



Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2018)

**МАТЕРИАЛЫ
XVII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
10–15 сентября 2018 г.**



ТОМСК
«Издательство НТЛ»
2018

УДК 519
ББК 22.17
И74

И74 Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2018): Материалы XVII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова (10–15 сентября 2018 г.). – Томск: Изд-во НТЛ, 2018. – 442 с.

ISBN 978-5-89503-621-1

Сборник содержит материалы докладов, в которых отражены основные направления XVII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова: прикладной вероятностный анализ, теория массового обслуживания и теория телетрафика, интеллектуальный анализ данных, информационные технологии и математическое моделирование.

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

УДК 519
ББК 22.17

Редколлегия:

С.П. Моисеева, доктор физико-математических наук, доцент,
А.А. Назаров, доктор технических наук, профессор.

*Конференция проводится при поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(проект № 18-07-20048-з)*

ISBN 978-5-89503-621-1

© Авторы. Текст, 2018
© Оформление. Дизайн.
ООО «Издательство НТЛ», 2018

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

The workload in the *MAP/G/1* queue with state-dependent services in heavy traffic

M. Dimitrov

University of National and World Economy, Sofia, Bulgaria

In this paper we consider the workload process in a single-server queue with the following characteristics. The arrival process of customers is assumed to be a *MAP* (Markovian arrival process). The service time of the arrival customer is distributed according to a general distribution which may dependent on the states of the underlying Markov chain immediately before and after arrivals. The workload process in the *MAP/G/1* queue with state dependent service time was considered for the first time in [1]. The goal of this paper is to derive the asymptotic distribution of workload process in stead –state under heavy traffic, i.e., when the traffic intensity $\rho < 1$ but $\rho \rightarrow 1$.

Mathematical model

We consider a single server queue with the following characteristics. Arrivals to the system are according to a *MAP* with representation (C, D) , where C and D are $(1 + M, 1 + M)$ matrices. The infinitesimal generator of the underlying continuous-time Markovian chain $Z(t)$ which governs customer arrivals is given by the matrix $Q = C + D$, where C has negative diagonal elements, and all off-diagonal elements in C and all elements in D are non-negative. Note that $Qe = (C + D)e = 0$, where e denote a column vector of ones. We assume that the Markov chain represented by the infinitesimal generator Q is a positive recurrent with the stationary probability vector π and it satisfies $\pi Q = 0, \pi e = 1$. When a state transition driven by D occurs, a customer arrives to the system. We assume that service times of customers who arrive to the system with a transition from state i to state j are independent and identically distributed in accordance with a distribution function $H_{i,j}(x)$. The service discipline is assumed to be work conserving.

We summarize the key properties of the arrival and the service processes described above.

Let $D(x)$ denote $(1+M, 1+M)$ matrix whose (i, j) element is given by $[D(X)]_{i,j} = [D_{i,j}]H_{i,j}(x)$, and its LST (Laplace Stilties Transform) is denoted

by $D^*(s)$, $[D^*(s)]_{i,j} = [D_{i,j}] \int_0^\infty e^{-sx} dH_{i,j}(x)$, $\text{Re } s > 0$. Then $D^*(s) = D \odot H^*(s)$,

where the matrix $H^*(s)$ is defined by elements

$$H^*_{i,j}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH_{i,j}(x).$$

We assume that there exists two first moments of $H_{i,j}(x)$, and we denote the matrices H_1 and H_2 by their elements

$$[H_1]_{i,j} = h_{i,j} = \int_0^\infty x dH_{i,j}(x), [H_2]_{i,j} = v_{i,j} = \int_0^\infty x^2 dH_{i,j}(x).$$

The utilization factor ρ is equal to $\pi D \odot H_1 e$. If the utilization factor $\rho < 1$ then all customers arriving to the system are eventually served. Let $V(t)$ denote a random variable representing the stationary amount of work in a system (the total amount of unfinished services of all customers in the system). We denote a $(1+M)$ vector $F(x)$ whose j element represents the probability $F_j(x) = P\{V(t) \leq x, Z(t) = j\}$. Further we will use the LST $\varphi(s)$ of a vector $F(x)$ derived in [1] as

$$\varphi(s) = sF(0)(sI + C + D^*(s))^{-1}.$$

We assume that $C = \lambda C^0$ and $D = \lambda D^0$. Then the matrix $Q = \lambda Q^0$, where $Q^0 = C^0 + D^0$. Further we will assume that all parameters except λ are fixed, and λ increases in such a way that $\varepsilon = 1 - \rho \rightarrow 0$, or $\lambda \rightarrow \lambda^0 = (\rho^0)^{-1}$, where $\rho^0 = \pi D^0 \odot H_1 e$.

Some preliminary results

Consider the continuous Markov chain $Z(t)$ introduced earlier. Markov chain with a finite space $S = \{0, 1, 2, \dots, M\}$, the infinitesimal matrix

$Q = C + D$ and a stationary distribution $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_M)$. The set of equations with respect to unknown $a_0, a_1, \dots, a_M$

$$Qa = (\pi D \odot H_1 e)e - D \odot H_1 e \quad (2)$$

always has a solution, since the stationary distribution π is orthogonal to the right hand side of this equation. We will define matrices A and R . The matrix A is defined by the rows and columns with numbers $1, 2, \dots, M$ of the matrix Q . The first row and first column of matrix R are equal to zero vectors, and next M rows and M columns form matrix A^{-1} . Then a matrix QR looks as follows: the first column is equal to $(0, -\frac{\pi_1}{\pi_0}, \dots, -\frac{\pi_M}{\pi_0})$,

the first column is equal to zero vector, and next elements form the identity matrix. For any vector $x = (x_0, x_1, \dots, x_M)$ we have

$$xQR = x - x_0 \frac{\pi}{\pi_0}. \quad (3)$$

The next equation

$$(a_0, a_1, \dots, a_M) = R[(\pi D \odot H_1 e)e - D \odot H_1 e] \quad (4)$$

define the solution to equation (2) when $a_0 = 0$. Dividing (2) by λ we get

$$Q^0 a = (\pi D^0 \odot H_1 e)e - D^0 \odot H_1 e \quad (5)$$

and a solution to equation (2) is also the solution to equation (5) and

$$(a_0, a_1, \dots, a_M) = R^0[(\pi D^0 \odot H_1 e)e - D^0 \odot H_1 e]. \quad (6)$$

The main results

The next theorem gives the mean value of a workload in a steady state.

Theorem 1. The mean value of a workload EV in a steady state is given by the formula (7)

$$(1 - \rho)EV = \frac{\pi D \odot H_2 e}{2} + \pi(D \odot H_1 - I)a + F(0)a. \quad (7)$$

Where a is a solution to (2) and $F(0)e = 1 - \rho$.

Proof. Let us consider the LST $\varphi(s)$ of the vector $F(x)$ defined by the equation $\varphi(s)[sI + C + D^*(s)] = sF(0)$. After some algebraic manipulations of this equation we get the main equation for the next study

$$\varphi(s)Q = \varphi(s)[D \odot (II - H^*(s)) - sI] + sF(0), \quad (8)$$

where all elements of matrix II are equal to one.

Now, multiplying both sides of equation (8) from the right by the vector e we have

$$F(0)e = \varphi(s)[I - D \odot \frac{II - H^*(s)}{s}]e. \quad (9)$$

After we let $s \rightarrow 0$ and taking into account that $\varphi(0) = \pi$, we have $F(0)e = 1 - \pi D \odot H_1 e = 1 - \rho$. Besides differentiating (9) with respect to s at the point $s = 0$ we have

$$(EV_0, EV_1, \dots, EV_M)(I - D \odot H_1)e = \frac{\pi D \odot H_2 e}{2}, \quad (10)$$

where $EV_n = E(V(t); Z(t) = n), 0 \leq n \leq M$ and $\frac{d[(II - H^*(s))/s]}{ds}$ equals to $-\frac{H_2}{2}$ at the point $s = 0$. Now post-multiplying both sides of (8) by a vector a and taking into account the equation (2) we get the equation

$$\varphi(s)[(\pi D \odot H_1 e) - D \odot H_1 e] = s\varphi(s)[D \odot \frac{II - H^*(s)}{s} - I]a + sF(0)a.$$

Differentiating this equation with respect to s at the point $s = 0$ we have

$$-(EV_0, EV_1, \dots, EV_M)[(\pi D \odot H_1 e) - D \odot H_1 e] = \pi[D \odot H_1 - I]a + F(0)a. \quad (11)$$

Summing we get the equation (7).

Thus the theorem is proved.

Theorem 2. Under heavy traffic the random variables $\varepsilon V(t)$ and $Z(t)$ are asymptotically independent and random variables $V(t)$ is asymptotically exponential with the mean

$$\frac{1}{2\rho^0} \pi D^0 \odot H_2 + \frac{\pi}{\rho^0} (D^0 \odot H_1 - \rho^0 I)a,$$

where a is a solution to equation (2).

Proof: We consider the main equation (9) for our investigation. Multiplying equation (9) by the vector e and taking into account that $\underline{Q}e = 0, F(0) = 1 - \rho \equiv \varepsilon$ we get

$$\varphi(s)[D \odot (II - H^*(s)) - sI]e + s\varepsilon = 0. \quad (12)$$

Post-multiplying both sides of equation (8) by the matrix R , from equation (3) follows the next equation

$$\varphi(s) = \frac{\varphi_0(s)}{\pi_0} \pi + \varphi(s)(D \odot (II - H^*(s)) - sI)R + sF(0)R. \quad (13)$$

Replacing the vector $\varphi(s)$ in the right hand side of equation (13) with the help of (13) we have the next equation

$$\varphi(s) = \frac{\varphi_0(s)}{\pi_0} \pi [I + (D \odot (II - H^*(s)) - sI)R] + sY(s), \quad (14)$$

where

$$Y(s) = s \varphi(s) [(D \odot \frac{II - H^*(s)}{s} - I)R]^2 + F(0)R[I + (D \odot (II - H^*(s)) - sI)R].$$

Substituting (14) into (12) we can express $\varphi_0(s)$ as follows:

$$\varphi_0(s) = \pi_0 \frac{A(s)}{B_1(s) + B_2(s)}. \quad (15)$$

Now, we replace s by εs in $A(s), B_1(s), B_2(s)$ and λ increases in such a way that $\varepsilon \rightarrow 0$, i.e. $\lambda \rightarrow \lambda_0 = \pi D^0 \odot H_1 e = (\rho^0)^{-1}$.

Besides

$$\frac{1 - H^*_{i,j}(\varepsilon s)}{s} \rightarrow h_{i,j}, \frac{H^*_{i,j}(\varepsilon s) - 1 + h_{i,j}\varepsilon s}{(\varepsilon s)^2} \rightarrow \frac{v_{i,j}}{2}.$$

Then
$$A(\varepsilon s) = \varepsilon^2 s + \varepsilon^2 s^2 Y(\varepsilon s) (D \odot \frac{II - H^*(\varepsilon s)}{\varepsilon s} - I)e,$$

$$B_1(\varepsilon s) = \varepsilon^2 s + \varepsilon^2 s^2 \pi D \odot \frac{H^*(\varepsilon s) - II + H_1 \varepsilon s}{\varepsilon^2 s^2} e,$$

$$B_2(\varepsilon s) = -\varepsilon^2 s^2 \pi (D \odot \frac{II - H^*(\varepsilon s)}{\varepsilon s}) R (D \odot \frac{II - H^*(\varepsilon s)}{\varepsilon s} - I)e.$$

From (15) using (5) we get $\varphi_0(s) = \pi_0 \frac{A(\varepsilon s)/\varepsilon^2 s}{(B_1(\varepsilon s) + B_2(\varepsilon s))/\varepsilon^2 s} \rightarrow \pi_0 \frac{1}{1 + Ns}$,

as $\varepsilon \rightarrow 0$, where $N = \frac{1}{2\rho^0} \pi D^0 \odot H_2 + \frac{\pi}{\rho^0} (D^0 \odot H_1 - \rho^0 I)a$.

Finally, from (14) and (15) we get that there exists a limit of $\varphi(\varepsilon s)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$, which is equal to $\pi \frac{1}{1 + Ns}$, and it implies the results of the theorem.

Thus the theorem is proved.

Conclusions

We studied the workload in the $MAP/G/1$ queue considered for the first time in [1]. The limit distribution of workload under heavy traffic is derived.

REFERENCES

1. *Takine T., Hasssegawa T.* The workload in the $MAP/G/1$ queue with state dependent services: its application to a queue with preemptive resume priority// *Stochastic models*. 1994. V. 10. No. 1. P. 183–204.

Dimitrov Mitko, Prof. Dr.; mdimitrov750@gmail.com

Analysis of an Infinite-server queue $MAP_k|G_k|\infty$ in random environment with k Markov Arrival Streams and random volume of customers

K. Kerobyan¹, R. Kerobyan²

¹ *California State University Northridge, Northridge, USA*

² *University of California San Diego, San Diego, USA*

From the time of Erlang's pioneering research [1], queueing models with many servers, in particular, the infinite-server models, have been widely used for modelling and performance evaluation of wired and wireless computer and telecommunication networks [2]. As shown by large number of measurements the traffic of modern computer networks has self-similar nature and can be characterized by the heterogeneousness, the non-stationarity, the burstiness, and the correlations. Network traffics in queue are generally described by traffic models based on finite Markovian Processes: MAP, Batch MAP, Marked MAP and their generalizations [3].

To evaluate the impact of network environment on the performance metrics the infinite-server models in the random environment (RE) are applied. The queue size distribution of the model $M|G|\infty$ with semi-Markov (SM) environment under asymptotic condition of high arrival rate and frequent environment transitions is studied in [4]. The queue $M|G|\infty$ in RE with clearing mechanism is studied in [5]. The environmental clearing process is modeled by an m -state irreducible SMP. The transient and steady-state queue length distributions by using renewal arguments are obtained. The queue $MMAP_k|G_k|\infty$ in SM environment and catastrophes by using renewal arguments and differential equations is studied in [6].

In many applications of queue models such as computer and communication networks, transportation systems the customers characterize by vector of requesting recourses which components can be random quantities.

Despite importance of this models in queue theory, there are very few works devoted to research of infinite-server recourse models, see e.g. [7–10].

In this paper we consider $MAP_k|G_k|\infty$ queue. The PGF of joint distributions of number of busy servers and numbers of served customers, the joint distributions of total recourse in the model and total served recourse are found. All results are obtained by using collective marks method (CMM) and renewal processes methods.

Model Description

We consider an infinite-server $\text{MAP}_k | G_k | \infty$ model in RE with K types of customers and catastrophes. The RE operates according to stationary, irreducible SMP $\xi(t)$, $t \geq 0$ with finite state space $S = \{1, 2, \dots, k\}$. The SMP is given by the vector of initial distribution $p^0 = \{p_i^0, i \in S\}$ and SM matrix $Q(t) = \|Q_{ij}(t)\|$, $t \geq 0, i, j \in S$. Customers arrive according to homogeneous MAPs which are given by characteristic matrices $\{D_{0r}, D_{1r}, 1 \leq r \leq K\}$. D_{0r} is a non-singular matrix with negative diagonal elements and D_{1r} is a non-negative matrix. The phase process (PP) $J_r(t)$ of r -th MAP is an irreducible Markov process with generating matrix D_r and finite set of states E_r . D_r is a matrix of $m_r \times m_r$ size. $D_r = D_{0r} + D_{1r}$, $D_r \mathbf{e}_r = 0$, $\pi_r D_r = 0$, $\pi_r \mathbf{e}_r = 1$, $1 \leq r \leq K$, where $\mathbf{e}_r$ is a unit column vector, and π_r is the vector of stationary distribution $\pi_r = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{m_r})$ of PP $J_r(t)$.

Instead of K independent MAPs we will consider the superposed arrival process. It is well known [3] that superposed process is a MAP as well. Let m be $\prod_{r=1}^K m_r$. In order to distinguish arrivals of one type from the others, we introduce the following $m \times m$ matrices;

$$D_0 = D_{01} \oplus D_{02} \oplus \dots \oplus D_{0K}, \quad D_r = I_1 \otimes \dots \otimes I_{r-1} \otimes D_{1r} \otimes I_{r+1} \otimes \dots \otimes I_K, \quad r=1, \dots, K,$$

$$D = D_0 + D_1, \quad D\mathbf{e} = 0, \quad \pi D = 0, \quad \pi\mathbf{e} = 1, \quad \pi = \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \dots \otimes \pi_K.$$

Where the symbol $\otimes$ (resp. $\oplus$) denotes the Kronecker product (resp. the Kronecker sum), I_r denotes the identity matrix of order m_r , and π is a vector of size m .

For superposed MAP the stationary arrival rate of type r customers is given by $\lambda_r = \pi D_r \mathbf{e}$. The service of arriving customers begins immediately. Let the random variable (r.v.) τ_r be a service time of r type customers, and $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_K)$ is a vector of service times. Components of $\boldsymbol{\tau}$ are i.i.d. r.v.s which depend on only type of the customer and state of environmental SMP. R.v.s τ_r have general distribution $G_r(t) = P(\tau_r < t)$ and finite mean value $\bar{\tau}_r$.

Each arriving and departing r type customer possesses two k -dimensional volume (recourse) vectors $\zeta_r = (\zeta_{1r}, \dots, \zeta_{kr})$ and each $\sigma_r = (\sigma_{1r}, \dots, \sigma_{kr})$ with non-negative components, $1 \leq r \leq K$. Let $F_r(\mathbf{x}) = P(\zeta_{1r} \leq x_1, \dots, \zeta_{kr} \leq x_k)$ and $G_r(\mathbf{x}) = P(\sigma_{1r} \leq x_1, \dots, \sigma_{kr} \leq x_k)$ be the joint distributions of recourse vectors ζ_r and σ_r , where $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. We assume that the service time vector τ and the recourse vectors $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_K)$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_K)$ are mutually independent.

When SMP $\xi(t)$, $t \geq 0$ jumps from state i to the state r all customers in the model are instantly flashed out and the model jumps into empty state. Let consider the related with MAP counting processes $N(t)$, $N_s(t)$, $\mathbf{M}(t)$:

$$N(t) = (N_1(t), \dots, N_K(t)), N_s(t) = (N_{1s}(t), \dots, N_{Ks}(t)), \mathbf{M}(t) = (M_1(t), \dots, M_K(t)),$$

where $N_r(t)$ and $M_r(t)$ are the number of r type customers arriving and serving in time interval $[0, t)$, and $N_{rs}(t)$ – being in service at moment t . Let $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_K(t))$ and $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_K(t))$ be the vectors of total recourse served during interval $[0, t)$, and accumulated in the model at moment t . Suppose that at the time $t=0$ the model is empty and $N(0) = \mathbf{M}(0) = 0$.

The counting process (CP). Let consider the CP $\{N(t), J(t); t \geq 0\}$ with matrix $P(\mathbf{n}, t)$, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$, of transition probabilities: $P(\mathbf{n}, t) = \|p_{ij}(\mathbf{n}, t)\|$,

$$p_{ij}(\mathbf{n}, t) = P(N(t) = \mathbf{n}, J(t) = j | J(0) = i), 1 \leq i, j \leq m$$

Let define the following rate generating functions (RGF) $D(\mathbf{z})$, $P(\mathbf{z}, t)$

$$D(\mathbf{z}) = D_0 + \sum_{r \geq 1} z_r D_r, |z_r| \leq 1, 0 \leq r \leq K, P(\mathbf{z}, t) = \sum_{\mathbf{n} \geq 0} \mathbf{z}^{\mathbf{n}} P(\mathbf{n}, t),$$

where $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k)$ and $\mathbf{z}^{\mathbf{n}} = (z_1^{n_1}, z_2^{n_2}, \dots, z_k^{n_k})$.

Theorem 1. The PGF of counting process is given by $P(\mathbf{z}, t) = \exp\{D(\mathbf{z})t\}$.

Let consider the following thinning process (TP) of MAP. Each r type customer which arrives at moment t can join to main stream by probability $p_r(t)$ and can be ignored by probability $1 - p_r(t)$.

Lemma. The thinned process is a MAP which counting process has matrices RGF $D_T(\mathbf{z}, t)$ and PGF $P_T(\mathbf{z}, t)$,

$$P_T(\mathbf{z}, t) = \exp \left\{ \int_0^t D_T(\mathbf{z}, x) dx \right\}, \quad D_T(\mathbf{z}, t) = D_0 + \sum_{r \geq 1} D_r [1 - p_r(t) + z_r p_r(t)]. \quad (1)$$

The subject of our interest is the joint distribution

$$P(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = P(N_s(t) = \mathbf{n}, \mathbf{M}(t) = \mathbf{m}, \mathbf{a}(t) \leq \mathbf{x}, \mathbf{\beta}(t) \leq \mathbf{y}).$$

Model Analysis. Let suppose that the SMP $\xi(t)$, $t \geq 0$ is in state $i \in S$ and consider the dynamic of the the model in interval $[u, t)$. Each r type customer arriving at time u will be in service at moment t with the probability $1 - B_{ri}(t - u)$ and will finish its service before moment t by $B_{ri}(t - u)$.

Let $A_{jk}^i(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, u, t)$ be the joint probability that $\mathbf{n}$ customers are in service at moment t , and $\mathbf{m}$ customers are already served in $[0, t)$, total recourse in the model at moment t is $\mathbf{a}(t) \leq \mathbf{x}$ and total served recourse in $[0, t)$ is $\mathbf{\beta}(t) \leq \mathbf{y}$, $PP J(u)$ is in the phase $j \in E$ under the condition that at initial time $t = 0$ the model was empty, and $PP J(0)$ was in phase $k \in E$. Let denote by $\tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, u, t)$ the matrix which elements are Laplace – Stieltjes (LST) and z transformation of $A_{jk}^i(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, u, t)$ and by $\tilde{F}_{ri}(\mathbf{s}_1)$, $\tilde{G}_{ri}(\mathbf{s}_2)$ the LST of $F_{ri}(\mathbf{x})$ and $G_{ri}(\mathbf{y})$. For homogeneous model we have $\tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t) = \tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, u, t)$, e.g. see [11].

$$\tilde{F}_{ri}(\mathbf{s}_1) = \int_0^\infty e^{-\mathbf{s}_1 \mathbf{x}} dF_{ri}(\mathbf{x}), \quad \tilde{G}_{ri}(\mathbf{s}_2) = \int_0^\infty e^{-\mathbf{s}_2 \mathbf{y}} dG_{ri}(\mathbf{y}).$$

$$\tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \mathbf{z}_1^n \mathbf{z}_2^m \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\mathbf{s}_1 \mathbf{x} - \mathbf{s}_2 \mathbf{y}} A^i(\mathbf{n}, \mathbf{m}, d\mathbf{x}, d\mathbf{y}, t),$$

$$|\mathbf{z}_1| \leq 1, |\mathbf{z}_2| \leq 1.$$

Then by using CMM [12] we can prove the following result

Theorem 2. The PGF of the model $\text{MAP}_{\mathbf{r}|\mathbf{G}_{\mathbf{r}}} \propto \tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t)$ is given by

$$\tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t) = \exp \left\{ \int_0^t [D_0(i) + \tilde{S}_i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, u)] du \right\}, \quad |\mathbf{z}_1| \leq 1, |\mathbf{z}_2| \leq 1. \quad (2)$$

where $\tilde{S}_i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t) = \sum_{r=1}^K D_{ri} [z_{2r} \tilde{G}_r(\mathbf{s}_2) B_{ri}(t) + z_{1r} \tilde{F}_r(\mathbf{s}_1) (1 - B_{ri}(t))]$.

Proof. This model can be described as special TP with thinning probability $p_r(u) = B_r(t - u)$. So the PGF of the model has a matrix in the exponential form. Let define the RGF of that special TP. Suppose that a customer of type r arrives at the time u at the rate D_r . This customer will be served up to the time t with the probability $p_r(u)$ and will be in the model with the probability $1 - p_r(u)$. Suppose that each served customer is “red” or “blue” with $z_{2r} \tilde{G}_r(\mathbf{s}_2)$ and $1 - z_{2r} \tilde{G}_r(\mathbf{s}_2)$ probabilities, alike each serving customer is “red” or “blue” by $z_{1r} \tilde{F}_r(\mathbf{s}_1)$ and $1 - z_{1r} \tilde{F}_r(\mathbf{s}_1)$ probabilities. The rate of all “red” customers arriving at the time u is $\tilde{S}_i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, u)$ and rate of “red” type r customers arriving at the time u is $D_r [z_{2r} \tilde{G}_r(\mathbf{s}_2) p_r(u) + z_{1r} \tilde{F}_r(\mathbf{s}_1) (1 - p_r(u))]$. Finally the rate of no any “blue” (all “red”) customers arriving in $[0, t]$ is $\int_0^t [D_0(i) + \tilde{S}_i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, u)] du$.

Theorem 3. The PGFs $\tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t)$ satisfy the following basic differential and integral equations

$$\begin{aligned} \tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t) &= \\ &= e^{D_0(i)t} + \int_0^t e^{D_0(i)u} \tilde{S}_i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, u) \tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t - u) du. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t) &= \\ &= [D_0(i) + \tilde{S}_i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t)] \tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t), \quad i \in S, \end{aligned} \quad (4)$$

with initial conditions $\tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, 0) = \mathbf{I}$,

where $\tilde{S}_i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t) = \sum_{r=1}^K D_{ri} [z_{2r} \tilde{G}_r(\mathbf{s}_2) B_{ri}(t) + z_{1r} \tilde{F}_r(\mathbf{s}_1) (1 - B_{ri}(t))]$.

When $\mathbf{z}_2 = \mathbf{1}, \mathbf{s}_2 = \mathbf{0}$ from (4) we obtain the PGF of joint distribution number of busy servers and total recourses in the model $\tilde{\bar{R}}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{s}_1, t) = \tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{1}, \mathbf{s}_1, \mathbf{0}, t)$.

MAP_k|G_k|∞ model with catastrophes. Let $\tilde{R}^i(z_1, s_1, t)$ and $\tilde{R}^i(z_1, s_1)$ are PGFs corresponding to the model with catastrophes.

Theorem 4. The PGFs $\tilde{R}^i(z_1, s_1, t)$, $\tilde{R}^i(z_1, s_1)$ are given by

$$\tilde{R}^i(z_1, s_1, t) = \tilde{R}^i(z_1, s_1, t)(1 - F_i(t)) + \sum_{r \in S} \int_0^t \tilde{R}^r(z_1, s_1, t - u) dQ_{ir}(u), \quad i \in S,$$

$$\tilde{R}^i(z_1, s_1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{R}^i(z_1, s_1, t) = \frac{q_i}{\eta_i} \int_0^\infty (1 - F_i(x)) e^{\int_0^x [D_0(i) + \tilde{S}_i(z_1, s_1, u)] du} dx, \quad i \in S.$$

The proof of the theorem is based on limiting theorem of renewal processes [13]. From above model when catastrophes occur according to Poisson distribution with parameter ν then for $\hat{R}(z_1, s_1)$ and $\hat{R}(z_1, s_1, s)$ we obtain

$$\hat{R}(z_1, s_1, s) = \hat{R}(z_1, s_1, s + \nu) \left[1 + \frac{\nu}{s}\right], \quad \hat{R}(z_1, s_1) = \nu \hat{R}(z_1, s_1, \nu).$$

Conclusions

The obtained results may be applied for estimating characteristics, as well as searching optimal strategies for managing resources for a wide classes of subsystems of new generation networks, whereas the model MAP_i|G_i|∞ may be used as a model of these subsystems.

REFERENCES

1. Erlang A.K. The theory of probabilities and telephone conversations // Nyt Tidsskrift for Matematik. 1909. V. 20. P. 33–41.
2. Artalejo J.R., Gomez-Corral A., He Q.M. Markovian arrivals in stochastic model-ing: a survey and some new results // SORT. 2010. V. 34. No. 2. P. 101–144.
3. He Q. Fundamentals of matrix-analytic methods. Springer: N.Y., 2014. 349.p.
4. Nazarov A., Baymeeva G. The M/G/∞ Queue in Random Environment // Proc. of 13th Int. Conf. “ITMM 2014”. 2014. P. 312–324.
5. Linton D., Purdue P. An M/G/∞ queue with m customer types subject to periodic clearing // Opsearch. 1979. V. 16. P. 80–88.
6. Kerobyan K., Kerobyan R., Enakoutsu K. Infinite-server queueing model MMAP_k|G_k|∞ in random environment and subject to catastrophes // Proc. 8th Int. Conf. (CSTT), Amman, 2018.
7. Tikhonenko O.M. Distribution of the total message flow in group arrival queueing system // Avtomatika i Telemekhanika. 1987. V. 11. P. 111–120.
8. Tikhonenko O.M. Generalized Erlang Problem for Service Systems with Finite Total Capacity // Probl. Inf. Transm. 2005. V. 41. No. 3. P. 243–253.

9. *Lisovskaya E., Moiseeva S.* Study of the MMPP/GI/ ∞ queueing system with random customers' capacities // *Informatika i ee prilozheniya*. 2017. V. 11. No. 4. P. 109–117.
10. *Kerobyan Kh., Kerobyan R.* Transient analysis of infinite-server queue MMAP_k(t)|G_k| ∞ with marked MAP arrival and disasters // *Proc. of 7th Int. Working Conf. "HET-NETs 2013"*, 11–13, Nov. 2013, Ilkley, UK. P. 112–125.
11. *Breuer L.* From Markov jump processes to spatial queues. N.Y.: Springer, 2003.
12. *Gnedenko B.V., Danielyan E.A.* Priority service systems. M.: MSU, 1973.
13. *Cinlar E.* Introduction to stochastic processes. Prentice-Hall, NJ, 1975. 532 p.

Kerobyan Khanik Mark, PhD; khanik.kerobyan@csun.edu

Infinite-server queueing model $\text{MMAp}_k|G_k|\infty$ in random environment and subject to catastrophes

K. Kerobyan¹, R. Kerobyan², R.R. Covington¹, K. Enakoutsa¹

¹ *California State University Northridge, Northridge, USA*

² *University of California San Diego, San Diego, USA*

In computer and telecommunication networks to evaluate the network canals' performance main parameters: capacity, delay and packet loss probability, the infinity server queue models are widely used. As shown by large number of measurements the traffic of modern IP networks can be characterized by the heterogeneousness, the non-stationarity, the burstiness, the short-range and the long-range dependence. Network traffics in queue are generally described by traffic models based on finite Markovian Processes: Markov Arrival Process (MAP), Batch Markov Arrival Process (BMAP), Marked Markov Arrival Process (MMAp) and their generalizations [1,2]. The queueing model $M_k|M_k|\infty$ with correlated k heterogeneous customers in a batch and exponential service time is studied in [3]. In steady state, the joint PGF of the number of customers of type k being served in the system is derived explicitly by solving a partial differential equation. The generalization of this model for general service time $M_k|G_k|\infty$ is considered in [4]. The model $\text{MAP}_kG_k|\infty$ with the structured batch arrival of k types of customers is considered in [5]. In steady state, the differential equations for PGF of the number of busy server and its solution are obtained.

To evaluate the impact of networks threats the infinite-server models in the random environment and catastrophes can be applied. The model $M|G|\infty$ with SM environment and clearing is studied in [6]. Here the clearing phase process is modeled by an m -state irreducible SMP.

In many applications of queueing models such as computer and communication networks and systems, transportation systems the customers characterize by vector of requesting recourses which components can be deterministic or random quantities.

Despite importance of recourse models of customers in queue theory, there are very few works devoted to research of these models, see e.g. [8–12].

In this paper we consider some generalizations of [6, 8, 11] results for infinite-server $\text{MMAp}_k|G_k|\infty$ queue. The joint PGF distributions of number of busy servers and numbers of served customers, the LT of joint distributions of total accumulated recourse in the model and total accumulated served re-

course are found. The renewal equations for transient and stationary PGF of queue sizes of different types of customers are found as well.

Model Description

We consider an infinite-server MMAP|G| ∞ model in random environment (RE) with K types of customers and catastrophes. The RE operates according to stationary, irreducible semi-Markov process (SMP) $\xi(t)$, $t \geq 0$ with finite state space $S = \{1, 2, \dots, k\}$. The SMP is given by the vector of initial distribution $p^0 = \{p_i^0, i \in S\}$ and SM matrix $Q(t) = \|Q_{ij}(t)\|$, $t \geq 0, i, j \in S$. Customers arrive according to homogeneous Marked MAP which is given by the sequence of matrices $\{D_0, D_h, h \in C^0\}$. Here C^0 is a finite or counting set of arriving batches, $h = (h_1, h_2, \dots, h_K)$, $h \in C^0$, and h_r is a number of type r customers, $0 \leq h_r$, $1 \leq r \leq K$ in a batch. D_0 is a non-singular matrix with negative diagonal elements and D_h are non-negative matrices, $h \in C^0$. The phase process (PP) $J(t)$ of MMAP is an irreducible Markov process (MP) with generating matrix D and finite set of states E . D is a matrix of $m \times m$ size.

$$D = D_0 + \sum_{h \in C^0} D_h, D\mathbf{e} = 0, \pi D = 0, \pi \mathbf{e} = 1,$$

where $\mathbf{e}$ is a unit column vector, π is the vector of stationary distribution $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$ of PP $J(t)$.

For MMAP the stationary arrival rate of customers is given by

$$\lambda = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{h \in C^0, h_1+h_2+\dots+h_K=n} D_h \mathbf{e}.$$

The service of arriving customers begins immediately. Let the random variable (r.v.) τ_r be a service time of r type customers, and $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_K)$ is a vector of service times. Components of $\boldsymbol{\tau}$ are i.i.d. r.v.s which depend on only type of the customer and state of environmental SMP. R.v.s τ_r have general distribution $G_r(t) = P(\tau_r < t)$ and finite mean value $\bar{\tau}_r$, $1 \leq r \leq K$.

Each arriving and departing r type customer possesses by two k -dimensional volume (recourse) vectors $\boldsymbol{\zeta}_r = (\zeta_{1r}, \dots, \zeta_{kr})$ and each $\boldsymbol{\sigma}_r = (\sigma_{1r}, \dots, \sigma_{kr})$

with non-negative components, $1 \leq r \leq K$. Let $F_r(\mathbf{x}) = P(\zeta_{1r} \leq x_1, \dots, \zeta_{kr} \leq x_k)$ and $G_r(\mathbf{x}) = P(\sigma_{1r} \leq x_1, \dots, \sigma_{kr} \leq x_k)$ are the joint distributions of recourse vectors ζ_r and σ_r , where $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. We assume that the service time vector $\boldsymbol{\tau}$ and the recourse vectors $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_K)$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_K)$ are mutually independent.

When SMP $\xi(t)$, $t \geq 0$ jumps from state i to the state r all customers in the model are instantly flashed out and the model jumps into empty state. Let consider the related with MMAP counting processes $N(t)$, $N_s(t)$, $\mathbf{M}(t)$:

$N(t) = (N_1(t), \dots, N_K(t))$, $N_s(t) = (N_{1s}(t), \dots, N_{Ks}(t))$, $\mathbf{M}(t) = (M_1(t), \dots, M_K(t))$, here $N_r(t)$ and $M_r(t)$ are the number of r type customers arriving and serving in time interval $[0, t)$, and $N_{rs}(t)$ – being in service at moment t . Let $\boldsymbol{\beta}(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_K(t))$ and $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_K(t))$ be the vectors of total recourse served during interval $[0, t)$, and accumulated in the model at moment t . The components of $\boldsymbol{\beta}(t)$, $\boldsymbol{\alpha}(t)$, $N_s(t)$ and $\mathbf{M}(t)$ vectors are defined as

$$\beta_r(t) = \sum_{i=1}^{M_r(t)} \sigma_{ri}, \alpha_r(t) = \sum_{i=1}^{N_r(t)} \zeta_{ri}, N_{rs}(t) = \sum_{h \in C^0} N_{hr}^s(t), M_r(t) = \sum_{h \in C^0} \mathbf{M}_{hr}(t).$$

Suppose that at the initial time $t = 0$ the model is empty, $N(0) = \mathbf{M}(0) = 0$.

The counting process (CP). Let consider the CP $\{N(t), J(t); t \geq 0\}$ with matrix $P(\mathbf{n}, t)$, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$, of transition probabilities: $P(\mathbf{n}, t) = \|p_{ij}(\mathbf{n}, t)\|$, $p_{ij}(\mathbf{n}, t) = P(N(t) = \mathbf{n}, J(t) = j | J(0) = i)$, $1 \leq i, j \leq m$.

Let define the following generating functions (GF) $D(\mathbf{z})$, $P(\mathbf{z}, t)$

$$D(\mathbf{z}) = D_0 + \sum_{h \in C^0} \mathbf{z}^h D_h, |z_r| \leq 1, 0 \leq r \leq K, P(\mathbf{z}, t) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{z}^n P(\mathbf{n}, t),$$

where $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k)$ and $\mathbf{z}^h = (z_1^{h_1}, z_2^{h_2}, \dots, z_k^{h_k})$.

Theorem 1. The PGF of counting process $\{N(t), J(t); t \geq 0\}$ $P(\mathbf{z}, t)$ satisfies the *basic differential equation*

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{z}, t) = D(\mathbf{z}) P(\mathbf{z}, t), \quad |\mathbf{z}| \leq 1, \quad (1)$$

with initial conditions $P(\mathbf{z}, 0) = 1$.

The solution of differential equation (1) is given by $P(z, t) = \exp\{\tilde{D}(z)t\}$.

Thinning MMAP. Let consider the following thinning process of MMAP. Each r type customer which arrives at moment t can join to main stream by probability $p_r(t)$ and can be ignored by probability $1 - p_r(t)$.

Lemma. The thinned process is a MMAP which counting process has matrices GF $D_T(z, t)$ and PGF $P_T(z, t)$,

$$D_T(z, t) = \sum_{h_1+h_2+\dots+h_k \geq 1} \dots D_h \prod_{r=1}^k [1 - p_r(t) + z_r p_r(t)]^{h_r},$$

$$P_T(z, t) = \exp\left\{\int_0^t D_T(z, x) dx\right\}.$$

The subject of our interest is the joint distribution

$$P(n, m, x, y, t) = P(N_s(t) = n, M(t) = m, \alpha(t) \leq x, \beta(t) \leq y).$$

Model Analysis. Let suppose that the SMP $\xi(t)$, $t \geq 0$ is in state $i \in S$ and consider the dynamic of the the model in interval $[u, t)$. Each r type customer arriving at moment u will be in service at moment t by probability $1 - B_{ri}(t - u)$ and will finish its service before moment t by $B_{ri}(t - u)$.

Let $A_{jk}^i(n, m, x, y, u, t)$ be the joint probability that n customers are in service at moment t , and m customers are already served in $[0, t)$, total recourse in the model at moment t is $\alpha(t) \leq x$ and total served recourse in $[0, t)$ is $\beta(t) \leq y$, $PP J(u)$ is in the phase $j \in E$ under condition that at initial moment $t = 0$ the model was empty, and $PP J(0)$ was in phase $k \in E$.

Let denote by $\tilde{A}^i(z_1, z_2, s_1, s_2, u, t)$ the matrix which elements are Laplace – Stieltjes (LST) and z transformation of $A_{jk}^i(n, m, x, y, u, t)$ and by $\tilde{F}_{ri}(s_1)$, $\tilde{G}_{ri}(s_2)$ denote LST of $F_{ri}(x)$ and $G_{ri}(y)$. For homogeneous model we have $\tilde{A}^i(z_1, z_2, s_1, s_2, t) = \tilde{A}^i(z_1, z_2, s_1, s_2, u, t)$, e.g. see [7].

$$\tilde{F}_{ri}(s_1) = \int_0^\infty e^{-s_1 x} dF_{ri}(x), \quad \tilde{G}_{ri}(s_2) = \int_0^\infty e^{-s_2 y} dG_{ri}(y).$$

$$\tilde{A}^i(z_1, z_2, s_1, s_2, t) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty z_1^n z_2^m \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s_1 x - s_2 y} A^i(n, m, dx, dy, t), |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1.$$

Let suppose that a batch of size $\mathbf{h}$ arrives during $[t, t + \Delta)$ by rate $D_{\mathbf{h}}$. Then by using renewal arguments we can prove the following result for the PGF $\tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t)$ of the model $\text{MMAP}_r|\mathbf{G}_r| \infty$ (e.g. see [8–12]).

Theorem 2. The PGF $\tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t)$ satisfy the following basic differential and integral equations

$$\begin{aligned} & \tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t) = \\ & = e^{D_0(i)t} + \int_0^t e^{D_0(i)u} \tilde{S}_i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, u) \tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t-u) du. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t) = \\ & = [D_0(i) + \tilde{S}_i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t)] \tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t), \quad i \in S, \end{aligned} \quad (3)$$

with initial conditions $\tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, 0) = \mathbf{I}$, where

$$\tilde{S}_i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t) = \sum_{\mathbf{h}=\mathbf{I}}^{\infty} D_{\mathbf{h}i} \prod_{r=1}^K [z_{r2} \tilde{G}_{ri}(\mathbf{s}_2) B_{ri}(t) + z_{r1} \tilde{F}_{ri}(\mathbf{s}_1) (1 - B_{ri}(t))]^{h_r}.$$

Theorem 3. The solution of (2) and (3) is given by

$$\begin{aligned} \tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t) &= \exp \left\{ \int_0^t [D_0(i) + \tilde{S}_i(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, u)] du \right\}, \\ & |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

When $\mathbf{z}_2 = \mathbf{1}, \mathbf{s}_2 = \mathbf{0}$ from (4) we obtain the PGF of joint distribution number of busy servers and total recourses in the model $\bar{\tilde{R}}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{s}_1, t) = \tilde{A}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{1}, \mathbf{s}_1, \mathbf{0}, t)$.

MMAP|G| ∞ model with catastrophes. Let consider $\text{MMAP}|\mathbf{G}|\infty$ models with catastrophes. Assume that $\tilde{\mathbf{R}}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{s}_1, t)$ is a corresponding PGF for the model with catastrophes and $\tilde{\mathbf{R}}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{s}_1)$ is its limiting value.

Theorem 4. The PGFs $\tilde{\mathbf{R}}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{s}_1, t)$, $\tilde{\mathbf{R}}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{s}_1)$ are given by

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{s}_1, t) &= e^{\int_0^t [D_0(i) + \tilde{S}_i(\mathbf{z}_1, \mathbf{s}_1, u)] du} (1 - F_i(t)) + \sum_{r \in S} \int_0^t \tilde{\mathbf{R}}^r(\mathbf{z}_1, \mathbf{s}_1, t-u) dQ_{ir}(u), \quad i \in S, \\ \tilde{\mathbf{R}}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{s}_1) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{R}}^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{s}_1, t) = \frac{q_i}{\eta_i} \int_0^{\infty} (1 - F_i(x)) e^{\int_0^x [D_0(i) + \tilde{S}_i(\mathbf{z}_1, \mathbf{s}_1, u)] du} dx, \quad i \in S. \end{aligned}$$

From above model when catastrophes occur according to Poisson distribution with parameter ν then for LST $\hat{\bar{R}}(z_1, s_1, s)$ and $\hat{\bar{R}}(z_1, s_1)$ we obtain

$$\hat{\bar{R}}(z_1, s_1, s) = \hat{\bar{R}}(z_1, s_1, s + \nu) \left[1 + \frac{\nu}{s} \right], \quad \hat{\bar{R}}(z_1, s_1) = \nu \hat{\bar{R}}(z_1, s_1, \nu).$$

Conclusions

The obtained results may be applied for estimating characteristics, as well as searching optimal strategies for managing resources for a wide classes of subsystems of new generation networks, whereas the model $M|G|_1|G|_\infty$ may be used as a model of these subsystems.

