиан. 2020. № 8(42). С. 138–140.
10. *Kovalchick, Ann and Kara M. Dawson.* “Education And Technology: An Encyclopedia” 2003.
11. *Шестакова И.Г.* Качественный скачок скорости развития: новая ментальность // Интеллект. Инновации. Инвестиции. 2017. № 8. С. 47–50.

Семакин Александр Александрович — ИПМКН ТГУ, студент группы 932121. E-mail: alexasemakin@gmail.com

Шудегова Влада Константиновна — ИПМКН ТГУ, студент группы 932121. E-mail: vlada.shudegova@gmail.com

Бобров Виталий Александрович — ИДПО-“ВЭШ” СПбГЭУ, аналитик. E-mail: bobrovlik@mail.ru

СОЗДАНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ДЛЯ ИТ ИНДУСТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОДУКТОВОГО ПОДХОДА

М. В. Выголова, Д. И. Гриц

*Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет), г. Долгопрудный, Россия*

Московский физико-технический институт, ведущий технический вуз России, занимает лидирующие позиции в рейтингах THE, MosIUR, Forbes, ARWU и RAEX. В последние годы включился в серьезную конкурентную борьбу не только с классическими вузами, но и с корпоративными университетами и онлайн-площадками, которые готовят профессионалов все более высокого уровня в ИТ и смежных областях. Готовить востребованных рынком специалистов становится сложнее, поскольку стек технологий постоянно меняется. Необходимо иметь контур обратной связи с работодателями – анализировать требуемые компетенции и корректировать компетентностную модель выпускников. Ориентироваться на life long learning студентов. Эти задачи в МФТИ реализует центр «Пуск» совместно с Физтех-школами. В статье рассмотрен продуктовый подход к организации работы образовательных команд. Представлены несколько примеров реализации проектов: создание онлайн-магистратур, программ ДПО и МООК МФТИ, модернизация ОПОП.

Ключевые слова: *высшее образование, программы онлайн-магистратур, модернизация основных профессиональных образовательных программ, продуктовый подход.*

Введение

МФТИ на пути от модели исследовательского университета к университету предпринимательскому. Одним из ключевых этапов такого перехода может стать создание предпринимательских команд внутри административного ядра Университета. В 2021 году на базе центра дополнительного профессионального образования и центра развития дистанционного и электронного обучения был создан Центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск".

Цель — запустить в МФТИ коммерчески успешное направление онлайн-магистратур, соединив высокий стандарт качества образования

Физтех с цифровыми технологиями и lean- или бережливым подходом к управлению портфелем образовательных продуктов.

1. Основные принципы работы

В 2021 году Центром сформулирована гипотеза: в основе каждого востребованного рынком продукта лежит скиллсет или набор навыков выпускника. С одной стороны, компетенций из профессиональных и образовательных стандартов, с другой стороны - навыков проектной работы, подходов к решению проблем, опыта в решении проектных задач индустрии. Сотрудники Центра "Пуск" собирают скиллсет для каждой программы вместе с представителями компаний и ведущими учеными. Чтобы создать программы под быстро меняющиеся требования к скиллсетам, в центре реализованы следующие принципы и инструменты.

- 1) Продуктовый подход в онлайн образовании - создать среду для проектирования и разработки образовательных программ по методологии Agile, которая позволит сделать эффективный процесс производства и запуска образовательных программ, повысит качество и практическую ориентированность онлайн-программ МФТИ.
- 2) В центре «Пуск» реализована матричная управленческая структура: отдел продуктовой разработки, отдел сопровождения образовательных программ, отдел маркетинга и продаж, руководители проектов (ДПО, Магистратуры, Онлайн-платформы). Руководители проектов выполняют функции владельцев продукта в Agile методологии.
- 3) Проектное управление. Для создания продукта, образовательной программы любого объема - от массового открытого онлайн-курса до программ онлайн магистратур и ДПО, формируется проектная команда из руководителя проекта и сотрудников отделов разработки, поддержки и продвижения.
- 4) Планирование по целям - сотрудники проектной команды работают в рамках квартальных целей. Цели, утвержденные на квартал, декомпозированы на спринты по 2 недели. Контроль выполнения целей происходит в рамках спринтов.
- 5) Инструменты: студии самозаписи, цифровая система управления образовательным процессом.
- 6) Контент онлайн-программ создается изначально как детали конструктора - самостоятельные блоки, которые могут быть использованы в различных образовательных продуктах.
- 7) Работа с партнерами: наши программы создаются с учетом мнения потенциальных работодателей, с участием крупных игроков edtech-рынка.