REFERENCES

1. Artalejo J.R., Gomez-Corral A., He Q.M. Markovian arrivals in stochastic modelling: a survey and some new results. SORT. 2010. V. 34. 2. P. 101–144.
2. He Q. Fundamentals of matrix-analytic methods. Springer : NY. 2014. 349.p.
3. Choi B.D. The $M_k|M_k|_\infty$ Queue with heterogeneous customers in a batch.// J. Appl. Prob. 1992. 29. P. 477–481.
4. Falin G. The $M_k|G_k|_\infty$ batch arrival queue with heterogeneous dependent demands. // J. of Appl. Probab., 1994. V. 31. No. 3. P. 841–846.
5. Masuyama H. Studies on algorithmic analysis of queues with batch Markovian arrival streams. / PhD Thesis, Kyoto University, 2003. 146p.
6. Linton D., Purdue P. An $M|G|_\infty$ queue with m customer types subject to periodic clearing. / Opsearch. 1979.16. P. 80–88.
7. Breuer L. From Markov jump processes to spatial queues. New York: Springer, 2003.
8. Tikhonenko O.M. Distribution of the total message flow in group arrival queueing system.// Avtomatika i Telemekhanika. 1987. 11. P. 111–120.
9. Tikhonenko O.M. Generalized Erlang Problem for Service Systems with Finite Total Capacity. //Probl. of Inf. Transm. 2005. V. 41, No. 3. P. 243–253.
10. Lisovskaya E., Moiseeva S., Pagano M., Potatueva V. Study of the MMPP/GI/∞ queueing system with random customers' capacities /Informatica iee priloeniya. 2017. V. 11, № 4. P. 109–117.
11. Kerobyan Kh., Kerobyan R. Transient analysis of infinite-server queue $MMAP_k(t)|G_k|_\infty$ with marked MAP arrival and disasters/ Proc. of 7th Int. Working Conf. "HET-NETs 2013", 11–13, Nov. 2013, Ilkley, UK. P. 112–125.
12. Moiseev A., Nazarov A. Infinite-server queueing systems and networks. Tomsk: Publ. NTL, 2015. 240 p.
13. Cinlar E. Introduction to stochastic processes. Prentice-Hall, NJ, 1975. 532p.

Revisiting M/D/1/N FIFO queue with renovation¹

M. Konovalov, R. Razumchik

*Institute of Informatics Problems of the FRC CSC RAS, Moscow, Russia
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia*

In this short note we revisit the $M/D/1/N$ FIFO queue with the general renovation mechanism, which was introduced in [1–3]. This mechanism works as follows. Define $N+1$ numbers, say $q_i \geq 0$, $0 \leq i \leq N$, satisfying $\sum_{i=0}^N q_i = 1$. Upon a service completion the served customer removes i , $0 \leq i \leq N$ additional customers from the queue with probability q_i and then leaves the system. If upon the service completion the queue is empty the served customer leaves the system having no effect on it.

Roughly speaking a renovation implies that in a queueing system each customer, having received service, may remove some additional work from the system (i.e. may renovate it). This makes renovation look like a variant of an active queue management (AQM) scheme. But not exactly the same since renovation manages the queue after service completions, whereas in most of the AQM schemes decisions are made upon arrivals.

To our best knowledge the comparison of renovation with known active queue mechanisms (like, for example, Random Early Detection) has not been made before in the literature. The first step in this direction is to refine renovation procedure because in its default variant (from [1–3]) it is not particularly suitable for the queue management. For example, after the renovation the system may become empty and this is meaningless from the practical point of view (since it increases the system idle time). In the next section we discuss the required refinements and analytic expressions for the following performance characteristics: stationary loss rate, moments of the number in the system. Moments of consecutive losses, waiting/sojourn time (as introduced in [4]) are out of scope.

Mathematical model

We consider the system consisting of one queue of finite capacity N , served by single server. Customers arrive at the system according to the Poisson flow of rate λ . If a customer sees the system full it is lost, otherwise it

¹ The reported study was funded by RFBR according to the research project 18-07-00692.

occupies one place in the queue if the server is busy and the server if it is idle. Service times are constant, equal to $d > 0$. Upon service completion one customer from the head of the queue enters server.

For the purpose of the active queue management, a variant of the general renovation mechanism (described above) is implemented in the system. Firstly notice that after the renovation, the queue may become empty and thus the server will be idle until the next arrival. From the practical point of view it is more appealing to leave at least one customer in the system after the renovation. Secondly, it may happen that upon the service completion it is required to remove more customers, than are actually waiting in the queue. For such a conflict we will consider separately two resolution options

Option 1. If upon service completion there are $1 \leq i \leq N$ customers waiting in the queue, then

- with probability q_0 nothing happens;
- with probability q_j , $0 < j < i$, exactly j customers from the queue leave the system and those customers are chosen successively starting from the head of the queue;
- with probability $Q_i = q_i + q_{i+1} + \dots + q_N$, exactly $(i-1)$ customers from the queue leave the system. Again those customers are chosen successively starting from the head of the queue.

Option 2. If upon service completion there are $1 \leq i \leq N$ customers waiting in the queue, then

- with probability $q_0 + Q_i$ nothing happens;
- with probability q_j , $0 < j < i$, exactly j customers from the queue leave the system and those customers are chosen successively starting from the head of the queue.

For both options the served customer, which sees the empty queue, leaves the system having no effect on it. Thus after the renovation (if it happened) the system never becomes empty.

Discussion

As it was mentioned above, $G/M/n/r$ type queues with the general renovation have already been studied in detail in [1, 2], where the authors have proposed quite general analytic methods for the computation of the main stationary performance characteristics. But those results are inapplicable as soon as we introduce refinements in the renovation procedure according to *Option 1* and *Option 2*. Thus there is a need to derive the expressions for the stationary performance characteristics anew but fortunately the methodology

from [1–2] still applies here. In the rest of the note we briefly comment on the required steps. The details can be found elsewhere.

Let $N(t)$ be the total number of customers at instant t and $E(t)$ be the elapsed service time of the customer in server in the $M/D/1/N$ FIFO queue with the renovation mechanism according to *Option 1* or *Option 2*. For the computation of the stationary queue size moments we need the distribution

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = n\} = P_n, 0 \leq n \leq N + 1,$$

and for the computation of the loss rate, due to PASTA property of Poisson arrivals, it is sufficient to know

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = n, E(t) < x\} = P_n(x), 1 \leq n \leq N + 1, x \in [0, d].$$

These distributions can be found as follows. At first we find the stationary distribution $\{P_n^+, 0 \leq n \leq N\}$ of the Markov chain $\{v(t), t \geq 0\}$ embedded at service completion epochs and counting the total number of customers in the system. Then, using the well-know results for the Markov regenerative processes, we calculate $\{P_n, 0 \leq n \leq N + 1\}$ by $P_n = \sum_{i=0}^N P_i^+ f_{in} / f^*$, where f_{in} is the mean time spent by the system in the state n , starting from state i , and f^* is the mean time between transitions of the $\{v(t), t \geq 0\}$. Finally, relations for the functions $P_n(x)$ are found from the results for the classic $M/D/1/N$ queue.

The computation of the loss ratio i.e. the probability that the arriving customer is lost is more involved. This is due to the fact that the accepted customer may be lost either after the first service completion or the second, etc. and the chance to be lost varies, depending on the number of new customers that arrived between successive service completions. Yet using the PASTA property of Poisson arrivals and the first step analysis these difficulties can be overcome and eventually one can obtain a recursive procedure for the loss rate computation.

Finally we note that the expressions for the average and standard deviation of consecutive losses are probably the most hard-to-derive quantities in the considered setting. This problem remains unsolved.

Conclusions

Although the renovation mechanism is based on completely different idea than the RED-type AQMs, as our numerical experiments show, it allows one to achieve comparable system performance. Yet the proper choice of the val-

ues of its parameters q_i may be difficult. We are unaware of any analytic way of choosing q_i and thus in order to make the choice one has to resort to special search algorithms. Metaheuristics (like particle swarm optimization) are applicable here.

REFERENCES

1. *Zaryadov I.S.* The GI/M/n/1 queueing system with generalized renovation // Automation and Remote Control. 2010. V. 71. No. 4. P. 663–671.
2. *Zaryadov I.S., Pechinkin A.V.* Stationary time characteristics of the GI/M/n system with some variants of the generalized renovation discipline // Automation and Remote Control. 2009. V. 70. No. 12. P. 2085–2097.
3. *Kreinin A.Y.* Queueing systems with renovation // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 1997. V. 10. No. 4. P. 431–441.
4. *Bonald T., May M., Bolot J.C.* Analytic evaluation of red performance // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Communications, INFOCOM. 2000. V. 3. P. 1415–1424.

Коновалов Михаил Григорьевич; mkonovalov@ipiran.ru

Разумчик Ростислав Валерьевич, к.ф.-м.н, rrazumchik@gmail.com

Analysis of transport connection by a network of queuing systems

P.A. Mikheev, A.A. Pichugina, S.P. Sushchenko

National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia

The most important operational characteristics of multi-link virtual channels are their throughput and average end-to-end delay of protocol data units. These figures are determined not only by the reliability of data transmission in each section of the retransmissions, but also the number of buffer storages for receiving data packets at transit nodes. Known approaches to the analysis of these performance indicators and the results in this area [1–9] are focused on models of QS networks with continuous time for given distributions of input flows and transmission time of protocol data units that do not take into account the specifics of linear control protocols. These methods lead to approximate results, obtained, as a rule, by time-consuming numerical calculations. Modeling using models with discrete time is performed in [10–13], but the results are obtained only at the linear level for a two-link data transmission path. Since the algorithms with decisive feedback are the basis of the control procedures for the linear and transport level protocols, systems with discrete time are the more adequate description of real information transfer processes [11, 13]. However, analysis of QS networks with discrete time is a nontrivial task, since the output flows of discrete Markov QS in most cases lose Markov properties [14]. The model proposes a data transmission path model consisting of several retransmissions sites with limited storage in transit nodes, taking into account the discrete nature of the information transfer process.

Consider a data transmission path consisting of D consecutive links. We will assume that the exchange in each link is performed by complete information packets in accordance with the start-stop protocol procedure. The duration of the transmission cycle of the packet t from the beginning of its output to the communication line until confirmation of the receipt will be assumed to be the same on all the retransmission sections, and the buffer stores of the transit nodes of the path are bounded by the sizes K_d , $d = \overline{1, D-1}$. We also believe that the reliability of packet transmission in the d link is F_d , and the number of retransmissions due to distortions of information packets and

acknowledgments, as well as buffer memory locks is not limited. At the same time, the error-free transmission time of a packet for each link is a random variable that is a multiple of t and has a geometric distribution law with the parameter F_d . We assume, in addition, that the transmitting node of the first link always has packets for sending along the considered path, and in transit nodes "external" flows are not added to the main traffic. Then the behavior of the multilinked data transmission path is described by an open Markov network of $D-1$ discrete QS [13], the intensity of the input flow to which is determined by the value F_d , and the service intensity in each d QS ($d = \overline{1, D-1}$) is the value of F_{d+1} . Since we are considering a path with limited queue sizes in transit nodes, the output streams of each discrete QS will not be Markov's [14]. Therefore, such a network cannot be analyzed as a collection of independent Markov discrete QS, but should be described by an enclosed Markov chain in a $D-1$ -dimensional space with the number of states equal to the product $\prod_{d=1}^{D-1} (K_d + 1)$. We denote by π_A^B the transition probabilities of the Markov chain from the state A to the state B , where $A = i_{D-1}i_{D-2}...i_1; B = j_{D-1}j_{D-2}...j_1; i_d = \overline{0, K_d}; j_d = \overline{0, K_d}; d = \overline{1, D-1}$ – are the $D-1$ -bit numbers of the initial and changed states of the Markov chain in a $(D-1)$ -dimensional space with the cardinality of the set of values in d digit (d dimension of space) equal to $K_d + 1$, and P_A are the probabilities of states of the Markov chain. The throughput of a path of length D , is denoted by $Z_D(K_1, ..., K_{D-1})$, and the average end-to-end delay – $T_D(K_1, ..., K_{D-1})$. Since the model in question assumes that the sender always has packets to transmit, this operational indicator corresponds to the average upper limit of the delay. The throughput of the multi-link path is determined by the average value of the acknowledged (served) flow:

$$Z_D(K_1, ..., K_{D-1}) = F_D \sum_{i_1=0}^{K_1} \dots \sum_{i_{D-2}=0}^{K_{D-2}} \sum_{i_{D-1}=1}^{K_{D-1}} P_{i_{D-1}...i_1}.$$

The indicator of the average end-to-end packet delay, measured in durations of t , is composed of the time of entry into the QS network (the transmission time at the first link) and the service time in the QS network (the transmission time for the remaining links before reaching the destination node of the D section of the retransmitting taking into account the presence of queues in transit nodes) [4]:

$$T_D(K_1, \dots, K_{D-1}) = \frac{1 + \bar{K}_D}{Z_D(K_1, \dots, K_{D-1})},$$

where K_D is the average number of packets in all transit nodes of the data path (in the QS network):

$$\bar{K}_D = \sum_{i_1=0}^{K_1} \dots \sum_{i_{D-2}=0}^{K_{D-2}} \sum_{i_{D-1}=0}^{K_{D-1}} \sum_{d=0}^{D-1} i_d P_{i_{D-1} \dots i_1}.$$

Let's start with the data transfer path, which consists of three retransmission areas with buffers of arbitrary size in transit nodes. The type of transition probabilities of the Markov chain describing the transport process along such a path is given in Table 1.

Table 1

Transitional probabilities for a three-link path

$\pi_{i_2 i_1}^{j_2 j_1}$	i_2	i_1	j_2	j_1
F_1	0	0	0	1
$F_1(1 - F_2)$	0	$\overline{1, K_1 - 1}$	0	$i_1 + 1$
$F_2(1 - F_1)$	0	$\overline{1, K_1}$	1	$i_1 - 1$
$F_1 F_2$	0	$\overline{1, K_1}$	1	i_1
$F_3(1 - F_1)$	$\overline{1, K_2}$	0	$i_2 - 1$	0
$F_1(1 - F_3)$	$\overline{1, K_2}$	0	i_2	1
$F_1(1 - F_3)$	K_2	$\overline{1, K_1 - 1}$	K_2	$i_1 + 1$
$F_1 F_3$	$\overline{1, K_2}$	0	$i_2 - 1$	1
$F_3(1 - F_1)(1 - F_2)$	$\overline{1, K_2}$	$\overline{1, K_1 - 1}$	$i_2 - 1$	i_1
$F_3(1 - F_2)$	$\overline{1, K_2}$	K_1	$i_2 - 1$	K_1
$F_2 F_3(1 - F_1)$	$\overline{1, K_2}$	$\overline{1, K_1}$	i_2	$i_1 - 1$
$F_2(1 - F_1)(1 - F_3)$	$\overline{1, K_2 - 1}$	$\overline{1, K_1}$	$i_2 + 1$	$i_1 - 1$
$F_1 F_2(1 - F_3)$	$\overline{1, K_2 - 1}$	$\overline{1, K_1}$	$i_2 + 1$	i_1
$F_1(1 - F_2)(1 - F_3)$	$\overline{1, K_2 - 1}$	$\overline{1, K_1 - 1}$	i_2	$i_1 + 1$
$F_1 F_3(1 - F_2)$	$\overline{1, K_2}$	$\overline{1, K_1 - 1}$	$i_2 - 1$	$i_1 + 1$

For $K_1 = K_2 = 1$, the solution of the system of local equilibrium equations for the Markov chain describing the three-link transport connection has the form:

$$P_{00} = \frac{F_2 F_3^2 (1 - F_1)^2}{F_3 (F_1 + F_3 (1 - F_1)) (F_1 + F_2 (1 - F_1)) + F_1^2 F_2 (1 - F_3)};$$

$$P_{01} = P_{00} \frac{F_1 (F_1 (1 - F_2) + F_3 (1 - F_1))}{F_2 F_3 (1 - F_1)^2};$$

$$P_{10} = P_{00} \frac{F_1}{F_3 (1 - F_1)}; \quad P_{11} = P_{00} \frac{F_1^2}{F_3^2 (1 - F_1)^2}.$$

The throughput of the three-link path is determined by the value

$$Z_3(1,1) = \frac{F_1 F_2 F_3 (F_1 + F_3 (1 - F_1))}{F_3 (F_1 + F_3 (1 - F_1)) (F_1 + F_2 (1 - F_1)) + F_1^2 F_2 (1 - F_3)}.$$

Let us consider particular cases of this solution. It is not difficult to see that for two absolutely reliable channels ($F_1 = F_2 = 1$, or $F_2 = F_3 = 1$, or $F_1 = F_3 = 1$), the throughput of a three-link path is determined by the reliability of the transmission in the third (F_3 , or F_1 , or F_2 , respectively). For the case when the first retransmission area is absolutely reliable $F_1 = 1$, the throughput assumes the form coinciding with the expression of this indicator for the two-link path [12]:

$$Z_3(1,1) = \frac{F_2 F_3}{F_2 + F_3 (1 - F_2)}. \quad (1)$$

With the statistically homogeneous second and third links of the data transfer path ($F_2 = F_3 = F$), this relation is transformed to the form:

$$Z_3(1,1) = \frac{F}{2 - F}. \quad (2)$$

The throughput of the path with the deterministic average channel ($F_2 = 1$) takes the following form:

$$Z_3(1,1) = \frac{F_1 F_3 (F_1 + F_3 (1 - F_1))}{F_3 (F_1 + F_3 (1 - F_1)) + F_1^2 (1 - F_3)}.$$

In this case the values $F_1 = F_3 = F$ lead to the ratio:

$$Z_3(1,1) = \frac{F(2-F)}{1+2(1-F)}. \quad (3)$$

For $F_3 = 1$ we have $Z_3(1,1) = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2(1-F_1)}$. It is not difficult to see that this ratio is exactly the same as (1). The comparison (2) and (3) shows that (3) exceeds (2) by $\Delta = \frac{F(1-F)^2}{(3-2F)(2-F)}$ assuming the maximum value when

$F = 0,468$. This fact is easily explained by the fact that the absolutely reliable channel of the second link of data transfer serves as an additional buffer for storing packets between the first and third sections of the retransmission, thereby reducing the probability of blocking buffer memory. For a statistically homogeneous data transmission path ($F_1 = F_2 = F_3 = F$) we have:

$$Z_3(1,1) = F \frac{2-F}{1+3(1-F)+(1-F)^2}. \text{ Now let us consider a statistically homo-}$$

geneous path for $K_1 = 1$ and an arbitrary K_2 . For a given K_2 , writing out the equilibrium equations, taking into account the normalization condition, one can find the state probabilities and operational parameters of the path. For $K_2 = \overline{2,4}$, the throughput values are as follows:

$$Z_3(1,2) = \frac{F[6-3F+(1-F)^2]}{10-7F+4(1-F)^2+(1-F)^3};$$

$$Z_3(1,3) = \frac{F[15-8F+4(1-F)^2+(1-F)^3]}{23-16F+12(1-F)^2+5(1-F)^3+(1-F)^4};$$

$$Z_3(1,4) = \frac{F[35-20F+13(1-F)^2+5(1-F)^3+(1-F)^4]}{51-36F+33(1-F)^2+18(1-F)^3+6(1-F)^4+(1-F)^5}.$$

Under the assumption that K_1 is arbitrary and $K_2 = 1$ it is easy to obtain the values P_{ij} and the ratios for the throughput that satisfy the equality $Z_3(K_1,1) = Z_D(1,K_2)$ if K_1 and K_2 coincide here. Thus, the throughput rate is invariant to the order of transit nodes with buffer storage of different vol-

umes along a statistically homogeneous data path. At the same time, the average end-to-end delay is dependent on this order. Numerical analysis shows that with the growth of K_2 , the throughput of the three-link path $Z_3(1, K_2)$ rapidly tends to the theoretical limit $Z_2(1)$. A study of a homogeneous path with $K_1 = K_2 = 2$ shows that throughput is determined by expression:

$$Z_3(2, 2) = \frac{F[50 - 26F + 17(1 - F)^2 + 9(1 - F)^3 + 2(1 - F)^4]}{70 - 46F + 35(1 - F)^2 + 21(1 - F)^3 + 8(1 - F)^4 + (1 - F)^5}.$$

With the further increase of K_1 and K_2 , the structural complexity of the analytical solution is rapidly increasing. A comparative analysis of the throughput of $Z_3(K_1, K_2)$ with different ratios between K_1 and K_2 shows that the uniform distribution of buffers along the data path provides the best values of this operating characteristic. This fact should be considered when building multi-link connections. Assume now that $F_1 = 1, F_2 = F_3 = F$ and K_1 and K_2 are arbitrary. Then the set of probable states is formed by a set of two adjacent geometric figure: rectangle ($i = \overline{0, 1}; j = \overline{1, K_2}$) and line segment ($i = \overline{0, K_1}; j = K_2$). Operational indicator thus have the following form:

$$Z_3(K_1, K_2) = \frac{F[K_1 + K_2 - F]}{1 + K_1 + K_2 - 2F}.$$

It follows that for an unbounded growth of

K_1 or K_2 , the throughput of $Z_3(K_1, K_2)$ tends to the value F .

Discrete models of a multi-link data transmission path are proposed, which differ by taking into account the blocking factor of the limited buffer memory of transit nodes. The proposed models allow analyzing the effect of storage capacity on transport protocols performance indicators. The invariance of the throughput index to the order of transit nodes with buffer storage of different capacities along a statistically homogeneous data path is found, and the dependence of the average end-to-end delay of the packet on this order is insignificant. The expediency of the uniform distribution of the buffer space among the transit nodes along the multi-link path, ensuring the best performance of the transport connection, is established. It is shown that when constructing network data transmission paths consisting of a large number of retransmission site, reliable communication channels should be evenly distributed between links with a high level of distortion. In this way, these retransmission sites act as additional buffers between unreliable links and re-

duce the negative blocking factor of the buffer memory. An analytical estimate of the lower limit of throughput and an upper estimate of the average end-to-end delay of the multi-link data path corresponding to the minimum number of buffers in the transit nodes are obtained.

REFERENCES

1. *Basharin G.P., Bocharov P.P., Kogan Y.A.* Analysis of queues in computer networks. Theory and methods of calculation. M.: Nauka, 1989. 336 p.
2. *Boguslavsky L.B.* Data flow control in computer networks. Moscow: Energoatomizdat, 1984. 184 p.
3. *Zhozhiakashvili V.A., Vishnevsky V.M.* Networks queuing . Theory and application to computer networks. Moscow: Radio and communication, 1988. 192 p.
4. *Vishnevsky V.M.* Theoretical bases of designing of computer networks. Moscow: Technosphere, 2003. 512 p.
5. *Ivnitsky V.A.* Theory of queuing networks. M.: Fizmatlit, 2004. 772 p.
6. *Walrand George.* Introduction to the theory of queuing networks. M.: Mir, 1993. 336 p.
7. *Moiseev A.N., Nazarov A.A.* Infinitely linear systems and queuing networks. Tomsk: Publishing house NTL, 2015. 240 p.
1. *Zorkaltsev A.V.* Analysis of local flow control in packet switching node // Automatic control and computer engineering. 1992. No. 4. P. 20–27.
9. *Zorkaltsev A.V.* Analysis of procedures flow control in a switching node of the network with virtual channels // Automatic control and computer engineering. 1993. No. 4. P. 35–42.
10. *Mikheev P.A.* Analysis of strategies for separating the end of the buffer memory of the router between the output channels // Automation and Remote Control. 2014. No. 10. P. 125–138.
11. *Sushchenko S.P.* On the effect of locking the buffer memory on the performance of synchronous management procedures link data transfer // Automation and Remote Control. 1999. No. 10. P. 115–125.
12. *Sushchenko S.P.* On the effect of locking the buffer memory to the operational characteristics of a link data transmission // Automatic Control and Computer Engineering. 1985. No. 6. P. 27–34.
13. *Mikheev P.A., Sushchenko S.P.* Mathematical models of networks of access level. Novosibirsk: Nauka, 2015. 232 p.
14. *Ivanovsky V.B.* On properties of output flows in discrete queuing systems // Automation and Remote Control. 1984. No. 11. P. 32–39.

Михеев Павел Андреевич, к.т.н.; doka.patrick@gmail.com;

Сущенко Сергей Петрович, д.т.н., профессор; ssp.inf.tsu@gmail.com;

Пичугина Анастасия Александровна, ст. преподаватель

Research of a three-phase autonomous queuing system with a Markov Modulated Poisson process

M.G. Nosova

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russia

At present, as a result of economic and political changes in our country, the need to build scientifically based demographic forecasts has increased. One of the methods of demographic forecasting is the development and study of mathematical models. In particular, models and methods of queuing theory can be used as mathematical models of demographic processes.

Issues of development and research of new mathematical models for the process of changing the demographic situation in the form of an autonomous of queuing system with an unlimited number of devices are devoted to some scientific works [1–3].

However, the tasks of constructing more adequate models of demographic processes are still unresolved and interesting for research.

In this paper, as a mathematical model of the process of changing the number of female population, we consider a three-phase autonomous queuing system with an unlimited number of devices and a Markov Modulated Poisson process [4, 5].

Mathematical model

Let us determine the process of functioning of such a queuing system. We will assume that the service time τ of each application consists of three phases, that is:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3,$$

where τ_i are independent and exponentially distributed random variables with parameters μ_i , characterizing the duration of the maintenance phases, $i=1, \dots, 3$.

Since the total fertility rate [6], which varies every year, is the main indicator of the birth rate in the country, it is advisable to consider the birth process in the form of a Markov Modulated Poisson process (MMP-process) [5].

We will assume that for applications in the service on the second phase, it is possible to generate new applications. The flow of new applications is a MMP-process.

A random flow of homogeneous events will be called Markov Modulated if the control process $k(t)$ is a Markov chain with continuous time and with a

finite set states $k(t)=1, 2, \dots, K$, determined by its matrix of infinitesimal characteristics $Q = [q_{kv}]$, where $k, v=1, 2, \dots, K$, which have the meaning of the intensities of the transition probabilities from the state k to the state v , and the conditions are met

$$P\{m(t + \Delta t) = m + 1 \mid m(t) = m, k(t) = k\} = \lambda_k + o(\Delta t),$$

$$P\{m(t + \Delta t) > m + 1 \mid m(t) = m, k(t) = k\} = o(\Delta t),$$

where $m(t)$ is the number of events of the considered flow that occurred during the time t , and $\lambda_k \geq 0$ are the conditional intensities of the occurrence of events in the flow during the stay of the Markov chain in state k .

The intensity of generating new applications is λ_k during the stay of the Markov chain in state k . The intensity of reproduction in the 1st and 3rd phases will be considered equal to zero. Since the random variables τ_i are exponentially distributed, the average duration of the i th phase is μ_i , $i=1, \dots, 3$.

The intensities of generating new applications λ_k is defined as

$$\lambda_k = 0,488 \overline{\lambda_k} \mu_2,$$

where $\overline{\lambda_k}$ is the total fertility rate during the stay of the Markov chain in state k , and 0,488 is the probability of a girl's birth.

The maintenance of each new application starts at the 1st phase. The application, having completed the service at the i th phase, with probability r_i passes to the service on $(i+1)$ th phase, and with probability $1-r_i$ completes its service and leaves the system, $i=1, \dots, 2$. With probability 1 after the 3th phase, the full service of the application is completed.

Since there is no external source of requests in the queuing system in question, since all new orders are generated by the requirements on the service, and the order processing time consists of phases, such a system will be called an autonomous system with a phase distribution or a PH-distribution of the service time.

In terms of demography, the application refers to a woman, the reproductive 2nd phase constitutes the woman's reproductive age, and the service time in the system is the duration of her life.

System research

We denote that $n_i(t)$ is the number of applications serviced at the i^{th} phase at time t , then the random process $\{k(t), n_1(t), n_2(t), n_3(t)\}$ is a Markov chain with continuous time. In terms of demography, $n_i(t)$ determines the number of women in phase i , $i=1, \dots, 3$ (in the i th age group).

For the distribution of probabilities

$$P(k, n_1, n_2, n_3, t) = P\{k(t) = k, n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2, n_3(t) = n_3\}$$

we write the Kolmogorov system of differential equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, n_1, n_2, n_3, t)}{\partial t} = & -P(k, n_1, n_2, n_3, t)\{n_1\mu_1 + n_2(\lambda_k + \mu_2) + n_3\mu_3\} + \\ & + P(k, n_1 - 1, n_2, n_3, t)n_2\lambda_k + (n_1 + 1)\mu_1\{P(k, n_1 + 1, n_2, n_3, t)(1 - r_1) + \\ & + P(k, n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, t)r_1\} + (n_2 + 1)\mu_2\{P(k, n_1, n_2 + 1, n_3, t)(1 - r_2) + \\ & + P(k, n_1, n_2 + 1, n_3 - 1, t)r_2\} + (n_3 + 1)\mu_3P(k, n_1, n_2, n_3 + 1, t) + \\ & + \sum_v P(k, n_1, n_2, n_3, t)q_{vk}. \end{aligned}$$

We define the characteristic function

$$H(k, u, t) = \sum_{n_1, n_2, n_3} P(k, n_1, n_2, n_3, t) \exp\{j(u_1n_1 + u_2n_2 + u_3n_3)\},$$

where $j = \sqrt{-1}$ is the imaginary unit, and $u = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ is a three-dimensional vector.

We multiply the Kolmogorov system by $\exp\{j(u_1n_1 + u_2n_2 + u_3n_3)\}$ and sum over n_1, n_2, n_3 . We obtain an equation for the characteristic function $H(k, u, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(k, u, t)}{\partial t} = & j \frac{\partial H(k, u, t)}{\partial u_1} \mu_1 \{1 - e^{-ju_1} e^{ju_2}\} + \\ & + j \frac{\partial H(k, u, t)}{\partial u_2} \{\lambda_k (1 - e^{ju_1}) + \mu_2 - \mu_2 e^{-ju_2} e^{ju_3}\} + \\ & + j \frac{\partial H(k, u, t)}{\partial u_3} \mu_3 \{1 - e^{-ju_3}\} + \sum_v H(k, u, t) q_{vk}. \end{aligned} \quad (1)$$

It is known that the derivative of the k th order at the origin of the characteristic function is equal to the initial moment of the k th order multiplied by the k th power of the imaginary unit. Using this fact, we find the moments of the first order for the number of served applications in the queuing system under consideration [7].

We substitute its solution into equation (1) and differentiate the resulting identity in turns in u_1, u_2, u_3 . Denoting

$$\left. \frac{\partial H(k, u, t)}{\partial u_i} \right|_{u_1=0, u_2=0, u_3=0} = jm_i(k, t), \quad i = \overline{1, 3},$$

we obtain the following system of three ordinary differential equations that determines the components $m_i(k, t)$

$$\begin{cases} m'_1(k, t) = -\mu_1 m_1(k, t) + \lambda_k m_2(k, t) + \sum_v m_1(v, t) q_{vk}, \\ m'_2(k, t) = \mu_1 r_1 m_1(k, t) - \mu_2 m_2(k, t) + \sum_v m_2(v, t) q_{vk}, \\ m'_3(k, t) = \mu_2 r_2 m_2(k, t) - \mu_3 m_3(k, t) + \sum_v m_3(v, t) q_{vk}. \end{cases} \quad (2)$$

We assume that the initial distribution of states by the controlling MMP-flow of the Markov chain $k(t)$ coincides with the final one. Consequently, the chain operates in a steady state, determined by the stationary distribution of the probabilities $R(k)$.

It is known that the stationary distribution of the Markov chain is determined by the system

$$\sum_v R(v) q_{vk} = 0$$

and the normalization condition

$$\sum_k R(k) = 1.$$

We denote

$$m_i(t) = \sum_k m_i(k, t) = M n_i(t), \quad i = \overline{1, 3},$$

and sum all the equations of system (2) with respect to k , and obtain

$$\begin{cases} m'_1(t) = -\mu_1 m_1(t) + \hat{\lambda} m_2(t), \\ m'_2(t) = \mu_1 r_1 m_1(t) - \mu_2 m_2(t), \\ m'_3(t) = \mu_2 r_2 m_2(t) - \mu_3 m_3(t), \end{cases} \quad (3)$$

where $\hat{\lambda} = \sum_k \lambda_k R(k)$ is the intensity of the fertility MMP-flow.

It is not difficult to solve the system solution for specific values of the parameters μ_i , r_i and $\hat{\lambda}$.

Similarly to finding the moments of the first order, we can find moments of higher orders for three-phase autonomous queuing system with an unlimited number of devices and a Markov Modulated Poisson process.

Simulation and numerical examples

We apply the proposed mathematical model in the form of an autonomous system with three-phase distribution of service time and the results obtained to the study of the demographic situation in the Russian Federation.

Suppose that the woman's life expectancy can be divided into three phases: the average duration of the first phase is 15 years, the second phase is 30 years and the third phase is 30 years. Since the phase lengths τ_i are independent and exponentially distributed random variables with the parameters μ_i , then

$$\mu_1 = \frac{1}{15}, \mu_2 = \frac{1}{5}, \mu_3 = \frac{1}{10}.$$

The second phase of life constitute the woman's reproductive age.

The starting point is 2015. Based on the assumptions regarding the dynamics of the total fertility rate, it is possible to make a predictive estimate of the demographic situation.

According to the Russian Statistical Yearbook [8], the total fertility rate in 2015 was 1,777. In recent years, it is possible to increase a value of 2,3 due to actively pursued social policy. To construct an optimistic scenario for the demographic situation, let us set

$$\bar{\lambda} = (1.78 \ 1.87 \ 2.3 \ 2.5 \ 3.2)^T, R = (0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.05 \ 0.05)^T,$$

when the intensities of generating new applications λ is defined as

$$\lambda = (0.029 \ 0.030 \ 0.037 \ 0.041 \ 0.052)^T.$$

We assume that $r_1=r_2=1$. According to the statistical yearbook [8] at the initial time $t=2015$, we have the following initial conditions

$$m_1(2015) = 11.885, m_2(2015) = 30.942, m_3(2015) = 35.669,$$

where $m_i(t)$, $i=1,...,3$ is the number of women of the corresponding age group (million people).

Using the capabilities of the MathCAD package for these model parameters, the system (3) is solved, thereby creating a scenario for changing the number of women in each age group for the long term (up to 2115 years) (Fig.1).

Analysis of the Figure 1 show, that with such an assumption of the total fertility rate, the number of the female population of Russia is increasing.

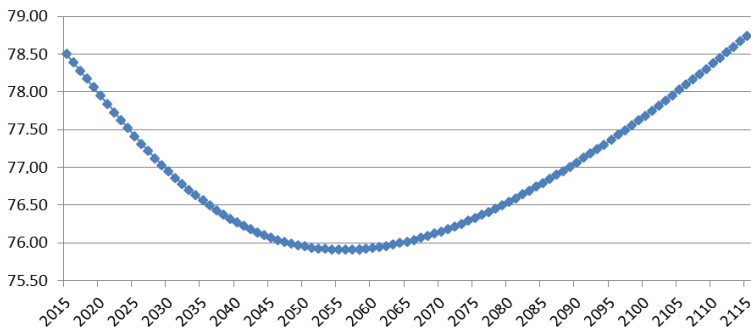


Fig. 1. Dynamics of the total population of women (million people)

Conclusions

In this paper we consider a new mathematical model in the form a three-phase autonomous queuing system with an unlimited number of devices and a Markov Modulated Poisson process. Her research is carried out by the method of moments. The developed model and method is applied to forecasting the process of changing the demographic situation in the Russian Federation.

REFERENCES

1. *Nosova M.G.* Autonomous non-Markov queuing system and its application in demographic problems: Dis. ... cand. phys.-math. sciences: 05.13.18. Tomsk, 2010. 204 p.
1. *Nosova M.G.* Application of a mathematical model to the study of the process of changing the demographic situation in the Russian Federation // *Young Scientist*. 2017. No. 42. P. 1–4.
3. *Nazarov A.A., Nosova M.G.* Mathematical model of the process of changing the demographic situation and its research // *Proc. Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics*. 2009. V. 2 (20). P. 100–105.
4. *Nazarov A.A., Terpugov A.F.* Queuing theory. Tomsk: Publishing house of NTL, 2004. 228 p.
5. *Moiseev A.N., Nazarov A.A.* Infinite-line systems and queuing networks. Tomsk: Publishing house of NTL, 2015. 240 p.
6. *Demographic Encyclopedic Dictionary* / under ed. D.I. Valentee. M.: Sov. encycl., 1985. 608 p.
7. *Bronstein I.N.* Handbook on mathematics for engineers and students of technical colleges. 13th ed. M.: Science, 1986. 544 p.
8. *The Demographic Yearbook of Russia*, 2017: Stat. Sat / Rosstat, 2017. 263 p.

Носова Мария Геннадьевна, к.ф.-м.н., доцент; nosovamgm@gmail.com

Numerical analysis of mean-field model of queuing system with a small parameter

G.O. Tsareva

RUDN University, Moscow, Russia

The recent research of service networks with complex routing discipline in transport networks faced with the problem of proving the global convergence of the solutions of certain infinite systems of ordinary differential equations to a time-independent solution. Scattered results of these studies, however, allow a common approach to their justification. This approach will be expounded here. In work the countable systems of differential equations with bounded Jacobi operators are studied and the sufficient conditions of global stability and global asymptotic stability are obtained. In this paper we apply Dobrushin mean-field approaches from [1] for the singular perturbed systems of ordinary differential equations of infinite order of Tikhonov type. Cauchy problems for the systems of ordinary differential equations of infinite order was investigated A.N. Tikhonov [2], R. Bellman [1], K.P. Persidsky [3], O.A. Zhaitykov [4] and other researchers. It was studied the singular perturbed systems of ordinary differential equations by A.N. Tikhonov [5], A.B. Vasil'eva [6] and other researchers.

In the papers [7] we investigated same questions which relate to systems of ordinary differential equations of infinite order with a small parameter and initial conditions. It was proved some essential theorems such as the local existence of solutions theorem. In this paper we considered a system that consists of infinite number of servers with a Poisson input flow of requests of intensity $N\lambda$. Each requests arriving to the system randomly selects two servers and is instantly sent to the one with the shorter queue. In this case a share $u_k(t)$ of the servers that have the queues lengths with not less than k can be described using an infinite system of differential equations. It is possible to investigate Tikhonov type Cauchy problem for this system with a small parameter μ and initial conditions using the singular perturbation methods [5, 6]. Using the truncation method it was studied a infinite system of differential equations with a small parameter μ order N . The evolution

analysis of $u_k(t)$ ($k=1,2,\dots,N$) be applied to application in queueing large-scale networks analysis.

Large-scale network model

Let's consider a system that consists of N servers with a Poisson input flow of requests of intensity $N\lambda$. Each request arriving to the system randomly selects two servers and is instantly sent to the one with the shorter queue. The service time is distributed exponentially with mean $\bar{t}=1$. Let $u_k(t)$ be a share servers that have the queues lengths with not less than k . It is possible to investigate the asymptotic distribution of the queue lengths as $N \rightarrow \infty$ and $\lambda < 1$ [1]. The considered system of the servers is described by ergodic Markov chain. There is a stationary probability distribution for the states of the system and if $N \rightarrow \infty$ the evolution of the values $u_k(t)$ becomes deterministic and the Markov chain asymptotically converges to a dynamic system the evolution of which is described by infinite system of differential-difference equations

$$\begin{cases} \dot{u}_k(t) = u_{k+1}(t) - u_k(t) + \lambda \left((u_{k-1}(t))^2 - (u_k(t))^2 \right), \\ u_k(0) = g_k \geq 0, \\ k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1)$$

where $g = \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ is a numerical sequence ($1 = g_0 \geq g_1 \geq g_2, \dots$) [1].

We can investigate infinite system of differential-difference equations with a small parameter such form

$$\begin{cases} \dot{u}_k(t) = u_{k+1}(t) - u_k(t) + \lambda \left((u_{k-1}(t))^2 - (u_k(t))^2 \right), \\ k = 0, 1, \dots, n, \\ \mu \dot{u}_k(t) = u_{k+1}(t) - u_k(t) + \lambda \left((u_{k-1}(t))^2 - (u_k(t))^2 \right), \\ k = n+1, \dots, \\ u_k(0) = g_k \geq 0, \\ k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (2)$$

where μ is a small parameter that bring a singular perturbation to the system (1) which allows us to describe the processes of rapid change of the systems.

Truncation large-scale network model and numerical analysis

Using (2) we can write the truncation system of differential-difference equations

$$\begin{cases} \dot{u}_k(t) = u_{k+1}(t) - u_k(t) + \lambda \left((u_{k-1}(t))^2 - (u_k(t))^2 \right), \\ k = 0, 1, \dots, n, \\ \mu \dot{u}_k(t) = u_{k+1}(t) - u_k(t) + \lambda \left((u_{k-1}(t))^2 - (u_k(t))^2 \right), \\ k = n+1, \dots, N, \\ u_k(0) = g_k \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots, N, \\ u_{N+1} = g_{N+1} \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

The numerical example is presented in the figures (Fig. 1 – 3), where $n=5$, $N=10$, $l=0.2$, $g_k = 1 - 0.1k$, $k = \overline{0,10}$ and a small parameter $\mu=0.001$ (Fig. 1), $\mu=0.01$ (Fig. 2) and $\mu=0.1$ (Fig. 3). In this numerical example it was shown the existence of conditions without boundary layers for evolutions $u_i(t) (i = \overline{0,5})$ and conditions with boundary layers for evolutions $u_i(t) (i = \overline{6,10})$.

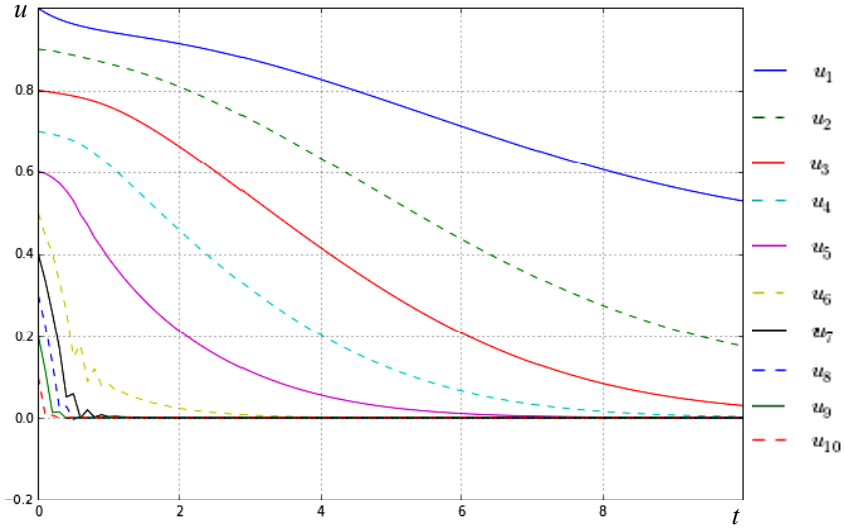


Fig. 1. Evolution analysis of $u_k (\mu = 0.001)$

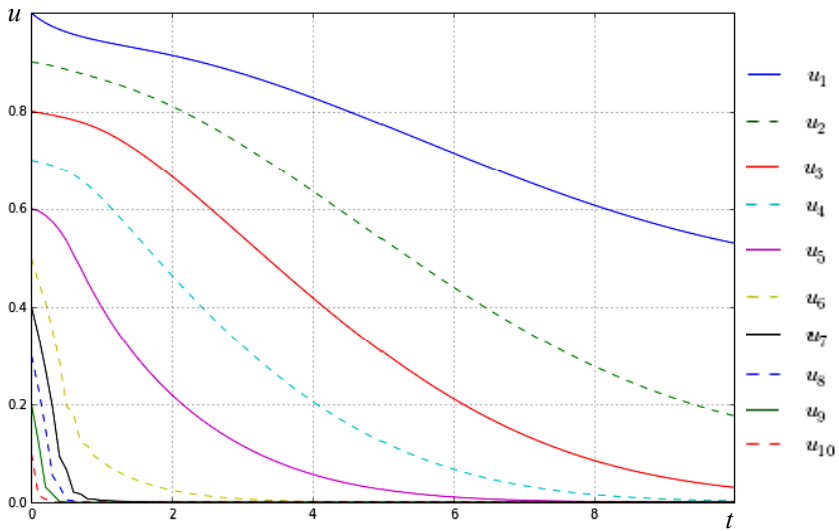


Fig. 2. Evolution analysis of u_k ($\mu = 0.01$)

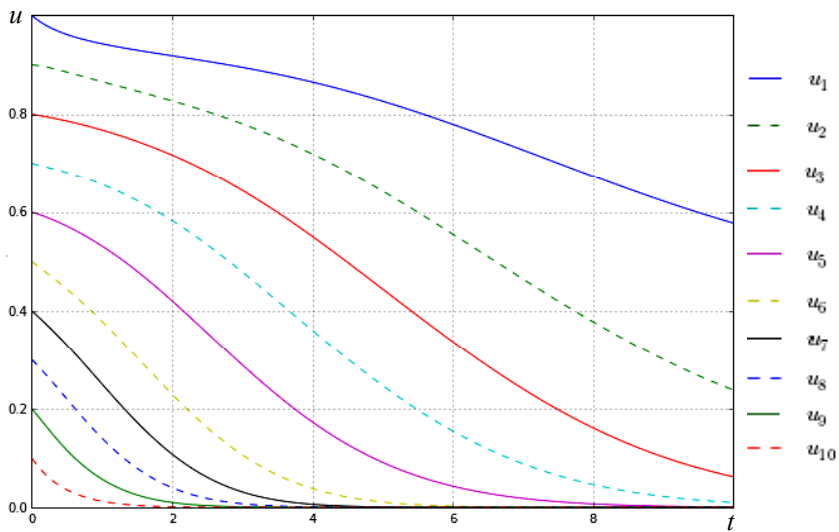


Fig. 3. Evolution analysis of u_k ($\mu = 0.1$)

Conclusions

We investigated the large-scale network model that consists of infinite number of servers with a Poisson input flow of requests of intensity $N\lambda$. Each requests arriving to the system randomly selects two servers and is instantly sent to the one with the shorter queue. In this case a share $u_k(t)$ of the servers that have the queues lengths with not less than k can be described using an infinite system of differential equations. For Tikhonov problem for infinite system of differential equations with a small parameter μ and initial conditions we applied the truncation method and studied a finite system of differential equations with a small parameter μ order N . The numerical analysis of $u_i(t)(i=\overline{0,10})$ be applied for queueing large-scale networks evolution conditions. It was shown the existence of steady state conditions for evolutions $u_i(t)(i=\overline{0,5})$ and conditions with boundary layers for evolutions $u_i(t)(i=\overline{6,10})$.

REFERENCES

1. *Vvedenskaya N.D., Dobrushin R.L., Kharpelevich F.I.* Queueing system with a choice of the lesser of two queues – the asymptotic approach // *Probl. Inform.* 1996. V. 32. Iss. 1. P.15–27.
2. *Tihonov A.N.* Uber unendliche Systeme von Differentialgleichungen // *Rec. Math.* 1934. V. 41. Iss. 4. P. 551–555.
3. *Persidsky K.P.* // *Izv. AN KazSSR, Ser. Mat. Mach.* 1948 . Iss. 2. P. 3–34.
4. *Zhautykov O.A.* Extension of the Hamilton-Jacobi theorems to an infinite canonical system of equations // *Mat. Sb. (N.S.)*. 1961. V. 53. Iss. 95. P. 313–328.
5. *Tihonov A.N.* Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives // *Mat. Sbornik N. S.* 1952. V. 31. Iss. 73. P. 575–586.
6. *Vasil'eva A.B.* Asymptotic behaviour of solutions of certain problems for ordinary non-linear differential equations with a small parameter multiplying the highest derivatives // *Uspehi Mat. Nauk.* 1963. V. 18. Iss. 111. No. 3. P. 15–86.
7. *Vasilyev S.A., Bolotova G.O., Udin D.N.* Systems of Differential Equations of Infinite Order with Small Parameter and Countable Markov Chains // *Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2016). Communications in Computer and Information Science (Springer)*. 2016. V. 678. P. 565–576. DOI: 10.1007/978-3-319-51917-3_48.
8. *Bellman R.* The boundedness of solutions of infinite systems of linear differential equations // *Duke Mathematical Journal*. 1947. V. 14. No. 3. P. 695–706.
9. *Oseledets V. I., Khmelev D. V.* Global stability of infinite systems of nonlinear differential equations, and nonhomogeneous countable Markov chains // *Problemy Peredachi Informatsii (In Russian)*. 2000. V. 36. Iss. 1. P. 60–76.

10. *Vvedenskaya N.D., Suhov Yu.M.* Dobrushin's Mean-Field Approximation for a Queue with Dynamic Routing // Markov Processes and Related Fields. 1997. Iss. 3. P. 493–526
11. *Vvedenskaya N.D.* A large queueing system with message transmission along several routes // Problemy Peredachi Informatsii. 1998 . V. 34. No. 2. P. 98–108.

Царева Галина Олеговна, аспирант, gotsareva@gmail.com

Исследование RQ-системы M/ E2/ 1 с вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием¹

Я.Е. Измайлова, А.А. Назаров

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Системы с повторными вызовами (RQ-системы, retrial queueing system) характеризуется тем, что заявки, пришедшие в систему и обнаружившие прибор занятым, не теряются, а повторяют свою попытку обслужиться через некоторое случайное время. Между повторами обращений заявки находятся на «орбите». Такие модели играют важную роль в компьютерных и телекоммуникационных сетях.

В последние годы, акцент исследований направлен на приоритетные системы с повторами [1–8]. В данной работе будет представлено исследование RQ-систем с вытеснением заявок, случайным доступом и дообслуживанием заявок, отличающихся от приоритетных RQ-систем тем, что в последних доступ приоритетных заявок осуществляется в порядке очереди, а обслуживание начинается сначала.

Математическая модель

Рассмотрим RQ-систему с вытеснением заявок (рис. 1). На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания на первой фазе в течение экспоненциально распределенного времени с параметром μ_1 . После успешного окончания обслуживания на первой фазе, заявка переходит на вторую фазу обслуживания с экспоненциально распределенным временем с параметром μ_2 . Если прибор занят, поступившая заявка вытесняет обслуживаемую и сама встает на прибор, а заявка, которая обслуживалась, переходит на орби-

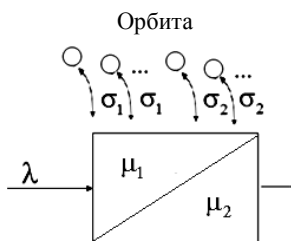


Рис. 1. RQ-система M/E2/1
с вытеснением заявок
и дообслуживанием

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00277 А.

ту. Орбита условно разделяется на две зоны. Если заявка обслуживалась на первой фазе, то уходит в первую зону орбиты, если на второй фазе, то на вторую. На орбите заявки осуществляют случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ . С орбиты, после случайной задержки, заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. С первой зоны орбиты обращается для обслуживания на первую фазу, со второй зоны – на вторую, таким образом, происходит фазовое дообслуживание заявок, обслуживание которых было прервано. Если при обращении из первой зоны орбиты прибор оказывается занятым обслуживанием заявки на второй фазе, то происходит вытеснение. Если при обращении заявки из второй зоны орбиты прибор оказывается занятым обслуживанием заявки на первой зоне, то также происходит вытеснение. Состояние рассматриваемой системы не меняется, если происходит обращение с k -й зоны орбиты на k -ю фазу $k=1,2$.

Так как орбита разделяется на две зоны, то будем полагать, что интенсивность обращения заявок с первой зоны орбиты $\sigma_1 = \gamma_1 \sigma$, со второй зоны $\sigma_2 = \gamma_2 \sigma$.

Обозначим $i_1(t)$ – число заявок на орбите в первой зоне, $i_2(t)$ – число заявок на орбите во второй зоне, $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор обслуживает заявку на первой фазе,} \\ 2, & \text{если прибор обслуживает заявку на второй фазе.} \end{cases}$$

Ставится задача нахождения пропускной способности системы, а также асимптотического среднего числа заявок на орбитах и состояний прибора.

Уравнения Колмогорова

Рассмотрим трехмерный процесс $\{k(t), i_1(t), i_2(t)\}$.

Обозначим $P\{k(t) = k, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2\} = P_k(i_1, i_2)$, $k = 0, 1, 2$, вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k , на орбите в первой зоне находится i_1 заявок, на орбите во второй зоне – i_2 заявок.

Введем частичные характеристические функции следующего вида:

$$H_k(u_1, u_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} P_k(i_1, i_2), \quad k = 0, 1, 2,$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Нетрудно показать, что система уравнений для частичных характеристических функций имеет вид

$$\begin{aligned} -\lambda H_0(u_1, u_2) + j\sigma_1 \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} + j\sigma_2 \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} + \mu_2 H_2(u_1, u_2) &= 0, \\ -\lambda H_1(u_1, u_2) - \mu_1 H_1(u_1, u_2) + \lambda H_0(u_1, u_2) + \lambda e^{ju_2} H_2(u_1, u_2) + \lambda e^{ju_1} H_1(u_1, u_2) + \\ + j\sigma_2 \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_2} - j\sigma_1 e^{-ju_1} \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} - j\sigma_1 e^{ju_2 - ju_1} \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} &= 0, \\ -\lambda H_2(u_1, u_2) - \mu_2 H_2(u_1, u_2) + \mu_1 H_1(u_1, u_2) + \\ + j\sigma_1 \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} - j\sigma_2 e^{-ju_2} \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} - j\sigma_2 e^{ju_1 - ju_2} \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_2} &= 0, \end{aligned}$$

Аналитически данную систему решить затруднительно. Будем решать ее методом асимптотического анализа [9] в условии большой загрузки ($\sigma \rightarrow 0$), полагая, что $\sigma_1 = \sigma\gamma_1$, $\sigma_2 = \sigma\gamma_2$.

Пропускная способность

Определение. Пропускной способностью S будем называть максимальное среднее число заявок, которые может обслужить система в единицу времени.

Теорема 1. Пропускная способность S RQ-системы $M|E2|1$ с вытеснением заявок и дообслуживанием имеет вид

$$S = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

В работе [10] показано, что пропускная способность RQ-системы с вытеснением заявок и обслуживанием заново вытесненных требований имеет вид $S = B'(0)$, где $B(z)$ – функция распределения времени обслуживания. Откуда для времени обслуживания, распределенного по

закону Эрланга, получаем $S = 0$. То есть стационарного режима в такой системе не существует.

В силу утверждения, сформулированного в теореме 1, для RQ-системы с вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием

$$S = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} > 0, \text{ поэтому стационарный режим в такой системе существует для любых } \lambda < \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Асимптотический анализ

Обозначим κ_1 – асимптотическое среднее значение числа заявок на первой зоне орбиты, κ_2 – асимптотическое среднее значение числа заявок на второй зоне орбиты, а R_k , $k = 0, 1, 2$ – распределение вероятностей состояний прибора. Ниже будет показано, что вероятности R_k , $k = 0, 1, 2$, являются решением системы уравнений, коэффициенты которой зависят от κ_1 и κ_2 , поэтому будем обозначать $R_k = R_k(\kappa_1, \kappa_2)$, $k = 0, 1, 2$.

Теорема 2. Пусть $i_1(t)$, $i_2(t)$ – число заявок в зонах орбиты RQ – системы с вытеснением заявок и дообслуживанием. Тогда для последовательности характеристических функций выполняется равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M \exp \{ j\mu_1 \sigma i_1(t) + j\mu_2 \sigma i_2(t) \} = \exp \{ j\mu_1 \kappa_1 + j\mu_2 \kappa_2 \},$$

где κ_1 , κ_2 являются решением системы уравнений

$$\begin{aligned} -\gamma_1 \kappa_1 R_0(\kappa_1, \kappa_2) + (\lambda + \gamma_2 \kappa_2) R_1(\kappa_1, \kappa_2) - \gamma_1 \kappa_1 R_2(\kappa_1, \kappa_2) &= 0, \\ \gamma_2 \kappa_2 R_0(\kappa_1, \kappa_2) + (\gamma_2 \kappa_2 + \mu_1) R_1(\kappa_1, \kappa_2) - (\lambda + \mu_2 + \gamma_1 \kappa_1) R_2(\kappa_1, \kappa_2) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

а вероятности $R_k(\kappa_1, \kappa_2)$, $k = 0, 1, 2$, определяются равенствами

$$\begin{aligned} R_0(\kappa_1, \kappa_2) &= \frac{\lambda}{\lambda + \gamma_1 \kappa_1 + \gamma_2 \kappa_2}, \\ R_1(\kappa_1, \kappa_2) &= 1 - \frac{\lambda}{\mu_2} - \frac{\lambda}{\lambda + \gamma_1 \kappa_1 + \gamma_2 \kappa_2}, \quad R_2(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{\lambda}{\mu_2} \end{aligned} \quad (2)$$

Из полученных в теореме 2 уравнения (1) и равенств (2) определяются: распределение вероятностей R_k , $k=0,1,2$, состояний прибора и асимптотическое среднее число заявок в зонах на орбите. Допредельные средние значения числа заявок в зонах на орбите можно аппроксимировать величинами $\frac{\kappa_k}{\sigma}$, $k=1,2$.

Заключение

В данной работе была исследована RQ-система с вытеснением заявок и дообслуживанием требований методом асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите. Получены уравнения для нахождения асимптотического среднего числа заявок в зонах на орбите $i_1(t)$, $i_2(t)$, а также выражения для нахождения стационарного распределения вероятностей R_k , $k=0,1,2$, состояний прибора. Модифицирован метод асимптотического анализа для исследования RQ-систем с дообслуживанием и вытеснением заявок.

Результаты, выполненных исследований, позволяют получить основные вероятностные характеристики телекоммуникационных сетей связи и научно обоснованно выбирать значения параметров сетей и управляющих протоколов доступа в таких сетях связи. Предложенный новый класс RQ-систем с вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием позволит сократить время пребывания заявок в системе, что существенно расширяет возможности решения ряда научных проблем в области проектирования сетей связи нового поколения.

ЛИТЕРАТУРА

1. D'Apice C., De Simone T., Manzo R., Rizelian G.. Priority service of primary customers in the M/G/1/r retrial queueing system with server searching for customers // J. Information Theory and Information Processing. 2004. V. 4. No. 1. P. 13–23.
2. Kim C., Klimenok V.I., Dudin A.N. Priority tandem queueing system with retrials and reservation of channels as a model of call center // Computers & Industrial Engineering. 2016. V. 96. P. 61–71.
3. Dudin A.N., Kim C., Dudin S., Dudina O. Priority retrial queueing model operating in random environment with varying number and reservation of servers // Applied Mathematics and Computation. 2015. V. 269. P. 674–690.
4. Atencia M. A Geo/G/1 retrial queueing system with priority services // European Journal of Operational Research. 2017. V. 256. Iss. 1. P. 178–186.
5. Krishnamoorthy A., Joshua V., Mathew Ambily. A Retrial Queueing System with Abandonment and Search for Priority Customers // Distributed Computer and

- Communication Networks: 20th International Conference, DCCN 2017, Moscow, Russia, September 25–29, 2017, Proceedings. 2017. P. 98–107. DOI: 10.1007/978-3-319-66836-9_9.
6. *Nazarov A., Izmailova Ya.* Asymptotic Analysis Retrial Queueing System M/GI/1 with Hyper Exponential Distribution the Delay Time in the Orbit and Exclusion of Alternative Customers // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications: Proceeding of the 15th International Scientific Conference, ITMM 2016. Katun, September 12–16, 2016. Springer International Publishing Switzerland, 2016. V. 638: Communications in Computer and Information Science. P. 292–302. DOI: 10.1007/978-3-319-44615-8.
 7. *Поморцева Н.А., Назаров А.А.* Асимптотический анализ RQ-системы с конфликтами и дообслуживанием заявок // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции с международным участием, Москва, РУДН, 18–22 апреля 2016 года. М., 2016. С. 52–54. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000616203>
 8. *Назаров А.А., Измайлова Я.Е.* Исследование RQ-системы M|E2|1 с вытеснением заявок и сохранением фазовой реализации обслуживания // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 42. С. 72–78. DOI: 10.17223/19988605/42/8.
 9. *Боровков А.А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1980. 384 с.
 10. *Назаров А.А., Черникова (Измайлова) Я.Е.* Исследование RQ-системы M/GI/1 с вытеснением в условии большой задержки // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 323. № 5. С. 16–20.

Измайлова Яна Евгеньевна, к.ф.-м.н., evgenevna.92@mail.ru;

Назаров Анатолий Андреевич, д.т.н., профессор, nazarov.tsu@gmail.com

Исследование структуры потока случайных природных событий аппроксимацией МС-поток¹

С.С. Катаева¹, С.Г. Катаев², М.Е. Долгий^{1,3}

¹ Томский государственный университет, г. Томск, Россия

² Томский государственный педагогический университет, г. Томск, Россия

³ Томский политехнический университет, г. Томск, Россия

МС-потoki, интенсивность которых управляется цепью Маркова – Markov Chain, являются наиболее адекватными для использования в качестве математических моделей реальных потоков. В связи с этим при изучении реального потока событий имеет смысл поставить задачу об его аппроксимации МС-поток для дальнейшего исследования СМО уже разработанными методами.

Авторы полагают, что математический аппарат теории массового обслуживания (Queueing Theory) может быть использован при исследовании природных явлений с целью выделения структур в случайных потоках природных событий и, возможно, обнаружения латентных закономерностей. Новый взгляд на известные процессы позволит дополнить и расширить возможности интерпретации, а кроме того, полученные с помощью упомянутого математического аппарата результаты могут служить основой для построения физических моделей случайных процессов.

Поскольку, как правило, относительно исследуемого потока известны лишь времена наступления событий, в данной работе предлагается подход, использующий идеологию метода выделения структур (МВС) [1] для определения параметров МС-поток, который мог бы аппроксимировать реальный информационный поток по наблюдениям за моментами наступления событий поток. Подход подробно изложен в работах [2–4].

МС-поток

МС-поток называется поток, интенсивность которого представляет собой дискретную марковскую цепь $\lambda(t)$, принимающую значения из конечного множества констант $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$, называемых состояниями.

¹ Исследование выполнено в рамках государственного задания № 2.1724.2017/4.6.

ми процесса $\lambda(t)$. Длительности участков стационарности, т.е. участков, где $\lambda = \text{const}$, есть случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону с параметрами $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ соответственно. На каждом таком интервале времени поток событий ведет себя как пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i (простейший поток событий с интенсивностью λ_i). Переход из состояния i в состояние j осуществляется по вероятности p_{ij} из матрицы вероятностей переходов, которая обладает свойством

$$\sum_j p_{ij} = 1, \quad p_{ii} = 0.$$

Очевидно, для аппроксимации наблюдаемого потока событий МС-поток необходимо выделить в реализации наблюдаемого потока событий интервалы стационарности. Тем самым будут определены и моменты смены состояний. После обнаружения интервалов стационарности можно оценить интенсивности потока на этих интервалах, а при наличии в потоке большого числа смены состояний и интенсивности переходов, и вероятности перехода из состояния в состояние.

Таким образом, под структурой конкретной реализации МС-потока можно понимать последовательность времен переключения с одного состояния на другое. И тогда задача аппроксимации произвольного потока МС-поток сводится, фактически, к отысканию его структуры, т.е., интервалов стационарности, и решается методом выделения структур (МВС).

Аппроксимация

Полученное разбиение всех событий потока может содержать большое число интервалов стационарности, каждый из которых обладает своим значением интенсивности. Это означает, что количество состояний потока равно количеству интервалов стационарности. Имеет смысл уменьшить количество состояний, собрав близкие значения интенсивности в одну группу и приписав им одно и то же среднее значение интенсивности. Получаемый при этом новый поток с небольшим числом состояний и будет аппроксимирующим потоком. Выбор количества состояний нового потока определяется самим исследователем.

Для оценки *качества аппроксимации* в целом всего потока входящих событий предлагается воспользоваться критерием согласия Пирсона. Использование этого критерия дает возможность количественно

оценить уровень достоверности с помощью параметра $\beta=1-\alpha$ (где α – уровень значимости и $0 \leq \beta \leq 1$), того, что моменты наступления выбранной группы событий $\{t_{i_0}, \dots, t_{i_n}\}$ удовлетворяют модели простейшего потока, и, следовательно, класс событий с номерами $\{i_0, \dots, i_n\}$ можно считать интервалом стационарности МС-потока. Оценку достоверности итогового разбиения или качества аппроксимации β_F разумно построить как взвешенное среднее оценок для каждого интервала т.е.

$$\beta_F = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m n_i \beta_i, \quad (1)$$

где N – количество событий во всем потоке; m – число интервалов стационарности; n_i – количество событий, а β_i – уровень достоверности i -го интервала стационарности. Построенный таким образом параметр качества β_F можно использовать как критерий выбора наилучшего варианта из k альтернатив, имеющих одинаковое количество интервалов стационарности m :

$$k^* = \max_{i=1, k} ((\beta_F)_i) \quad (2)$$

Процедура аппроксимации некоторой экспериментальной, заданной на дискретном наборе точек, функции $f(x_i), i=1, \dots, n$, предполагает, что любая аппроксимирующая функция $g_k(x)$ должна описывать главные, наиболее характерные особенности функции $f(x_i)$. При этом все случайные отклонения в поведении функции $f(x_i)$ рассматриваются как шум и игнорируются, а при прочих равных условиях предпочтение отдается самой простой функции из набора $g_k(x)$. Подобные соображения логично использовать и при аппроксимации входящего потока событий МС-поток. Ясно, что наиболее удобным для дальнейшего использования будет поток с наименьшим числом состояний.

Пример

В качестве примера работы изложенного метода рассмотрим последовательность землетрясений по всему земному шару за период с 2014 по 2016 г. магнитудой больше 4 баллов. Данные получены с сайта РАН (<http://www.ceme.gsras.ru/cgi-bin/new/catalog.pl>).

В табл. 1 приведены сведения о количествах событий за каждый год указанного периода, а также об интенсивностях годовых потоков землетрясений. Интенсивности указаны в событиях в сутки.

Т а б л и ц а 1

Статистические данные за 2014–16 гг

Год	2014	2015	2016
Количество событий в году	3268	3133	3216
Средняя интенсивность годового потока	8.95	8.58	8.79
Минимальное количество событий	233	231	227
	<i>декабрь</i>	<i>декабрь</i>	<i>февраль</i>
Максимальное количество событий	315	322	331
	<i>апрель</i>	<i>май</i>	<i>декабрь</i>
Минимальная интенсивность	7.52	7.45	8.1
Максимальная интенсивность	10.5	10.38	10.67

Из таблицы видно, что основные параметры, характеризующие интенсивность событий, каждый год примерно одинаковы. Месяцы, на которые попадают максимальные и минимальные значения событий, случайны.

Была проделана описанная выше процедура разбиения потоков событий на интервалы стационарности для каждого отдельного месяца каждого года. Затем был построен аппроксимирующий поток за весь трехлетний период.

В табл. 2 даны средние интенсивности состояний годовых и аппроксимирующего потоков, указанные в событиях в сутки.

На рис. 1 приводится распределение событий по состояниям для аппроксимирующего потока.

Т а б л и ц а 2

Интенсивности выделенных состояний

Номер состояния	Год			Аппроксимирующий поток
	2014	2015	2016	
1	8.3	14.3	8.5	30.8
2	17.0	8.1	7.5	21.2
3	11.8	5.8	20.1	5.8
4	17.7	24.5	5.0	17.0
5	25.0	13.7	9.1	8.9
6		5.4	18.0	
7			28.1	

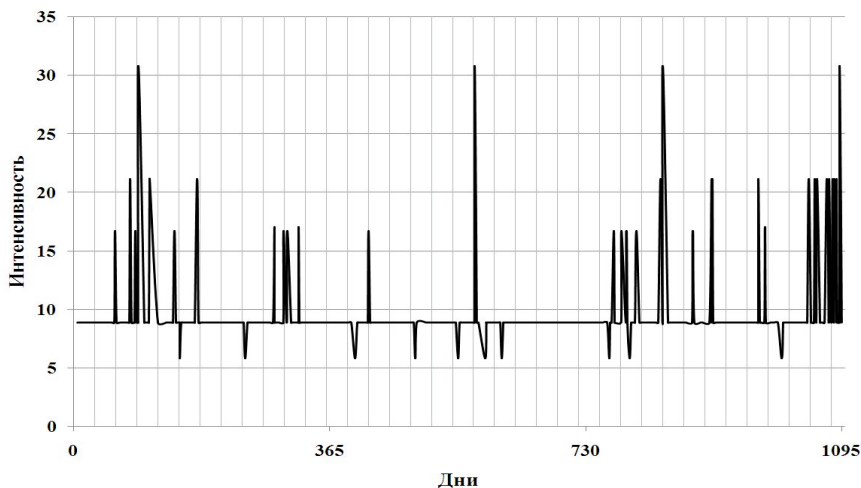


Рис. 1. Распределение событий по состояниям для аппроксимирующего потока

Граф переходов для аппроксимирующего потока приведен на рис. 2. Дугам графа поставлены в соответствие вероятности перехода из состояния в состояние. Отметим, что выделилось «основное» состояние (номер 5), в которое процесс переходит из любого другого состояния.

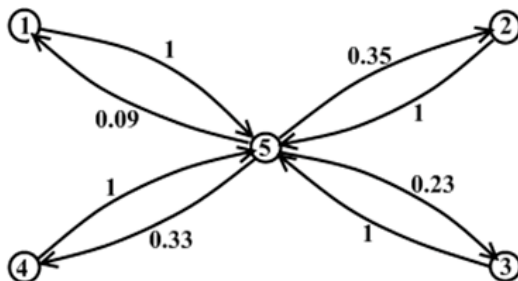


Рис. 2. Граф переходов для аппроксимирующего потока

Наличие у каждого события помимо времени наступления также и пространственной локализации дает возможность пространственно-временного прогнозирования. На самом деле, если обозначить через p_{kj} вероятность перехода результирующего потока из состояния k в состояние j ($k \neq j$), а через q_{ji} – вероятность появления события в точке i в

состоянии номера j , то при выходе потока из состояния k вероятность P_i появления события в точке i равна

$$P_i = \sum_{j=1}^{n-1} p_{kj} \cdot q_{ji},$$

где n – число состояний потока.

На рис. 3 приведены частоты переходов из «основного» состояния 5 во все остальные состояния.

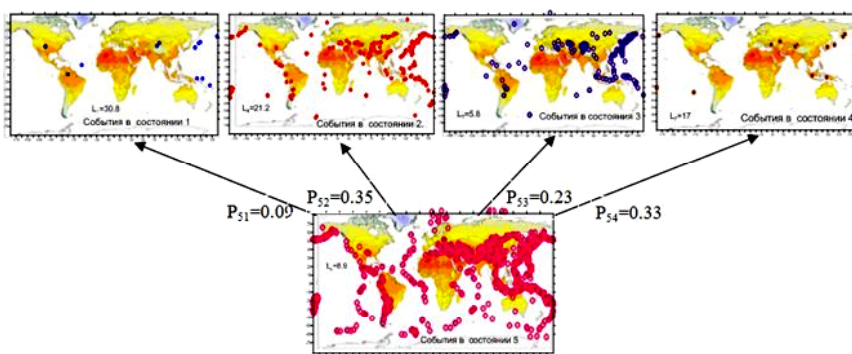


Рис. 3. Частоты переходов для аппроксимирующего потока

На картах верхнего ряда отмечены точками местоположения событий с 1-го по 4-е состояние соответственно, а на нижней карте события «основного» состояния. Конкретная точка i может присутствовать на всех картах, т.е. землетрясение может произойти в этой точке как событие, относящееся к разным состояниям. Таким образом, найдя P_i для каждой точки i можно построить карту распределения риска возникновения землетрясения.

Заключение

Предложенный метод позволяет представить временную структуру потока как последовательность участков простейших потоков разной интенсивности. Зная частоты переходов из состояния в состояние, можно, рассматривая их как соответствующие вероятности, осуществлять пространственно-временное прогнозирование.

По мнению авторов, подход перспективен в сочетании с другими традиционными методами пространственно-динамического анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Faizrahmoon M., Schlote A., Maggi L., Crisostomi E., Shorten R.* A big-data model for multi-modal public transportation with application to macroscopic control and optimisation // *Int. J. Control.* 2015. V. 88. No. 11. P. 2354–2368.
2. *Катаев С.Г., Катаев М.Ю.* Математический формализм и алгоритм структурирования многомерных данных // *Ползуновский вестник.* 2012. № 2/1. С. 99–103.
3. *Беккерман Е.Н., Катаев С.Г., Катаева С.С.* Об одном алгоритме распознавания МС-потока событий // *Вестник Томского государственного университета.* 2000. № 271. С. 41–45.
4. *Беккерман Е.Н., Катаев С.Г., Катаева С.С., Д.Ю. Кузнецов.* Аппроксимация МС-потоком реального потока событий // *Вестник ТГУ. Приложение № 14.* 2005. С. 248–252.
5. *Bekkerman E.N., Kataev S.G., Kataeva S.S.* Heuristic approximation method for a random flow of events by an mc-flow with arbitrary number of states // *Automation and Remote Control.* 2013. V. 74. No. 9. P. 1449–1459.

Катаева София Семеновна, к.т.н., доцент, sskataeva@sibmail.com;

Катаев Сергей Григорьевич, д.т.н., профессор, sgkataev@sibmail.com;

Долгий Максим Евгеньевич, ассистент, maxim_ev_dolgy@mail.ru

Система массового обслуживания с поломками и резервным обслуживающим устройством¹

В.И. Клименок

Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь

Исследуется система массового обслуживания с ненадежным прибором и холодным резервированием. Система состоит из бесконечного буфера, основного ненадежного прибора и резервного надежного прибора. Термин «холодный резерв» подразумевает, что резервный прибор выключен, пока исправен основной, и включается только при выходе основного прибора из строя. В систему поступает групповой марковский поток запросов (BMAP-Batch Markovian Arrival Process). Поломки на основной прибор поступают в марковском потоке (MAP). Времена обслуживания на приборах, времена ремонтов и переключений распределены по фазовому закону. Построена цепь Маркова, описывающая функционирование системы. Выводится условие существования стационарного режима. Приводятся формулы для вычисления основных характеристик производительности системы.

Математическая модель

Рассматривается система массового обслуживания с ожиданием, состоящая из двух приборов, один из которых (основной, прибор номер 1) является ненадежным, а другой (резервный, прибор номер 2) – абсолютно надежным. Последний находится в холодном резерве. Интерпретация: ненадежный прибор – это лазерный канал, а надежный – беспроводной широкополосный радиоканал, функционирующий под управлением протокола IEEE 802.11n. Под влиянием смога, тумана, снега лазерный канал может выходить из строя и сразу начинает восстанавливаться. Одновременно начинается период переключения на резервный прибор с целью дальнейшей передачи информации по этому каналу. Во время восстановления (ремонта) информация передается по резервному каналу. После восстановления основного канала резервный канал отключается до следующей поломки основного канала.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № Ф16Р-017.

Опишем более подробно сценарий взаимодействия основного и резервного приборов. Обслуживание заявок производится основным прибором. Если произошла поломка основного прибора, то одновременно запускаются механизмы ремонта этого прибора и переключения на резервный прибор. В случае, когда ремонт закончится раньше, чем само переключение, то переключение прекращается и основной прибор возобновляет обслуживание, прерванное поломкой, или берет первую поступившую заявку из очереди за время ремонта. Если прибор был пуст как в момент поломки, так и в момент окончания ремонта, то он ждет поступления новой заявки. В случае, когда переключение закончилось раньше, чем ремонт, то резервный прибор еще раз заново обслуживает заявку, а после только заявки из буфера и вновь поступающие заявки до тех пор, пока не закончится ремонт основного прибора. С момента окончания ремонта обслуживание заявок немедленно переносится на основной прибор. Обслуживание заявки, которая находилась на резервном приборе (если таковая имела) начинается на основном приборе заново.

Запросы поступают в систему в ВМАР - потоке. Поступление групп запросов в этом потоке возможно только в моменты скачков неприводимой цепи Маркова $v_t, t \geq 0$, с непрерывным временем и конечным пространством состояний $\{0, 1, \dots, W\}$, которая называется управляющим процессом ВМАР-потока. Интенсивности переходов процесса $v_t, t \geq 0$, сопровождающиеся поступлением групп запросов размера $k \geq 1$ (не сопровождающиеся поступлением запросов) задаются элементами матриц D_k (недиагональными элементами матрицы D_0) или производящей

функцией $D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k, |z| \leq 1$. При этом матрица $D(1)$ является не-

приводимым генератором цепи $v_t, t \geq 0$. Вектор-строка q стационарного распределения этого процесса является решением системы уравнений $qD(1) = 0, qe = 1$, где e – вектор-столбец, состоящий из единиц. Интенсивность (fundamental rate) λ поступления запросов в ВМАР-потоке имеет вид $\lambda = qD'(z)|_{z=1} e$.

Поломки поступают на основной прибор в любом его состоянии. Если прибор находится на ремонте, то поступившая поломка игнорируется. В противном случае поломка вызывает начало периода переключе-

ния на резервный прибор. Поломки поступают в МАР-потоке, характеризующемся матрицами H_0 и H_1 порядка $(V+1) \times (V+1)$.

Времена обслуживания на приборах, времена ремонтов и переключений имеют распределения фазового типа. Краткое описание этого типа распределений следующее. Время, имеющее фазовое распределение (РН – Phase Type distribution) с неприводимым представлением $(\mathbf{b}, S)$, определяется как время, за которое цепь Маркова с непрерывным временем $m_t, t \geq 0$, имеющая несущественные состояния $(1, \dots, M)$ и поглощающее состояние $M+1$, достигнет поглощающего состояния. Начальное состояние цепи выбирается в соответствии с распределением, задаваемым вектором-строкой $(\mathbf{b}, 0)$, где $\mathbf{b}$ – стохастический вектор размерности M . Переходы цепи Маркова $m_t, t \geq 0$, описываются генератором $\begin{pmatrix} S & \mathbf{S}_0 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$, где матрица S – субгенератор, а вектор-столбец $\mathbf{S}_0$ определяется как $\mathbf{S}_0 = -S\mathbf{e}$. Матрица S является квадратной матрицей порядка M с отрицательными диагональными элементами и неотрицательными недиагональными элементами. Вектор $\mathbf{S}_0$ является вектором с неотрицательными элементами, среди которых есть хотя бы один положительный.

В нашем случае предполагаем, что время обслуживания запроса k -м прибором имеет РН-распределение с неприводимым представлением $(\mathbf{b}^{(k)}, S^{(k)})$, $k=1, 2$. Процесс обслуживания на k -м приборе происходит под управлением цепи Маркова $m_t^{(k)}, t \geq 0$, с пространством состояний $\{1, \dots, M^{(k)}, M^{(k)}+1\}$, где $M^{(k)}+1$ есть поглощающее состояние. Интенсивности переходов в поглощающее состояние задаются вектором $\mathbf{S}_0^{(k)} = -S^{(k)}\mathbf{e}$.

Время ремонта имеет РН-распределение с неприводимым представлением $(\mathbf{t}, T)$. Процесс ремонта происходит под управлением цепи Маркова $\vartheta_t, t \geq 0$, с пространством состояний $\{1, \dots, R, R+1\}$, где $R+1$ есть поглощающее состояние. Интенсивности переходов в поглощающее состояние задаются вектором $\mathbf{T}_0 = -T\mathbf{e}$.

Время переключения на резервный прибор имеет РН-распределение с неприводимым представлением $(\mathbf{a}, A)$. Процесс переключения про-

исходит под управлением цепи Маркова $l_t, t \geq 0$, с пространством состояний $\{1, \dots, L, L+1\}$, где $L+1$ есть поглощающее состояние.

Цепь Маркова, описывающая функционирование системы

Пусть в момент t

- i_t – число запросов в системе, $i_t \geq 0$;
- $n_t = \begin{cases} 0, & \text{если основной прибор (прибор номер 1) исправен;} \\ 1, & \text{если основной прибор на ремонте;} \end{cases}$
- $r_t = \begin{cases} 0, & \text{если момент } t \text{ не принадлежит периоду переключения;} \\ 1, & \text{если в момент } t \text{ идет переключение;} \end{cases}$
- $m_t^{(j)}$ – состояние управляющего процесса РН-времени обслуживания

на j -м занятом приборе, $j = 1, 2, m_t^{(j)} = \overline{1, M^{(j)}}$;

- l_t – состояние управляющего процесса РН-времени переключения с прибора номер 1 на прибор номер 2, $l_t = \overline{1, L}$;

- ϑ_t – состояние управляющего процесса РН-времени ремонта, $\vartheta_t = \overline{1, R}$;

- v_t и η_t – состояния управляющих процессов входящего ВМАР-потока и МАР-потока поломок соответственно, $v_t = \overline{0, W}$, $\eta_t = \overline{0, V}$.

Процесс функционирования системы описывается неприводимой цепью Маркова $\xi_t, t \geq 0$, с пространством состояний

$$\begin{aligned} X = & \{(i, n, v, \eta), i = 0, n = 0, v = \overline{0, W}, \eta = \overline{0, V}\} \cup \\ & \cup \{(i, n, v, \eta, \vartheta), i = 0, n = 1, v = \overline{0, W}, \eta = \overline{0, V}, \vartheta = \overline{0, R}\} \cup \\ & \cup \{(i, n, r, v, \eta, m^{(1)}), i > 0, n = 0, r = 0, v = \overline{0, W}, \eta = \overline{0, V}, m^{(1)} = \overline{1, M^{(1)}}\} \cup \\ & \cup \{(i, n, r, v, \eta, m^{(2)}, \vartheta), i > 0, n = 1, r = 0, v = \overline{0, W}, \eta = \overline{0, V}, \vartheta = \overline{1, R}, m^{(2)} = \overline{1, M^{(2)}}\} \cup \\ & \cup \{(i, n, r, v, \eta, \vartheta, l), i > 0, n = 1, r = 1, v = \overline{0, W}, \eta = \overline{0, V}, \vartheta = \overline{1, R}, l^{(2)} = \overline{1, L}\}. \end{aligned}$$

Далее будем предполагать, что состояния цепи внутри каждого из приведенных подмножеств упорядочены в лексикографическом порядке и таким образом упорядоченные подмножества упорядочены в том порядке, в котором они перечислены выше.

Теорема 1. Инфинитезимальный генератор Q цепи Маркова ξ_t , $t \geq 0$, имеет следующую блочную структуру

$$Q = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_0 & \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_2 & \tilde{Q}_3 & \cdots \\ \widehat{Q}_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 & \cdots \\ O & Q_0 & Q_1 & Q_2 & \cdots \\ O & O & Q_0 & Q_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где ненулевые блоки имеют вид

$$\tilde{Q}_0 = \begin{pmatrix} D_0 \oplus H_0 & I_{\bar{W}} \otimes H_1 \otimes \mathbf{t} \\ I_a \otimes T_0 & D_0 \oplus H \oplus T \end{pmatrix};$$

$$\tilde{Q}_k = \begin{pmatrix} 0 & D_k \otimes I_{\bar{V}} \otimes \mathbf{b}^{(1)} & O & O \\ 1 & O & D_k \otimes I_{\bar{V}} \otimes I_R \otimes \mathbf{b}^{(2)} & O \end{pmatrix}, k \geq 1;$$

$$\widehat{Q}_0 = \begin{pmatrix} I_a \otimes S_0^{(1)} & O \\ O & I_{aR} \otimes S_0^{(2)} \\ O & O \end{pmatrix},$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} I_a \otimes S_0^{(1)} \mathbf{b}^{(1)} & O & O \\ O & I_{aR} \otimes S_0^{(2)} \mathbf{b}^{(2)} & O \\ O & O & O \end{pmatrix};$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} D_0 \oplus H_0 \oplus S^{(1)} & O & I_{\bar{W}} \otimes H_1 \otimes \mathbf{e}_{M^{(1)}} \otimes \mathbf{t} \otimes \mathbf{a} \\ I_a \otimes T_0 \otimes \mathbf{e}_{M^{(2)}} \otimes \mathbf{b}^{(1)} & D_0 \oplus H \oplus T \oplus S^{(2)} & O \\ I_a \otimes T_0 \otimes \mathbf{e}_L \otimes \mathbf{b}^{(1)} & I_a \otimes I_R \otimes A_0 \otimes \mathbf{b}^{(2)} & D_0 \oplus H \oplus T \oplus A \end{pmatrix},$$

$$Q_k = \text{diag}\{D_{k-1} \otimes I_{\bar{V}} \otimes I_{M^{(1)}}, D_{k-1} \otimes I_{\bar{V}} \otimes I_R \otimes I_{M^{(2)}}, D_{k-1} \otimes I_{\bar{V}} \otimes I_R \otimes I_L\}, k \geq 2,$$

где $H = H_0 + H_1$, $\otimes, \oplus$ – символы кронекерова произведения и суммы матриц соответственно, $\bar{W} = W + 1$, $\bar{V} = V + 1$, $a = \bar{W}\bar{V}$.

Следствие 1. Цепь Маркова ξ_t , $t \geq 0$, принадлежит классу квазитеплицевых цепей Маркова с непрерывным временем, см. [1].