2. Реализация онлайн магистратур

Центр «Пуск» МФТИ развивает программы дополнительного образования и профессиональные онлайн-магистратуры в тесной связке с индустриальными партнерами, экспертами рынка и ведущими edtech-площадками.

Профессиональные онлайн-магистратуры центра – это прикладные программы, в которых фундаментальная академическая база МФТИ усилена поддержкой экспертов рынка и индустриальных партнеров. Лекции, семинары, хакатоны, мастер-классы, групповые спринты – гибкость образовательных форматов в программах помогает лучше усваивать материал и сразу внедрять новые практики в свою работу. В процессе учебы студенты получают не только экспертную поддержку от преподавателей и менторов, но и мотивационную – от кураторов, чтобы не терять настрой и все успевать. Еще одна отличительная черта профессиональных магистратур центра – подход к выпускной работе. Кроме магистерской диссертации традиционного академического формата, студенты могут выбрать групповой проект по решению реальной индустриальной задачи или разработке нового продукта для отрасли.

В осеннем семестре 2022 года стартовали 5 программ с охватом в более чем 380 студентов: "Прикладной анализ данных в медицине"; "Науки о данных"; "Управление цифровым продуктом"; "Финансовые технологии и аналитика Биоинформатика".

3. Модернизация ОПОП

В 2021 и 2022 году сотрудники Центра участвуют в модернизации основных профессиональных образовательных программ Физтех-школы прикладной математики и информатики в рамках проекта МФТИ и АНО ВО "Университет Иннополис".

Проведена модернизация и актуализация базы дисциплин основной образовательной программы высшего образования «Компьютерные науки и инженерия» по направлению 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», направленных на развитие цифровых компетенций у студентов, дисциплины могут быть использованы студентами всех направлений подготовки для формирования собственной образовательной траектории (ИОТ). Составлена и согласована с работодателями компетентностная модель выпускника, описание ОПОП, учебный график, рабочий учебный план, комплект рабочих программ дисциплин.

Разработана учебно-методическая документация по учебным предметам, курсам и дисциплинам, предусматривающим формирование профессиональных компетенций по применению цифровых технологий;

разработаны программы шести онлайн-курсов для реализации дисциплин «Прикладная комбинаторная оптимизация», «Параллельные и распределенные вычисления», «Основы вероятности и теория меры», «Машинное обучение», «Прикладное машинное обучение», «Формальные языки и трансляции» включающие описание онлайн-курсов, их структуры и описания способов контроля знаний учащихся.

В 2021 году получены положительные отзывы на видео-курсы от образовательной организации: «Сбер Университет» и потенциального работодателя АНО «Тинькофф Банк». Программа в целом прошла рецензирование отраслевой рабочей группой ИКТ и получила положительные отзывы участников. Проведена апробация освоения студентами дисциплин с использованием СЦТ в осеннем семестре 2021/2022 учебного года.

Разработаны методические рекомендации для образовательных организаций по актуализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования — программ бакалавриата по направлению подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, направленных на формирование у студентов профессиональных компетенций по применению цифровых технологий в соответствующих приоритетных отраслях экономики.

В 2022 году команда МФТИ работает совместно с командой Томского государственного университета над модернизацией нескольких программ по направлениям подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника (за исключением направленности (профиля) «Компьютерные науки и инженерия»), 09.04.01 Информатика и вычислительная техника, 09.03.03 Прикладная информатика (за исключением направленности (профиля) «Программно-технические средства информации»), 09.04.03 Прикладная информатика. Проведен опрос работодателей, сформирована универсальную модель цифровых компетенций и компетентностные модели программ по направлениям подготовки, созданы онлайн курсы, для обучения сквозным цифровым технологиям. Апробация разработанных программ намечена на осенний семестр 2022года.