Следствие 2. Матричные производящие функции $\tilde{Q}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{Q}_k z^k$,

$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k z^k$, $|z| \leq 1$, имеют следующий вид:

$$\tilde{Q}(z) = \begin{pmatrix} (D(z) - D_0) \otimes I_{\bar{V}} \otimes \mathbf{b}^{(1)} & O & O \\ O & (D(z) - D_0) \otimes I_{\bar{V}} \otimes I_R \otimes \mathbf{b}^{(2)} & O \end{pmatrix};$$

$$Q(z) = Q_0 + Q^{(1)} z + z \text{diag}\{D(z) \otimes I_{\bar{V}} \otimes I_{M^{(1)}}, D(z) \otimes I_{\bar{V}R} \otimes I_{M^{(2)}}, D(z) \otimes I_{\bar{V}RL}\},$$

где матрица $Q^{(1)}$ имеет вид

$$Q^{(1)} = \begin{pmatrix} I_{\bar{W}} \otimes H_0 \oplus S^{(1)} & O & I_{\bar{W}} \otimes H_1 \otimes \mathbf{e}_{M^{(1)}} \otimes \mathbf{t} \otimes \mathbf{a} \\ I_a \otimes T_0 \otimes \mathbf{e}_{M^{(2)}} \otimes \mathbf{b}^{(1)} & I_{\bar{W}} \otimes H \oplus T \oplus S^{(2)} & O \\ I_a \otimes T_0 \otimes \mathbf{e}_L \otimes \mathbf{b}^{(1)} & I_a \otimes I_R \otimes A_0 \otimes \mathbf{b}^{(2)} & I_{\bar{W}} \otimes H \oplus T \oplus A \end{pmatrix}.$$

Стационарное распределение

Теорема 2. Цепь Маркова ξ_t , $t \geq 0$, имеет стационарное распределение тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\lambda < p_1 \mathbf{S}_0^{(1)} + p_2 \mathbf{S}_0^{(2)}, \quad (1)$$

где

$$p_1 = \mathbf{x}_1(\mathbf{e}_{\bar{V}} \otimes I_{M^{(1)}}), \quad p_2 = \mathbf{x}_2(\mathbf{e}_{\bar{V}} \otimes \mathbf{e}_R \otimes I_{M^{(2)}}), \quad (2)$$

а вектор $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ является единственным решением системы

$$\mathbf{x}\Gamma = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}\mathbf{e} = 1.$$

Здесь

$$\Gamma = \begin{pmatrix} H_0 \oplus S^{(1)} + I_{\bar{V}} \otimes \mathbf{S}_0^{(1)} \mathbf{b}^{(1)} & O & H_1 \otimes \mathbf{e}_{M^{(1)}} \otimes \mathbf{t} \otimes \mathbf{a} \\ I_{\bar{V}} \otimes T_0 \otimes \mathbf{e}_{M^{(2)}} \otimes \mathbf{b}^{(1)} & H \oplus T \oplus S^{(2)} + I_{\bar{V}R} \otimes \mathbf{S}_0^{(2)} \mathbf{b}^{(2)} & O \\ I_{\bar{V}} \otimes T_0 \otimes \mathbf{e}_L \otimes \mathbf{b}^{(1)} & I_{\bar{V}} \otimes I_R \otimes A_0 \otimes \mathbf{b}^{(2)} & H \oplus T \oplus A \end{pmatrix}.$$

Предполагаем, что условие (1), (2) выполняется.

Обозначим через $p_i, i \geq 0$, векторы упорядоченных в лексикографическом порядке стационарных вероятностей состояний цепи, соответствующих значениям i счетной компоненты цепи.

Для вычисления векторов $p_i, i \geq 0$, используется алгоритм, разработанный в [1] для вычисления стационарного распределения многомерных квазиплоских цепей Маркова.

Векторная производящая функция стационарного распределения. Характеристики производительности системы

Теорема 3. Векторная производящая функция $P(z) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i z^i, |z| \leq 1$, удовлетворяет уравнению

$$P(z)Q(z) = z[p_1 Q_0 - p_0 \tilde{Q}(z)].$$

Следствие 4. Факториальный момент m -го порядка функции $P(z), |z| \leq 1$, вычисляется рекуррентно как решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} P^{(m)}(1)Q(1) = B^{(m)}(1) - \sum_{l=0}^{m-1} C_m^l P^{(l)}(1)Q^{(m-l)}(1), \\ P^{(m)}(1)Q'(1)e = \frac{1}{m+1} [B^{(m+1)}(1) - \sum_{l=0}^{m-1} C_{m+1}^l P^{(l)}(1)Q^{(m+1-l)}(1)]e, \end{array} \right.$$

где

$$B^{(m)}(1) = \begin{cases} p_1 Q_0 - p_0 \tilde{Q}(1), & m = 0, \\ p_1 Q_0 - p_0 \tilde{Q}(1) - p_0 \tilde{Q}'(1), & m = 1, \\ -p_0 [m \tilde{Q}^{(m-1)}(1) + Q^{(m)}(1)], & m > 1. \end{cases}$$

Приведем далее формулы для некоторых важных характеристик производительности системы:

- $\rho = p_1 S_0^{(1)} + p_2 S_0^{(2)}$ – пропускная способность системы (максимальное значение интенсивности потока, который может быть пропущен через систему);
- $L = P^{(1)}(1)e$ – среднее число запросов в системе;
- $V = P^{(2)}(1)e + L - L^2$ – дисперсия числа запросов в системе;

- $P_0^{(0)} = \mathbf{p}_0^{(0)} \mathbf{e}$ – вероятность того, что система пуста и прибор 1 в исправном состоянии;
- $P_0^{(1)} = \mathbf{p}_0^{(1)} \mathbf{e}$ – вероятность того, что система пуста и прибор 1 на ремонте;
- $P_0^{(0,0)} = \mathbf{P}(1) \text{diag}\{I_{aM^{(1)}}, \mathbf{0}_{aR(M^{(2)}+L)}\} \mathbf{e}$ – вероятность того, что прибор 1 обслуживает запрос;
- $P_0^{(1,0)} = \mathbf{P}(1) \text{diag}\{\mathbf{0}_{aM^{(1)}}, I_{aRM^{(2)}}, \mathbf{0}_{aRL}\} \mathbf{e}$ – вероятность того, что прибор 1 на ремонте, а прибор 2 обслуживает запрос;
- $P_0^{(1,1)} = \mathbf{P}(1) \text{diag}\{\mathbf{0}_{a(M^{(1)}+RM^{(2)})}, I_{aRL}\} \mathbf{e}$ – вероятность того, что прибор 1 на ремонте и идет переключение с этого прибора на прибор 2;
- $P_0 = \mathbf{p}_0^{(0)} \mathbf{e} + \mathbf{P}(1) \text{diag}\{I_{aM^{(1)}}, \mathbf{0}_{aR(M^{(2)}+L)}\} \mathbf{e}$ – вероятность того, что прибор 1 в исправном состоянии;
- $P_1 = \mathbf{p}_0^{(1)} \mathbf{e} + \mathbf{P}(1) \text{diag}\{\mathbf{0}_{aM^{(1)}}, I_{aR(M^{(2)}+L)}\} \mathbf{e}$ – вероятность того, что прибор 1 на ремонте.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Klimenok V.I., Dudin A.N.* Multi-dimensional asymptotically quasi-toeplitz Markov chains and their application in queueing theory // *Queueing Systems*. 2006. V. 54. No. 4. P. 245–259.

Клименок Валентина Ивановна, д.ф.-м.н., профессор; vklimenok@yandex.ru

Нахождение ожидаемых доходов в G-сети с ненадёжными многолинейными системами обслуживания

Д.Я. Копать, М.А. Маталыцкий

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, г. Гродно, Беларусь

Ненадёжные открытые и замкнутые сети в стационарном режиме были исследованы в работах [1,2]. В работе [3] была рассмотрена G-сеть с ненадёжными СМО в стационарном режиме и были найдены вероятности состояний сети в форме произведения. Ненадёжные сети в переходном режиме, но без отрицательных заявок были рассмотрены в работах [4 и 5]. В [4] найдены вероятности состояний сети с помощью многомерных производящих функций, а в [5] ожидаемые доходы в СМО. Данная работа посвящена нахождению ожидаемых доходов систем G-сети с ненадёжными многолинейными системами обслуживания в переходном режиме, что является обобщением результатов, полученных в [5].

Описание сети

Рассмотрим открытую G-сеть массового обслуживания с n СМО, количество линий обслуживания в каждой из которых равно $m_i, i = \overline{1, n}$. В i -ю из внешней среды поступает простейший поток обычных положительных заявок с интенсивностью λ_{0i}^+ и простейший поток отрицательных заявок с интенсивностью λ_{0i}^- . Все поступающие потоки независимы. Длительности обслуживания положительных заявок в i -й СМО распределены по экспоненциальному закону с параметром $\mu_i, i = \overline{1, n}$. После окончания обслуживания положительной заявки в i -й СМО она направляется в j -ю СМО с вероятностью p_{ij}^+ опять как положительная заявка, а с вероятностью p_{ij}^- – как отрицательная заявка, и с вероятностью $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n (p_{ij}^+ + p_{ij}^-)$ уходит из сети, $i, j = \overline{1, n}$.

Линии обслуживания подвергаются случайным поломкам, причем время неисправной работы каждой линии системы S_i имеет показа-

тельную функцию распределения с параметром $\alpha_i, i = \overline{1, n}$. После поломки линия немедленно начинает восстанавливаться и время восстановления также имеет показательную функцию распределения с параметром $\gamma_i, i = \overline{1, n}$. Под состоянием сети будем понимать вектор $(\vec{d}, \vec{k}, t) = (d_1(t), d_2(t), \dots, d_n(t), k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t))$, где $d_i(t), k_i(t)$ – соответственно количество исправных линий обслуживания и количество заявок в i -й СМО в момент времени t .

Система РДУ Колмогорова для вероятностей состояний сети

Пусть I_i – нулевой вектор размерности n , за исключением компонент с номером i , которая равна единице, I_0 – n -вектор, состоящий из нулей, $P(\vec{d}, \vec{k}, t)$ – вероятность состояния $(\vec{d}, \vec{k}, t)$, $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ – функция Хевисайда. Возможны следующие переходы цепи Маркова в состояние $(\vec{d}, \vec{k}, t + \Delta t)$ за время Δt :

1) из состояния $(\vec{d}, \vec{k} - I_i, t)$, $i = \overline{1, n}$, с вероятностью $\lambda_{0i}^+ u(k_i(t)) \Delta t + o(\Delta t)$, в этом случае в i -ю СМО за время Δt поступит положительная заявка;

2) из состояния $(\vec{d}, \vec{k} + I_i, t)$, $i = \overline{1, n}$, с вероятностью

$$\mu_i p_{i0} \min(d_i(t), k_i(t) + 1) + (\lambda_{0i}^- u(d_i(t)) + \mu_i \min(d_i(t), k_i(t) + 1) p_{ij}^- (1 - u(k_i(t)))) \Delta t + o(\Delta t)$$

за время Δt положительная заявка после завершения обслуживания в i -й СМО покинет сеть или придёт отрицательная заявка и уничтожит одну положительную или после завершения обслуживания в i -й СМО положительная заявка перейдёт в j -ю как отрицательная, но, не обнаружив там положительных заявок, покинет сеть;

3) из состояния $(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, t)$ с вероятностью

$$\mu_i \min(d_i(t), k_i(t) + 1) p_{ij}^+ u(k_j(t)) \Delta t + o(\Delta t), \quad i = \overline{1, n},$$

за время Δt положительная заявка после завершения обслуживания в i -й СМО перейдёт в j -ю как положительная заявка;

4) из состояния $(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, t)$ с вероятностью

$$\mu_i \min(d_i(t), k_i(t) + 1) p_{ij}^- \Delta t + o(\Delta t), i = \overline{1, n},$$

за время Δt положительная заявка после завершения обслуживания в i -й СМО перейдёт в j -ю как отрицательная и уничтожит там одну положительную заявку;

5) из состояния $(\vec{d} - I_i, \vec{k}, t)$ с вероятностью

$$\gamma_i (m_i - d_i(t) + 1) u(d_i(t)) \Delta t + o(\Delta t), i = \overline{1, n},$$

при этом за время Δt восстановится одна линия обслуживания;

6) из состояния $(\vec{d} + I_i, \vec{k}, t)$ с вероятностью

$$\alpha_i (d_i(t) + 1) \Delta t + o(\Delta t), i = \overline{1, n},$$

при этом за время Δt одна линия обслуживания выйдет из строя;

7) из состояния $(\vec{d}, \vec{k}, t)$, при этом с вероятностью

$$1 - \sum_{i=1}^n \left[(\lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- + \mu_i) \min(k_i(t), d_i(t)) + \gamma_i (m_i - d_i(t) + 1) u(d_i(t)) + \right. \\ \left. + \alpha_i (d_i(t) + 1) \right] \Delta t + o(\Delta t)$$

состояние сети не изменится.

Используя формулу полной вероятности и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, можно получить систему разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова для нестационарных вероятностей состояний сети $P(\vec{d}, \vec{k}, t)$.

Нахождение среднего числа заявок в системах сети

Пусть $N_i^+(t)$ – среднее число положительных заявок в системе S_i в момент времени t , $i = \overline{1, n}$. Можно показать, что система ОДУ для $N_i^+(t)$ имеет вид

$$\frac{dN_i^+(t)}{dt} = (\lambda_{0i}^+ - \lambda_{0i}^-) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j \rho_j(t) (p_{ji}^+ - p_{ji}^-) - \mu_i \rho_i(t), i = \overline{1, n},$$

где $\rho_i(t) = \min(d_i(t), k_i(t)), i = \overline{1, n}$.

Пусть $\bar{d}_i(t)$ – среднее число исправных линий обслуживания в i -й СМО в момент времени t . Имеет место соотношение

$$\bar{d}_i(t) = \bar{d}_i(t_0) + \bar{d}_i^+(t_0, t) - \bar{d}_i^-(t_0, t),$$

где $\bar{d}_i^+(t_0, t)$ – среднее число восстановленных линий обслуживания на промежутке времени $[t_0, t)$, $\bar{d}_i^-(t_0, t)$ – среднее число вышедших из строя линий обслуживания на промежутке времени $[t_0, t)$. Так как время неисправной работы и время восстановления каждой линии системы S_i имеют показательные функции распределения соответственно с параметрами α_i и γ_i , $i = \overline{1, n}$, то можно найти выражения для $\bar{d}_i^+(t_0, t)$ и $\bar{d}_i^-(t_0, t)$, $i = \overline{1, n}$. Пусть сеть функционирует в условиях высокой нагрузки, т.е. $\forall t k_i(t) \geq d_i(t)$, $\rho_i(t) = \bar{d}_i(t)$. Тогда с учётом преобразований получим

$$\begin{aligned} N_i^+(t) = & (\lambda_{0i}^+ - \lambda_{0i}^-)t + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j \left(d_j(t_0) + \left(\frac{1}{(m_i - 1)!} - \frac{1}{m_i!} \right) \Gamma(m_i + 1, \gamma_i t) + \right. \\ & + \frac{-e^{-\gamma_i t} \beta^{2+m_i} + (\gamma_i t - m_i - 1) \Gamma(m_i + 2, \gamma_i t)}{(m_i + 1)!} + \sum_{k_1=0}^{m_i} \frac{-k_1 (\Gamma(k_1) - \Gamma(k_1, \gamma_i t))}{(k_1 - 1)!} - \\ & - \left(\frac{1}{(m_i - 1)!} - \frac{1}{m_i!} \right) \Gamma(m_i + 1, \alpha_i t) + \frac{-e^{-\alpha_i t} \alpha_i^{2+m_i} + (\alpha_i t - m_i - 1) \Gamma(m_i + 2, \alpha_i t)}{(m_i + 1)!} - \\ & - \sum_{k_2=0}^{m_i} \frac{k_2 (\Gamma(k_2) - \Gamma(k_2, \alpha_i t))}{(k_2 - 1)!} \left(p_{ji}^+ - p_{ji}^- \right) + \mu_i \left(d_i(t_0) + \left(\frac{\Gamma(m_i + 1, \gamma_i t)}{m_i (m_i - 2)!} \right) + \right. \\ & + \frac{-e^{-\gamma_i t} \beta^{2+m_i} + (\gamma_i t - m_i - 1) \Gamma(m_i + 2, \gamma_i t)}{(m_i + 1)!} + \sum_{k_1=0}^{m_i} \frac{k_1 (\Gamma(k_1) - \Gamma(k_1, \gamma_i t))}{(k_1 - 1)!} - \\ & - \left(\frac{\Gamma(m_i + 1, \gamma_i t)}{m_i (m_i - 2)!} \right) \frac{-e^{-\alpha_i t} \alpha_i^{2+m_i} + (\alpha_i t - m_i - 1) \Gamma(m_i + 2, \alpha_i t)}{(m_i + 1)!} - \\ & \left. - \sum_{k_2=0}^{m_i} \frac{k_2 (\Gamma(k_2) - \Gamma(k_2, \alpha_i t))}{(k_2 - 1)!} \right) + N_i^+(0), \end{aligned}$$

где $\Gamma(m_i, \alpha_i t) = \int_{\alpha_i t}^{\infty} \tau^{m_i-1} e^{-\tau} d\tau$ – неполная гамма-функция [6]. В случае на-

турального s эта функция имеет вид

$$\Gamma(s, x) = e^{-x} x^s \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(s-1)!}{x^k (s-k)!} + (s-1)! e^x.$$

Ожидаемые доходы систем сети

Рассмотрим динамику изменения доходов i -й СМО сети, $i = \overline{1, n}$. Пусть доход этой системы в начальный момент времени был равен $v_{i0}, i = \overline{1, n}$. Нас будет интересовать доход системы $V_i(t)$ в момент времени $t, i = \overline{1, n}$. Доход СМО в момент времени $t + \Delta t$ можно записать в виде

$$V_i(t + \Delta t) = V_i(t) + \Delta V_i(t, \Delta t),$$

где $\Delta V_i(t, \Delta t)$ – изменение дохода i -й системы на интервале времени $[t, t + \Delta t), i = \overline{1, n}$. Чтобы его найти, выпишем условные вероятности событий, которые могут произойти за время Δt , а также изменения доходов i -й СМО, которые связаны с этими событиями, $i = \overline{1, n}$. Рассмотрим динамику изменения ожидаемых доходов систем сети:

- в случае 1) доход системы S_i равен r_{0i} , где r_{0i} – случайная величина (СВ) с математическим ожиданием (м. о.) $M\{r_{0i}\} = a_{0i}, i = \overline{1, n}$;
- с вероятностью $\mu_i p_{i0} \min(d_i(t), k_i(t) + 1) \Delta t + o(\Delta t)$ за время Δt положительная заявка после завершения обслуживания в i -й СМО покинет сеть, при этом общий объем дохода СМО S_i уменьшится на величину, равную $-R_{i0}$, где $M\{R_{i0}\} = b_{i0}, i = \overline{1, n}$;
- с вероятностью $\lambda_{0i}^- u(d_i(t)) \Delta t + o(\Delta t), i = \overline{1, n}$ в систему S_i в момент времени t из внешней среды поступит отрицательная заявка, которая принесет ей доход (убыток) в размере $-\bar{r}_{0i}$, где $\bar{r}_{0i}$ – СВ с м.о. $M\{\bar{r}_{0i}\} = \bar{a}_{0i}, i = \overline{1, n}$;

- с вероятностью $\mu_i \min(d_i(t), k_i(t) + 1) p_{ij}^-(1 - u(k_i(t)))$ положительная заявка, обслуженная в СМО S_i , в момент времени t направляется в СМО S_j как отрицательная заявка $i, j = \overline{1, n}, i \neq j$; но не обнаруживает там положительных заявок; изменение дохода системы не произойдёт;
- в случае 3) доход i -й СМО возрастет на величину R_{ji} , а доход j -й СМО уменьшится на эту величину, $M\{R_{ji}\} = a_{ji}, j = \overline{1, n}, j \neq i$;
- в случае 4) доход системы S_i уменьшится на величину $\bar{r}_{ij}$, а доход системы S_j не изменится, где $M\{\bar{r}_{ij}\} = \bar{a}_{ij}, i, j = \overline{1, n}, i \neq j$;
- в случае 5) доход системы S_i уменьшится на величину g_i , где $M\{g_i\} = h_i, i = \overline{1, n}$;
- в случае 6) суммарный доход системы S_i может увеличиться (уменьшиться) на величину $r_i \Delta t$, где $M\{r_i\} = c_i, i, j = \overline{1, n}$;
- в случае 7) суммарный доход системы S_i может увеличиться (уменьшиться) на величину $r_i \Delta t$.

Предположим, что в любой момент времени СВ $r_{0i}, R_{0i}, g_i, r_{ij}, \bar{r}_{ij}$ не зависят от СВ r_i . Тогда с учётом вышесказанного можно получить соотношения для ожидаемых доходов систем сети, функционирующей в условиях высокой нагрузки:

$$\begin{aligned}
v_i(t) = & a_{0i} \lambda_{0i}^+ t - \bar{a}_{0i} \lambda_{0i}^- t + \left(-b_{i0} \mu_i p_{i0} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \mu_i p_{ij}^+ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \bar{a}_{ij} \mu_i p_{ij}^- + h_i \gamma_i + 1 \right) \times \\
& \times \left(\bar{d}_i(t_0) t + \left(\frac{1}{(m_i - 1)!} - \frac{1}{m_i!} \right) \Gamma(m_i + 1, \gamma_i t) - \left(\frac{\Gamma(m_i + 1, \alpha_i t)}{m_i (m_i - 2)!} \right) + \right. \\
& + \frac{-e^{-\gamma_i t} \beta^{2+m_i} + (\gamma_i t - m_i - 1) \Gamma(m_i + 2, \gamma_i t)}{(m_i + 1)!} - \sum_{k_1=0}^{m_i} \frac{k_1 (\Gamma(k_1) - \Gamma(k_1, \gamma_i t))}{(k_1 - 1)!} + \\
& \left. + \frac{-e^{-\alpha_i t} \beta^{2+m_i} + (\alpha_i t - m_i - 1) \Gamma(m_i + 2, \alpha_i t)}{(m_i + 1)!} + \sum_{k_2=0}^{m_i} \frac{k_2 (\Gamma(k_2) - \Gamma(k_2, \alpha_i t))}{(k_2 - 1)!} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ji} \mu_j p_{ji}^+ \left(\bar{d}_j(t_0) t + \left(\frac{1}{(m_j-1)!} - \frac{1}{m_j!} \right) \Gamma(m_j+1, \gamma_j t) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{-e^{-\gamma_j t} \beta^{2+m_j} + (\gamma_j t - m_j - 1) \Gamma(m_j+2, \gamma_j t)}{(m_j+1)!} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k_1=0}^{m_j} \frac{k_1 (\Gamma(k_1) - \Gamma(k_1, \gamma_j t))}{(k_1-1)!} - \left(\frac{1}{(m_j-1)!} - \frac{1}{m_j!} \right) \Gamma(m_j+1, \alpha_j t) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{-e^{-\alpha_j t} \beta^{2+m_j} + (\alpha_j t - m_j - 1) \Gamma(m_j+2, \alpha_j t)}{(m_j+1)!} - \sum_{k_2=0}^{m_j} \frac{k_1 (\Gamma(k_2) - \Gamma(k_2, \alpha_j t))}{(k_2-1)!} \right) - \\
& \quad - h_i \gamma_i (m_i+1) t + c_i t + v_i(0), \quad i = \overline{1, n}.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивницкий В.А.* Теория сетей массового обслуживания. М.: Физматлит, 2004. 772 с.
2. *Цициашвили Г.Ш., Оситова М.А.* Предельные распределения в сетях массового обслуживания с ненадежными элементами // Пробл. передачи информ. 2008. Т. 44. Вып. 4. С. 109–119.
3. *Fourneau J.M.* G-networks of unreliable nodes // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2016. V. 30. P. 361–378.
4. *Статкевич С.Э., Маталыцкий М.А.* Исследование сети массового обслуживания с ненадежными системами в переходном режиме // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1. С. 112–125.
5. *Статкевич С.Э., Маталыцкий М.А.* Анализ НМ-сетей с ненадежными системами обслуживания // Вестник ГрГУ. Сер. 2. Математика, физика, информатика, вычислительная техника и управление. 2010. № 2. С. 31–40.
6. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды: в 3 т. Т. 1. Элементарные функции. 2-е изд., исправ. М.: Физматлит, 2002. 632 с.

Копать Дмитрий Ярославович, аспирант; dk80395@mail.ru;

Маталыцкий Михаил Алексеевич, д.ф.-м.н., профессор; m.matalytski@gmail.com

Аппроксимация сетей массового обслуживания с различной стартовой загрузкой

Е.А. Лебедев, А.В. Ливинская

*Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко,
г. Киев, Украина*

В последние годы исследование сетей приобрело новое практическое значение как инструмент для изучения, проектирования и оптимизации реальных систем с взаимодействующими компонентами, для которых стохастические сети дают простое, но полезное представление. Например, интернет может быть представлен как компьютерная сеть, составленная из провайдерских узлов связи, веб-серверов, станций передачи и связанная посредством обмена данными. Роль сетей постоянно возрастает в эпидемиологии, генетике, экономике (страховании, логистике), при изучении сетей сотовой связи, компьютерных вирусов, компьютерного обеспечения.

Постановка задачи

Основным объектом нашего исследования является стохастическая сеть, состоящая из « r » обслуживающих узлов. Каждый из этих узлов функционирует как многоканальная стохастическая система. При поступлении требования в такую систему сразу начинается ее обслуживание. Извне в сеть поступает пуассоновский поток требований $v(t)$, $t \geq 0$, с ведущей функцией $\Lambda(t)$. Вначале будем считать, что $\Lambda(t)$ – абсолютно непрерывна, т.е. может быть представлена в форме

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du. \text{ Предположим также, что } \lambda(t) \text{ – периодическая}$$

функция с периодом $T > 0$: $\lambda(nT + \theta) = \lambda(\theta)$, $n = 1, 2, \dots$, $0 \leq \theta < T$.

Требование, попадающее в сеть, направляется для обслуживания в i -й узел с вероятностью p_{0i} , $i = 1, 2, \dots, r$. Время обслуживания в i -м узле показательно распределено с параметром μ_i . После завершения обслуживания в i -м узле требование с вероятностью p_{ij} переходит на обслуживание в j -й узел и с вероятностью $p_{ir+1} = 1 - \sum_{j=1}^r p_{ij}$ покидает

сеть, $P = \|p_{ij}\|_1^r$ – матрица маршрутизации сети. Дополнительный узел с номером « $r + 1$ » интерпретируется как выход из сети.

Согласно общепринятой системе обозначений, будем обозначать такую сеть символом $[M_r | M | \infty]^r$.

Обозначим через $Q_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, количество требований в i -м узле сети в момент времени t . Процессом обслуживания требований в сети будем называть r -мерный процесс $Q'(t) = (Q_1(t), \dots, Q_r(t))$.

Целью нашей работы является изучение процесса $Q(t)$ в перегруженном режиме функционирования сети при фиксированной стартовой загрузке и при стартовой загрузке, которая является «асимптотически большой».

Предельная теорема для процесса обслуживания

Рассмотрим $[M_r | M | \infty]^r$ -сеть, функционирующую в перегруженном режиме. Будем предполагать, что характеристики сети с периодической интенсивностью входного потока зависят от « n » (номера серии) таким образом, что удовлетворено следующее условие:

Условие 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mu_i^{(n)} = \mu_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, r$.

В контексте условия 1 рассмотрим последовательность случайных процессов

$$\xi^{(n)}(t) = n^{-1/2}(Q^{(n)}(nt) - q^{(n)}(nt)), \quad t \geq 0,$$

где
$$q_j^{(n)}(nt) = \sum_{i=1}^r p_{0i} \int_0^{nt} p_j^{i(n)}(nt-u) \lambda(u) du,$$

$$q^{(n)'}(nt) = (q_1^{(n)}(nt), \dots, q_r^{(n)}(nt)), \quad j = 1, \dots, r, \quad p_j^{i(n)}(\tau)$$

– элементы матрицы

$$P^{(n)}(\tau) = \|p_j^{i(n)}(\tau)\|_1^r = \exp\{\Delta(\mu^{(n)})(P - I)\tau\}, \quad \mu^{(n)'} = (\mu_1^{(n)}, \dots, \mu_r^{(n)}),$$

$\Delta(x) = \|\delta_{ij} x_i\|_1^r$ – диагональная матрица с вектором $x' = (x_1, \dots, x_r)$ на главной диагонали, $I = \|\delta_{ij}\|_1^r$ – единичная матрица.

Введем два независимых гауссовых процесса

$$\xi^{(i)'}(t) = (\xi_1^{(i)}(t), \dots, \xi_r^{(i)}(t)), \quad i = 1, 2.$$

Процесс $\xi^{(1)}(t)$ имеет нулевое математическое ожидание и корреляционные матрицы вида

$$R^{(1)}(t) = E\xi^{(1)}(t)\xi^{(1)'}(t) - E\xi^{(1)}(t)E\xi^{(1)'}(t) = \int_0^t P'(u)\Delta(\bar{\lambda})P(u)du,$$

$$R^{(1)}(s, t) = E\xi^{(1)}(s)\xi^{(1)'}(t) - E\xi^{(1)}(s)E\xi^{(1)'}(t) = R^{(1)}(s)P(t-s), \quad s < t,$$

$$\text{где } \bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_r), \quad \lambda_i = p_{0i} \int_0^T \lambda(u)du, \quad P(\tau) = \exp\{\Delta(\mu)(P-I)\tau\}.$$

Для процесса $\xi^{(2)}(t)$ имеем: $E\xi^{(2)}(t) = 0$,

$$R^{(2)}(t) = \int_0^t [\Delta[\bar{\lambda}'P(u)] - P'(u)\Delta(\bar{\lambda})P(u)]du,$$

$$R^{(2)}(s, t) = R^{(2)}(s)P(t-s), \quad s < t.$$

Теорема 1. Пусть для $[M_t | M | \infty]^r$ -сети с периодическим входным потоком выполнено Условие 1 и пусть в начальный момент времени $t=0$ сеть пуста: $Q_i^{(n)}(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$. Тогда на любом конечном интервале $[0, T]$ последовательность случайных процессов $\xi^{(n)}(t)$, $n \geq 1$, сходится к $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$ в равномерной топологии.

Доказательство теоремы было дано в работе [4].

Часть $\xi^{(1)}(t)$ предельного процесса обусловлена флуктуациями входящего потока требований, а часть $\xi^{(2)}(t)$ – флуктуациями времен обслуживания.

Предельная теорема при асимптотически большой стартовой загрузке

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение процесса обслуживания в $[M_t | M | \infty]^r$ -сети в предположении, что сеть функционирует в перегруженном режиме, при этом начальная загрузка сети зависит от параметра серии и является «асимптотически большой».

Чтобы согласовать параметры компонент предельного процесса, будем считать, что сеть открыта. Это означает, что спектральный радиус матрицы маршрутизации меньше 1. Обозначим решение уравнения баланса для сети $\theta' = (\theta_1, \dots, \theta_r) = \bar{\lambda}'(I - P)^{-1}$. Вместо условия $Q_i^{(n)}(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, мы будем требовать выполнения следующего условия:

Условие 2. $Q_i^{(n)}(0) = \left[n\theta_i / \mu_i + \sqrt{n}\eta_i^{(0)} \right]$, $i = 1, 2, \dots, r$,

где $\eta^{(0)'} = (\eta_1^{(0)}, \dots, \eta_r^{(0)})$ – некоторый фиксированный вектор из $\mathbb{R}^r$, $[\cdot]$ – целая часть числа.

Изучим асимптотическое поведение последовательности случайных процессов

$$\eta^{(n)}(t) = n^{-1/2}(Q^{(n)}(nt) - n(\theta/\mu)),$$

$$(\theta/\mu)' = (\theta_1/\mu_1, \dots, \theta_r/\mu_r), \quad n = 1, 2, \dots$$

Введем дополнительно гауссовский процесс $\xi^{(3)}(t)$, который не зависит от введенных ранее процессов $\xi^{(1)}(t)$, $\xi^{(2)}(t)$ и определяется средними значениями

$$E\xi^{(3)}(t) = P'(t)\eta^{(0)}$$

и корреляционными матрицами

$$\begin{aligned} R^{(3)}(t) &= E\xi^{(3)}(t)\xi^{(3)'}(t) - E\xi^{(3)}(t)E\xi^{(3)'}(t) = \\ &= \Delta\left((\theta/\mu)'P(t)\right) - P'(t)\Delta(\theta/\mu)P(t), \end{aligned}$$

$$R^{(3)}(s, t) = E\xi^{(3)}(s)\xi^{(3)'}(t) - E\xi^{(3)}(s)E\xi^{(3)'}(t) = R^{(3)}(s)P(t-s), \quad s < t.$$

Для $\eta^{(n)}(t)$ имеет место теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 2. Пусть для $[M_t | M | \infty]^r$ -сети с периодическим входным потоком спектральный радиус матрицы маршрутизации P строго меньше 1 и справедливы Условия 1, 2. Тогда на любом конечном промежутке времени $[0, T]$ последовательность случайных процессов $\eta^{(n)}(t)$, сходится в равномерной топологии при $n \rightarrow \infty$ к процессу $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t) + \xi^{(3)}(t)$.

Доказательство теоремы опирается на метод, развитый в работе [2].

В сравнении с утверждением Теоремы 1, дополнительная компонента $\xi^{(3)}(t)$ предельного процесса связана с флуктуациями времени обслуживания тех требований, которые находились в сети в начальный момент времени $t = 0$.

Несложно показать, что для корреляционных матриц мы имеем

$$R^{(1)}(t) + R^{(2)}(t) + R^{(3)}(t) = \Delta(\theta/\mu) - P'(t)\Delta(\theta/\mu)P(t).$$

Таким образом, из теоремы 2 получаем такой результат.

Следствие 1. Пусть для $[M_l | M | \infty]^r$ -сети выполнены условия теоремы 2. Тогда на любом конечном промежутке времени $[0, T]$ последовательность случайных процессов $\eta^{(n)}(t)$ сходится в равномерной топологии при $n \rightarrow \infty$ к r -мерному процессу Орнштейна – Уленбека $\eta^{(0)}(t)$ в переходном режиме ($\eta^{(0)}(0) = \eta^{(0)}$) с корреляционными характеристиками

$$E\eta^{(0)}(t) = P'(t)\eta^{(0)},$$

$$R^{(0)}(t) = E\eta^{(0)}(t)\eta^{(0)'}(t) - E\eta^{(0)}(t)E\eta^{(0)'}(t) = \Delta(\theta/\mu) - P'(t)\Delta(\theta/\mu)P(t),$$

$$R^{(0)}(s, t) = E\eta^{(0)}(s)\eta^{(0)'}(t) - E\eta^{(0)}(s)E\eta^{(0)'}(t) = R^{(0)}(s)P(t - s), \quad s < t.$$

Заметим, что по определению процесс Орнштейна – Уленбека является процессом Маркова (см. [5], с. 166). Марковское свойство процесса $\eta^{(0)}(t)$ можно доказать, используя критерий из работы [3].

Аппроксимация процессом Орнштейна – Уленбека без условия периодичности

Теперь рассмотрим более общую модель сети с входящими потоками, поступающими на каждый узел сети отдельно. Входной поток $v_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, на i -й узел – неоднородный пуассоновский поток с ведущей функцией $\Lambda_i(t)$. Предположение о периодичности снимается. Алгоритм маршрутизации и параметры обслуживания сохраняются. Такую сеть будем обозначать символом $[\overline{M}_l | M | \infty]^r$.

Для входящих потоков требований введем следующее условие.

Условие 3. Для любого $T > 0 \quad \sup_{t \in [0, T]} |n^{-1} \bar{\Lambda}^{(n)}(nt) - \bar{\lambda}t| = o(n^{-1/2})$,

где $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)'$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, и $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r \neq 0$.

При выполнении условия 3 входящие потоки на каждый узел будут близки к стационарному пуассоновскому потоку с параметрами λ_i в масштабе времени nt . Вместе Условия 1, 3 означают, что сеть функционирует в перегруженном режиме.

Если спектральный радиус матрицы маршрутизации P строго меньше 1, то существует решение уравнения баланса

$$\theta_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^r \theta_j p_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Рассмотрим последовательность случайных процессов

$$\eta^{(n)}(t) = n^{-1/2} (Q^{(n)}(nt) - n(\theta/\mu)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Для процесса $\eta^{(n)}(t)$ имеет место результат, аналогичный теореме 2.

Теорема 3. Пусть для $[\bar{M}_t | M | \infty]^r$ -сети спектральный радиус матрицы маршрутизации P строго меньше 1 и выполнены условия 1–3. Тогда на любом конечном промежутке времени $[0, T]$ последовательность случайных процессов $\eta^{(n)}(t)$ сходится в равномерной топологии при $n \rightarrow \infty$ к r -мерному процессу Орнштейна – Уленбека $\eta^{(0)}(t)$ ($\eta^{(0)}(0) = \eta^{(0)}$) с вектором сноса $A(x) = (P' - I)\Delta(\mu)x$ и матрицей диффузии $B = \Delta(\theta)(P - I) + (P' - I)\Delta(\theta)$.

Заключение

В работе скачкообразный процесс обслуживания требований в сети аппроксимируется непрерывным гауссовским процессом более простой структуры. Все сходимости рассматриваются в равномерной топологии, что дает возможность рассчитывать функционалы, связанные с процессом, и решать задачи оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анисимов В.В., Лебедев Е.А.* Стохастические сети обслуживания. Марковские модели. Киев: Либідь, 1992. 208 с.
2. *Lebedev E.A.* Multi-channel stochastic networks in heavy traffic // *Cybernetics and Systems Analysis*. 2005. No. 2. P. 179–187.
3. *Lebedev E., Livinska G.* Gaussian approximation of multi-channel networks in heavy traffic // *Communications in Computer and Information Science*. Springer, 2013. No. 356. P. 122–130.
4. *Ливинская А.В., Лебедев Е.А.*, Предельная теорема для перегруженных многоканальных сетей // *Кибернетика и системный анализ*. 2012. № 6. С. 106–113.
5. *Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М.* Случайные процессы. Справочник. Киев: Наукова думка, 1983. 366 с.

Ливинская Анна Владимировна, к.ф.-м.н., livinskaav@gmail.com;

Лебедев Евгений Александрович, д.ф.-м.н., профессор; leb@unicyb.kiev.ua

Вероятностные характеристики модели управления запасами с релейным управлением темпом производства и ММР-потоком моментов продаж

К.И. Лившиц, Е.С. Ульянова

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Одной из классических задач теории управления запасами является задача производства и сбыта некоторой однородной продукции. Из работ последнего времени, посвященных этой тематике, укажем, например, работы [1,2]. Целью данной работы является определение асимптотических вероятностных характеристик модели управления запасами с релейным управлением темпом производства и ММР-потоком моментов продаж.

Математическая модель проблемы

В настоящей работе задача производства и сбыта продукции рассматривается при следующих предположениях. Пусть $S(t)$ – количество продукции в момент времени t . Считается, что продукция производится со скоростью $C(S)$, так что за время Δt поступает $C(S(t))\Delta t$ единиц продукции. Накопленная продукция непрерывно реализуется. Величины покупок являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с плотностью распределения $\phi(x)$ и моментами $M\{x\} = a$ и $M\{x^2\} = a_2$.

Моменты продаж образуют дважды стохастический пуассоновский поток с переменной интенсивностью $\lambda(t)$. Процесс $\lambda(t)$ является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и n состояниями $\lambda(t) = \lambda_i$. Такое предположение представляется естественным, так как продажи происходят в принципе в случайные моменты времени, а интенсивность потока продаж с течением времени случайным образом может изменяться. Простейшим примером является изменение количества покупателей в течение дня в продуктовой торговой точке. Пусть переход из состояния в состояние задается матрицей инфинитезимальных характеристик $Q = [q_{ij}]$ ранга $n-1$, где $q_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ и

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} = 0. \quad (1)$$

Пусть $\gamma_i, i = \overline{1, n}$, – собственные значения матрицы Q , $\gamma_n = 0$. В дальнейшем считается, что все собственные значения – простые. Если при $i = \overline{1, n-1}$ $\gamma_i < 0$, то существуют финальные вероятности состояний π_i , являющиеся решением системы уравнений

$$\sum_{i=1}^n q_{ij} \pi_i = 0; \quad (2)$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n = 1. \quad (3)$$

Управление темпом производства продукции является релейным. Устанавливается пороговое значение допустимого запаса продукции S_0 и

$$C(S) = \begin{cases} C_0, & S < S_0, \\ C_1, & S \geq S_1, \end{cases} \quad (4)$$

где $C_1 < C_0$. Выбор управления в виде (4) определяется следующими соображениями. Во-первых, при детерминированной постановке задачи управления производством и сбытом продукции управление вида (4) является оптимальным [3]. Во-вторых, несложно показать, что при постоянном значении $C(S) = C$ средний запас продукции $\bar{S}(t)$ определяется соотношением

$$\bar{S}(t) = S(0) + (C - \lambda_0 a)t,$$

где $\lambda_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ – средняя интенсивность потока покупок, что приводит либо к перепроизводству, либо к неудовлетворенному спросу. Очевидно, что для существования стационарного режима должны выполняться условия

$$C_0 > \lambda_0 a, \quad C_1 < \lambda_0 a. \quad (5)$$

Наконец, возможна ситуация, когда текущий спрос не может быть удовлетворен полностью. В этом случае считается, что $S(t) < 0$.

Плотность распределения количества продукции в стационарном режиме

Обозначим

$$P_i(s, t)ds = P\{s < s(t) \leq s + ds; \lambda(t) = \lambda_i\} \quad (i = \overline{1, n}).$$

Можно показать, что функции $P_i(s, t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial P_i(s, t)}{\partial t} + C(s) \frac{\partial P_i(s, t)}{\partial s} = -\lambda_i P_i(s, t) + \sum_{j=1}^n q_{ji} P_j(s, t) + \lambda_i \int_0^{\infty} P_i(s+x, t) \varphi(x) dx.$$

Рассмотрим далее стационарный случай. Обозначим

$$P_i^0(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(s, t), \quad s < S_0, \quad P_i^1(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(s, t), \quad s \geq S_0. \quad (6)$$

Функции $P_i^j(s)$ будут удовлетворять уравнениям

$$C_1 \dot{P}_i^1(s) = -\lambda_i P_i^1(s) + \sum_{j=1}^n q_{ji} P_j^1(s) + \lambda_i \int_0^{\infty} P_i^1(s+x) \varphi(x) dx, \quad s \geq S_0, \quad (7)$$

и

$$C_0 \dot{P}_i^0(s) = -\lambda_i P_i^0(s) + \sum_{j=1}^n q_{ji} P_j^0(s) + \lambda_i \int_0^{S_0-s} P_i^0(s+x) \varphi(x) dx + \lambda_i \int_{S_0-s}^{\infty} P_i^1(s+x) \varphi(x) dx, \quad s < S_0, \quad (8)$$

с вытекающими из их определения условиями нормировки

$$\int_{-\infty}^{S_0} P_j^0(s) ds + \int_{S_0}^{\infty} P_j^1(s) ds = \pi_j, \quad (9)$$

где π_j – финальная вероятность состояния λ_j , и условиям сшивания на границе S_0

$$C_0 P_i^0(S_0) = C_1 P_i^1(S_0), \quad (10)$$

которые можно получить, проинтегрировав уравнения (7) и (8) по области их определения.

Получить точное решение системы уравнений (7) и (8) при произвольных n и $\varphi(x)$ не удастся. Поэтому в дальнейшем рассматривается случай, когда

$$C_0 = (1 + \theta) \lambda_0 a, \quad C_1 = (1 - \alpha \theta) \lambda_0 a, \quad (11)$$

$\alpha > 0$ и параметр $\theta \ll 1$ (диффузионное приближение). Такое предположение является довольно естественным, так как темп производства $C(s)$ должен быть согласован со средней величиной спроса в единицу времени $\lambda_0 a$ и большие отклонения $C(s)$ от $\lambda_0 a$ должны приводить либо к перепроизводству, либо к дефициту продукции. Для решения уравнений (7), (8) можно воспользоваться методикой, рассмотренной подробно в [4, 5].

Теорема 1. При $\theta \ll 1$

$$P_i(s) = \begin{cases} \pi_i \frac{A_1 \alpha}{2A_2(1+\alpha)} \theta e^{-\frac{A_1}{A_2} \alpha \theta (s-S_0)} + o(\theta), & s \geq S_0, \\ \pi_i \frac{A_1 \alpha}{2A_2(1+\alpha)} \theta e^{-\frac{A_1}{A_2} \theta (S_0-s)} + o(\theta), & s < S_0, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$A_1 = \lambda_0 a, \quad A_2 = \frac{\lambda_0 a_2}{2} - a^2 \sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma_t} \sum_{i=1}^n (\lambda_0 - \lambda_i) R_{it} \sum_{j=1}^n P_{ij} (\lambda_0 - \lambda_j) \pi_j, \quad (13)$$

$R = [R_{ij}]$ – матрица собственных векторов матрицы Q^T , матрица $[P_{ij}] = R^{-1}$, γ_i – ненулевые собственные значения матрицы Q^T .

Плотность распределения количества продукции в стационарном режиме при экспоненциальном распределении покупок

Для оценки точности асимптотических соотношений (12) рассмотрим случай, когда число состояний потока моментов продаж равняется двум: $\lambda(t) = \lambda_1$ или $\lambda(t) = \lambda_2$, а величины покупок имеют экспоненциальное распределение $\varphi(x) = \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}}$. Можно показать, что в этом случае

плотность распределения количества продукции в стационарном режиме имеет вид

$$P_i(s) = \begin{cases} A_{i1} e^{-\gamma_1 s} + A_{i2} e^{-\gamma_2 s}, & s > S_0, \\ B_{i1} e^{-\beta_1 s} + B_{i2} e^{-\beta_2 s}, & s \leq S_0, \end{cases} \quad (14)$$

где γ_1 и γ_2 – положительные корни уравнения

$$f(z) = z(C_1 - \frac{\lambda_1 a}{1+az})(C_1 - \frac{\lambda_2 a}{1+az}) + (q_{11} + q_{22})(C_1 - \frac{\lambda_0 a}{1+az}) = 0,$$

а β_1 и β_2 – положительные корни уравнения

$$f(z) = z(C_0 - \frac{\lambda_1 a}{1-az})(C_0 - \frac{\lambda_2 a}{1-az}) - (q_{11} + q_{22})(C_0 - \frac{\lambda_0 a}{1-az}) = 0.$$

Постоянные A_{ij} и B_{ij} определяются системой уравнений

$$A_{2i} = -\frac{1}{q_{21}}(q_{11} + C_1 \gamma_i - \frac{\lambda_1 a \gamma_i}{1 + a \gamma_i}) A_{1i}, \quad i = 1, 2;$$

$$B_{2i} = -\frac{1}{q_{21}}(q_{11} + \frac{\lambda_1 a \beta_i}{1 - a \beta_i} - C_0 \beta_i) B_{1i}, \quad i = 1, 2;$$

$$\sum_{j=1}^2 B_{kj} \frac{e^{\frac{\beta_j a - 1}{a} S_0}}{\beta_j - 1} + \sum_{j=1}^2 A_{kj} \frac{e^{\frac{1 + a \gamma_j}{a} S_0}}{1 + a \gamma_j} = 0, \quad k = 1, 2$$

и условиями нормировки (9).

На рис. 1 приведены безусловные плотности распределения

$$P(s) = P_1(s) + P_2(s),$$

вычисленные по точным формулам (14) и по приближенным формулам (13) при $\theta = 0.5, 0.1$ и $\alpha = 1$. Параметры $C_0 = (1 + \theta)\lambda_0 a$, $C_1 = (1 - \alpha\theta)\lambda_0 a$, параметры $q_{11} = q_{22} = -5$, $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = 10$, $a = 1$, $S_0 = 0$.

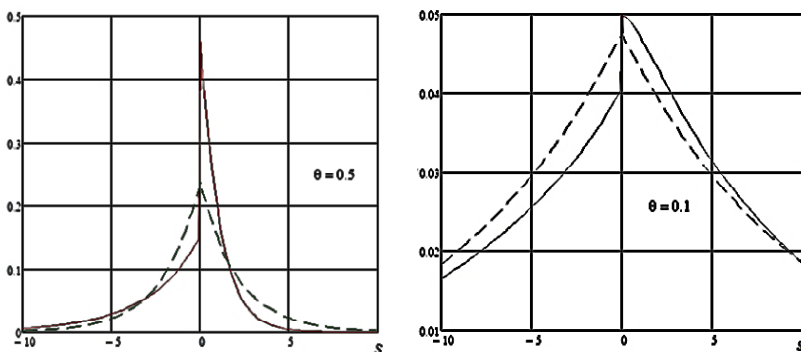


Рис. 1. Плотность распределения количества продукции (сплошные линии) и ее аппроксимация (штриховые линии) для случая экспоненциального распределения

Как видно из приведенных графиков, точность аппроксимации растет с уменьшением θ .

Плотность распределения длительности периода перепроизводства в стационарном режиме

Будем считать, что период перепроизводства продукции наступает, когда запас продукции $s > S_0$. Обозначим через $t_i(s)$ длительность периода перепроизводства, если в начале периода запас продукции равен $s(t)$ и значение интенсивности $\lambda(t) = \lambda_i$. Обозначим через

$$H_i(u, s) = M \left\{ e^{-ut_i(s)} \right\} \quad (15)$$

– условную производящую функцию длительности периода перепроизводства. Функции $H_i(u, s)$ (15) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} -C_1 \frac{\partial H_i(u, s)}{\partial s} = & -(\lambda_i + u)H_i(u, s) + \sum_{j=1}^n q_{ij}H_j(u, s) + \\ & + \lambda_i \int_0^{s-S_0} H_i(u, s-x)\varphi(x)dx + \lambda_i \int_{s-S_0}^{\infty} \varphi(x)dx. \end{aligned} \quad (16)$$

Получить точное решение уравнений (16) не удастся. Поэтому опять рассмотрим асимптотический случай, считая, что $C_1 = (1-\theta)\lambda_0 a$ и $\theta \ll 1$.

Теорема 2. При $\theta \ll 1$

$$H_i(\omega, s) = e^{t_2(\frac{\omega}{\theta^2})\theta(s-S_0)} + O(\theta), \quad (17)$$

где
$$t_2(\omega) = \frac{A_1 - \sqrt{A_1^2 + 4A_2\omega}}{2A_2}$$

и величины A_1 и A_2 определяются соотношениями (13).

При $s > S_0$ случайная величина S имеет распределение

$$P(s|s > S_0) = \frac{P(s)}{P\{s > S_0\}} = \frac{\theta A_1}{A_2} e^{-\frac{\theta A_1}{A_2}(s-S_0)}.$$

Усредняя (17) по вероятностям состояний π_i и по s , получим, что без-

условная производящая функция

$$H(\omega) = \sum_{i=1}^n \pi_i \int_{S_0}^{\infty} H_i(\omega, s) P(s | s > S_0) ds = \frac{\beta}{1 + \sqrt{1 + \beta\omega}},$$

где $\beta = \frac{4A_2}{\theta^2 A_1^2}$. Откуда, вычисляя обратное преобразование Лапласа, получим, что плотность распределения длительности периода перепроизводства имеет вид

$$P(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi\beta t}} e^{-\frac{t}{\beta}} - \frac{2}{\beta} \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{t}{2}}\right). \quad (18)$$

Аналогично выводу соотношения (18) может быть получено соотношение, определяющее плотность распределения длительности периода неудовлетворенного спроса.

Заключение

В работе получены выражения для плотности распределения количества производимой однородной продукции при релейном управлении темпом производства и ММР-потоке моментов продаж продукции при дополнительном предположении, что темп производства «почти совпадает» с темпом продаж. При тех же предположениях получены распределения длительностей периода перепроизводства продукции и периода неудовлетворенного спроса.

Предлагаемая методика расчета статистических характеристик может быть использована для анализа более сложных вариантов управления темпом производства и интенсивностью потока продаж, например, для одновременного учета зависимости интенсивности потока продаж от меняющейся продажной цены продукции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beyer D., Cheng F., Sethi S.P., Taksar M. Markovian demand inventory models. New York: Springer, 2010.
2. Nazarov A., Broner V. Inventory Management System with On/Off Control of Input Product Flow // Communications in Computer and Information Science. 2017. V. 800. P. 370–381.
3. Парев Ю.И. Решение задачи об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара // Известия РАН. Теория и системы управления. 2000. № 2. С. 103–107.

4. *Лившиц К.И., Бублик Я.С.* Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1 (10). С. 66–77.
5. *Лившиц К.И., Бублик Я.С.* Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4 (17). С. 64–73.

Лившиц Климентий Исаакович, д.т.н., профессор, kim47@mail.ru;
Ульянова Екатерина Сергеевна, аспирант, ulyanovaeks@gmail.com

Суммарный объем занятого ресурса в ресурсной системе массового обслуживания $GI^{(v)}/GI^{(n)}/\infty$ с n типами заявок

Е.Ю. Лисовская, А.А. Галилейская

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

В системах массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов нет очередей и отказов в обслуживании [1–3]. Одной из модификаций СМО являются системы с неоднородными приборами [4–6], которые применяются для описания процессов передачи данных в сетях связи.

Кроме того, ввиду неоднородности предоставляемых сетями связи услуг (телефонные звонки, передача текстовых сообщений, медиа-контента, использование интернета), необходимо учитывать объем передаваемой информации. В связи с этим актуальным является разработка новых ресурсных моделей, сформулированных в терминах систем массового обслуживания (СМО), которые бы позволили оценить объем занятого ресурса [7, 8].

В настоящей работе проводится исследование неоднородной ресурсной системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов, неэкспоненциальным обслуживанием и входящими рекуррентным потоком.

Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов и n типами заявок. Заявки поступают в систему согласно рекуррентному потоку с функцией распределения длин интервалов между моментами наступления событий $A(z)$. С вероятностью p_i поступающее требование будет i -го типа ($i = 1, \dots, n$), причем

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Каждое требование мгновенно занимает свободный прибор, где обслуживается в течение случайного времени с функцией распределения $B_i(\tau)$, и случайное количество ресурса с функцией распределения $G_i(y)$ соответствующего типа. Когда обслуживание заканчивается, требова-

ние покидает систему, освобождая прибор и занимаемый ресурс. Количество ресурса и время обслуживания не зависят друг от друга.

Обозначим $V_i(t)$ – суммарный объем занятого ресурса каждого типа в момент времени t , $i = 1, \dots, n$. Ставится задача исследования случайного n -мерного процесса $\{V(t)\}$. Этот процесс не является марковским, поэтому для его исследования применим метод динамического просеивания.

Рассмотрим $n + 1$ осей времени, пронумерованных от 0 до n (рис. 1). Ось под номером 0 будет отображать моменты поступления заявок в систему. Оси $i = 1, \dots, n$ соответствуют i -му типу заявок.

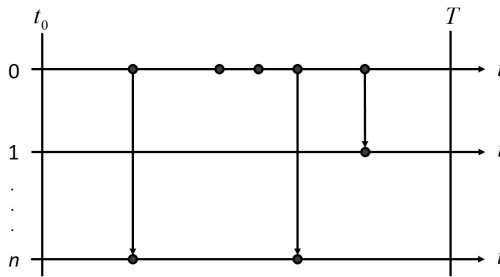


Рис. 1. Просеивание заявок входящего потока

Введем функции $S_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ (динамические вероятности), которые удовлетворяют условию

$$0 \leq S_i(t) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n S_i(t) \leq 1.$$

Предполагаем, что заявка i -го типа, поступающая в систему в момент времени t , может «просеяться» на i -ю ось с вероятностью $S_i(t) = 1 - B(T - t)$, то есть к фиксированному моменту времени T не завершит обслуживание и будет находиться в системе либо не просеется ни на одну из осей с вероятностью

$$S_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^n S_i(t).$$

Обозначим $W_i(t)$ – суммарный объем занятого ресурса i -го типа просеянными на i -ю ось заявками. Нетрудно показать, что

$$P\{V(T) < \mathbf{x}\} = P\{W(T) < \mathbf{x}\}, \quad (1)$$

для любых $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Отметим, что неравенства $V(T) < \mathbf{x}$ подразумевают поэлементное сравнение векторов, т.е. $V_1(T) < x_1, \dots, V_n(T) < x_n$, аналогично, для $W(T) < \mathbf{x}$. Будем использовать равенство (1) для исследования процесса $\{V(t)\}$ с помощью процесса $\{W(t)\}$.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Рассмотрим $n + 1$ -мерный марковский процесс $\{z(t), W(t)\}$, где $z(t)$ – остаточное время от момента времени t до момента наступления следующего события в рекуррентном потоке. Обозначим распределение вероятностей этого процесса:

$$P\{z(t) < z, W(t) < \mathbf{w}\} = P(z, \mathbf{w}, t),$$

для этого распределения по формуле полной вероятности запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(z, \mathbf{w}, t)}{\partial t} = & \frac{\partial P(z, \mathbf{w}, t)}{\partial z} + \frac{\partial P(0, \mathbf{w}, t)}{\partial z} (A(z) - 1) + \\ & + A(z) \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) \left[\int_0^{w_i} \frac{\partial P(0, \mathbf{w} - \mathbf{y}_i, t)}{\partial z} dG_i(y) - \frac{\partial P(0, \mathbf{w}, t)}{\partial z} \right], \end{aligned}$$

с начальным условием

$$P(z, \mathbf{w}, t_0) = \begin{cases} R(z), & \mathbf{w} = \mathbf{0}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_n]$, $\mathbf{y}_i = [0, \dots, y, \dots, 0]$, $R(z)$ – стационарное распределение вероятностей случайного процесса $z(t)$.

Введем частичные характеристические функции:

$$h(z, \mathbf{v}, t) = \int_0^\infty e^{jv_1 w_1} \dots \int_0^\infty e^{jv_n w_n} P(z, d\mathbf{w}, t).$$

Тогда можем записать следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(z, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = & \frac{\partial h(z, \mathbf{v}, t)}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial h(0, \mathbf{v}, t)}{\partial z} \left[A(z) - 1 + A(z) \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) (G_i^*(v_i) - 1) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

с начальным условием

$$h(z, \mathbf{v}, t_0) = R(z), \quad (3)$$

где

$$G_i^*(v) = \int_0^\infty e^{jvy} dG_i(y).$$

Гауссовская аппроксимация

Решение задачи (2), (3) получим с помощью асимптотического анализа в условии растущей интенсивности входящего потока. Представим функцию распределения длин интервалов между моментами наступления событий $A(Nz)$, где $N \rightarrow \infty$ – некоторый теоретический параметр.

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial h(z, \mathbf{v}, t)}{\partial t} &= \frac{\partial h(z, \mathbf{v}, t)}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial h(0, \mathbf{v}, t)}{\partial z} \left[A(z) - 1 + A(z) \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) (G_i^*(v_i) - 1) \right], \end{aligned}$$

с начальным условием (3). Результат асимптотического анализа представим в виде формулировки следующей теоремы.

Теорема. Асимптотическая характеристическая функция случайного процесса $\{z(t), W(t)\}$ имеет вид

$$\begin{aligned} h(z, \mathbf{v}, t) &\approx R(z) \exp \left\{ N\lambda \sum_{i=1}^n jv_i a_1^{(i)} p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \right. \\ &+ N\lambda \sum_{i=1}^n \frac{(jv_i)^2}{2} a_2^{(i)} p_i \int_{t_0}^t S_i(\tau) d\tau + \\ &\left. + N\kappa \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n jv_i a_1^{(i)} p_i jv_m a_1^{(m)} p_m \int_{t_0}^t S_i(\tau) S_m(\tau) d\tau \right\}, \quad (4) \end{aligned}$$

где

$$a_2^{(i)} = \int_0^\infty y^2 dG_i(y), \quad \kappa = \lambda^3 (\sigma^2 - a^2),$$

a и σ^2 – математическое ожидание и дисперсия случайной величины с функцией распределения $A(z)$.

Положим в (4) $z \rightarrow \infty$, $t0 \rightarrow -\infty$, $t = T$, учитывая равенство (1), получим асимптотическую характеристическую функцию стационарного распределения вероятностей n -мерного случайного процесса $\{\mathbf{V}(t)\}$, которая совпадает с характеристической функцией n -мерного гауссовского распределения с параметрами:

– вектором математических ожиданий

$$\mathbf{a} = N\lambda \begin{bmatrix} a_1^{(1)}b_1 & a_1^{(2)}b_2 & \dots & a_1^{(n)}b_n \end{bmatrix},$$

– ковариационной матрицей

$$\mathbf{K} = N \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{K}^{(1)} + \kappa \mathbf{K}^{(2)} \end{bmatrix},$$

где

$$b_i = p_i \int_0^{\infty} (1 - B_i(\tau)) d\tau,$$

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} a_2^{(1)}b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{(2)}b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_2^{(n)}b_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} a_1^{(1)}a_1^{(1)}K_{11} & a_1^{(1)}a_1^{(2)}K_{12} & \dots & a_1^{(1)}a_1^{(n)}K_{1n} \\ a_1^{(2)}a_1^{(1)}K_{21} & a_1^{(2)}a_1^{(2)}K_{22} & \dots & a_1^{(2)}a_1^{(n)}K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(n)}a_1^{(1)}K_{n1} & a_1^{(n)}a_1^{(2)}K_{n2} & \dots & a_1^{(n)}a_1^{(n)}K_{nn} \end{bmatrix},$$

$$K_{im} = p_i p_m \int_0^{\infty} (1 - B_i(\tau))(1 - B_m(\tau)) d\tau.$$

Заключение

Проведено исследование неоднородной ресурсной системы массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком. С помощью метода асимптотического анализа показано, что асимптотическое многомерное стационарное распределение суммарных объемов занятых ресурсов совпадает с многомерным гауссовским.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. 520 с.
2. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2015. 240 с.
3. Auria B.D. M/M/ ∞ queues in semi-Markovian random environment // Queueing Systems. 2008. V. 58. No. 3. P. 221–237.
4. Моисеева С.П., Панкратова Е.В., Убонова Е.Г. Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 2 (35). С. 46–53.
5. Моисеева С.П., Панкратова Е.В. Исследование многопродуктовой немарковской системы массового обслуживания методом динамического просеивания // Distributed computer and communication network: control, computation, communications: Proceedings of International Conference: 7–10 октября. М.: Техносфера, 2013. С. 386–393.
6. Pankratova E., Moiseeva S. Queueing System GI|GI| ∞ with n Types of Customers // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 216–225.
7. Вихрова О.Г., Сопин Э.С. Анализ показателей качества сети LTE с помощью систем массового обслуживания с ограниченным ресурсом и случайными требованиями // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 2. № 11. С. 185–191.
8. Naumov V., Samouylov K., Sopin E., Andreev S. Two approaches to analysis of queueing systems with limited resources // Ultra-Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops Proceedings. IEEE, Piscataway, NJ, USA, 2014. P. 485–488.

Галилейская Анастасия Александровна, студентка, lusta.nastya@mail.ru;

Лисовская Екатерина Юрьевна, аспирантка, ekaterina_lisovs@mail.ru

ших за время T на интервале $[0, T]$ при условии, что в начальный момент времени $t=0$, система свободна.

Метод предельной декомпозиции

Простейший с параметром λ входящий поток событий по полиномиальной схеме с вероятностями $\frac{1}{N}$ делим на N независимых простейших потоков с параметром $\frac{\lambda}{N}$. Выполняя декомпозицию исходной системы с неограниченным числом приборов, рассмотрим совокупность N независимых однолинейных систем с потерей поступивших заявок, когда прибор занят. Так как d -поток исходной системы с неограниченным числом приборов является предельной при $N \rightarrow \infty$ суммой N независимых d -потоков однолинейных систем с потерей, тогда найдем вероятностные характеристики этих (для однолинейных систем) потоков, а затем суммированием найдем характеристики d -потока для системы с неограниченным числом приборов.

Обозначим $n(t)$ число событий d -потока, наступивших в однолинейной системе с потерями за время t на интервале $[0, t]$, при условии, что в начальный момент $t = 0$ система свободна.

Обозначим состояние прибора

$$k(t) = \begin{cases} 0 - \text{прибор свободен,} \\ 1 - \text{прибор занят,} \end{cases}$$

$z(t)$ – остаточное время обслуживания заявки, когда прибор занят.

Обозначим вероятности

$$P_0(n, t) = P\{k(t) = 0, n(t) = n\}, \quad (1)$$

$$P_1(n, z, t) = P\{k(t), z(t) < z, n(t) = n\}.$$

Введем частичные характеристические функции:

$$H_0(u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P_0(n, t), \quad H_1(u, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P_1(n, z, t).$$

Из системы дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей (1) запишем систему для этих функций [10], получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_0(u, t)}{\partial t} &= -\frac{\lambda}{N} H_0(u, t) + \frac{\partial H_1(u, 0, t)}{\partial z}, \\
\frac{\partial H_1(u, z, t)}{\partial z} &= \frac{\partial H_1(u, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(u, 0, t)}{\partial z} + \\
&+ \frac{\lambda}{N} B(z) H_0(u, t) + \gamma(1 - e^{ju}) H_1(u, z, t),
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\left. \frac{\partial H_1(u, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial H_1(u, 0, t)}{\partial z}$. Начальные условия системы (2) имеют вид $H_0(u, 0) = 1$, $H_1(u, z, 0) = 0$. Решение $\{H_0(u, t), H_1(u, z, t)\}$ задачи Коши (2) будем искать в виде

$$\begin{aligned}
H_0(u, t) &= 1 + \frac{1}{N} F_0(u, t) + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad F_0(u, 0) = 0, \\
H_1(u, z, t) &= \frac{1}{N} F_1(u, z, t) + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad F_1(u, z, 0) = 0.
\end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в систему (2), получим систему для $F_0(u, t)$, $F_1(u, z, t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_0(u, t)}{\partial t} &= h(u, t) - \lambda, \\
\frac{\partial F_1(u, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial F_1(u, z, t)}{\partial z} &= a F_1(u, z, t) + \lambda B(z) - h(u, t),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $h(u, t) = \frac{\partial F_1(u, 0, t)}{\partial z}$, $a = (e^{ju} - 1)\gamma$. Запишем решение второго уравнения системы (3) с учетом $F_1(u, z, 0) = 0$:

$$F_1(u, z, t) = e^{at} \int_0^t e^{-ax} [\lambda B(z + t - x) - h(u, x)] dx. \tag{4}$$

Тогда для функции $h(u, t)$ можем записать:

$$h(u, t) = e^{at} \int_0^t e^{-ax} \lambda B'(t - x) dx = \lambda \int_0^t e^{ay} dB(y), \tag{5}$$

где сделали замену переменных $t - x = y$. Обозначим $\lim_{z \rightarrow \infty} F(u, z, t) =$

$= F_1(u, t)$. В (4) выполним предельный переход $z \rightarrow \infty$, с учетом (5) и обозначения $a = (e^{ju} - 1)\gamma$, при $t = T$ получим

$$F_1(u, T) = \frac{\lambda}{(e^{ju} - 1)\gamma} \left\{ e^{(e^{ju} - 1)\gamma T} (1 - B(T)) - 1 + \int_0^T e^{(e^{ju} - 1)\gamma x} dB(x) \right\}. \quad (6)$$

Запишем выражения для $F_0(u, T)$, решая первое уравнение системы (3):

$$F_0(u, T) = -\lambda T + \lambda \int_0^T (T - x) e^{(e^{ju} - 1)\gamma x} dB(x). \quad (7)$$

Обозначим $F(u, T) = F_0(u, T) + F_1(u, T)$, складывая (6) и (7), имеем

$$F(u, T) = -\lambda T + \lambda \int_0^T (T - x) e^{(e^{ju} - 1)\gamma x} dB(x) + \frac{\lambda}{(e^{ju} - 1)\gamma} \left\{ e^{(e^{ju} - 1)\gamma T} (1 - B(T)) - 1 + \int_0^T e^{(e^{ju} - 1)\gamma x} dB(x) \right\}. \quad (8)$$

Тогда для функции $H(u, T)$ можем записать

$$H(u, T) = H_0(u, T) + H_1(u, T) = 1 + \frac{1}{N} F(u, T) + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Здесь $H(u, T)$ – характеристическая функция числа событий d -потока, наступивших за время T на интервале $[0, T]$ в однолинейной системе с потерями. Обозначим $\hat{H}(u, T)$ характеристическую функцию числа событий суммарного d -потока, наступивших за время T на интервале $[0, T]$ в исходной системе с неограниченным числом приборов. Выражение для $\hat{H}(u, T)$ будет иметь следующий вид:

$$\hat{H}(u, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N} F(u, T) \right)^N = \exp\{F(u, T)\}, \quad (9)$$

где $F(u, T)$ определяется выражением (8). Полученные равенства (8), (9) решают поставленную задачу исследования d -потока в системе с неограниченным числом приборов, рекуррентным обслуживанием с произвольной функцией распределения $B(x)$ и простейшим входящим пото-

ком. Изложенный здесь метод предельной декомпозиции можно применять для систем только с пуассоновским входящим потоком. При других классах входящих потоков (рекуррентных, коррелированных) этот метод неприменим, так как разделенные потоки стохастически зависимы. Поэтому для решения поставленной задачи предлагается другой подход, лишенный этого недостатка.

Метод марковского суммирования

Для рассматриваемого d -потока обозначим $\xi(t)$ при $t \in [0, T]$ – число событий d -потока, сформированных на интервале $[0, T]$ (точнее на интервале $[t, T]$) заявкой входящего потока, поступившей в систему в момент времени t . Также обозначим $n(t)$ – суммарное число событий d -потока, сформированных на интервале $[0, T]$ всеми заявками входящего потока, поступившими в систему за время t на интервале $[0, t]$.

Очевидно, что при $t=T$ значение $n(T)$ равно числу событий d -потока, наступивших за время T на интервале $[0, T]$, при условии, что в начальный момент времени $t=0$ система свободна. При этом $n(t)$ не равно числу событий d -потока, наступивших за время t на интервале $[0, t]$, так как события d -потока, формируемые заявками входящего потока, наступают на всем интервале $[0, T]$, в том числе и после момента t . Но исследование процесса $n(t)$ необходимо для нахождения распределения вероятностей величины $n(T)$, равной суммарному числу событий d -потока, наступивших на интервале $[0, T]$.

Так как случайные величины $\xi(t)$ для различных моментов t поступления заявок входящего потока независимы, а случайный процесс $n(t)$ марковский, то предлагаемый подход будем называть методом марковского суммирования указанных случайных величин $\xi(t)$.

Для заявки входящего потока, поступившей в систему в момент времени $t \in [0, T]$, обозначим $r(i, t) = P\{\xi(t) = i\}$ и найдем это распределение вероятностей. Поступившие в систему заявки условно можно разделить на два класса (рис. 2).

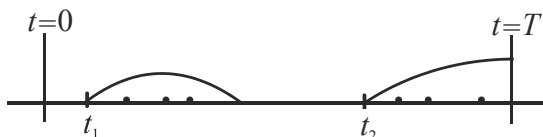


Рис. 2. Схема наступлений событий в d -потоке

На оси времени t отмечены границы интервала $[0, T]$ и показаны моменты t_1 и t_2 поступления двух заявок входящего потока. Для заявки, поступившей в момент времени t_1 , время обслуживания заканчивается до момента $t=T$; для заявки входящего потока, поступившей в момент t_2 , время обслуживания заканчивается после момента T . В первом случае все события d -потока, сформированные соответствующей заявкой, принадлежат интервалу $[0, T]$. Для заявки второго типа интервалу $[0, T]$ принадлежат только те события d -потока, которые наступают на интервале $[t, T]$. При фиксированном значении x времени обслуживания заявки первого типа число событий d -потока, формируемые этой заявкой, является пуассоновским с параметром γx . Для заявки второго типа параметр пуассоновского распределения равен $\gamma(T-t)$. По формуле полной вероятности для распределения вероятностей $r(i, T)$ можем записать

$$r(i, t) = \int_0^{T-t} \frac{(\gamma x)^i}{i!} e^{-\gamma x} dB(x) + (1 - B(T-t)) \frac{(\gamma(T-t))^i}{i!} e^{-\gamma(T-t)}, \quad (10)$$

а его характеристическую функцию представить в виде

$$\begin{aligned} g(u, t) &= M\{e^{ju\zeta(t)}\} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} r(i, t) = \\ &= \int_0^{T-t} \exp\{(e^{ju} - 1)\gamma x\} dB(x) + (1 - B(T-t)) \exp\{(e^{ju} - 1)\gamma(T-t)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для марковского процесса $n(t)$ обозначим $P(n, t) = P\{n(t) = n\}$ и запишем равенства: $P(n, t + \Delta t) = P(n, t)(1 - \lambda \Delta t) + \lambda \Delta t \sum_{i=0}^n P(n-i, t) r(i, t) + o(\Delta t)$, из которых можем записать для характеристической функции

$$H(u, t) = M\{e^{jun(t)}\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(n, t)$$

уравнение $\frac{\partial H(u, t)}{\partial t} = \lambda H(u, t)(g(u, t) - 1)$. Совместно с начальным условием $H(u, 0) = 1$ это уравнение определяет вид указанной характеристической функции при $t = T$:

$$H(u, T) = \exp\left\{\lambda \int_0^T (g(u, t) - 1) dt\right\} = \exp\{G(u, T)\}, \quad (12)$$

где $g(u, t)$ определяется выражением (11). Найденная характеристическая функция (12) так же как и (9), определяют одно и то же распределение вероятностей $P(n, T)$ числа событий d -потока, наступивших за время T на интервале $[0, T]$ в системе с неограниченным числом приборов, рекуррентным обслуживанием и простейшим входящим потоком. Естественно, что эти функции должны совпадать. Убедимся в этом.

Сравнение характеристических функций (9) и (12)

Характеристические функции (9) и (12) имеют вид экспонент от $F(u, T)$ и $G(u, T)$ соответственно. Функция $F(u, T)$, определяемая равенством (8), имеет вид

$$F(u, T) = -\lambda T + \lambda \int_0^T (T-x) e^{ax} dB(x) + \frac{\lambda}{a} \left\{ e^{aT} (1-B(T)) - 1 + \int_0^T e^{ax} dB(x) \right\}.$$

Функцию $G(u, T)$ перепишем, применяя обозначение $a = (e^{ju} - 1)\gamma$ и учитывая выражение (11) для $g(u, t)$:

$$G(u, T) = -\lambda T + \lambda \int_0^T \left\{ (1-B(T-t)) e^{a(T-t)} + \int_0^{T-t} e^{ax} dB(x) \right\} dt.$$

В последнем выражении выполним замену $T-t=y$, получим

$$G(u, T) = -\lambda T + \lambda \int_0^T (T-x) e^{ax} dB(x) + \frac{\lambda}{a} \left\{ (1-B(T)) e^{aT} - 1 + \int_0^T e^{ax} dB(x) \right\}. \quad (14)$$

Так как функции $F(u, T)$ и $G(u, T)$ совпадают, то совпадают и характеристические функции событий d -потока, полученные двумя разными способами.

Заключение

Как было указано выше, метод предельной декомпозиции применяется только для систем с пуассоновским входящим потоком, в то время как предлагаемый метод марковского суммирования, рассмотренный для этой системы, можно успешно обобщить (в отличие от метода предельной декомпозиции) для исследования d -потоков в системах с потоками более общего вида, такими, как рекуррентные или MMPP-потоки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бочаров П.П., Печенкин А.В. Теория массового обслуживания: учебник. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
2. Мусеев А.Н., Назаров А.А. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2015. 240 с.
3. Даммер Д.Д. Математическая модель страховой компании в виде системы массового обслуживания с неограниченным количеством приборов с учетом единовременных страховых выплат // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2016). Материалы XV Международной конференции имени А.Ф. Терпугова. 2016. С. 18–23.
4. Даммер Д.Д. Исследование общей суммы единовременных страховых выплат в модели с ограниченным страховым полем // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками. Материалы V Международной молодежной научно-практической конференции. 2016. С. 51–56.
5. Жидкова Л.А., Мусеева С.П. Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторным обращением к блокам // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322. № 6. С. 5–9.
6. Balsamo S., De Nitti Persone V., Inverardi P. A review on queueing network models with finite capacity queues for software architectures performance prediction // Performance Evaluation. 2003. V. 51. Iss. 2. P. 269–288.
7. Borst S., Mandelbaum A., Reiman M.I. Dimensioning large call centers // Operations Research. 2004. V. 52. P. 17–34.
8. Brian H.F., Adan I.J.B.F. An infinite-server queue influenced by a semi-Markovian environment // Queueing System. 2009. V. 61. P. 65–84.
9. Dammer D.D. Research of mathematical model of insurance company in the form of queueing system with unlimited number of servers considering “implicit advertising” // Communications in Computer and Information Science. 2015. Т. 564. P. 163–174.
10. Назаров А.А., Терпугов. А.Ф. Теория массового обслуживания: учебное время. Томск: Изд-во НТЛ, 2010. 228 с.

Даммер Диана Дамировна, к.ф.-м.н., доцент, di.dammer@yandex.ru:

Назаров Анатолий Андреевич, д.т.н., профессор, nazarov.tsu@gmail.com

Распределение вероятностей состояний RQ-системы M|M|1 с конфликтами заявок¹

А.А. Назаров¹, Е.В. Капустин²

¹ Томский государственный университет, г. Томск, Россия

² Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Россия

В системе массового обслуживания с источником повторных вызовов (ИПВ) (RQ-системе) заявка, обнаружив прибор занятым, уходит в ИПВ (на орбиту) и через некоторое случайное время повторяет попытку обслуживания.

Обзор работ по RQ-системам приведен в [1]. Исследование RQ-систем производится, как правило, асимптотическими методами [2–4], получение точных результатов возможно крайне редко. В связи с этим RQ-системы, для которых удастся найти вероятности состояний, представляют несомненный интерес.

Математическая модель

Рассмотрим следующую RQ-систему: 1) имеется один обслуживающий прибор; 2) если на прибор, занятый обслуживанием заявки, из входящего потока или с орбиты поступает другая заявка, то обе уходят на орбиту (между заявками, одновременно оказавшимися на приборе, возникает конфликт).

Пусть входящий поток заявок простейший интенсивности λ , время обслуживания заявки экспоненциальное с параметром μ , время задержки заявки на орбите экспоненциальное с параметром σ .

Число заявок в системе (и на приборе, и на орбите) в момент времени t обозначим $i(t)$, число состояний прибора – $n(t)$, то есть

$$n(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Обозначим $P(n(t)=n, i(t)=i) = P_n(i, t)$ – вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии n и всего в системе i зая-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00277.

вок. Предполагая существование стационарного режима [5], найдем финальные вероятности $P_n(i) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(i, t)$, $n = 0, 1$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

Уравнения Колмогорова

Для финальных вероятностей имеем систему разностных уравнений

$$\begin{cases} -(\lambda + i\sigma)P_0(i) + \mu P_1(i+1) + \lambda P_1(i-1) + (i-1)\sigma P_1(i) = 0, \\ -(\lambda + \mu + (i-1)\sigma)P_1(i) + \lambda P_0(i-1) + i\sigma P_0(i) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$i = 2, 3, 4, \dots$$

При $i = 1$ и $i = 0$ соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{cases} -(\lambda + \sigma)P_0(1) + \mu P_1(2) = 0, \\ -(\lambda + \mu)P_1(1) + \lambda P_0(0) + \sigma P_0(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

и
$$-\lambda P_0(0) + \mu P_1(1) = 0. \quad (3)$$

Кроме того, имеем очевидное условие

$$P_1(0) = 0. \quad (4)$$

Заметим, что формально при $i = 1$ система (1) принимает вид (2), поэтому можно считать, что (1) выполняется при $i = 1, 2, 3, \dots$.

Покажем, что решение системы (1) – (4) можно получить в явном виде. Складывая уравнения в (1), получаем

$$\mu P_1(i+1) - \lambda P_0(i) - \lambda P_1(i) = \mu P_1(i) - \lambda P_0(i-1) - \lambda P_1(i-1).$$

Аналогично, из (2) и (3) с учетом (4) имеем

$$\mu P_1(2) - \lambda P_0(1) - \lambda P_1(1) = \mu P_1(1) - \lambda P_0(0) - \lambda P_1(0),$$

$$\mu P_1(1) - \lambda P_0(0) - \lambda P_1(0) = 0.$$

Следовательно, если $W(i) = \mu P_1(i) - \lambda P_0(i-1) - \lambda P_1(i-1)$, то

$$W(i+1) = W(i) = \dots = W(2) = W(1) = 0,$$

то есть

$$W(i) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом, одно из уравнений в (1) можно заменить на

$$\mu P_1(i) - \lambda P_0(i-1) - \lambda P_1(i-1) = 0. \quad (5)$$

Введем обозначения $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, $\beta = \frac{\sigma}{\mu}$. Первое уравнение в (1) можно представить в виде

$$-(\rho + i\beta)P_0(i) + P_1(i+1) + \rho P_1(i-1) + (i-1)\beta P_1(i) = 0.$$

Из (5) имеем

$$P_1(i+1) = \rho(P_0(i) + P_1(i)),$$

отсюда $-i\beta P_0(i) + \rho P_1(i) + \rho P_1(i-1) + (i-1)\beta P_1(i) = 0$.

В итоге система (1) принимает вид

$$\begin{cases} -i\beta P_0(i) + (i\beta + \rho - \beta)P_1(i) + \rho P_1(i-1) = 0, \\ P_1(i) = \rho(P_0(i-1) + P_1(i-1)), \end{cases} \quad (6)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots$$

Характеристическая функция

Введем частичные характеристические функции $H_n(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} P_n(i)$, $n = 0, 1$ (здесь $j = \sqrt{-1}$). Используя условие $P_1(0) = 0$, из (6) получаем

$$j\beta H'_0(u) - j\beta H'_1(u) + (\rho e^{ju} + \rho - \beta)H_1(u) = 0; \quad (7)$$

$$H_1(u) = \rho e^{ju} (H_0(u) + H_1(u)). \quad (8)$$

Рассмотрим характеристическую функцию

$$H(u) = H_0(u) + H_1(u).$$

Из (8) имеем

$$H_1(u) = \rho e^{ju} H(u),$$

следовательно,

$$H_0(u) = (1 - \rho e^{ju}) H(u),$$

поэтому (7) принимает вид

$$\beta(1 - 2\rho e^{ju})H'(u) = j(\rho e^{ju} + \rho + \beta)\rho e^{ju} H(u). \quad (9)$$

Интегрируя уравнение (9) с начальным условием

$$H(0) = 1,$$

получаем
$$H(u) = \left(\frac{1 - 2\rho}{1 - 2\rho e^{ju}} \right)^s e^{-a(e^{ju} - 1)}, \quad (10)$$

где
$$s = \frac{1 + 2\rho + 2\beta}{4\beta}, \quad a = \frac{\rho}{2\beta}.$$

Условие существования стационарного режима в рассматриваемой системе имеет вид [5]

$$2\rho < 1,$$

и если это условие выполняется, то функция (10) непрерывна на всей числовой прямой.

Заметим, что первый множитель в (10) является характеристической функцией отрицательного биномиального распределения (распределения Паскаля), но второй при $a > 0$ характеристической функцией не является, поэтому представить обратное преобразование Фурье функции (10) в виде свертки их преобразов нельзя.

Распределение вероятностей

Функция $H(u)$ является характеристической функцией распределения вероятностей состояний

$$P(i) = P_0(i) + P_1(i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Из второго уравнения системы (6) при $i = 1, 2, 3, \dots$ имеем

$$P_1(i) = \rho P(i - 1),$$

$$P_0(i) = P(i) - \rho P(i - 1),$$

поэтому, имея вероятности $P(i)$, получим, если в этом будет необходимость, и вероятности $P_0(i)$ и $P_1(i)$.

Осталось найти $P(i)$. Имеем

$$P(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ju i} H(u) du,$$

то есть
$$P(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ju i} \left(\frac{1 - 2\rho}{1 - 2\rho e^{ju}} \right)^s e^{-a(e^{ju} - 1)} du. \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что интеграл в правой части (11) можно представить в виде контурного интеграла

$$P(i) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^{i+1}} \left(\frac{1-2\rho}{1-2\rho z} \right)^s e^{-a(z-1)} dz.$$

Если выполняется условие существования стационарного режима $2\rho < 1$, то внутри окружности $|z|=1$ подынтегральная функция имеет единственную особую точку $z=0$ – полюс порядка $(i+1)$. Вычисляя интеграл с помощью теоремы о вычетах [6], получаем

$$P(i) = (1-2\rho)^s e^a \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \frac{s(s+1)\dots(s+k-1)}{k!(i-k)!} (2\rho)^k a^{i-k}, \quad (12)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

Заключение

Для RQ-системы $M|M|1$ с конфликтами заявок в явном виде получены финальные вероятности состояний. Это бывает крайне редко, что и определяет ценность этого результата.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Retrial queue systems. A computational approach. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 332 p.
2. *Судыко Е.А., Назаров А.А.* Исследование марковской RQ-системы с конфликтами заявок и простейшим входящим потоком // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 3(12). С. 97–106.
3. *Любина Т.В., Назаров А.А.* Исследование марковской динамической RQ-системы с конфликтами заявок // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 3(12). С. 73–84.
4. *Любина Т.В., Назаров А.А.* Исследование немарковской динамической RQ-системы с конфликтами заявок // Вестник КемГУ. 2012. № 1(49). С. 38–44.
5. *Назаров А.А., Шохор С.Л.* Эргodicность цепей Маркова с ленточными графами и их применение к задачам анализа условий существования стационарных режимов в сетях связи с динамическими протоколами случайного множественного доступа // Проблемы передачи информации. 2001. № 2. С. 3–16.
6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

Капустин Евгений Викторович, к.т.н., доцент, kapustin_ev@mail.ru;

Назаров Анатолий Андреевич, д.т.н., профессор, nazarov.tsu@gmail.com

Исследование системы $MMPP|G|_{\infty}$ с бесконечным значением среднего времени обслуживания

А.А. Назаров, Е.Е. Худяшова

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Системы массового обслуживания с бесконечным числом приборов представляют собой эффективный математический инструмент для исследования широкого круга реальных систем [1, 2]. Основными методами их исследования являются метод многомерных цепей Маркова и метод дополнительной переменной [3]. В тех случаях, когда не удаётся найти характеристики системы в явном виде, используют асимптотические методы [4–6].

Потоки в реальных системах, как правило, не являются пуассоновскими, ординарными или потоками без последствия. В результате многих исследований было получено, что использование моделей с пуассоновскими потоками приводит к искажению характеристик функционирования системы. В работах [7, 8] было показано, что наиболее адекватными моделями таких систем являются $MMPP$ -, MAP -, $VMAP$ -потоки. Поэтому исследование систем с неограниченным числом приборов и входящим модулированным марковским потоком является актуальной задачей.

В данной работе проводится исследование системы с неограниченным числом приборов, произвольной функцией распределения времени обслуживания с бесконечным значением среднего времени обслуживания, на вход которой поступает марковский модулированный поток.

1. Математическая модель

Рассмотрим систему массового обслуживания (см. рис.1), на вход которой поступает марковский модулированный пуассоновский поток заявок ($MMPP$ -поток), заданный матрицей инфинитезимальных характеристик Q и диагональной матрицей Λ условных интенсивностей λ_k . Продолжительности обслуживания заявок стохастически независимы, одинаково распределены и имеют функцию распределения $B(x)$, для которой выполняется равенство

$$\int_0^{\infty} (1 - B(x)) dx = \infty. \quad (1)$$

Поступающая заявка занимает любой из свободных приборов. Завершив обслуживание, заявка покидает систему. При этом полагаем, что в начальный момент времени система свободна.