Заключение

Гипотеза о востребованности продуктов, созданных на основе скилл-сета выпускников подтвердилась: к обучению на новых магистерских программах приступили более 380 человек в осеннем семестре 2022 года. Компетентностные модели выпускников бакалавриата и магистратуры по направлению Прикладная информатика, созданные совместно

с ИТ-компаниями и партнерскими университетами, работают внутри основных образовательных программ и получают хорошие отзывы.

Подтвердилась гипотеза об эффективности продуктового подхода к созданию и модификации образовательных программ. Реализована методика управления портфелем: проверки гипотез, запуска, реализации, постоянного улучшения программ.

Выголова Марина Владимировна — к.т.н., руководитель направления "Онлайн-платформы Центр "Пуск". E-mail: vygolova.mv@mipt.ru

Гриц Дарья Игоревна — директор по цифровизации образования. E-mail: grits.di@mipt.ru

Современные проблемы экономики

ВЕЛИКАЯ ПЕРЕЗАГРУЗКА КАПИТАЛИЗМА: ОТ РАЗДЕЛЕНИЯ ЦЕННОСТИ К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ДОХОДА

А. В. Ложникова, И. Е. Андреева

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

Авторы отталкиваются от тезисов К. Швабе о «великой перезагрузке капитализма» после пандемийного кризиса-2019 и М. Альбера о превосходстве «рейнской» социальной модели капитализма по сравнению со спекулятивной неоамериканской (англоамериканской моделью). Описана классификация крупнейших цифровых платформ-агрегаторов по типу предпринимательского поведения. В статье анализируется современная 2020-2022 гг. деятельность органов власти США в интересах наёмных работников в сферах гиг-экономики и фаст-фуда. Представлен положительный опыт Коалиции за справедливость приложений (CAF) по снижению комиссионного вознаграждения в гиг-экономике. **Ключевые слова:** *распределение дохода, цифровые платформы-агрегаторы, облегченные экосистемы, типы платформ, владельцы платформ, самозанятые, независимые поставщики.*

Введение

Биологическая концепция «экосистемы» получила широкое распространение в современном бизнесе. Например, крупнейший игрок гиг-экономики Alibaba использовала термин «эко-система» в проспекте IPO (крупнейшем в истории) в 2019 году не менее 160 раз. Ключевой тезис сегодня получил широкое распространение в менеджменте: «платформы объединяют широкий спектр релевантных ресурсов и помогают пользователям платформы подключаться к наиболее подходящим ресурсам» [1]. Добавим еще один тезис: «Платформы могут быть эффективным средством создания новой стоимости» [2]. Платформы реализуют разные бизнес-модели. Например, App Store и Google Play воплощают высокомаржинальные бизнес-модели с максимальной ценой продукции и услуг. Другой подход реализован, к примеру, на рынке го-

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-07137 мк.

родских перевозок: на платформах предлагаются товары и услуги по низкой цене или даже бесплатно ради расширения круга клиентов.

1. Основные результаты

На мировом современном рынке наблюдается явная тенденция ухода от концепции «классической организации» (иерархические организации со значительными физическими активами и большим количеством штатных сотрудников) к так называемым облегченным «экосистемам». В таблицах 1-3 мы опишем типы цифровых платформ [3].

Таблица 1

Платформы с весомами физическими активами

Название компании (платформы)	Количество сотрудников (чел.)	Имущество, млрд. долл.	Выручка, млрд. долл.	Прибыль, млрд. долл.
Samsung Electronics (Tizen)	287 439	304,907	197,705	18,453
Daimler (Moovel)	298 655	339,456	193,346	2,660

Также к первому типу платформ относятся компании General Electric (Predix) и Johnson Controls (Panoptix).

Таблица 2

Смешанные платформы: широкая экосистема плюс физические активы и сотрудники

Название компании (платформы)	Количество сотрудников (чел.)	Имущество, млрд. долл.	Выручка, млрд. долл.	Прибыль, млрд. долл.
Amazon (App Store)	1 298 000	321,2	386,064	21,33
Apple (App Store)	147 000	323,888	274,515	57,4

Ко второму типу платформ относится также Xiaomi (MI App Store).

Таблица 3

Платформы облегченного типа

Название компании (платформы)	Количество сотрудников (чел.)	Имущество, млрд. долл.	Выручка, млрд. долл.	Прибыль/убыток, млрд. долл.
Uber Technologies*	22 800	33,252	11,139	-6, 678
Google (Google Play)	135 301	319,616	182,527	40,269

*Uber Technologies №281 в рейтинге Fortune Global 500 в 2021 г. К платформам облегченного типа относятся также Airbnb (Airbnb app) и Priceline (Booking.com).

В период кризиса COVID-19 цифровые платформы-агрегаторы были названы его главными бенефициарами. Но с другой стороны, происходило и обострение проблем в самых разных странах. Так, в 2020 г. в России (Москва) прошли забастовка курьеров-самозанятых в «Delivery Club» на рынке доставки еды [4] и вторая голодовка таксистов-самозанятых на рынке такси [5]. Власти штата Калифорния в 2020 г. обязывали агрегаторов Uber и Lyft нанимать таксистов в штат компаний вместо оформления самозанятости [6]. Одновременно в США сообщество разработчиков приложений (Basecamp, Blix, Blockchain.com, Deezer, Epic Games, Европейский совет издателей, Match Group, News Media Europe, Prepear, Protonmail, SkyDemon, Spotify и Tile) создало «Коалицию за справедливость приложений (CAF)». «Коалиция за справедливость приложений — это независимая некоммерческая организация, основанная ведущими отраслевыми компаниями для защиты свободы выбора и честной конкуренции в экосистеме приложений» [7].

Итак, мы наблюдаем разные страны и разные рынки, частные и публичные платформы, но при этом обнаружили общую проблему: одинаково упоминаемая высокая планка 30% комиссионного дохода платформенной компании. Могут ли платформы, цифровые экосистемы быть эффективными в распределении дохода между всеми участниками экосистемы? Отвечая на вопрос, мы предлагаем следующий тезис, основываясь на теории воспроизводства. Владельцы платформенных компаний и программного обеспечения перекладывают бремя инвестиций в физические активы и человеко-часов на так называемых свободных агентов (на самозанятых и независимых поставщиков), а также перераспределяют прибыль преимущественно в свою пользу (Рисунок 1).



Рис. 1. Участники цифровых экосистем: владельцы платформ, покупатели, само-занятые и независимые поставщики

Заключение

Несмотря на то, что властям штата Калифорния в США не удалось реализовать свою инициативу по сокращению самозанятости и расширению занятости на рынке городских перевозок [5], недавно Блумберг сообщил о новой официальной инициативе этого штата в сфере труда и занятости. Речь идёт о повышении минимальной почасовой оплаты труда с 15 до 22 долларов в секторе фаст-фуда. Итак, на фоне текущего кризиса, начиная с пандемийного кризиса-2019, в неоамериканской спекулятивной модели капитализма проявляется тенденция на сокращение места в модели рыночных благ и увеличивается, как в «рейнско-японской» индустриальной, социальной модели, место смешанных благ, прежде всего предприятий и зарплат наёмных работников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. <https://clck.ru/34GwQ9> — The Marketing Journal. Hagel J. Harnessing the full potential of platforms. 2016.
2. <https://www2.deloitte.com/us/en/insights/focus/business-trends/2015/business-ecosystems-come-of-age-business-trends.html> — Business Trends. Eamonn Kelly. Business ecosystems come of age. 2015.
3. https://www.thecge.net/app/uploads/2016/01/PDF-WEB-Platform-Survey_01_12.pdf — Peter C. Evans, Annabel le Gawer. The Rise of the Platform Enterprise: A Global Survey. 2016.
4. <https://www.rbc.ru/society/07/07/2020/5f048c0a9a79478e576333f7> — РБК. Профсоюз объявил о забастовке курьеров клуба доставки. 2020.
5. <https://clck.ru/34GwQX> — Рамблер Финансы. «За восемь часов ты выходишь только в ноль»: таксист в Москве объявил голодовку из-за уменьшения доходов. 2019.