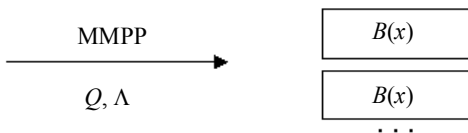


Рис. 1. Система массового обслуживания ММРР $|GI|_{\infty}$

Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t ; $k(t)$ – цепь Маркова, управляющая ММРР-поток.

Чтобы исследовать такую систему массового обслуживания, воспользуемся методом просеянного потока [5]. Предлагаемый метод позволит свести проблему исследования немарковской системы обслуживания с неограниченным числом приборов к задаче анализа нестационарного марковизируемого потока.

Метод просеянного потока

Обозначим $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших за время t на интервале $[0, t]$. Тогда $P(k, n, t) = P\{k(t) = k, n(t) = n\}$ – распределение вероятностей числа занятых приборов просеянного потока в момент времени t . Доказано [5], что выполняется равенство

$$P\{k(T) = k, i(T) = m\} = P\{k(T) = k, n(T) = m\}, \quad m = \overline{0, \infty}.$$

Поэтому для нахождения распределения вероятностей $P\{k(T) = k, i(T) = i\}$ числа i занятых приборов в системе в момент времени $t = T$ достаточно найти распределение вероятностей числа $n(t)$ событий просеянного потока, наступивших за время t , и положить $t = T$.

Обозначим $S(t)$ – вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в момент времени $t \in [0; T]$, будет находиться в системе в момент времени $t = T$, занимая один из её приборов:

$$S(t) = 1 - B(T - t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

Распределение вероятностей числа занятых приборов удовлетворяет системе дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\partial P(k, n, t) / \partial t = \lambda_k S(t) (P(k, n-1, t) - P(k, n, t)) + \sum_v P(v, n, t) q_{vk}.$$

Начальное условие для решения $P(k, n, t)$ в момент времени t_0 запишем в виде $P(k, n, 0) = \begin{cases} R(k), & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{если } n > 0, \end{cases}$ где $R(k)$ – стационарное распределение вероятностей значений цепи Маркова $k(t)$.

Составим систему уравнений, определяющих частичные характеристические функции $H(k, u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(k, n, t)$, где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Получим следующее уравнение:

$$\begin{cases} \partial H(k, u, t) / \partial t = \lambda_k H(k, u, t) S(t) (e^{ju} - 1) + \sum_v H(v, u, t) q_{vk}, \\ H(k, u, 0) = R(k). \end{cases} \quad (3)$$

Для дальнейшего удобства введём векторы $H(u, t)$ и R с компонентами $H(k, u, t)$ и $R(k)$ соответственно.

Математическое ожидание числа занятых приборов

Обозначим $\partial H(u, t) / \partial u|_{u=0} = jm(t)$, где $m(t)$ – вектор частных первых моментов. Тогда (3) примет вид

$$\partial m(t) / \partial t = m(t)Q + RS(T)\Lambda.$$

Умножим предыдущее равенство на единичный вектор-столбец E , в силу равенства (2) и после замены $t=T$ получим выражение для определения математического ожидания числа занятых приборов:

$$m(T)E = \kappa \int_0^T (1 - B(x)) dx, \quad \text{где } \kappa = R\Lambda E. \quad (4)$$

Дисперсия числа занятых приборов системы

Введём векторную характеристическую функцию $H_2(u, t)$ числа событий просеянного потока, наступивших за время t на интервале $[0, t]$:

$$H(u, t) = H_2(u, t) \exp \left\{ j u \kappa \int_0^t S(x) dx \right\}.$$

Подставим это выражение в систему (3) и получим

$$\partial H_2(u, t) / \partial t = H_2(u, t) \left[Q + (e^{ju} - 1) \Lambda S(t) - j u \kappa S(t) \right]. \quad (5)$$

Продифференцируем это равенство по u и, введя обозначение $\partial H_2(u, t) / \partial u|_{u=0} = j m_0(t)$, где $m_0(t)$ – вектор центрированных частичных первых моментов числа заявок в системе, получим

$$\begin{cases} \partial m_0(t) / \partial t = m_0(t) Q + R (\Lambda - \kappa I) S(t), \\ m_0(0) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Несложно убедиться, что $m_0(t)E = 0$. Разложим функцию $H_2(u, t)$ в ряд: $H_2(u, t) = R + j u m_0(t) + ((ju)^2 / 2) d(t) + o(u^3)$ и подставим это равенство в (5). Запишем отдельно выражение для одинаковых степеней ju и $(ju)^2$:

$$\begin{aligned} m'_0(t) &= m_0(t) Q + R (\Lambda - \kappa I) S(t), \\ d'(t) &= d(t) Q + 2 m_0(t) (\Lambda - \kappa I) S(t) + R \Lambda S(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где $d(t)$ – вектор дисперсий центрированного процесса. Умножим справа (7) на единичный вектор-столбец E и получим

$$d(t)E = \kappa \int_0^t S(x) dx + 2 \int_0^t m_0(x) [\Lambda - \kappa I] E S(x) dx. \quad (8)$$

Основной проблемой для нахождения аналитического выражения для дисперсии является то, что вектор-функция $m_0(x)$ в уравнении (8) неизвестна. Можно показать, что решение $m_0(x)$ системы (6) неоднородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$m_0(t) = \left[\int_0^t S(x) R (\Lambda - \kappa I) (A^{-1}(x))^T dx \right] A^T(t), \text{ где } A(x) = \text{diag} [x_i e^{k_i x}]. \quad (10)$$

Тогда запишем уравнение для дисперсии (8) в момент времени $t = T$.

$$d(T)E = m(T) + 2 \int_0^T \int_0^x S(y) R (\Lambda - \kappa I) (A^{-1}(y))^T (\Lambda - \kappa I) E dy S(x) dx. \quad (11)$$

На основе полученных математического ожидания (4) в момент времени $t = T$ и дисперсии (11) построим гауссовскую аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок в системе $MMPP|GI|_{\infty}$.

Дискретная гауссовская аппроксимация дискретного распределения вероятностей $P(i, T)$ числа заявок в системе

Дадим следующее определение. Дискретной гауссовской аппроксимацией $P_1(i, T)$ нестационарного (в силу условия (1)) распределения вероятностей $P(i, T)$ числа $i(T)$ заявок в момент времени $t = T$ в системе

$MMPP|GI|^\infty$ будем называть распределение вероятностей $P_1(i, T)$, определяемое равенством

$$P_1(i, T) = (G(i + 0.5, T) - G(i - 0.5, T)) [1 - G(-0.5, T)]^{-1}; \quad (12)$$

где $G(x, T)$ – функция гауссовского распределения с параметрами, определяемыми математическим ожиданием $m(T)E$ из (4) и дисперсией $d(T)E$ из (11) числа заявок в системе.

Для оценки точности предлагаемой аппроксимации будем применять расстояние Колмогорова Δ , определяемое равенством

$$\Delta = \max_{0 \leq i < \infty} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (P(n, T) - P_1(n, T)) \right|. \quad (24)$$

При нахождении значений точности Δ оценку исходного нестационарного распределения вероятностей $P(i, T)$ найдём, применяя имитационное моделирование системы $MMPP|GI|^\infty$ при заданных значениях матрицы инфинитезимальных характеристик Q и матрицы условных интенсивностей Λ :

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & -0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 & -0.9 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

При этом интенсивность входящего потока $\lambda = 10$.

Функцию распределения $B(x)$ времени обслуживания заявок, удовлетворяющую свойству (1), возьмём в виде $B(x) = x^\gamma / (1 + x^\gamma)$, $0 < \gamma \leq 1$.

Расстояние Колмогорова между результатами имитационного моделирования и гауссовской аппроксимацией

γ	T				
	1	5	10	20	50
1	0.101	0.036	0.025	0.019	0.01
0,5	0.113	0.043	0.030	0.021	0.010
0,25	0.118	0.046	0.034	0.023	0.016

Будем считать, что нас удовлетворяет точность $\Delta < 0.05$. Тогда, как видно из результатов численного моделирования, областью применимости гауссовской дискретной аппроксимации является значение параметра времени $T \geq 5$, при котором расстояние Колмогорова Δ даёт значение меньше 0.05.

Заключение

Рассматривается система массового обслуживания $MMPP|GI|_{\infty}$ с неограниченным числом приборов и бесконечным значением среднего времени обслуживания. В нестационарном режиме найдены среднее значение и дисперсия числа приборов, занятых в системе в произвольный момент времени $t = T > 0$ при условии, что в начальный момент $t = 0$ система свободна.

Для системы предложено использование гауссовской аппроксимации распределения вероятностей числа занятых приборов, с помощью имитационного моделирования установлена область её применимости при выбранных значениях параметров.

В дальнейших исследованиях планируется выполнить асимптотический анализ систем с неограниченным числом приборов и бесконечным значением среднего времени обслуживания в предельном условии $T \rightarrow \infty$, что позволит найти не только моменты числа занятых приборов, но также и их предельное распределение вероятностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Афанасьева Л.Г., Руденко И.В.* Системы обслуживания $GI|G|_{\infty}$ и их приложения к анализу транспортных моделей // Теория вероятностей и её применение. 2012. Т. 57. Вып. 3. С. 427–452.
2. *Носова М.Г.* Автономная немарковская система массового обслуживания и ее применение в задачах демографии: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Томск, 2010. 204 с
3. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2011. 228 с.
4. *Reynolds J.F.* Some results for the bulk-arrival infinite-server Poisson queue // Oper. Res. 1968. V.16. P.186–189.
5. *Моисеев А.Н., Назаров А.А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2015. 240 с.
6. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
7. *Movaghar A.* Analysis of a Dynamic Assignment of Impatient Customers to Parallel Queues // Queueing systems. 2011. V. 67. No. 3. P. 251–273.
8. *Klemm A., Lindermann C., Lohmann M.* Modeling IP traffic using the batch Markovian arrival process // Performance Evaluation. 2003. V. 54. P. 923–930.

Худяшова Екатерина Евгеньевна, аспирант, kopnova.e@gmail.com;

Назаров Анатолий Андреевич, д.т.н., профессор, nazarov.tsu@gmail.com

Оптимальное оценивание состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка

Л.А. Нежелская, Е.Ф. Сидорова

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Случайные входящие потоки событий, выступающие основными элементами систем массового обслуживания (СМО), широко применяются в качестве математических моделей реальных информационных потоков сообщений в телекоммуникационных системах, глобальных компьютерных сетях, спутниковых сетях связи [1, 2].

В последнее время использование математических моделей входящих потоков событий в виде пуассоновских потоков стало затруднительно в силу непригодности в той или иной степени таких моделей для описания информационных потоков, функционирующих в современных цифровых системах интегрального обслуживания (ЦИО). Таким образом, возникла необходимость построения новых, достаточно адекватно описывающих реальные потоки, математических моделей в виде дважды стохастических потоков событий [3–6].

В настоящей статье приводится оптимальное оценивание состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка по методу максимума апостериорной вероятности. Данная работа является непосредственным развитием [7, 8].

Постановка задачи

Рассматривается обобщенный синхронный поток второго порядка (поток), сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$ является кусочно-постоянным с двумя состояниями S_1 и S_2 . Далее по тексту под i -м состоянием процесса $\lambda(t)$ понимается состояние S_i , $i=1,2$.

Длительность интервала между событиями потока в i -м состоянии определяется случайной величиной $\eta_i = \min(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$, где случайная величина $\xi_i^{(1)}$ распределена по закону $F_i^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, случайная величина $\xi_i^{(2)}$ – по закону $F_i^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha_i t}$, $i=1,2$; $\xi_i^{(1)}$ и $\xi_i^{(2)}$ – независимы друг от друга. В момент наступления события потока в зависимости

от того, какое значение приняла случайная величина η_i , $i=1,2$, процесс $\lambda(t)$ переходит из i -го состояния в j -е, $i \neq j$, или остается в i -м состоянии, $i = j$, с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i)$ либо $P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j=1,2$; $P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i) + P_1^{(1)}(\lambda_i | \lambda_i) = 1$, $P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i) + P_1^{(2)}(\lambda_i | \lambda_i) = 1$, $i, j=1,2$, $i \neq j$. То есть длительность интервала между событиями потока в i -м состоянии скрытого марковского процесса $\lambda(t)$ есть случайная величина с функцией распределения $F_i(t) = 1 - e^{-(\lambda_i + \alpha_i)t}$, $i=1,2$.

В дальнейшем изложении принимается, что имеет место i -е состояние S_i процесса $\lambda(t)$, если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i=1,2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$).

Целью настоящего исследования является определение апостериорных вероятностей $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t)$, $i=1,2$, того, что в момент принятия решения t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$, $i=1,2$, при условии реализации моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots$ на интервале наблюдения $(0, t)$, при этом $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$.

Оптимальное оценивание состояний потока

Для вывода уравнений для апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ воспользуемся описанной в [9] методикой. Пусть время t на интервале наблюдения $(0, t)$ изменяется дискретно с шагом Δt : $t^{(k)} = k\Delta t$, $k=0,1,\dots$. Введем двумерный случайный процесс $(\lambda^{(k)}, r_k)$, где $\lambda^{(k)} = \lambda(k\Delta t)$ – значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $t^{(k)} = k\Delta t$ ($\lambda^{(k)} = \lambda_i$, $i=1,2$); $r_k = r[k\Delta t] - r[(k-1)\Delta t]$ – число событий потока, наступивших на интервале времени $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ длительности Δt , $r_k = 0,1,\dots$. Обозначим $\mathbf{r}_m = (r_0, r_1, \dots, r_m)$ – последовательность количества событий за время от 0 до $m\Delta t$ на интервалах $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ длительности Δt , $k = \overline{0, m}$. Здесь r_0 – количество событий, наступивших на интервале $(-\Delta t, 0)$. Можно положить $r_0 = 0$. Обозначим $\boldsymbol{\lambda}^{(m)} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$ – последовательность неизвестных значений процесса $\lambda(k\Delta t)$ в момент $k\Delta t$, $k = \overline{0, m}$ ($\lambda^{(0)} = \lambda(0) = \lambda_i$, $i=1,2$).

Введем в рассмотрение $w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m)$ – условную вероятность значения $\lambda^{(m)}$ при условии, что наблюдается реализация $\mathbf{r}_m$. Аналогично $w(\lambda^{(m+1)} | \mathbf{r}_{m+1})$. Тогда для марковского случайного процесса $(\lambda^{(k)}, r_k)$ справедливо рекуррентное соотношение для $w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m)$, $w(\lambda^{(m+1)} | \mathbf{r}_{m+1})$:

$$w(\lambda^{(m+1)} | \mathbf{r}_{m+1}) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}, \quad (1)$$

где $p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)$ – вероятность перехода процесса $(\lambda^{(k)}, r_k)$ за один шаг Δt из состояния $(\lambda^{(m)}, r_m)$ в состояние $(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1})$; $w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m) = w(\lambda^{(m)} | t)$, $w(\lambda^{(m+1)} | \mathbf{r}_{m+1}) = w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t)$.

Для рассматриваемого потока справедливо $p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m) = p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})$. Тогда соотношение (1) принимает вид

$$w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}. \quad (2)$$

Здесь $r_{m+1} = 0$ или $r_{m+1} = 1$. Вероятность, что $r_{m+1} = 2, 3, \dots$, есть $o(\Delta t)$.

Лемма 1. На временных интервалах (t_0, t_1) и (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, между соседними событиями потока апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Бернулли

$$\frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} = w^2(\lambda_1 | t)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2) - w(\lambda_1 | t)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2), \quad (3)$$

$\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0$.

Лемма 2. В момент t_k , $k = 1, 2, \dots$, наступления события в потоке для апостериорной вероятности первого состояния процесса $\lambda(t)$ имеет ме-

сто формула пересчета

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = W / [(\lambda_2 + \alpha_2) + w(\lambda_1 | t_k - 0)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)], \quad (4)$$

$$W = \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2) + w(\lambda_1 | t_k - 0) \times \\ \times [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) - \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) - \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)].$$

Лемма 3. Априорные финальные вероятности π_1, π_2 состояний процесса $\lambda(t)$ имеют вид

$$\pi_1 = \frac{\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)}{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)}, \\ \pi_2 = 1 - \pi_1. \quad (5)$$

Леммы 1, 2 (формулы (3), (4)) позволяют сформулировать теорему.

Теорема. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на интервалах (t_0, t_1) и (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, определяется явной формулой

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w(\lambda_1 | t_k + 0) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k)}}{1 - w(\lambda_1 | t_k + 0) + w(\lambda_1 | t_k + 0) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k)}}, \quad (6)$$

$t_k < t < t_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$; $w(\lambda_1 | t_k + 0)$, $k = 1, 2, \dots$, определена в (4), $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1$, π_1 задается формулой (5).

Результаты численных расчетов

Для получения численных результатов разработанный с помощью формул (4) – (6) алгоритм вычисления $w(\lambda_1 | t)$ реализован на языке C# в среде Microsoft Visual Studio 2013. Первый этап – имитационное моделирование потока, второй – вычисление вероятностей $w(\lambda_1 | t)$, $t_0 \leq t < t_1$; $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ и $w(\lambda_1 | t)$, $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, и определение оценок $\hat{\lambda}(t)$ методом максимума апостериорной вероятности.

Для установления частоты ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$ по наблюдениям за потоком проведен ряд статистических экспериментов. Результат реализации алгоритма заключается в определении выборки $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_N$ долей ошибочных решений в N экспериментах. На основании этого набора вычисляется выборочное среднее

безусловной вероятности ошибочного решения $\hat{P}_{\text{ош}} = (1/N) \sum \hat{p}_k$, а также ее выборочная дисперсия $\hat{D}_{\text{ош}} = (1/(N-1)) \sum (\hat{p}_k - \hat{P}_{\text{ош}})^2$.

Проведено достаточное количество статистических экспериментов [8]. Здесь в качестве иллюстрации приводится один из них.

Произведен расчет траектории оценки $\hat{\lambda}(t)$ процесса $\lambda(t)$, а также произведены расчеты оценок $\hat{P}_{\text{ош}}$ и $\hat{D}_{\text{ош}}$ при значениях параметров: $P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i) = 0$, $i = j$, $P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i) = 1$, $i \neq j$ ($i, j = 1, 2$, $l = 1, 2$); $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0,75$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0,45$; время моделирования $T = 100$; $N = 100$.

Траектория оценки $\hat{\lambda}(t)$ процесса $\lambda(t)$ приведена на рис. 1, здесь λ_1, λ_2 – значения оценки $\hat{\lambda}(t)$. Вынесение решения о том или ином состоянии процесса $\lambda(t)$ производится с шагом $\Delta t = 0,001$. Участки ошибочных решений обозначены на временной оси штриховкой.

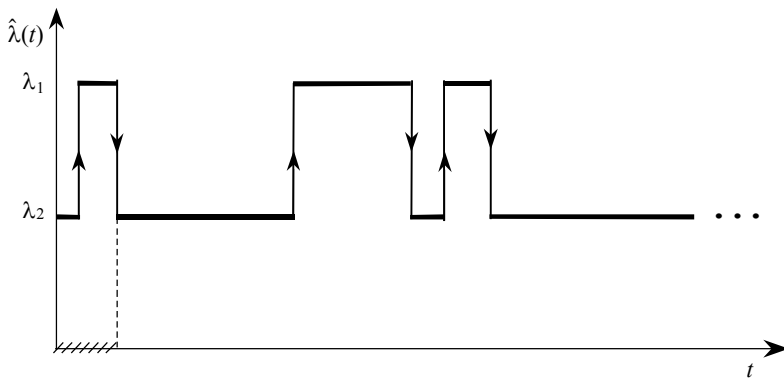


Рис. 1. Поведение оценки $\hat{\lambda}(t)$

Доля ошибочных решений для данного конкретного испытания составляет $\hat{p}_k = 0,002108$. Выборочное среднее безусловной вероятности ошибки в серии из $N = 100$ испытаний $\hat{P}_{\text{ош}} = 0,006016$, а ее выборочная дисперсия – $\hat{D}_{\text{ош}} = 0,000085$.

Заключение

В данной работе явные формулы (4) – (6), необходимые для оценки состояний потока событий, позволяют производить вычисления без использования численных методов. При этом алгоритм оптимального оценивания обеспечивает минимум безусловной вероятности ошибки вынесения решения. Приведенные результаты статистического эксперимента демонстрируют достаточно хорошее (в смысле малости оценки вероятности ошибки) качество оценивания состояний потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: Изд-во Белорусского государственного университета, 2000. 175 с.
2. Basharin G.P., Gaidamaka Yu. V., Samouylov K. E. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47. No. 2. P. 62–69.
3. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4(21). С. 14–25.
4. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2(27). С. 19–29.
5. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4(25). С. 32–42.
6. Нежелская Л.А., Сидорова Е.Ф. Имитационное моделирование обобщенного синхронного потока второго порядка // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая. Томск: Издательский Дом ТГУ. 2016. Т. 299. С. 104–109.
7. Нежелская Л.А., Сидорова Е.Ф. Алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая. Томск: Издательский Дом ТГУ. 2017. Т. 301. С. 105–113.
8. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968. 256 с.

Нежелская Людмила Алексеевна, д.ф.-м.н., профессор; ludne@mail.ru;
Сидорова Екатерина Филипповна, магистрант; katusha_sidorova@mail.ru

Оптимальная оценка состояний полусинхронного потока событий второго порядка в условиях его полной наблюдаемости

Л.А. Нежелская, Д.А.Тумашкина

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

В телекоммуникационных системах, спутниковых сетях связи и глобальных компьютерных сетях функционируют информационные потоки сообщений [1,2], адекватными математическими моделями которых являются дважды стохастические потоки событий [3–6]. Для данных потоков характерна двойная случайность: случайны моменты наступления событий и интенсивность потока есть случайный процесс.

Объектом изучения является полусинхронный поток событий второго порядка, представляющий интеграцию следующих типов потоков: синхронного потока, переход из состояния в состояние в котором связан с наступлением события, и асинхронного, переход из состояния в состояние в котором не зависит от наступления события. В настоящей работе предлагается алгоритм оптимального оценивания состояний рассматриваемого потока методом максимума апостериорной вероятности. Данная статья является непосредственным развитием [7,8].

Постановка задачи

Рассматривается стационарный режим функционирования полусинхронного дважды стохастического потока событий второго порядка (поток), сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$ является кусочно-постоянным с двумя состояниями S_1 и S_2 . Далее по тексту под i -м состоянием процесса понимается состояние S_i , $i = 1, 2$.

Длительность интервала между событиями потока в первом состоянии определяется случайной величиной $\eta = \min(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$, где случайная величина $\xi^{(1)}$ имеет функцию распределения $F_1^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$, случайная величина $\xi^{(2)}$ имеет функцию распределения $F_1^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t}$; $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ – независимые случайные величины.

В момент наступления события потока процесс $\lambda(t)$ переходит из первого состояния во второе либо с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1)$, либо с вероятностью $P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1)$ в зависимости от того, какое значение приняла случайная величина η . В момент наступления события потока процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии либо с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1)$, либо с вероятностью $P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1)$ в зависимости от значения величины η . Здесь $P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1) = 1$, $P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) + P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1) = 1$. Длительность интервала между событиями потока в первом состоянии процесса $\lambda(t)$ – случайная величина с функцией распределения $F(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t}$.

Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии есть случайная величина с функцией распределения $F_2(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$. В течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_2 .

В последующем изложении полагается, что имеет место состояние S_i (i -е состояние) процесса $\lambda(t)$, если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$; $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$.

Процесс $\lambda(t)$ является марковским. Вместе с тем процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым, наблюдаются только моменты времени наступления событий $t_1, t_2, \dots$, тогда $\lambda(t)$ – ненаблюдаемый сопровождающий марковский процесс.

Требуется по наблюдениям $t_1, t_2, \dots$ за потоком событий на временном интервале (t_0, t) оценить состояние процесса $\lambda(t)$ (потока) в момент окончания наблюдений t , где t_0 – момент начала наблюдений.

Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в момент времени t необходимо определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t) = P(\lambda(t) | t_1, \dots, t_m, t)$, $i = 1, 2$, того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$ (m – количество событий потока, наступивших за время t), при этом $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$. Оптимальное оценивание выглядит следующим образом: если $w(\lambda_i | t) \geq w(\lambda_j | t)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, то оценка состояния процесса есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$, иначе $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$, $i, j = 1, 2$.

Оптимальное оценивание состояний потока

Рассмотрим интервалы времени между событиями потока (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$. Пусть t – момент вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$, тогда $0 < t < t_1$ или $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, соответственно.

Теорема. Для апостериорных вероятностей $w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t)$ и $w(\lambda^{(m)} | t)$ справедливо рекуррентное соотношение

$$w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, I(\lambda^{(m)}))}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, I(\lambda^{(m)}))}, \quad (1)$$

где индикатор $I(\lambda^{(m)}) = \begin{cases} \lambda^{(m+1)}, & \text{если } \lambda^{(m)} = \lambda_1, \\ 0, & \text{если } \lambda^{(m)} = \lambda_2. \end{cases}$

Доказательство. Воспользуемся методикой получения рекуррентных соотношений для апостериорных вероятностей, изложенной в [9]: рассматриваются дискретные наблюдения через достаточно малые равные промежутки времени Δt , после чего $\Delta t \rightarrow 0$.

Итак, предположим, что время дискретно и изменяется с шагом $\Delta t: t^{(n)} = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots$. Введем двумерный случайный процесс $(\lambda^{(n)}, r_n)$, $(\lambda^{(n)}, r_n) = (\lambda(n\Delta t), r_n(\Delta t)) = (\lambda(n\Delta t), r(n\Delta t) - r((n-1)\Delta t))$, где $\lambda^{(n)} = \lambda(n\Delta t)$ – значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $t^{(n)} = n\Delta t$ ($\lambda^{(n)} = \lambda_i, i = 1, 2$); $r_n = r_n(\Delta t)$ – количество событий потока, наступивших на интервале $((n-1)\Delta t, n\Delta t)$ длины Δt , $r_n = 0, 1, \dots$. Отметим, что данный двумерный процесс является марковским.

Обозначим $r_m = (r_0, r_1, \dots, r_m)$ – последовательность числа событий потока за время от 0 до $m\Delta t$ на временных интервалах $((n-1)\Delta t, n\Delta t)$ длительности Δt , $n = 0, 1, \dots, m$, где r_0 – количество событий потока на интервале $(-\Delta t, 0)$; положим $r_0 = 0$. Обозначим $\lambda^{(m)} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$ – последовательность ненаблюдаемых значений

процесса $\lambda(n\Delta t)$ в моменты времени $n\Delta t$, $n=0, 1, \dots, m$, где $\lambda^{(0)} = \lambda(0) = \lambda_i$, $i=1, 2$. Введем $w(\lambda^{(m)} | r_m)$ – апостериорная вероятность значения $\lambda^{(m)}$ при условии, что наблюдалась реализация r_m .

Для марковского процесса $(\lambda^{(n)}, r_n)$ справедливо рекуррентное соотношение для вероятностей $w(\lambda^{(m+1)} | r_{m+1})$ и $w(\lambda^{(m)} | r_m)$:

$$w(\lambda^{(m+1)} | r_{m+1}) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | r_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | r_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}, \quad (2)$$

где $p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)$ – вероятность перехода за один шаг Δt процесса $(\lambda^{(n)}, r_n)$ из состояния $(\lambda^{(m)}, r_m)$ в состояние $(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1})$. С учетом марковости рассматриваемого двумерного процесса, а также в силу конструкции полусинхронного потока событий второго порядка из (2) получаем (1). *Теорема доказана.*

На основании (1) получены явные виды апостериорной вероятности:

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] w(\lambda_1 | t_k - 0)}{\lambda_2 + [\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2] w(\lambda_1 | t_k - 0)}, \quad k=1, 2, \dots$$

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1 [1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k)}}{[1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k)}},$$

$$w_1 = \alpha_2 / [\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1], \quad t_k < t < t_{k+1}, \quad k=0, 1, \dots; \quad w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1,$$

$$\pi_1 = \alpha_2 / [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_2].$$

Результаты численных расчетов

Для установления частоты принятия ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$ проведен статистический эксперимент, осуществляемый по алгоритму, приведенному в [8]. Результатом выполнения данного алгоритма является выборка долей ошибочных решений в N опытах $\hat{p}_i$, $i=1, \dots, N$, по которой находятся выборочное среднее пол-

ной вероятности ошибочного решения $\hat{P}_{\text{ош}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{p}_i$ и выборочная

$$\text{дисперсия } \hat{D} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{p}_i - \hat{P}_{\text{ош}})^2.$$

Результаты проведенного статистического эксперимента приведены в таблице. При вероятностях $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 0.4$, $P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 0.6$, $N = 100$, а также параметрах потока $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0.8$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0.8$ рассматривается зависимость $\hat{P}_{\text{ош}}$, $\hat{D}$ от времени моделирования $T = 100, 300, 500, 700$ ед. времени.

Результаты статического эксперимента

T	100	300	500	700
$\hat{P}_{\text{ош}}$	0.1901	0.2002	0.1899	0.1908
$\hat{D}$	0.0023	0.0021	0.0019	0.0020

Анализ численных результатов, приведенных в таблице, показывает, что для всех вариантов расчета оценка безусловной вероятности ошибочного решения $\hat{P}_{\text{ош}}$ является достаточно стабильной для времени моделирования $T \geq 100$ ед. времени.

Заключение

В настоящей работе приведены формулы для расчета апостериорных вероятностей $w(\lambda_1 | t)$, $w(\lambda_2 | t)$. На основании найденных формул разработан алгоритм оптимального оценивания состояний полусинхронного дважды стохастического потока событий второго порядка, обеспечивающий минимум полной вероятности ошибки вынесения решения. Алгоритм реализован на языке программирования C# в среде Visual Studio 2013.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: Изд-во Белорусского государственного университета, 2000. 175 с.
2. Basharin G.P., Gaidamaka Yu.V., Samouylov K.E. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47. No. 2. P. 62–69.

3. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщённого асинхронного потока событий при непродлевающемся мёртвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. №4 (21). С. 14–25.
4. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–29.
5. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ- оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. №4 (25). С. 32–42.
6. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. №2 (1). С. 18–23.
7. Нежелская Л.А., Тумашкина Д.А. Имитационная модель полусинхронного потока второго порядка // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая. Томск: Издательский Дом ТГУ, 2016. Т. 299. С. 109–114.
8. Нежелская Л.А., Тумашкина Д.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий второго порядка // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая. Томск: Издательский Дом ТГУ, 2017. Т. 301. С. 97–105.
9. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. Радио, 1968. 256 с.

Нежелская Людмила Алексеевна, д.ф.-м.н., профессор; ludne@mail.ru;

Тумашкина Диана Александровна, магистрант; diana1323@mail.ru

Многоканальные системы обслуживания с марковским нетерпением¹

Ю.И. Рыжиков

*Институт информатики и автоматизации РАН,
Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского,
г. Санкт-Петербург, Россия*

Среди многочисленных применений теории очередей заметную роль играют ситуации с нетерпеливыми заявками, имеющими случайные ограничения на время пребывания заявки в системе. Чисто марковская система указанного вида была рассмотрена в [1, 2]. В данной статье рассматривается гораздо более интересная для практики задача с гиперэкспоненциальным распределением обслуживания и марковским нетерпением. Предлагаемый метод позволяет обобщить задачу применительно к сети обслуживания.

Итерационный метод для модели $M/H_2/n$

Работа системы $M/H_2/n$ может быть интерпретирована как процесс обслуживания потока заявок двух типов. Каждая заявка имеет случайное время терпения, подчиненное экспоненциальному закону с параметром γ .

На рис. 1 представлен фрагмент диаграммы переходов между микросостояниями системы $M/H_2/3-M$ по уходу заявок для 2-го, 3-го и 4-го ярусов. Кодовые комбинации вида (21) указывают типы обслуживаемых заявок, проставленные на концах стрелок дополнительные множители $\{y_i\}$ – вероятности выбора заявок соответствующего типа из очереди. На ярусах $j > n$ отличие будет состоять лишь в интенсивности вертикальных переходов вверх: $\gamma, 2\gamma, 3\gamma \dots$ Заметим, что скорость продвижения в очереди новой (меченой) заявки определяется только судьбой ранее пришедших.

В соответствии с диаграммой переходов для выбранной модели построим матрицы интенсивностей инфинитезимальных переходов: A_j по прибытию заявки, B_j – по завершению обслуживания, D_j – ухода из состояний яруса j .

¹ Работа выполнялась по госзаданию 0073 2018-0003.

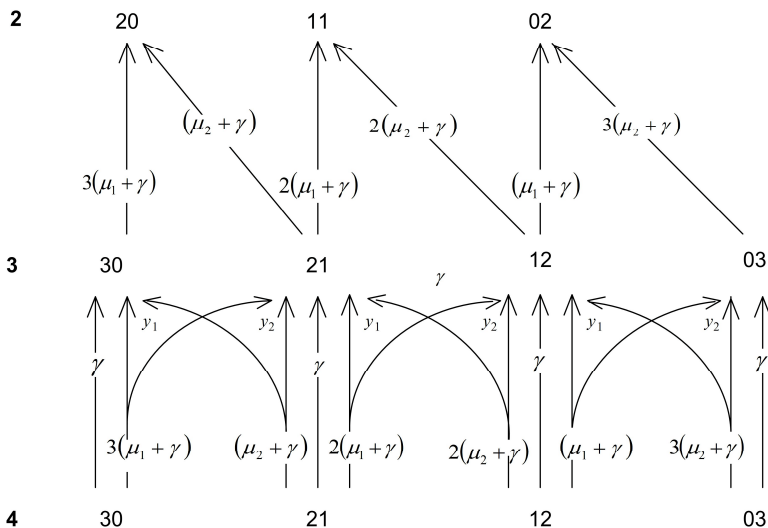


Рис. 1. Фрагмент диаграммы переходов

Введем векторы-строки $g_j = \{g_{j,1}, g_{j,2}, \dots, g_{j,mj}\}$ нахождения системы в состоянии (j,i) , $j=0,1,\dots$. Теперь можно записать векторно-матричные уравнения баланса переходов между состояниями

$$\begin{aligned} g_0 D_0 &= g_1 B_1, \\ g_j D_j &= g_{j-1} A_{j-1} + g_{j+1} B_{j+1}, \quad j=1,2,\dots \end{aligned} \quad (1)$$

Положим $t_j = g_j/p_j$, где p_j – суммарная вероятность наличия в системе ровно j заявок, и обозначим

$$x_j = p_{j+1}/p_j, \quad z_j = p_{j-1}/p_j. \quad (2)$$

Тогда систему (1) можно переписать относительно векторов условных вероятностей $\{t_j\}$, нормированных к единице в пределах яруса:

$$\begin{aligned} t_0 D_0 &= x_0 t_1 B_1, \\ t_j D_j &= z_j t_{j-1} A_{j-1} + x_j t_{j+1} B_{j+1}, \quad j=1,2,\dots \end{aligned} \quad (3)$$

Алгоритм [3, 4] расчета набора векторов $\{t_j\}$ и чисел $\{x_j\}$ и $\{z_j\}$, удовлетворяющих соотношениям (1) – (3), в случае разомкнутой системы опирается на существование предельного вектора условных веро-

ятностей $t_\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} t_j$, которое является следствием стабилизации переходных матриц при $j > n$. Для граничного яруса N в случае прогона сверху вниз последняя из формул (3) записывается в виде

$$t_N D_N = z_N t_{N-1} A_{N-1} + x_N t_{N-1} B_N \quad (4)$$

(отсутствующий нижележащий вектор условных вероятностей микросостояний заменяется на только что вычисленный вышележащий). В случае с нетерпеливыми заявками $\{B_j\}$ и $\{D_j\}$ стабилизируются лишь при $j \rightarrow \infty$, но вследствие нарастающей при этом интенсивности уходов по нетерпению суммарные вероятности состояний $\{p_j\}$ при прочих равных условиях будут убывать значительно быстрее, и ошибки от упомянутого допущения будут играть все меньшую роль. Это оправдывает применение для граничного яруса N условия (4).

После прекращения итераций можно переходить к нахождению кумулянтных вероятностей. Полагая $p_0 = 1$, последовательно вычисляем

$$p_{j+1} = p_j x_j, \quad j = \overline{0, N-1}, \quad (5)$$

а затем нормируем их к единице. Имитационный эксперимент показал хорошее согласие расчетных и статистических вероятностей порядка 10^{-4} и больше, для которых число наблюдений превышало 100.

Распределение времени ожидания

Наибольшие трудности расчета систем с нетерпением связаны с определением их временных характеристик. Здесь общая формула Брюмеля для моментов распределения длительности ожидания

$$w_j = q_{[j]} / \lambda^j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

в которой $\{q_{[j]}\}$ – факториальные моменты распределения длины очереди, как показали имитационные эксперименты, дает неудовлетворительную точность.

Вычислим

- стационарные векторы-строки $g_k = p_k * t_k$ вероятностей микросостояний, $k = 0, 1, \dots$,
- диагональные матрицы суммарных интенсивностей переходов вверх с элементами $\{\sigma_{k,i}\}$,

- диагональные матрицы $\{U_k(s)\}$ преобразований Лапласа – Стиль-еса (ПЛС) распределений длительности переходов вверх по соответствующим суммарным интенсивностям $\{\sigma_k\}$ с элементами $\{\sigma_{k,i}/(\sigma_{k,i} + s)\}$,

- произведение $\tilde{U}_n(s)$ матрицы $U_n(s)$ на единичный вектор-столбец,
- матрицы $\{T_k\}$ с элементами $\{b_{k,i,j}/\sigma_{k,i}\}$ вероятностей переходов на вышележащий ярус.

Кроме того, заменим диагональную матрицу $U_n(s)$ на одноименный вектор-столбец. Полагая $F_k(s) = U_k(s)T_k$, можно сразу записать матрицы $\{F_k\}$ как совокупности элементов вида $\{b_{k,i,j}/(\sigma_{k,i} + s)\}$. Суммируя результаты по всем возможным стартовым ярусам, получаем окончательную формулу для ПЛС распределения времени ожидания:

$$\omega(s) = [\sum_{k=0}^{\infty} g_{n+k} \prod_{i=0}^k F_{n+i}(s)] \tilde{U}_n(s). \quad (7)$$

В этой формуле перевернутый символ произведения используется для указания на обратный порядок следования сомножителей. Начальное значение $F_n(s) = I$.

Многочисленным численным дифференцированием таблицы ПЛС [4] можно получить моменты распределения $w(t)$ виртуального ожидания начала обслуживания

Осталось учесть возможность «нетерпения» самой меченой заявки. Поскольку для каждой заявки вероятность перетерпеть время u равна $e^{-\gamma u}$, функция распределения длительности успешного ожидания

$$W^+(t) = \int_0^t e^{-\gamma u} w(u) du.$$

Соответственно ПЛС этого распределения

$$\omega^+(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d \left[\int_0^t e^{-\gamma u} w(u) du \right] dt = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\gamma t} w(t) dt = \omega(s + \gamma)..$$

Моменты успешного ожидания, полученные таким способом, должны быть разделены на вероятность успешного ожидания, включая нулевое, то есть на

$$\pi_w = \sum_{k=0}^{n-1} p_k + \omega^+(\gamma).$$

Сопоставим численные результаты, полученные по этой методике и посредством имитационного моделирования (2 млн обслуженных заявок). Для трехканальной системы с интенсивностью входящего простейшего потока $\lambda = 1.5$, среднем временем обслуживания $b_1 = 4.0$, коэффициентом вариации обслуживания $v_b = 2.0$ и интенсивностью нетерпения $\gamma = 0.2$ результаты сведены в таблицу.

Моменты распределения успешного ожидания

Способ	w_1^+	w_2^+	w_3^+
Имитация	0.483	1.048	3.319
Расчет	0.479	1.039	3.287

Распределение времени пребывания успешной заявки

Сделанное в данной статье предположение о марковском распределении допустимого терпения позволяет при поступлении заявки из очереди на обслуживание отсчитывать ее терпение заново. Нас в конечном счете интересует ожидание «успешных» заявок, дождавшихся завершения обслуживания. Примем распределение последнего двухфазовым гиперэкспоненциальным с параметрами $\{y_m, \mu_m\}$. Тогда j -й момент успешного обслуживания

$$b_j^+ = \int_0^\infty \int_0^\theta [t^j b(t) dt] \gamma e^{-\gamma\theta} d\theta = \int_0^\infty \int_0^t [t^j \sum_{m=1}^2 y_m \mu_m e^{-\mu_m t} dt].$$

Можно показать, что

$$b_j^+ = j! \sum_{m=1}^2 \frac{y_m}{\mu_m^j} \left[1 - \frac{\gamma}{\mu_m + \gamma} \sum_{i=0}^j \left(\frac{\mu_m}{\mu_m + \gamma} \right)^i \right]. \quad (8)$$

Расчет сети с нетерпеливыми заявками

Предположение о марковском распределении допустимого терпения позволяет перенести результаты предыдущего раздела на расчет сетей методом потокоэквивалентной декомпозиции. В нашем случае в общую

схему расчета разомкнутой сети обслуживания [4] приходится внести следующие изменения:

- В сети не должно быть циклических маршрутов.
- Интенсивности выходящих потоков должны рассчитываться умножением интенсивностей входящих на вероятность успеха.
- Нумерация и, соответственно, очередность расчета узлов должны определяться на основе отношений предшествования – например, с помощью известного алгоритма Флойда.

Выделим из матрицы передач сети с M рабочими узлами:

- вектор-строку $P = \{r_{0,1}, r_{0,2}, \dots, r_{0,M}\}$ вероятностей перехода из источника в конкретные рабочие узлы;
- вектор-столбец $T = \{r_{1,M+1}, r_{2,M+1}, \dots, r_{M,M+1}\}^T$ вероятностей перехода из рабочих узлов в сток;
- матрицу $Q = \{r_{i,j}\}$, $i, j = \overline{1, M}$, вероятностей переходов между рабочими узлами.

Кроме того, определим диагональную матрицу $N(s)$ преобразований Лапласа $\{v_i(s)\}$ распределений времени пребывания в рабочих узлах сети и сформируем матрицу

$$\Phi(s) = N(s)Q.$$

ПЛС распределения длительности k -шаговых переходов в сток

$$\varphi_k(s) = P\Phi^{k-1}(s)N(s)T.$$

Полное ПЛС распределения времени пребывания заявки в сети получается суммированием переходов кратностей до N включительно, где N – максимальное количество посещаемых заявкой узлов:

$$\varphi(s) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(s) = P \left[\sum_{k=0}^{N-1} \Phi^k(s) \right] N(s)T.$$

Моменты $\{g_i\}$ распределения времени пребывания в сети можно получить численным дифференцированием $\varphi(s)$ в нуле.

Заключение

Основные результаты данной работы сводятся к следующему:

1. С учетом экспоненциального нетерпения находящихся в системе заявок, скорректированы правила расчета матриц интенсивностей переходов $\{B_j\}$ и $\{D_j\}$.

2. Обоснована возможность применения метода Такахаси-Таками к рассматриваемой задаче с переменными матрицами интенсивностей переходов.

3. Разработан метод расчета распределения времени ожидания для «успешных» заявок.

4. Предложены формулы для расчета средних потерь на прерванное обслуживание и интенсивности потока обслуженных заявок.