6. <https://www.bloomberg.com/news/articles/2020-08-10/california-wins-preliminary-injunction-against-uber-lyft> — Bloomberg. Uber, Lyft Must Convert Drivers into Employees. 2020.
7. <https://appfairness.org/> — Every day, Apple taxes consumers & crushes innovation. 2020.
8. <https://www.bloomberg.com/opinion/articles/2022-09-05/california-s-fast-recovery-act-will-hurt-fast-food-workers> — Bloomberg. California's Fast Recovery Act Will Hurt Fast Food Workers. 2022.

Ложникова Анна Владимировна — доктор экономических наук, профессор кафедры экономики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: *tfg@mail.ru*

Андреева Ирина Евгеньевна — магистрант Института экономики и менеджмента Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: *irina-and97@yandex.ru*

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование телекоммуникационных сетей связи	5
<i>Kindra G., Bogatyrev V. A., Bogatyrev S. V., Moshnikov A.</i> Analysis of end-to-end request time for QUIC server in proxy mode comparing to HTTP	6
<i>Tóth Á., Sztrik J.</i> Simulation of retrial queueing system with two-way communication in different scenarios	12
<i>Назаров А. А., Фёдорова Е. А., О. Д. Лизюра, Пауль С. В., Моисеев А. Н.</i> Двухфазная СМО с неограниченным числом приборов и деградацией обслуживания	18
<i>Назаров А. А., Фунг-Джун Т., Пауль С. В., Морозова М. А.</i> Исследование тандемной системы массового обслуживания с двумя орбитами методом асимптотического анализа	24
Методы анализа и визуализации данных	33
<i>Filiatin I. V., Karitonov A. A.</i> Comparison of machine learning algorithms in the problems of predicting the number of users of multi-access edge computing systems	34
<i>Гиллин С. В.</i> Задача автоматического распознавания зданий в водоохраных зонах на спутниковых снимках	40
<i>Бузакова Д. Д., Лисовская Е. Ю.</i> Использование нейросетевого подхода в задаче распознавания коронавирусной инфекции по рентгеновским снимкам пациентов	47
<i>Солопов В. Е., Кабанова Т. В., Петрова Е. Ю.</i> Проблема оценки работы алгоритмов тематического моделирования	53
Математическая теория телеграфика и теория массового обслуживания	59
<i>Jijo Joy, Jose K. P.</i> An (s,S) Inventory System with Perishable Items and Age-dependent Demands	60
<i>Zorine A. V.</i> A GoF test for shifted exponential distribution	66
<i>Beena P., Jose K.P.</i> A MAP/PH(1),PH(2)/2 Inventory Model with Vacation During Production	72
<i>Thresiamma N. J., Jose K. P.</i> A Retrial Inventory Model With N-Policy	78
<i>Smija Skaria, Sajeev S Nair, Sandhya E.</i> An Explicit solution for an Inventory Model with Positive Service Time and Catastrophes	85
<i>Sandhya E, C. Sreenivasan, Smija Skaria, Sajeev S Nair</i> An Explicit Solution for an Inventory Model with Retrial and Server Interruptions...	92