5. Показано применение перечисленных результатов к расчету сетей обслуживания с нетерпеливыми заявками.

Перечисленные результаты применимы к широкому кругу практически важных ситуаций. В технике связи и военном деле это может быть «обслуживание» подвижных объектов с ограниченным временем пребывания в зоне досягаемости, в проблематике МЧС – спасение людей в аварийных ситуациях, в юстиции – затяжные процессы с ограниченным сроком давности, в медицине – «тяжелые» больные, состояние которых быстро ухудшается в ожидании оказания экстренной помощи, и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания: Учебник. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
2. Takagi H. *Waiting Time in the M/M/m/(m+c) Queue with Impatient Customers* // Int. J. of Pure and Applied Mathematics. 2014. V. 90. No. 4. P. 519–559.
3. Рыжиков Ю.И. Итеративный метод расчета многоканальных систем обслуживания – основы, модификации и предельные возможности // Труды 9-й Российской мультikonференции по проблемам управления. Информационные технологии в управлении. СПб.: ГНИЦ РФ «Концерн Электроприбор», 2016. С. 224–233.
4. Рыжиков Ю.И. Алгоритмический подход к задачам массового обслуживания: Монография. СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского, 2013. 496 с.
5. Вишнеvский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003. 512 с.
6. Takahashi Y., Takami Y. *A Numerical Method for the Steady-State Probabilities of a GI/G/c Queuing System in a General Class* // J. Operat. Res. Soc. of Japan. 1976. V. 19. No. 2. P. 147–157.
7. Малинковский Ю.В. Сети Джонсона с однолинейными узлами и ограниченным временем пребывания и.или ожидания // Автоматика и Телемеханика. 2015. № 4. С. 67–79.

Рыжиков Юрий Иванович, д.т.н., профессор; ryzhbox@yandex.ru

Расчет систем обслуживания с большим числом каналов¹

Ю.И. Рыжиков

*Институт информатики и автоматизации РАН,
Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского,
г. Санкт-Петербург, Россия*

Постановка задачи

Современные методы расчета многоканальных немарковских систем обслуживания [1,2], особенно актуальные для вычислительных систем, медленно внедряются в учебный процесс вузов и практически неизвестны заказчикам и проектировщикам таких систем. Оценки средней длины очереди и среднего ожидания аппроксимации ([3–5]) весьма приблизительны и работают лишь для небольшого числа каналов n .

Известно, что при $n \rightarrow \infty$ стационарное распределение числа заявок в системе независимо от вида распределения обслуживания описывается распределением Пуассона

$$P_k = (\lambda b)^k e^{-\lambda b} / k!, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где λ – интенсивность входящего пуассоновского потока и b – среднее время обслуживания. В связи с этим многие исследователи обращаются к идее применения для обсчета систем с большим числом каналов формулы Эрланга и соответствующих оценок для средней длины очереди.

В данной статье эта идея анализируется на количественной основе. В ней демонстрируется зависимость средней длины очереди от вариации распределения обслуживания, коэффициента загрузки и числа каналов.

Фазовые аппроксимации

В значительной доле реальных ситуаций входящий поток близок к простейшему, что определяет повышенную актуальность соответствующих моделей. Отметим, что происходящие при работе сетей обслуживания многократное случайное просеивание и суммирование потоков приближают результирующие потоки на входе узлов к простейшим.

¹ Работа поддержана государственным заданием 0073-2018-0003.

Расчет многоканальных систем практически возможен лишь при использовании фазовых аппроксимаций распределений длительностей обслуживания. В качестве таковых обычно используются эрлангова либо гиперэкспоненциальная второго порядка H_2 . Диаграммы состояний и переходов между ними приводятся для модели $M/E_3/2$ в [6], а для $M/H_2/3$ – в [7]. Эрлангово распределение E_k применимо только для аппроксимации распределений с коэффициентом вариации, меньшим единицы. Критически влияющая на трудоемкость расчетов ширина диаграммы (максимальное количество микросостояний на ярусе) очень быстро растет по числу каналов n и порядку $k = 1/v^2$ (см. табл. 1).

Таблица 1

Количество микросостояний на ярусах модели $M/E_k/n$

Число каналов	Число фаз k				
	2	3	4	5	6
2	3	6	10	15	21
3	4	10	20	35	56
5	6	21	56	126	252
10	11	66	286	1001	3003

При обсчете моделей с меньшими v могут потребоваться значительно большие значения k с катастрофическим ростом размерности задачи при больших n .

Гиперэкспоненциальная аппроксимация H_2 позволяет выравнять три момента произвольного распределения, что представляется необходимым и достаточным. Диаграмма переходов для $M/H_2/n$ имеет ширину $n+1$, что позволяет обсчитывать системы с очень большим числом каналов.

По указанным причинам наиболее актуальной представляется модель $M/H_2/n$, для которой и проводятся все последующие рассуждения.

Численный метод

Обсчет СМО методом фиктивных фаз основан на решении уравнений баланса переходов между микросостояниями системы, задаваемыми общим числом заявок в системе и распределением проходящих обслуживания заявок по его фазам.

При работе с большим числом каналов предпочтительно применение итерационного метода, восходящего к Такахаси и Таками [1, 8]. В нем последовательно пересчитываются векторы условных (нормированных в пределах яруса к единице) вероятностей микросостояний и отношения

$$x_j = p_{j+1}/p_j, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (2)$$

суммарных вероятностей ярусов. При стабилизации последних с разумной погрешностью (мы принимали допуск 10^{-4}) из условия баланса

$$\sum_{j=0}^{n-1} (n-j)p_j = n - \lambda b \quad (3)$$

определяется вероятность свободного состояния p_0 и далее через формулу (2) – вероятности p_j , $j = 1, 2, \dots, m$. Конечным результатом каждого расчета считалась ожидаемая длина очереди

$$\bar{q} = \sum_{j=n+1}^m (j-n)p_j + \frac{p_m x}{1-x} \left[\frac{1}{1-x} + m - n \right]. \quad (4)$$

Здесь $x = p_m/p_{m-1}$. Последнее слагаемое отражает добавку от неучтенных членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем x .

Машинный эксперимент

Целью машинного эксперимента являлось оценивание влияния загрузки системы и коэффициента вариации времени обслуживания на среднюю длину очереди q . Прокомментируем диапазон его условий.

1. Коэффициенты загрузки выбирались 0.7 и 0.9 (левая граница – из соображений экономичности системы, вторая – как предельно допустимая для сохранения удовлетворенности пользователей).

2. Коэффициент v_b вариации распределения длительности обслуживания рассматривался в разумном диапазоне $v \in [0, 2]$. Частное значение $v_b = 0.577$ соответствует распределению Эрланга 3-го порядка и аппроксимируется с комплексными параметрами. Значение $v_b = 0.800$ выбрано из предположительно «опасного» интервала $(1/\sqrt{2}, 1)$, в котором H_2 -аппроксимация имеет парадоксальные значения вероятностей выбора фазы – отрицательную и превышающую единицу.

3. Число каналов СМО выбиралось в пределах возможностей вычислительного метода и реализующих его Фортран-программ. Расчет заканчивался при получении очень малых длин очередей.

В табл. 2 и 3 представлены вычисленные средние длины очередей, в табл. 4 и 5 – их относительные значения по отношению к марковской модели ($\nu = 1$).

Таблица 2

Средняя длина очереди, $\rho = 0.7$

Число каналов	Коэффициенты вариации обслуживания						
	0.000	0.300	0.577	0.800	1.000	1.500	2.000
1	8.167e-1	8.902e-1	1.089	1.339	1.633	2.654	4.083
2	6.920e-1	7.514e-1	9.111e-1	1.111	1.345	2.151	3.270
3	6.027e-1	6.527e-1	7.867e-1	9.541e-1	1.149	1.816	2.740
5	4.760e-1	5.134e-1	6.136e-1	7.379e-1	8.816e-1	1.368	2.041
10	2.932e-1	3.143e-1	3.702e-1	4.389e-1	5.174e-1	7.799e-1	1.129
15	1.933e-1	2.063e-1	2.405e-1	2.822e-1	3.294e-1	4.839e-1	6.937e-1
20	1.318e-1	1.402e-1	1.621e-1	1.886e-1	2.183e-1	3.144e-1	4.434e-1
25	9.176e-2	9.729e-2	1.117e-1	1.290e-1	1.483e-1	2.098e-1	2.889e-1
30	6.476e-2	6.849e-2	7.816e-2	8.971e-2	1.025e-1	1.427e-1	1.936e-1
50	1.736e-2	1.822e-2	2.040e-2	2.296e-2	2.573e-2	3.406e-2	4.402e-2
70	4.956e-3	5.172e-3	–	–	7.009e-3	8.944e-3	1.112e-2

Таблица 3

Средняя длина очереди, $\rho = 0.9$

Число каналов	Коэффициенты вариации обслуживания						
	0.000	0.300	0.577	0.800	1.000	1.500	2.000
1	4.050	4.414	5.400	6.642	8.100	13.162	20.250
2	3.868	4.211	5.139	6.306	7.674	12.394	19.013
3	3.727	4.055	4.940	6.053	7.354	11.844	18.086
5	3.506	3.811	4.632	5.661	6.862	11.011	16.780
10	3.120	3.385	4.099	4.985	6.019	9.585	14.529
15	2.843	3.080	3.719	4.505	5.424	8.587	12.938
20	2.621	2.838	3.418	4.127	4.957	7.783	11.680
25	2.437	2.636	3.165	3.813	4.571	7.122	10.620
30	2.278	2.461	2.948	3.567	4.243	6.555	9.732
50	1.800	1.938	–	2.765	3.275	4.954	7.300
70	–	–	–	–	2.623	3.904	5.699
100	–	–	–	–	1.952	2.841	4.092
150	–	–	–	–	1.263	1.780	2.505
200	–	–	–	–	0.850	1.165	1.608
250	–	–	–	–	0.587	0.785	1.063

Таблица 4

Относительная длина очереди, $\rho = 0.7$

Число каналов	Коэффициенты вариации обслуживания						
	0.000	0.300	0.577	0.800	1.000	1.500	2.000
1	0.5000	0.5451	0.6669	0.8200	1.0000	1.6252	2.5003
2	0.5145	0.5587	0.6774	0.8261	1.0000	1.5992	2.4312
3	0.5245	0.5680	0.6847	0.8304	1.0000	1.5805	2.3847
5	0.5399	0.5824	0.6960	0.8370	1.0000	1.5517	2.3151
10	0.5667	0.6075	0.7154	0.8483	1.0000	1.5073	2.1821
15	0.5868	0.6263	0.7298	0.8561	1.0000	1.4702	2.1060
20	0.6038	0.6422	0.7426	0.8639	1.0000	1.4402	2.0311
25	0.6187	0.6560	0.7532	0.8699	1.0000	1.4147	1.9480
30	0.6318	0.6682	0.7625	0.8752	1.0000	1.3922	1.8888
50	0.6747	0.7081	0.7928	0.8923	1.0000	1.3237	1.7108
70	0.7071	0.7379	—	—	1.0000	1.2761	1.5865

Таблица 5

Относительная длина очереди, $\rho = 0.9$

Число каналов	Коэффициенты вариации обслуживания						
	0.000	0.300	0.577	0.800	1.000	1.500	2.000
1	0.5000	0.5449	0.6667	0.8200	1.0000	1.6249	2.5000
2	0.5040	0.5487	0.6697	0.8217	1.0000	1.6151	2.4776
3	0.5068	0.5514	0.6717	0.8231	1.0000	1.6106	2.4593
5	0.5109	0.5554	0.6750	0.8250	1.0000	1.6046	2.4453
10	0.5184	0.5624	0.6810	0.8282	1.0000	1.5924	2.4139
15	0.5241	0.5678	0.6857	0.8306	1.0000	1.5831	2.3850
20	0.5287	0.5725	0.6895	0.8326	1.0000	1.5701	2.3526
25	0.5331	0.5767	0.6924	0.8342	1.0000	1.5581	2.3233
30	0.5369	0.5800	0.6948	0.8407	1.0000	1.5449	2.2937
50	0.5496	0.5918	—	0.8443	1.0000	1.5127	2.2290
70	—	—	—	—	1.0000	1.4884	2.1727
100	—	—	—	—	1.0000	1.4570	2.0963
150	—	—	—	—	1.0000	1.4093	1.9834
200	—	—	—	—	1.0000	1.3703	1.8913
250	—	—	—	—	1.0000	1.3385	1.8118

По поводу этих результатов и способов их получения отметим следующее:

1. Расчет системы $M/D/n$ предполагалось выполнить методом Кроммелина [9]. Однако при $n \geq 25$ матрица коэффициентов системы линейных уравнений для вероятностей $\{p_j\}$, $j = 0, n-1$, становится

вырожденной, что блокирует продолжение вычислений. Поэтому все системы независимо от коэффициента вариации обслуживания обчисывались общей программой $M/H_2/n$. Прочерками отмечены случаи расходимости итераций.

2. Наблюдалось очень быстрое возрастание средней длины очереди по коэффициенту вариации ν (для $n=1$ в соответствии с формулой Полячека – Хинчина – в 5 раз) и по коэффициенту загрузки пропорционально отношению $\rho^2/(1-\rho)$ – в 4.96 раза (близость этих результатов – случайное следствие подбора исходных данных).

3. При $\rho = 0.9$ и коэффициенте вариации $\nu > 1$ средняя длина очереди $\bar{q}$ значима по крайней мере до $n = 30$.

4. При прочих равных условиях увеличение числа каналов приближает результаты к получаемым согласно марковской модели: для $\nu_b < 1$ растет по n , при $\nu_b > 1$ – убывает. Это приближение происходит «медленнее, чем хотелось бы». При граничных исходных данных и $\rho = 0.9$ получаем соответственно 0.55 и 1.80 – отклонения более чем значимые.

5. Ожидаемое число свободных каналов, значимое для оценки экономичности системы и возможности параллельного решения вспомогательных задач, на основе условия (3) баланса заявок не зависит от ν . То же можно сказать о среднем числе занятых каналов.

Заключение

1. В связи с расширением применения многомашинных и многопроцессорных вычислительных систем возрастает актуальность разработки методов расчета показателей их работы и прежде всего – средних длин очередей.

2. При увеличении числа каналов средняя длина очереди приближается (в зависимости от значения ν_b – снизу или сверху) к полученным на основе марковской модели, однако разница в исследованном диапазоне условий остается весьма значительной и указанная аппроксимация – недопустимой.

3. В связи с выявленным ограничением применимости метода Такахаши – Таками по числу каналов необходимо углубленное исследование сходимости итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Это касается матриц с комплексными коэффици-

ентами и общей проблемы появления при больших n «квазисобственных» значений [10], замедляющих или исключающих сходимость итераций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжиков Ю.И. Развитие и сопоставление методов расчета многоканальных систем обслуживания // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 5208–5219.
2. Яилов С.Ф. Столетие теории очередей: предисловие к тематическому выпуску // Автоматика и телемеханика. 2009. № 12. С. 3–8.
3. Bhat U.N. An Introduction to Queueing Theory. Springer, 2015. 268 p.
4. Bolch G., Greiner S., de Meer H., Trivedi K.S. Queueing Networks and Markov Chains. Modelling and Performance Evaluation. Wiley and Sons, 2006. 878 p.
5. Medhi J. Stochastic Models in Queueing Theory. Elsevier, 2003. 450 p.
6. Рыжиков Ю.И. Алгоритм расчета многоканальной системы с эрланговским обслуживанием // Автоматика и телемеханика. 1980. № 5. С. 30–37.
7. Рыжиков Ю.И., Хомоненко А.Д. Итеративный метод расчета многоканальных систем с произвольным распределением времени обслуживания // Проблемы управления и теории информации. 1980. № 3. С. 32–38.
8. Takahashi Y., Takami Y. A numerical method for the steady-state probabilities of a GI/G/c queueing system in a general class // J. Operat. Res. Soc. of Japan. 1976. V. 19. No. 2. P. 147–157.
9. Рыжиков Ю.И. Алгоритмический подход к задачам массового обслуживания: Монография. СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского, 2013. 496 с.
10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. 624 с.
11. Neuts M.F. Matrix-Analytic Methods in the Queueing Theory // Eur. J. Operational Research. 1984. V. 5. P. 2–12.

Рыжиков Юрий Иванович, д.т.н., профессор; ryzhbox@yandex.ru

Анализ RQ-системы M/GI/GI/1/1 с вызываемыми заявками, ненадежным прибором и дообслуживанием прерванных заявок¹

С.В. Пауль, А.А. Назаров

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

RQ-системы характеризуются тем фактом, что заблокированные пользователи не теряются, а повторяют свою попытку захвата прибора через некоторое время. Это явление возникает в различных реальных системах связи со случайным доступом [1], где несколько пользователей используют один канал связи. Также эти ситуации возникают и в системах обслуживания, таких, как call-центры, где клиенты, которые не могут связаться с оператором, совершают свой звонок позже [2, 3].

С точки зрения оптимального управления, в системах обслуживания, таких, как центры обработки вызовов, время простоя оператора должно использоваться для повышения производительности. Поэтому оператор не только принимает вызовы извне, но также выполняет исходящие вызовы в режиме простоя [4]. Эти ситуации моделируются системами с двумя типами заявок, где сервер обслуживает входящие и вызываемые вызовы. В последнее время такие системы широко изучаются [5–9].

В предложенных системах могут возникать ситуации, при которых работа обслуживающего устройства может быть прервана поломкой, после чего в течение некоторого времени (периода восстановления) происходит его ремонт.

Системы с ненадежным прибором часто являются предметом современных исследований [10], результаты которых могут применяться в работе с мультимедийными приложениями. Кроме того, системы с выходящими из строя приборами часто появляются при анализе транспортных систем. Примером могут послужить работы [11, 12].

В предложенной работе рассматривается RQ-система M/GI/GI/1/1 с двумя классами заявок, ненадежным прибором и дообслуживанием прерванных заявок. Для предложенной системы найдено распределение вероятностей состояний прибора и условие существования стационарного режима.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00277 от 30.01.2018.

Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим однолинейную RQ-систему с вызываемыми заявками и ненадежным прибором. На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ .

Заявка входящего потока, поступая в систему и обнаруживая прибор свободным, занимает его, а прибор начинает обслуживание в течение времени, распределенного с функцией $B_1(x)$. Если в момент поступления заявки прибор занят, то она мгновенно уходит на орбиту и осуществляет там случайную задержку в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром σ , завершив которую повторно обращается к прибору с попыткой получить обслуживание.

Когда прибор свободен, он вызывает из внешней среды (не с орбиты) с интенсивностью α дополнительные заявки, время обслуживания которых имеет функцию распределения $B_2(x)$.

Будем рассматривать систему с ненадежным прибором, который на интервалах обслуживания поступивших заявок с интенсивностью γ выходит из строя и восстанавливается с интенсивностью μ . В свободном состоянии и при обслуживании вызываемых заявок прибор надежен и не может выходить из строя.

Если во время обслуживания поступившей заявки прибор выходит из строя, то обслуживаемая заявка остается ждать на приборе и, как только прибор восстанавливается, она дообслуживается.

Когда прибор обслуживает вызываемую заявку или прибор находится в состоянии восстановления, заявки входящего потока уходят на орбиту.

Обозначим процесс $i(t)$ – число заявок в системе в момент времени t , поступивших (не вызванных) в систему.

Ставится задача – нахождение условий существования стационарного режима в рассматриваемой RQ-системе M/GI/GI/1/1 с ненадежным прибором и дообслуживанием прерванных заявок.

Система уравнений Колмогорова

Состояния прибора в момент времени t обозначим $k(t)$:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{прибор свободен;} \\ 1, & \text{прибор занят обслуживанием заявки входящего потока;} \\ 2, & \text{прибор занят обслуживанием вызываемой заявки;} \\ 3, & \text{прибор находится в состоянии восстановления.} \end{cases}$$

$z(t)$ – остаточное время обслуживания, когда $k = \overline{1, 3}$.

Также обозначим вероятности

$$P\{k(t) = k, i(t)=i, z(t)<z\} = P_k(i, z, t), k=1, 2, 3, \\ P\{k(t) = k, i(t)=i\} = P_k(i, t), k=0. \quad (1)$$

Так как случайный процесс $\{k(t), i(t), z(t)\}$, $k=1, 2, 3$, $\{k(t), i(t)\}$, $k=0$, с переменным числом компонент марковский, то для распределения вероятностей (3) составим систему уравнений Колмогорова. Запишем равенства

Обозначим $P_k(i, \infty, t) = P_k(i, t)$, $k=1, 2$. При $k=3$ $z(t)$ – остаточное время обслуживания заявки, которая дожидается восстановления прибора для завершения своего обслуживания. Система уравнений Колмогорова для распределения вероятностей в стационарном режиме имеет вид

$$-(\lambda + \alpha + i\sigma)P_0(i) + \frac{\partial P_1(i+1, 0)}{\partial z} + \frac{\partial P_2(i, 0)}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial P_1(i, z)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(i, 0)}{\partial z} - (\lambda + \gamma)P_1(i, z) + \lambda P_1(i-1, z) + \\ + \mu P_3(i, z) + \lambda B_1(z)P_0(i-1) + i\sigma B_1(z)P_0(i) = 0, \\ \frac{\partial P_2(i, z)}{\partial z} - \frac{\partial P_2(i, 0)}{\partial z} - \lambda P_2(i, z) + \lambda P_2(i-1, z) + \alpha B_2(z)P_0(i) = 0, \\ -(\lambda + \mu)P_3(i, z) + \lambda P_3(i-1) + \gamma P_1(i, z) = 0. \quad (2)$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j = \sqrt{-1}$

$$H_0(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} P_0(i), \quad H_k(u, z) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{ju i} P_k(i, z), \quad k = \overline{1, 3}. \quad (3)$$

Тогда, применяя (2), запишем систему уравнений для функций (3)

$$-(\lambda + \alpha)H_0(u) + e^{-ju} \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + \frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} + j\sigma H'_0(u) = 0, \\ \frac{\partial H_1(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + (\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma)H_1(u, z) + \\ + \mu H_3(u, z) + B_1(z)\{\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H'_0(u)\} = 0,$$

$$\frac{\partial H_2(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} + \lambda(e^{ju} - 1)H_2(u, z) + \alpha B_2(z)H_0(u) = 0, \\ (\lambda(e^{ju} - 1) - \mu)H_3(u, z) + \gamma H_1(u, z) = 0. \quad (4)$$

В системе (4) выполним предельный переход, устремив $z \rightarrow \infty$, и суммирование полученных уравнений, получим уравнение

$$-\frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + \lambda e^{ju} [H_0(u) + H_1(u) + H_2(u) + H_3(u)] = 0. \quad (5)$$

Здесь $H_k(u, \infty) = H_k(u)$, $k = \overline{1, 3}$. Так как

$$H_0(u) + H_1(u) + H_2(u) + H_3(u) = H(u), \quad (6)$$

равенство (6) позволяет в системе (5) исключить первое уравнение, заменив его на уравнение (6), тогда систему уравнений для частичных характеристических функций (5) перепишем в виде

$$\frac{\partial H_1(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + (\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma)H_1(u, z) + \\ + \mu H_3(u, z) + B_1(z) \{ \lambda e^{ju} H_0(u) - j \sigma H'_0(u) \} = 0, \\ \frac{\partial H_2(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} + \lambda(e^{ju} - 1)H_2(u, z) + \alpha B_2(z)H_0(u) = 0, \\ (\lambda(e^{ju} - 1) - \mu)H_3(u, z) + \gamma H_1(u, z) = 0, \\ \lambda e^{ju} H(u) - \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} = 0.$$

Распределение вероятностей числа заявок в RQ-системе с дообслуживанием заявок

Докажем следующее утверждение.

Теорема. Для рассматриваемой RQ-системы с дообслуживанием, обозначая $b_1 = \int_0^\infty x dB_1(x)$, $b_2 = \int_0^\infty x dB_2(x)$, вероятности $r_k = P\{k(t)=k\}$,

$k = \overline{0, 3}$, состояний прибора имеют вид

$$r_0 = \frac{1}{1 + \alpha b_2} \left\{ 1 - \frac{\mu + \gamma}{\mu} \cdot \lambda b_1 \right\}, \quad r_1 = \lambda b_1, \quad r_2 = \alpha b_2 r_0, \quad r_3 = \frac{\gamma}{\mu} r_1. \quad (8)$$

Доказательство. Обозначим

$$H_k(0, s) = r_k(s), \quad H_0(u) \Big|_{u=0} = r_0, \quad H'_0(u) \Big|_{u=0} = jm_0, \\ \frac{\partial H_k(u, z)}{\partial z} \Big|_{u=0} = r'_k(z), \quad \frac{\partial H_k(u, 0)}{\partial z} \Big|_{u=0} = r'_k(0), \quad k = 1, 2, \quad (9)$$

тогда при $u = 0$ из системы (8) получим систему уравнений:

$$r'_1(z) - r'_1(0) - \gamma r_1(z) + \mu r_3(z) + B_1(z) \{ \lambda r_0 + \sigma m_0 \} = 0, \\ r'_2(z) - r'_2(0) + \alpha B_2(z) r_0 = 0, \\ -\mu r_3(z) + \gamma r_1(z) = 0, \\ \lambda - r'_1(0) = 0. \quad (10)$$

Складываем первое и третье уравнения системы (10), получим

$$r'_1(z) = r'_1(0) - B_1(z) \{ \lambda r_0 + \sigma m_0 \}.$$

Из четвертого уравнения имеем

$$r'_1(0) = \lambda.$$

Тогда

$$r'_1(z) = \lambda - B_1(z) \{ \lambda r_0 + \sigma m_0 \}, \\ r'_2(z) = r'_2(0) - \alpha B_2(z) r_0. \quad (11)$$

Устремим $z \rightarrow \infty$, получим, что выполняются равенства

$$\lambda = \lambda r_0 + \sigma m_0, \\ r'_2(0) = \alpha r_0.$$

Систему (11) перепишем в виде

$$r_1(z) = \lambda \int_0^z (1 - B_1(x)) dx, \quad r_2(z) = \alpha r_0 \int_0^z (1 - B_2(x)) dx. \quad (12)$$

При $z \rightarrow \infty$ из этих равенств и третьего уравнения системы (10) получим выражения

$$r_1 = \lambda b_1, \quad r_2 = \alpha b_2 r_0, \quad r_3 = \frac{\gamma}{\mu} r_1. \quad (13)$$

Значение вероятности r_0 найдем из условия нормировки в виде первого равенства в (8). Теорема доказана.

Следствие. Условием существования стационарного режима в рассматриваемой RQ-системе с дообслуживанием является выполнение неравенства

$$\lambda < \frac{\mu}{\mu + \gamma} \cdot \frac{1}{b_1} \quad (14)$$

Доказательство. Условие (14) следует из положительности вероятности r_0 в (10). Следствие доказано.

Определим пропускную способность S системы как максимальное среднее число заявок, которые могут быть обслужены в рассматриваемой системе за единицу времени. В силу неравенства (14) значение S для рассматриваемой RQ-системы с вызываемыми заявками и ненадежным прибором определяется равенством

$$S = \frac{\mu}{\mu + \gamma} \cdot \frac{1}{b_1}. \quad (15)$$

Если значение параметра λ входящего потока определять равенством $\lambda = \rho S$, то при любых значениях параметра $0 < \rho < 1$ в рассматриваемой RQ-системе существует стационарный режим, а вероятности r_k из (8) состояний прибора можно записать в виде

$$r_0 = \frac{1 - \rho}{1 + \alpha b_2}, \quad r_1 = \rho \frac{\mu}{\mu + \gamma}, \quad r_2 = \alpha b_2 \frac{1 - \rho}{1 + \alpha b_2}, \quad r_3 = \frac{\gamma}{\mu + \gamma} \rho, \quad (16)$$

который не зависит от вида функций распределения $B_1(x)$ и $B_2(x)$ времени обслуживания как поступающих, так и вызываемых заявок. При этом интенсивность λ входящего потока линейно зависит от S , которая в силу (15) не зависит от вида функций распределения $B_1(x)$ и $B_2(x)$.

Заключение

В работе была рассмотрена RQ-система M/GI/GI/1/1 с двумя классами заявок, ненадежным прибором и дообслуживанием прерванных заявок. Для предложенной модели найдено распределение вероятностей состояний прибора и условие существования стационарного режима.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Retrial queueing systems: a computational approach. Springer, 2008. P. 315.
2. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial Queues. London: Chapman and Hall, 1997.
3. *Bhulai S., Koole G.* A queueing model for call blending in call centers // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. V. 48. P. 1434–1438.
4. *Deslauriers A., L'Ecuyer P., Pichitlamken J., Ingolfsson A., Avramidis A. N.* Markov chain models of a telephone call center with call blending. Computers and Operations Research. 2007. V. 34. P. 1616–1645.
5. *Choi B.D., Choi K.B., Lee Y.W.* M/G/1 retrial queueing systems with two types of calls and finite capacity // Queueing Systems. 1995. V. 19. P. 215–229.
6. *Tran-Gia P., Mandjes M.* Modeling of customer retrial phenomenon in cellular mobile networks // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 1997. V. 15. P. 1406–1414.
7. *Artalejo J.R., Phung-Duc T.* Markovian retrial queues with two way communication // J. Industrial and Management Optimization. 2012. V. 8. P. 781–806.
8. *Artalejo J.R., Phung-Duc T.* Single server retrial queues with two way communication // Applied Mathematical Modelling. 2013. V. 37. No. 4. P. 1811–1822.
9. *Nazarov A., Paul S., Gudkova I.* Asymptotic Analysis of Markovian Retrial Queue with Two-Way Communication under Low Rate of Retrials Condition // Proc. 31st European Conference on Modelling and Simulation, ECMS, Budapest, 2017. P. 687–693.
10. *Djellab N.V.* On the M/G/1 retrial queue subjected to breakdowns // RAIRO – Operations Research. 2002. V.36. No. 4. P. 299–310.
11. *Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В.* Некоторые задачи для потоков взаимодействующих частиц // Современные проблемы математики и механики. 2009. С. 55–67.
12. *Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В.* Математические модели транспортных систем, основанные на теории очередей // Труды МФТИ. 2010. Вып. 4(2). С. 6–21.

Пауль Светлана Владимировна, к.ф.-м.н., доцент paulsv82@mail.ru;

Назаров Анатолий Андреевич, д.т.н., профессор, nazarov.tsu@gmail.com

К анализу вероятности блокировки в модели беспроводной сети со случайным объемом ресурса

М. Саркер, К.И. Аду

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

Построена модель одной соты беспроводной сети (БС), представленной в виде системы массового обслуживания, приборы которой находятся в случайной среде, способной оказывать влияние на их состояние.

Рассмотрим случайную среду, способную оказывать влияние на показатели качества обслуживания пользователей в рамках одной соты беспроводной сети передачи данных, радиус которой равен R . Предположим, что все пользователи соты находятся на одинаковом расстоянии от БС, определим это расстояние как d . В систему поступают запросы пользователей, генерирующие потоковый трафик, характеризующийся фиксированной скоростью передачи данных r_0 .

Под влиянием случайной среды мощность передачи данных может меняться, что, в свою очередь, отражается на скорости передачи данных и максимальном количестве обслуживаемых пользователей. Далее перейдем к подробному описанию частного случая модели, в котором мощность передачи данных может быть изменена только дважды. Для расчета вероятностных характеристик этого случая исследованы общие модели.

1. Построение математической модели

Рассмотрим общий случай модели. Пусть состояние случайной среды определяется множеством $\{0, \dots, S\}$. Управление доступом к радиоресурсам системы реализовано таким образом, что под действием внешней среды происходит снижение мощности передачи данных со значения P_s до значения P_{s-1} , $s = 1, \dots, S$, при этом среда с интенсивностью α_s , $s = 1, \dots, S$, переходит в состояние $s-1$, с интенсивностью β_s , $s = 0, \dots, S-1$ происходит обратный переход из состояния $s-1$ в состояние S , $s = 1, \dots, S$, и восстановление мощности до уровня P_s , $s = 1, \dots, S$.

При переходе среды в состояние $s-1$, $s = 1, \dots, S$ происходит снижение числа обслуживаемых запросов пользователей с N_s до N_{s-1} , $s = 1, \dots, S$. Максимальное число N_s , $s = 0, \dots, S$, обслуживаемых в системе пользователей может быть рассчитано как отношение достижимой скорости передачи данных r_s , $s = 0, \dots, S$, определяемой согласно формуле Шеннона и в соответствии с текущим состоянием среды, к гарантированной скорости r_0 .

$$N_s = \left\lfloor \frac{\omega \ln \left(\frac{Gp_s}{d^k N_s} + 1 \right)}{r_0} \right\rfloor, \quad s = 0, \dots, S. \quad (1)$$

Так как $N_s > N_{s-1} > \dots > N_0$, то под воздействием случайной среды происходит прерывание обслуживания $N_s - N_{s-1}$, $s = 1, \dots, S$, запросов. Состояние модели описывает двумерный вектор (n, s) над пространством состояний

$$X = \{(n, s) : 0 \leq n \leq N_s, s = 0, \dots, S\}, \quad (2)$$

где n – число обслуживаемых запросов пользователей, s – состояние случайной среды.

Элементы матрицы интенсивностей переходов для данной системы определяются следующим образом:

$$a((n, s)(n', s')) = \begin{cases} \alpha_s, & \text{если } n' = n, s' = s-1, n = \overline{0}, \overline{N_{s-1}}, s = \overline{1}, \overline{S}; \\ & \text{или } n' = N_{s-1}, s' = s-1, n \geq \overline{N_{s-1}}, s = \overline{1}, \overline{S}; \\ \beta_s, & \text{если } n' = n, s' = s+1, n = \overline{0}, \overline{N_s}, s = \overline{1}, \overline{S-1}; \\ \lambda_s, & \text{если } n' = n+1, s' = s, n < \overline{N_s}, s = \overline{0}, \overline{S}; \\ n\mu, & \text{если } n' = n-1, s' = s, n > \overline{0}, s = \overline{0}, \overline{S}; \\ *, & \text{если } n' = n-1, s' = s; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3)$$

Тогда граф интенсивностей переходов имеет вид, представленный на рис. 1.

Для наглядности выпишем центральное состояние системы (рис. 2.).

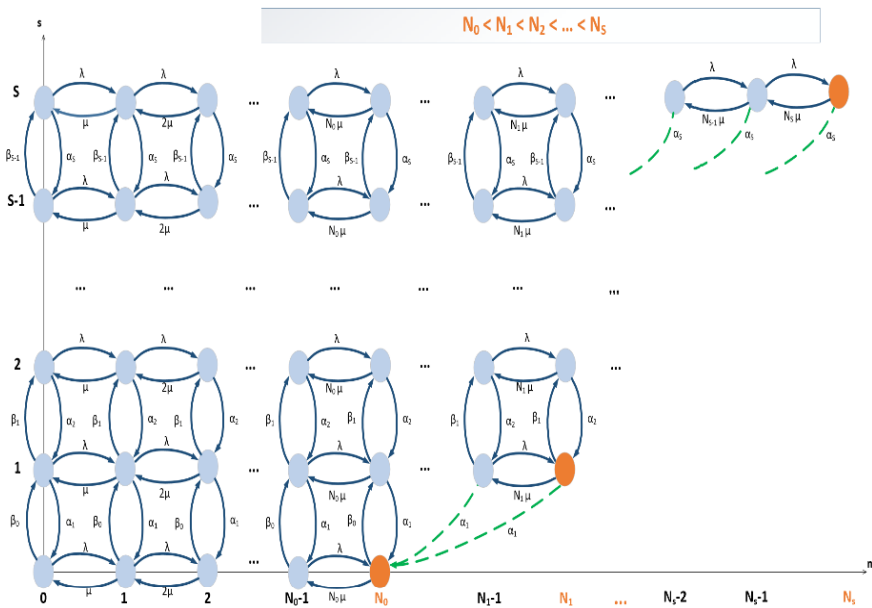


Рис. 1. Граф интенсивностей переходов

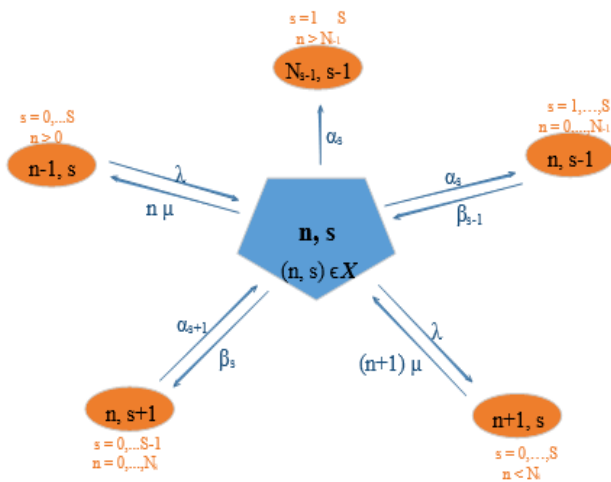


Рис. 2. Диаграмма центрального состояния

Рассматриваемый марковский процесс состояний системы описывается следующей системой уравнений равновесия:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (\lambda + \beta_0) p(0,0) = \mu p(1,0) + \alpha_1 p(0,1); \\
 (\lambda + \alpha_s + \beta_s) p(0,s) = \mu p(1,s) + \alpha_{s+1} p(0,s+1) + \beta_{s-1} p(0,s-1), s = \overline{1, S-1}; \\
 (\lambda + \alpha_s) p(0,s) = \mu p(1,s) + \beta_{s-1} p(0,s-1); \\
 (\lambda + n\mu + \beta_0) p(n,0) = \lambda p(n-1,0) + (n+1)\mu p(n+1,0) + \alpha_1 p(n,1), n = \overline{1, N_0-1}; \\
 (\lambda + n\mu + \alpha_s + \beta_s) p(n,s) = \lambda p(n-1,s) + (n+1)\mu p(n+1,s) + \alpha_{s+1} p(n,s+1) + \\
 + \beta_{s-1} p(n,s-1), s = \overline{1, S-1}, n = \overline{1, N_s-1}; \\
 (\lambda + n\mu + \alpha_s) p(n,s) = \lambda p(n-1,s) + (n+1)\mu p(n+1,s) + \beta_{s-1} p(n,s-1), \\
 n = \overline{1, N_s-1}; \\
 (\lambda + n\mu + \alpha_s + \beta_s) p(n,s) = \lambda p(n-1,s) + (n+1)\mu p(n+1,s), s = \overline{1, S-1}, \\
 n = \overline{N_{s-1}+1, N_s-1}; \\
 (\lambda + n\mu + \alpha_s) p(n,s) = \lambda p(n-1,s) + (n+1)\mu p(n+1,s), n = \overline{N_{s-1}+1, N_s-1}; \\
 (N_0\mu + \beta_0) p(N_0,0) = \lambda p(N_0-1,0) + \alpha_1 \sum_{n=N_0}^{N_1} p(n,1); \\
 (\alpha_s + N_s\mu + \beta_s) p(N_s,s) = \alpha_{s+1} \sum_{n=N_s}^{N_{s+1}} p(n,s+1) + \lambda p(N_s-1,s); \\
 (\alpha_s + N_s\mu) p(N_s,s) = \lambda p(N_s-1,s),
 \end{array} \right. \quad (4)$$

где $p(n, s)$, $(n, s) \in X$, – стационарное распределение вероятностей состояний системы.

Стационарное распределение вероятностей состояний модели определяется по формуле

$$p(n, s) = \frac{q(n, s)}{\sum_{(i, j) \in X} q(i, f)}, (n, s) \in X; \quad (5)$$

Вероятность блокировки запроса на установление одноадресного соединения рассчитывается как

$$B = \sum_{s=0}^S p(N_s, s). \quad (6)$$

Заключение

В ходе исследования были рассмотрены особенности использования системы массового обслуживания с приборами в случайной среде для анализа средней скорости передачи данных. Выписана матрица интенсивности переходов. Предложена формула для расчета вероятности блокировки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баширин Г.П.* Лекции по математической теории телетрафика: учеб. пособие. 3-е изд., испр. и доп. М.: РУДН, 2009. 342 с.
2. *Ahmadian A., Galinina. O., Gudkova I., Andreev S., Shorgin S., and Samouylov K.* On capturing spatial diversity of joint M2M/H2H dynamic uplink transmissions in 3GPP LTE cellular system // *Lecture Notes in Computer Science*. 2014. V. 9247. P. 407–421.
3. *Markova E., Gudkova I., Ometov A., Dzantiev I., Andreev S., Koucheryavy Ye., Samouylov K.* Flexible Spectrum Management in a Smart City.

Аду Кпангни Ивь Бэрэнжэ, студент; 1032135491@pfur.ru;

Саркер Мурари, студент, murari.sarker@mail.ru

Использование сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований в качестве моделей транспортных систем

Е.П. Станкевич

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

Сети массового обслуживания с групповыми переходами требований являются удобным и эффективным инструментом для исследования и оптимизации дискретных сложных систем с сетевой структурой и стохастическим характером функционирования. Поэтому в настоящее время большое внимание уделяется разработке методов анализа сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований и методов управления сетями обслуживания данного класса [1–4]. В данной работе рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания с групповыми переходами требований трех классов. Структура, принципы функционирования и методы анализа рассматриваемой неоднородной сети обслуживания подробно описаны в [3]. Системы сети обслуживания могут быть объединены в непересекающиеся кластеры систем обслуживания. Метод управления вероятностями завершения обслуживания в кластерах однородных сетей массового обслуживания, приведенный в [2], в данной работе обобщен для неоднородных сетей обслуживания. Получена мультипликативная форма стационарного распределения.

Описание модели

Рассматриваемая сеть массового обслуживания является математической моделью гипотетической транспортной сети. Системы массового обслуживания отображают дороги со светофорами, а требования трех классов – автомобили, движущиеся по дорогам. Требования первого класса – это автомобили, движущиеся на зеленый свет, второго класса – на желтый, третьего класса – автомобили, попавшие под красный свет светофора, ожидающие зеленого. Элементы маршрутной матрицы сети обслуживания отображают движение автомобилей на перекрестках или

случаи, когда автомобиль, двигаясь по одной дороге, попадает под действие другого света светофора. Управление вероятностями завершения обслуживания в кластерах систем соответствует управлению длительностью работы определенного света светофора.

Пусть N – замкнутая сеть массового обслуживания с L системами массового обслуживания S_i , $i=1, \dots, L$, в которой обслуживаются требования трех классов. Вероятности перехода требований между системами сети определяются неприводимой маршрутной матрицей $\Theta=(\theta_{ikjl})$, $i, j=1, \dots, L$, $k, l=1, 2, 3$, где θ_{ikjl} – вероятность того, что требование класса k после завершения обслуживания в системе S_i поступает в систему S_j с изменением своего класса на l . Начальное число требований различных классов определяется вектором $H=(H_k)$, $k=1, 2, 3$, где H_k – начальное число требований класса k в сети, $\hat{H} = \sum_{k=1}^3 H_k$. Система S_i , $i=1, \dots, L$, включает $\hat{H}$ одинаковых обслуживающих приборов. Предполагается, что длительность обслуживания в системе S_i , $1 \leq i \leq L$, требований класса k является дискретной случайной величиной, имеющей геометрическое распределение с параметром μ_{ik} , $0 < \mu_{ik} < 1$, $i=1, \dots, L$, $k=1, 2, 3$ (данные ограничения на значения μ_{ik} не влияют на общность полученных результатов).