<i>Dudin A., Dudin S., Dudina O.</i> Analysis of multi-server priority queuing system with servers reservation and disasters.....	99
<i>Vasilyev S.A., Bouatta M.A., Kanzitdinov S.K., Tsareva G.O.</i> Numerical analysis of shortest queue problem for time-scale queuing system with a small parameter	105
<i>Tsitsiashvili G.</i> Peak load in infinite-server queuing system with deterministic service time.....	111
<i>Ivanova N.</i> Sensitivity of k -out-of- n system's steady-state characteristics	117
<i>Rusilko T., Salnikov D., A. Pankov</i> Stochastic data network model.....	123
<i>Данилюк Е. Ю., Плеханов А. С., Моисеева С. П.</i> Асимптотически-диффузионный анализ RQ-системы M/M/1 с нетерпеливыми заявками, коллизиями и ненадёжным прибором.....	129
<i>Полховская А. В., Моисеева С. П.</i> Асимптотический анализ RQ-системы M M 1 с коллизиями и H_1, H_2 настойчивыми заявками	136
<i>Фёдорова Е. А., Мелошников Н. П., Плаксин Д. А.</i> Асимптотический анализ RQ-системы M M N с катастрофами в блоке обслуживания	143
<i>Хаджи-Оглы К. Р., Фёдорова Е. А.</i> Асимптотический анализ RQ-системы MPP M 1 с переключением прибора в условии большой загрузки	150
<i>Рожкова С. В., Титаренко Е. Ю.</i> Асимптотический анализ системы M/M/1/N-1 с приоритетами и обратными связями	156
<i>Пагано М., Станкевич Е. П., Таманко И. Е.</i> Задача оптимизации системы массового обслуживания с групповым обслуживанием требований.....	162
<i>Лембриков С. А., Кувыкина Е. В.</i> Сравнение основных критериев оптимальности управления для алгоритма с информативным пешеходным потоком.....	168
<i>Воронина Н. М., Рожкова С. В., Моисеева С. П.</i> Исследование динамической RQ-системы M/M/1 с ненадежным прибором	174
<i>Назаров А. А., Пауль С. В., Шульгина К. С., Салимзянов Р. Р.</i> Исследование циклической системы с повторными вызовами $M_2 M_2 1$..	180
<i>Чегодаева Е. Г., Меликов А. З., Моисеева С. П., Полин Е. П.</i> Исследование числа повторных обращений в системе $M(i) M \infty$ с обратной связью.....	187
<i>Королев Д. А., Бушкова Т. В., Моисеева С. П.</i> Математическая модель изменения количества товара в виде СМО $M^{(n)} M_1 M_2 \dots M_n \infty$	193
<i>Благинин А. Л., Лапатин И. Л.</i> О подходе к обращению характеристической функции	199

<i>Копать Д. Я.</i> Оптимизация G-сети с системами с карантинными и контрольными очередями, параметрами зависящими от времени, и случайными доходами от переходов между ее состояниями	207
<i>Цодиков В. Л., Зорин А. В.</i> Построение математической модели процесса циклического управления периодическими конфликтными потоками	215
<i>Петрива Н. В., Пауль С. В.</i> Тандемная гибридная система массового обслуживания с повторными вызовами и вероятностным переходом	220
Математическое и компьютерное моделирование в технике, естествознании, экономике, образовании, гуманитарных науках и других областях	226
<i>Zizov V.S.</i> Asymptotic bounds for cellular circuit decoder with repeated inputs	227
<i>Asadov Q. U., Sabirov K. K.</i> The Nonlinear Klein-Gordon Equation on Metric Graphs	232
<i>Булавчук А. М., Семенова Д. В.</i> Алгоритм имитации отжига для задачи RCPSP с NPV-критерием	236
<i>Базчаева М. А., Дмитриев Ю. Г.</i> Локальные комбинированные оценки доли	241
<i>Кирилин А. М.</i> Метод GD-ICP в задаче подбора геометрических параметров титановых пластин для краниопластики	247
<i>Ловецкий К. П., Кулябов Д. С., Севастьянов Л. А., Сергеев С. В.</i> Многостадийный численный метод коллокаций решения ОДУ второго порядка	253
<i>Ибрагимова Э. И., Семенова Д. В., Солдатенко А. А.</i> Об исследовании свойств эвристического алгоритма кластеризации знаковых графов	259
<i>Брызгалов В. Л., Войтишек А. В.</i> Оценка константы в выражении для погрешности метода Монте-Карло	265
<i>Тисленко Т. И.</i> Подбор параметров задачи MARLIN для световой сети	271
<i>Лукьянова Н. А., Потылицина С. Е.</i> Применение сверточных нейронных сетей в задаче распознавания пневмонии	277
<i>Жарков М. Л., Казаков А. Л., Лемперт А. А.</i> Применение сетей массового обслуживания для моделирования железнодорожных участков с пакетным движением	283

<i>Баранова И. В., Судакова А. А.</i> Применение структурного метода распознавания геометрических фигур для распознавания изображений дорожных знаков	289
<i>Левский А. Б.</i> Применение вычислительных технологий для гармонизации мелодии	295
<i>Парыгина С. А.</i> Проблемы и особенности математического моделирования технических и гуманитарных данных	301
<i>Рыков В. В., Кочуева О. Н.</i> Профилактическое обслуживание системы k -из- n с зависимыми отказами. Теоретические результаты	307
<i>Твёрдый Д. А., Паровик Р. И.</i> Распараллеливание численного алгоритма на основе нелокальной неявной конечно-разностной схемы в задачах моделирования процессов с насыщением и памятью	313
<i>Войтишек А. В., Шлымбетов Н. Х.</i> Экономичные алгоритмы приближения вероятностной плотности по заданной выборке	319
<i>Шлаев К. И., Сабиров Ф. С.</i> Исследование динамических характеристик угловой фрезерной головки.....	325
Современные стохастические модели	331
<i>Imomov A., Murtazaev M. and Nazarov Z.</i> A local limit theorem for the positive recurrent Q-process	332
<i>Purtukhia O., Zerakidze Z.</i> Constructive Integral Representation of Non-smooth Brownian Functional	337
<i>Rasulov A., Raimova G.</i> Improving Efficiency of Monte Carlo Algorithms for the Solution some Dirichlet problems	343
<i>Imomov A., Chuliyeva M.</i> Interpret correlation statistics of healthy eating in preschool children with correlations	351
<i>Hasanov A., Djuraev N.</i> Linearly independent solutions of the system of second-order hypergeometric equations of partial derivatives for function $X_{31}^{(4)}$	356
<i>Imomov Azam A., Meyliev Abror Kh., Hazratqulov S.</i> On Local limit properties of Markov branching processes allowing immigration without high-order distribution moments	362
<i>Sharipov E. O., Shodiyev S. Yu., Tursunov B. A.</i> On the dynamics of the formation of independent work on the probability theory for students	367
<i>Imomov A., Murtazaev M. and Nazarov Z.</i> Refined limit theorems for the non-critical Galton-Watson Branching Systems	376
<i>Litvinov V., Litvinova K.</i> Research of Transverse Rope Oscillations Moving in the Longitudinal Direction	381
<i>Шакинов Р. К.</i> Актуарные модели расчёта в медицине	386

<i>Азимов Ж. Б.</i> Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием и миграцией частиц.....	392
<i>Турсунов Б. А., Рахимов Ф. Р.</i> Геометрия многообразий неотрицательной кривизны, порожденных динамическими системами.....	396
<i>Абулов М. О.</i> Краевая задача для одного класса уравнений третьего порядка	400
<i>Сайфуллоева Г. С.</i> Оценка интегральной функции интенсивности	405
Информационные технологии в обучении	410
<i>Шудегова В. К., Семакин А. А., Бронер В. И.</i> Анализ существующих систем дистанционного обучения для частных онлайн-школ	411
<i>Семакин А. А., Шудегова В. К., Бобров В. А.</i> О проблеме популяризации результатов исторических исследований.....	417
<i>Выгорова М. В., Гриц Д. И.</i> Создание образовательных программ для ИТ индустрии с использованием продуктового подхода	426
Современные проблемы экономики	431
<i>Ложникова А. В., Андреева И. Е.</i> Великая перезагрузка капитализма: от разделения ценности к распределению дохода	432

Научное издание

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
(ИТММ-2022)**

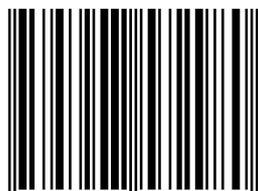
**МАТЕРИАЛЫ
XXI Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
25–29 октября 2022 г.**

Редактор *В.Г. Лизачева*
Компьютерная верстка *О.Д. Лизюра*
Дизайн обложки *Л.Д. Кривцовой*

Отпечатано на оборудовании
Издательства **Томского государственного университета**
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.
Тел. 8+(382-2)–52-98-49
Сайт: <http://publish.tsu.ru>
E-mail: rio.tsu@mail.ru

Подписано к печати 12.09.2022 г.
Формат 60 × 84¹/16. Бумага для офисной техники. Гарнитура «Times».
Печ. л. 24.5. Усл. печ. л. 22.7. Тираж 500 экз. Заказ № 5145.

ISBN 978-5-907572-98-0



9 785907 572980 >