Через интервалы времени единичной длительности, называемые слотами, в каждую систему S_i , $1 \leq i \leq L$, поступают управляющие сигналы, по которым обслуженные в системе S_i требования выходят из нее, освобождая занимаемые ими приборы. Состояние сети N определяется вектором $s=(s_i)$, $s_i=(s_{ik})$, $i=1, \dots, L$, $k=1, 2, 3$, где s_{ik} – число требований класса k , находящихся в системе S_i . Обозначим через X множество состояний сети N , а через $I=\{1, \dots, L\}$ – множество номеров систем массового обслуживания. В конце слота формируется вектор уходящих из систем требований $d=(d_i)$, $d_i=(d_{ik})$, $i=1, \dots, L$, $k=1, 2, 3$, где d_{ik} – число требований класса k , выходящих из системы S_i после завершения обслуживания. Затем каждое требование осуществляет переход из системы S_i в систему S_j независимо от других требований с вероятностью θ_{ikjl} . Требования класса k , поступающие в систему S_j , образуют вектор входящих требований $a=(a_j)$, $a_j=(a_{jk})$, $j=1, \dots, L$, $k=1, 2, 3$, где a_{jk} – число требований класса k , поступающих в систему S_j . Алгоритмы перехода сети N из состояния s в состояние s' подробно описаны в [3].

Сеть N имеет мультипликативную форму стационарного распределения [3]

$$\pi_s = \frac{1}{G} \prod_{i=1}^L \prod_{k=1}^3 \frac{\omega_{ik}^{s_{ik}}}{s_{ik}! (\mu_{ik})^{s_{ik}}}, \quad s \in X,$$

где

$$G = \sum_{s \in X} \prod_{i=1}^L \prod_{k=1}^3 \frac{\omega_{ik}^{s_{ik}}}{s_{ik}! (\mu_{ik})^{s_{ik}}}.$$

Здесь $\omega = (\omega_i)$, $\omega_i = (\omega_{ik})$, $i=1, \dots, L$, $k=1, 2, 3$, – вектор относительных интенсивностей потоков требований в сети N , который является решением системы уравнений потоков

$$\omega_{ik} = \sum_{j=1}^L \sum_{l=1}^3 \omega_{jl} \theta_{jl,ik}, \quad i=1, \dots, L, \quad k=1, 2, 3,$$

с условием

$$\sum_{i=1}^L \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} = 1.$$

Рассмотрим сеть N^C , структура и принцип функционирования которой такие же, как у сети N , отличие состоит в том, что системы сети N^C принадлежат одному из R непересекающихся кластеров N_r , $r=1, \dots, R$, и в сети N^C осуществляется управление потоками, реализуемое посредством изменения вероятностей завершения обслуживания требований в слоте. С каждым из кластеров N_r связано множество I_r номеров систем. Предполагается, что вероятности завершения обслуживания требований определенного класса k в слоте в системах одного кластера одинаковые и равны $\hat{\mu}_{rk}$. Длительность обслуживания требований в системе S_i , $i \in I_r$, имеет геометрическое распределение с параметром $\hat{\mu}_{rk}$, $0 < \hat{\mu}_{rk} < 1$, $r=1, \dots, R$, $k=1, 2, 3$.

Введем следующие обозначения для числа требований класса k , $k=1, 2, 3$, в кластере N_r , $r=1, \dots, R$:

$$n_{rk}(s) = \sum_{j \in I_r} s_{jk},$$

$$m_{rk}(d) = \sum_{j \in I_r} d_{jk},$$

то есть $n(s) = (n_r(s))$, $n_r(s) = (n_{rk}(s))$, $r=1, \dots, R$, $k=1, 2, 3$, представляет вектор

числа требований в кластерах, а $m(d)=(m_r(d))$, $m_r(d)=(m_{rk}(d))$, $r=1,\dots,R$, $k=1,2,3$, – вектор числа требований, уходящих из кластеров.

Учитывая, что для сети N^C с R кластерами вероятность формирования вектора d , когда сеть находится в состоянии s , имеет вид

$$p_{s,d} = \prod_{r=1}^R \prod_{k=1}^3 \prod_{i \in I_r} \binom{s_{ik}}{d_{ik}} \hat{\mu}_{rk}^{m_{rk}(d)} (1 - \hat{\mu}_{rk})^{n_{rk}(s) - m_{rk}(d)},$$

и используя результаты теоремы для однородной сети массового обслуживания [2], получаем, что для сети N^C с R кластерами стационарные вероятности состояний имеют вид

$$\pi_s = \frac{1}{G} \prod_{r=1}^R \prod_{k=1}^3 \left(\frac{1}{\hat{\mu}_{rk}} \right)^{n_{rk}(s)} \prod_{i \in I_r} \frac{\omega_{ik}^{s_{ik}}}{s_{ik}!}, \quad s \in X,$$

где

$$G = \sum_{s \in X} \prod_{r=1}^R \prod_{k=1}^3 \left(\frac{1}{\hat{\mu}_{rk}} \right)^{n_{rk}(s)} \prod_{i \in I_r} \frac{\omega_{ik}^{s_{ik}}}{s_{ik}!}.$$

Предположим, что требуется, чтобы число требований в кластере N_1 не превосходило некоторого фиксированного числа M_1 . Этого можно достичь уменьшением вероятностей завершения обслуживания требований в слоте в системах обслуживания других кластеров посредством использования множителя ε_r в кластере N_r , $r=2,\dots,R$, когда $n_1(s) > M_1$, $s \in X$. Таким образом, получим обслуживание в сети, учитывающее взаимную зависимость кластеров.

Обозначим $\mathbf{1}(A)$ индикатор события A , то есть $\mathbf{1}(A)=1$, если событие A произошло, и $\mathbf{1}(A)=0$ в противном случае.

Используя результаты работы [2], для сети N^C с R взаимозависимыми кластерами и тремя классами требований, если требуется, чтобы $n_1(s) \leq M_1$, получаем, что стационарные вероятности состояний имеют вид

$$\pi_s = \frac{1}{G} \left[\prod_{r=2}^R \varepsilon_r - \left(\prod_{r=2}^R \varepsilon_r - 1 \right) \mathbf{1}(n_1(s) \leq M_1) \right] \prod_{r=1}^R \prod_{k=1}^3 \left(\frac{1}{\hat{\mu}_{rk}} \right)^{n_{rk}(s)} \prod_{i \in I_r} \frac{\omega_{ik}^{s_{ik}}}{s_{ik}!}, \quad s \in X,$$

где

$$G = \sum_{s \in X} \left[\prod_{r=2}^R \varepsilon_r - \left(\prod_{r=2}^R \varepsilon_r - 1 \right) \mathbf{1}(n_1(s) \leq M_1) \right] \prod_{r=1}^R \prod_{k=1}^3 \left(\frac{1}{\hat{\mu}_{rk}} \right)^{n_{rk}(s)} \prod_{i \in I_r} \frac{\omega_{ik}^{s_{ik}}}{s_{ik}!}.$$

Заключение

Одной из причин автомобильных пробок на дорогах являются неправильно отрегулированные светофоры. Целью приведенного метода управления вероятностями завершения обслуживания требований в системах является ограничение сверху числа требований, которые могут находиться в системе. Другими словами, в данной работе приведен метод управления длительностями работы светофора для того, чтобы число автомобилей, движущихся по определенной дороге, не превосходило заранее заданного числа. Заметим, что в транспортной сети по дороге может двигаться конечное число автомобилей. В системах обслуживания рассматриваемой сети, бесконечное число обслуживающих приборов. Это ограничение снимается введением максимального числа требований, которые могут находиться в системе обслуживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boucherie R.J., Dijk N.M.* Product forms for queueing networks with state-dependent multiple job transitions // *Adv. Appl. Prob.* 1991. V. 23. No. 1. P. 152–187.
2. *Митрофанов Ю.И., Долгов В.И., Рогачко Е.С., Станкевич Е.П.* Сети массового обслуживания с групповыми переходами требований, блокировками и кластерами // *Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Серия Математика. Механика. Информатика*, 2013. Т. 13. Вып. 2. Ч. 2. С. 20–31.
3. *Митрофанов Ю.И., Рогачко Е.С., Станкевич Е.П.* Анализ неоднородных сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований // *Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Серия Математика. Механика. Информатика*. 2011. Т. 11. Вып. 3. Ч. 1. С. 41–46.
4. *Тананко И.Е., Фокина Н.П.* Анализ замкнутых ненадежных сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований // *Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Серия Математика. Механика. Информатика*. 2013. Т. 13. Вып. 2. Ч. 1. С. 111–117.

Станкевич Елена Петровна, старший преподаватель, stankevichelena@mail.ru

Исследование потоков в неоднородной системе массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих устройств и повторными обращениями

М.А. Шкленник, А.Н. Моисеев

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Системы массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом обслуживающих приборов широко используются при моделировании процессов в решении различных экономических задач, а также в социальных, демографических и других областях [1–3]. Системы, в которых заявки имеют возможность обратиться к системе для повторного обслуживания, или так называемые системы с обратной связью [4], используются, например, для описания процессов дообслуживания в инфокоммуникационных системах [4–7]. В работах [8–10] при исследовании подобных систем предполагается, что время обслуживания поступившей заявки и время повторного обслуживания имеет один и тот же закон распределения, что не всегда так. Зачастую заявке, обратившейся для повторного обслуживания, требуется уже гораздо меньше времени. В настоящей работе предполагаем, что время обслуживания заявок, обратившихся в систему впервые и повторно, отличается по характеристикам.

Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих устройств. На вход системы поступает простейший поток заявок с параметром λ . Время обслуживания τ_1 заявки, впервые обратившейся в систему, является случайной величиной, имеющей экспоненциальный закон распределения с параметром μ_1 . Заявка, обслуживание которой завершено, может вернуться в систему для повторного обслуживания с вероятностью r_1 или может покинуть систему с вероятностью $(1 - r_1)$. При повторном обращении заявки время обслуживания τ_2 на каждом из приборов системы является случайной величиной, распределенной также по экспоненциальному закону, но с параметром μ_2 . После повторного обслуживания заявка может вновь вернуться в систему с вероятностью r_2 и с вероятностью $(1 - r_2)$ может покинуть систему.

Обозначим число приборов системы, занятых обслуживанием поступивших заявок в момент времени $t - i_1(t)$; число приборов системы, занятых обслуживанием повторных заявок в момент времени $t - i_2(t)$; число обращений к системе из внешнего источника (первичные заявки), реализованных к моменту времени $t - l(t)$; число повторных обращений к системе после первого обслуживания – $n_1(t)$; число обращений к системе после второго и последующих обслуживаний – $n_2(t)$. Ставится задача исследования трехмерного потока заявок в системе.

Производящая функция трехмерного потока обращений к системе

Рассмотрим трехмерный процесс $\{l(t), n_1(t), n_2(t)\}$. Очевидно, что данный процесс не является марковским [11], поэтому рассмотрим многомерный марковский процесс $\{l(t), n_1(t), n_2(t), i_1(t), i_2(t)\}$.

Сформулируем (без доказательства) вспомогательное утверждение.

Лемма. *Производящая функция двумерного процесса $\{i_1(t), i_2(t)\}$ числа занятых приборов в неоднородной системе $M|M|^\infty$ с повторными обращениями в стационарном режиме имеет вид*

$$g(x_1, x_2) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu_1} (x_1 - 1) + \frac{\lambda r_1}{\mu_2 (1 - r_2)} (x_2 - 1) \right\}. \quad (1)$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема. *Производящая функция $G(z, y_1, y_2, t)$ трехмерного процесса $\{l(t), n_1(t), n_2(t)\}$ числа обращений в неоднородной системе $M|M|^\infty$ с обратной связью имеет вид*

$$\begin{aligned} G(z, y_1, y_2, t) = & \exp \left\{ \lambda t \left[z - 1 - r_1 z \left(1 - \frac{1 - r_2}{1 - r_2 y_2} y_1 \right) \right] + \right. \\ & + \frac{\lambda r_1}{\mu_1} (z - 1) \left(1 - \frac{1 - r_2}{1 - r_2 y_2} y_1 \right) (1 - e^{-\mu_1 t}) + \frac{\lambda r_1 r_2 (y_2 - 1)}{1 - r_2 y_2} \times \\ & \times \left[\frac{1 - e^{-\mu_2 (1 - r_2 y_2) t}}{\mu_2 (1 - r_2)} - \frac{y_1 (z - 1) (e^{-\mu_2 (1 - r_2 y_2) t} - e^{-\mu_1 t})}{\mu_2 (1 - r_2 y_2) - \mu_1} - \frac{y_1 z (1 - e^{-\mu_2 (1 - r_2 y_2) t})}{\mu_2 (1 - r_2 y_2)} \right] \left. \right\}. \quad (2) \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть распределение вероятностей для процесса $\{l(t), n_1(t), n_2(t), i_1(t), i_2(t)\}$ в момент времени t записывается как:

$$P(l, n_1, n_2, i_1, i_2, t) = P\{l(t) = l, n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2\}.$$

Для данного распределения Δt -методом [12] составим прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(l, n_1, n_2, i_1, i_2, t)}{\partial t} + (\lambda + i_1 \mu_1 + i_2 \mu_2) P(l, n_1, n_2, i_1, i_2, t) = \\ = \lambda P(l-1, n_1, n_2, i_1-1, i_2, t) + (i_1+1) \mu_1 r_1 P(l, n_1-1, n_2, i_1+1, i_2-1, t) + \\ + (i_1+1) \mu_1 (1-r_1) P(l, n_1, n_2, i_1+1, i_2, t) + i_2 \mu_2 r_2 P(l, n_1, n_2-1, i_1, i_2, t) + \\ + (i_2+1) \mu_2 (1-r_2) P(l, n_1, n_2, i_1, i_2+1, t), \end{aligned} \quad (3)$$

для $l = 0, 1, 2, \dots; n_1 = 0, 1, 2, \dots; n_2 = 0, 1, 2, \dots; i_1 = 0, 1, 2, \dots; i_2 = 0, 1, 2, \dots$

Начальные условия для данной системы:

$$P(l, n_1, n_2, i_1, i_2, 0) = \begin{cases} q(i_1, i_2), & \text{если } n_1 = n_2 = l = 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4)$$

где $q(i_1, i_2)$ – распределение вероятностей числа занятых приборов в стационарном режиме определяется производящей функцией $g(x_1, x_2)$. Нетрудно показать, что функция $g(x_1, x_2)$ имеет вид (1).

Определим производящую функцию распределения $P(l, n_1, n_2, i_1, i_2, t)$ в виде

$$G(z, y_1, y_2, x_1, x_2, t) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} z^l y_1^{n_1} y_2^{n_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdot P(l, n_1, n_2, i_1, i_2, t).$$

Тогда из системы дифференциальных уравнений (3) для функции $G(z, y_1, y_2, x_1, x_2, t)$ получаем линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z, y_1, y_2, x_1, x_2, t)}{\partial t} + \mu_1 (x_1 - r_1 x_2 y_1 - 1 + r_1) \cdot \frac{\partial G(z, y_1, y_2, x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + \\ + \mu_2 (x_2 - r_2 x_2 y_2 - 1 + r_2) \cdot \frac{\partial G(z, y_1, y_2, x_1, x_2, t)}{\partial x_2} = \\ = \lambda (x_1 z - 1) \cdot G(z, y_1, y_2, x_1, x_2, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Так как за интервал времени, длина которого равна нулю, число повторных обращений равно нулю, то начальное условие для $G(z, y_1, y_2, x_1, x_2, t)$ имеет вид

$$G(z, y_1, y_2, x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2). \quad (6)$$

Решение дифференциального уравнения в частных производных первого порядка сводится к интегрированию соответствующей ему сис-

темы дифференциальных уравнений. В нашем случае уравнению (5) соответствует система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dt}{1} &= \frac{dx_1}{\mu_1(x_1 - r_1 x_2 y_1 - 1 + r_1)} = \frac{dx_2}{\mu_2(x_2 - r_2 x_2 y_2 - 1 + r_2)} = \\ &= \frac{dG(z, y_1, y_2, x_1, x_2, t)}{\lambda(x_1 z - 1)G(z, y_1, y_2, x_1, x_2, t)}.\end{aligned}\quad (7)$$

Интегрируем равенство

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_2}{\mu_2(x_2 - r_2 x_2 y_2 - 1 + r_2)}$$

и получаем первый интеграл системы

$$C_1 = \left(x_2 - \frac{1 - r_2}{1 - r_2 y_2} \right) \cdot e^{-\mu_2(1 - r_2 y_2)t}.$$

Интегрируя равенство

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{\mu_1(x_1 - r_1 x_2 y_1 - 1 + r_1)},$$

находим другой первый интеграл системы

$$C_2 = \left(x_1 - 1 + r_1 - \frac{r_1(1 - r_2)y_1}{1 - r_2 y_2} + \frac{\mu_1 r_1 y_1}{\mu_2(1 - r_2) - \mu_1} \left(x_2 - \frac{1 - r_2}{1 - r_2 y_2} \right) \right) \cdot e^{-\mu_1 t}.$$

И проинтегрировав равенство

$$\frac{dt}{1} = \frac{dG(z, y_1, y_2, x_1, x_2, t)}{\lambda(x_1 z - 1)G(z, y_1, y_2, x_1, x_2, t)},$$

находим

$$\begin{aligned}G(z, y_1, y_2, x_1, x_2, t) &= C_3 \exp \left\{ \lambda t \left[z \left(1 - r_1 + \frac{r_1(1 - r_2)}{1 - r_2 y_2} y_1 \right) - 1 \right] + \frac{\lambda z}{\mu_1} (x_1 - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda z r_1}{\mu_1} \left(1 - \frac{1 - r_2}{1 - r_2 y_2} y_1 \right) + \frac{\lambda z r_1 y_1}{\mu_2(1 - r_2 y_2)} \left(x_2 - \frac{1 - r_2}{1 - r_2 y_2} \right) \right\},\end{aligned}$$

где $C_3 = \Phi(C_1, C_2)$ – произвольная дифференцируемая функция. Тогда общее решение уравнения (5) можно записать в виде

$$G(z, y_1, y_2, x_1, x_2, t) = \Phi \left\{ \left(x_2 - \frac{1 - r_2}{1 - r_2 y_2} \right) \cdot e^{-\mu_2(1 - r_2 y_2)t}, \right.$$

$$\left\{ x_1 - 1 + r_1 - \frac{r_1(1-r_2)y_1}{1-r_2y_2} + \frac{\mu_1 r_1 y_1}{\mu_2(1-r_2) - \mu_1} \left(x_2 - \frac{1-r_2}{1-r_2y_2} \right) \right\} \cdot e^{-\mu_1 t} \Bigg\} \times$$

$$\times \exp \left\{ \lambda t \left[z \left(1 - r_1 + \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_2y_2} y_1 \right) - 1 \right] + \frac{\lambda z}{\mu_1} (x_1 - 1) + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda z r_1}{\mu_1} \left(1 - \frac{1-r_2}{1-r_2y_2} y_1 \right) + \frac{\lambda z r_1 y_1}{\mu_2(1-r_2y_2)} \left(x_2 - \frac{1-r_2}{1-r_2y_2} \right) \right\}.$$

Вид функции $\Phi(U, V)$ найдем, используя начальные условия (6) для уравнения (5). Получим

$$\Phi(U, V) = \exp \left\{ \lambda r_1 U \left(\frac{y_1(z-1)}{\mu_2(1-r_2y_2) - \mu_1} - \frac{y_1 z}{\mu_2(1-r_2y_2)} + \frac{1}{\mu_2(1-r_2)} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda}{\mu_1} (z-1)V - \frac{\lambda r_1}{\mu_1} (z-1) \cdot \left(1 - \frac{1-r_2}{1-r_2y_2} y_1 \right) + \frac{\lambda r_1 r_2 (y_2 - 1)}{\mu_2(1-r_2)(1-r_2y_2)} \right\}.$$

Подставляя вместо вспомогательных переменных U и V выражения для C_1 и C_2 , окончательно получаем выражение для производящей функции $G(z, y_1, y_2, x_1, x_2, t)$ многомерного марковского процесса $\{l(t), n_1(t), n_2(t), i_1(t), i_2(t)\}$:

$$G(z, y_1, y_2, x_1, x_2, t) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu_1} (x_1 - 1) \left[z \left(1 - e^{-\mu_1 t} \right) + e^{-\mu_1 t} \right] + \right.$$

$$+ \lambda r_1 (x_2 - 1) \left[\frac{e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}}{\mu_2(1-r_2)} + \frac{y_1(z-1)}{\mu_2(1-r_2y_2) - \mu_1} \left(e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t} - e^{-\mu_1 t} \right) + \right.$$

$$+ \frac{y_1 z}{\mu_2(1-r_2y_2)} \left(1 - e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t} \right) \left. \right] + \frac{\lambda r_1 r_2 (y_2 - 1)}{1-r_2y_2} \left[\frac{1 - e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}}{\mu_2(1-r_2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{y_1(z-1)}{\mu_2(1-r_2y_2) - \mu_1} \left(e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t} - e^{-\mu_1 t} \right) - \frac{y_1 z}{\mu_2(1-r_2y_2)} \left(1 - e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t} \right) \right] +$$

$$\left. + \frac{\lambda r_1}{\mu_1} (z-1) \left(1 - \frac{1-r_2}{1-r_2y_2} y_1 \right) \left(1 - e^{-\mu_1 t} \right) + \lambda t \left[z \left(1 - r_1 \left(1 - \frac{1-r_2}{1-r_2y_2} y_1 \right) \right) - 1 \right] \right\}.$$

Тогда производящая функция для трехмерного процесса $\{l(t), n_1(t), n_2(t)\}$ имеет вид

$$G(z, y_1, y_2, t) = G(z, y_1, y_2, 1, 1, t) = \exp \left\{ \lambda t \left[z - 1 - r_1 z \left(1 - \frac{1 - r_2}{1 - r_2 y_2} y_1 \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\lambda r_1}{\mu_1} (z - 1) \left(1 - \frac{1 - r_2}{1 - r_2 y_2} y_1 \right) (1 - e^{-\mu_1 t}) + \frac{\lambda r_1 r_2 (y_2 - 1)}{1 - r_2 y_2} \left[\frac{1 - e^{-\mu_2 (1 - r_2 y_2) t}}{\mu_2 (1 - r_2)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{y_1 (z - 1) (e^{-\mu_2 (1 - r_2 y_2) t} - e^{-\mu_1 t})}{\mu_2 (1 - r_2 y_2) - \mu_1} - \frac{y_1 z (1 - e^{-\mu_2 (1 - r_2 y_2) t})}{\mu_2 (1 - r_2 y_2)} \right] \right\}. \quad (8)$$

Теорема доказана.

Так как производящая функция трехмерного распределения $P(l, n_1, n_2, t)$ не равна произведению производящих функций одномерных распределений, то очевидно, что эти потоки являются зависимыми и их анализ необходимо проводить только совместно.

Заключение

В настоящей работе построена математическая модель обслуживания заявок в неоднородной системе массового обслуживания $M|M|\infty$, а также определено аналитическое выражение для производящей функции трехмерного распределения, определяющего трехмерный поток заявок в систему. Полученный результат может быть использован в экономико-математическом моделировании при проведении анализа потоков, в системах, где наблюдается эффект повторного обращения, например, в страховых и торговых компаниях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жидкова Л.А., Моисеева С.П. Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322. № 6. С. 5.
2. Морозова А.С., Моисеева С.П., Назаров А.А. Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 293. С. 49–52.
3. Моисеева С.П., Захорольная И.А. Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями // Автометрия. Новосибирск: Изд-во СО РАН 2011. Т. 47. № 6. С. 51–58.

4. *Coffman, E.G., Kleinrock, L.* Feedback queueing models for time-shared systems // Journal of the Association for Computing Machinery. 1968 V. 15 No. 4. P. 549–576.
5. *Melikov, A.Z., Ponomarenko, L.A., Kuliyeva, K.N.* Calculation of the characteristics of multichannel queueing system with pure losses and feedback // J. Autom. Inf. Sci. 2015. V. 47(6).
6. *Foley R.D., Disney R.L.* Queues with delayed feedback // Adv. Appl. Probab. 1983. V. 15(1). P. 162–182.
7. *Pekoz E.A., Joglekar N.* Poisson traffic flow in a general feedback // J. Appl. Probab. 2002. V. 39(3). P. 630–636.
8. *Жидкова Л.А., Моисеева С.П.* Исследование системы $GI|M|_{\infty}$ с повторными обращениями // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы II Всероссийской молодежной научной конференции, Т. 295. Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. С. 94–100.
9. *Pankratova E., Moiseeva S.* Queueing system $GI/GI(\text{infinity})$ with n types of customers // Communications in Computer and Information Science. Switzerland: Springer, 2015. V. 564. P. 216–225.
10. *Морозова А.С., Моисеева С.П.* Исследование потока повторных обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. 2005. № 287. С. 46–51.
11. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969.
12. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2005. 228 с.

Шкленик Мария Александровна, аспирант, shklennikm@yandex.ru

Моисеев Александр Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, moiseev.tsu@gmail.com

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ДАННЫХ

Framework for Arabic Text Classification Based on Topic Modeling

Ghassan Khazal, Alexander Zamyatin

Computer Science Department, Tomsk State University, Tomsk, Russia

Most Arabic text classification researchers represent the text as a Term Frequency-Inverse Document Frequency (TFIDF). The TFIDF is not able to recognize synonyms and semantic relationships between texts. Topic modeling was used to represent words in the documents as topics to process text accurately and efficiently. In this work, we apply topic modeling to cluster Arabic words into topics. These words assigned to the same topic are related semantically. We make a model for three different approaches that used in dimensionality reduction by using topics modeling and show their effectiveness in Arabic text classification by using different classifiers. First, we apply LSI, LDA, and HDP on Arabic text document then we generate three different matrices of topics for LDA and LSI and HDP. The goal of this work is to compare between the feature represented with TFIDF and the topic model using two text classifiers Support Vector Machines (SVM) and Neural Network (NN). The results showed that the topic modeling using LSA and SVM give better performance based on F1 measure equal to 90%.

1. Introduction

Text classification is the field of natural language texts to one or more predefined classes according to their content [1]. Nowadays, Arabic text documents are increasing at an explosive rate. Arabic Text classification has become a key technique for summarizing, organizing, understanding, and searching these documents and also for the information retrieval for the documents with a specific topic. Text classification usually uses supervised machine learning algorithms for learning the classification model [2, 3]. Topic modeling has wide research direction in data mining and natural language processing. Topic modeling used to identify the semantic structure of the text document by using Bayesian analysis on the collected text document.

When we try to access any big text information that we want it requires the complex structure to organize these text data for searching, summarizing or understanding these big text data. These data consist of a lot of topics or any document may be having a mixture of topics. For this topic modeling is useful for auto summarizing, searching, and understanding text data. Most of the Arabic text researchers use vector space model for text document representation. i.e. represent the text as a vector of words and this feature cannot indicate the semantics of the text, and also it will cause a huge size of feature space. Our proposed model for this work we use topic modeling for feature representation to avoid this problem. In this work we use three techniques of topic modeling; Latent Semantic Analysis LSA, Latent Dirichlet Allocation LDA, and Hierarchical Dirichlet Process HDP. The performance based on topic modeling on Arabic text classification using two classifiers SVM and NN. In the experimental analysis, we searching for an answer to the following question: Which classification algorithms and a number of latent topics yield better results and are there optimal variables used of latent topics based representation of Arabic text classification?

This paper is organized as following: Section 2 represent work related to this paper. Section 3 represents a review of topic modeling techniques. Section 4 describes topic model for Arabic text classification. Experiment and results are showed in section 5, and the conclusions in section 6.

2. Related work

There is previous work that uses topic modeling as feature representation for text classification to enhance text the performance, the undertaken tasks on text classification. In [1] investigate generative statistical topic modeling for multi-label documents that associate with individual tokens with different labels. In [2] propose a novel approach to build classification system and to classify documents using multi-latent Dirichlet allocation (LDA). And [3] use conventional representation schemes for text documents with large text as data reduction technique. The author evaluates the performance of LDA model for text classification by using five classifiers. In [4] use the topic hidden analysis of LDA for feature representation then compare it with the classical feature representation in text classification. For the experiments, he uses SVM as the classifier and different type of weighting ranking for terms. The [5] focus on studying the LDA model then compare it with bigram feature. The [6] propose a hierarchical model for classification by using topic modeling and integrating additional term features from neighboring pages.

The [7] focuses on the topic identification for the Arabic language by using topic modeling with different Arabic stemmers on LDA. The author shows LDA is an efficient for Arabic identification, especially with the appropriate hyper-parameters. In [8] apply the topic modeling on clustering the words into topics then compare between the feature technique of BOW and the topic modeling using LDA. Finally [9] focus on the filtering approach for dimensionality reduction. This filtering approach consists of two stages; feature ranking and thresholding. The experiments done by using four English datasets and two Arabic datasets and its indicate the possibility of using this approach in Arabic TC.

3. Topic modeling techniques

In text classification, topic modeling has an important effect. For the collected text documents probability of the topic modeling will compute set of polynomial distribution by using parameter estimation. This distribution called topic, by capturing related information of the words. To extract stable latent structure and finding a short relative description of the text document in the dataset. In topic modeling the basic idea is assume that each document is a mix of topics. Each topic represents the probability distribution of the words. Also, topic models represent as text generation model. I.e., when generates a new text, a topic distribution will be gained first for each word in the text, then a topic is obtained randomly by the topic distribution. In the end, a word will be got randomly by the word distribution of the topic [5].

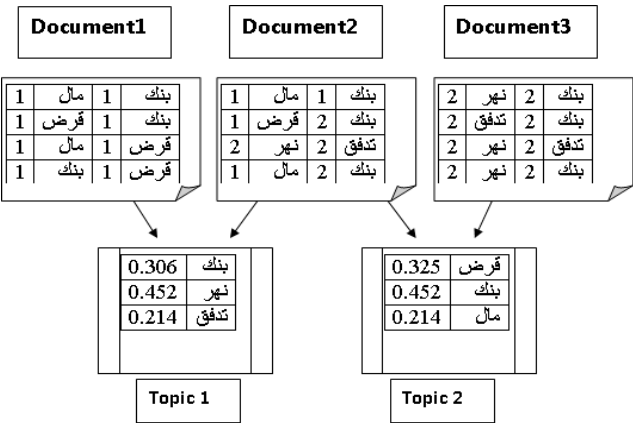


Fig. 1. Generative process of topic modeling

A. Latent Semantic Analysis (LSA)

This type of modeling used to represent the terms as a vector and it useful for finding the similarities among texts by computing the distance among vectors. First LSA represents the text as a matrix the row used for terms and columns for the documents.

Also, it uses TFIDF to calculate the interaction between words and the document. TFIDF represented in equation 1 and 2. Where TF in each document represents term frequency and IDF represent term important in all documents.

$$TF_{IDF} = TF \times IDF, \quad (1)$$

$$IDF = \log \frac{N}{N_i}. \quad (2)$$

To refine Term document matrix (TDM), LSA use technique called Singular Value Decomposition (SVD). LSA uses Singular Value Decomposition SVD techniques to enhance the Term Document Matrix TDM, SVD decomposes TDM to three matrices to confirm the robust relation among words and the documents also remove the noise. The decomposition displays all characteristics of theses matrices. Equation (3) represents SVD, and equation (4) represents decomposition of $m \times n$ matrix of the SVD [10].

$$TDM = U \times S \times V^T. \quad (3)$$

Where U : m dimensional matrix, V : n dimensional matrix, and S : diagonal matrix [3].

$$A_{n \times d} = U_{n \times r} D_{r \times r} V_{r \times d}^T. \quad (4)$$

B. Latent Dirichlet Allocation (LDA)

LDA is a generative probabilistic model for group of documents. The main idea of this method (LDA) is to represent the documents as mixtures of topics. The probability distribution is use to represent the topic of the term and each article is distribution probability of topics [11]. LDA used for identification of topics in different fields such as classification, filtering, and information retrieval. There are three levels to represent LDA. The parameters α and β represents corpus level, these parameters are used to generating a corpus process. α is uniform Dirichlet prior distribution of per document topic distributions. β is the uniform Dirichlet prior distribution of per topic

word. θ is a document level parameter used to sample one time per document. z and w are word-level parameters and sampled only one time for each word in each document. Finally, N represents the number of the terms tokens in a document and M represents the number of documents [12, 13].

The LDA introduces set of (K) latent parameter, i.e topics. Each word in the document is generated by one of the topics. The generative process for each document w can be described as follows [11]:

1. Choose $N \sim \text{Poisson}(\varepsilon)$
2. Choose $\theta \sim \text{Dir}(\alpha)$
3. for each of the N words W_n :
 - a) choose a topic $z_n \sim \text{Multinomial}(\theta)$
 - b) choose a word w_n from $P(w_n|z_n, \beta)$ a multinomial probability condition on the topic z_n

$$[\beta]_{k \times v} \beta_{ij} = p(w^j = 1 | z^j = 1) \quad (5)$$

A k -dimensional Dirichlet random variable θ can take values in the $(k-1)$ -simplex, and has the following probability density on this simplex:

$$p(\theta|\alpha) = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^k \alpha_i)}{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)} \theta_1^{\alpha_1-1} \dots \theta_k^{\alpha_k-1}, \quad (6)$$

$$p(\theta, z, w|\alpha, \beta) = p(\theta|\alpha) \prod_{n=1}^N p(z_n|\theta) p(w_n|z_n, \beta), \quad (7)$$

$$p(w|\alpha, \beta) = \int p(\theta|\alpha) \left(\prod_{n=1}^N \sum_{z_n} p(z_n|\theta) p(w_n|z_n, \beta) \right) d^k \theta, \quad (8)$$

$$p(D|\alpha, \beta) = \prod_{d=1}^M \int p(\theta_d|\alpha) \left(\prod_{n=1}^{N_d} \sum_{z_{dn}} p(z_{dn}|\theta_d) p(w_{dn}|z_{dn}, \beta) \right) d^k \theta_d. \quad (9)$$

To explain how LDA generates a document. Suppose that a text corpus contains four topics, such as political, economics, techniques and movies. The document describe the production of movie process may contain both the topic of technology and movie. Technology topic may have a many words that related to technology. These words have a probability, probability of these words appearing in the document with the topic technology. Similarly, there are many words that related to movies in the movie's topic, and also have probability. When generating a document about movie production,

the topics will be chosen randomly first. The probability of choosing two topics of technology and movies will be higher. And then, a word will be selected. The probability of choosing the words that are related to the two topics will be higher. So, the selection of a word is completed. After selecting N words continually, a document is created [12, 14].

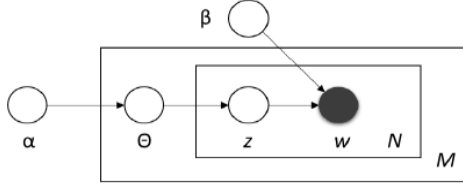


Fig. 2. LDA representation

C. Hierarchical Dirichlet Process HDP

HDP is generative model for the document in the text corpus and can be described as document d , d is a sequence of words drawn from vocabulary V with $|V| = k$. The probability of the document d given the class i in the hierarchy given by [13]:

$$P(d|i) = P(|d|) \frac{(\sum_j d_j)!}{\prod_j d_j!} \prod_{j=1}^k (\theta_{ij})^{d_j}, \quad (10)$$

where d_j is the number of occurrences of the j th word of the vocabulary in document d ;

$$\theta_i = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{ik})^T. \quad (11)$$

The parameter vector describes the parameters for a multinomial distribution. We note that, contrary to most previous work where documents are classed only on the leaves of the concept hierarchy, we consider every node in the concept hierarchy as a valid class into which some of the documents belong [8, 11].

Also, the vector θ_i have dirichlet prior distribution:

$$\theta_i \sim \text{Dir}(1, \dots, 1) \text{ if } i \text{ is the root node,}$$

$$\theta_i | \theta_{pa(i)} \sim \text{Dir}(\sigma \theta_{pa(i)} \text{ otherwise,}$$

where $pa(i)$ identifies the parent of node i and σ is constant smoothing parameter chosen in advance.

4. Experiments of the proposed work

The goal of this work is to design topic model to show the effect of this feature representation on the classification accuracy of Arabic text using two classifiers. Figure 3 represents the proposed text classification models.

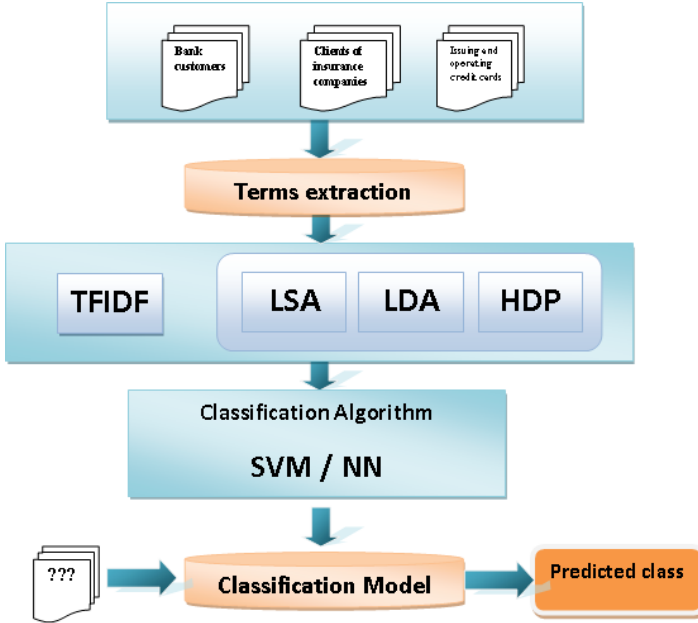


Fig. 3. represents the proposed text classification models

The keyword-based for our model for classification is constructed of five steps:

Step 1: Gathering Arabic text data to apply our model.

Step 2: Text data preprocessing to clean the text from the unwanted text.

Step 3: Apply different feature representation TFIDF, LDA, LSA, and HDP.

Step 4: Construct trained classification Model.

Step 5: Evaluate the results.

In our experiments, we use a collection of text documents for bank questionnaires. We selected 6 classes for each class 50 document. The total number of documents is 1800, as shown in Table 1.

Table 1

Dataset information

Category name in Arabic	Category name in English	Doc. No.
إصدار وتشغيل بطاقات الائتمان	Issuing and operating credit cards	300
المنازعات أولمخالفات التأمينية	Disputes and insurance violations	300
حماية عملاء البنوك	Protecting bank customers	300
حماية عملاء شركات التمويل	Protecting clients of finance companies	300
عملاء البنوك	Bank customers	300
عملاء شركات التأمين	Clients of insurance companies	300

For preprocessing splitting written string into tokens called tokenization, which it represent the first step in many natural language processing tasks. For most languages, tokenization involves splitting punctuation, and some affixes off of the words [6]. Also to minimize the dimensionality of term space removing non-Arabic characters, removing stop words (articles, prepositions, and pronouns), removing numbers, removing Diacritics, and word length less than three characters.

We apply 8 experiments to show the effect of topic modeling and compare with TFIDF model. The experiment parameters as described in Table 2.

Table 2

Experiment Parameters

Parameters	Description
Dataset	In-house collected Dataset “banking client’s questions and queries” [7, 8]
Training size	70%
Testing Size	30%
Pre-processing	Tokenizing, filtering (stop word removal, word length <3 characters, non-Arabic word removal, numbers removal, districts removal...)
Feature representation	TFIDF, LSA, LDA, or HDP
Classifiers	SVM, NN

To report the evaluation results, we use three metrics: **Recall** (equation 12), **Precision** (equation 13) and **F-measure** (equation 14).

$$Recall = \frac{No.of\ Doc.correctly\ labeled}{No.of\ topics\ Doc.}, \quad (12)$$

$$Precision = \frac{No.of\ Doc.correctly\ labeled}{No.of\ labelled\ Doc.}, \quad (13)$$

$$F - measure = \frac{2 \times Recall \times Precision}{Recall + Precision} . \quad (14)$$

Table 3 shows the results in of precision, recall, and F1 for our model. The average values computed using 10-fold cross-validation. The results showed that the SVM accuracy in average better than the NN classifiers for all experiments. The results of all applied experiments on the two classification algorithms are illustrated in Table 3 and Fig. 4.

Table 3

Precision, recall, and F1 results of the proposed model

Method	F1	P	R
LSA – SVM	0.90	0.89	0.91
LDA – SVM	0.80	0.81	0.79
HDP – SVM	0.81	0.82	0.81
TFIDF – SVM	0.85	0.85	0.86
LSA – NN	0.82	0.82	0.83
LDA – NN	0.74	0.71	0.78
HDP – NN	0.75	0.71	0.79
TFIDF – NN	0.79	0.78	0.81

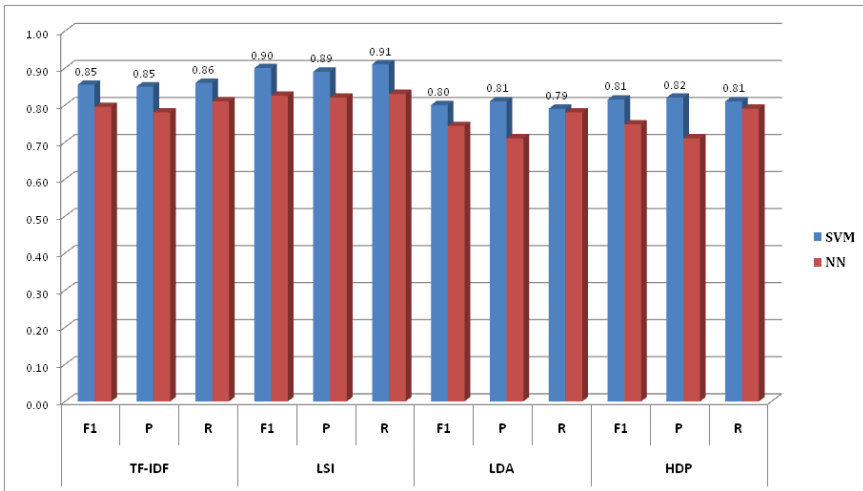


Fig. 4. Shows the distribution of average accuracy achieved with different classifiers

Also, the approach of LSA gives higher performance compared to applying the TFIDF with both classification methods. And the other method gives a good performance that reaches the performance of TFIDF model.

For LDA approach gives better performance with SVM, we use α to 0.1 and β to 0.01 according to the work of [9, 16].

5. Conclusions

In this research, three types of topic model are used for clustering term features into a group of topics. First, we find the same topic for terms that are semantically related. Then we compared classification performance among four feature representation techniques, TFIDF model and three techniques of topic model. We use two text categorization algorithms: SVM and NN for evaluation. Our results reported that the SVM accuracy in average is better than NN classifiers for all experiments. Also, the approach of feature representation with the LSA model achieves the better performance with F-measure (90 %) with SVM and (82 %) with NN; an improvement of about 5 % and 3% over the TFIDF model respectively. LDA and HPD not give any enhancement in performance, we think that was because of the relation among words are not enough and also because of noisy data.

REFERENCES

1. *Dumais S., Platt J., Heckerman D., and Sahami M.* Inductive learning algorithms and representations for text categorization // Proc. ACMCIKM' 98. 1998.
2. *Sriurai W.* Improving Text Categorization by using a Topic Model // Adv. Comput. 2011. V. 2. No. 6. P. 21–27.
3. *Ramya Raj K.P.* Malayalam News Classification Based On Topic Modeling // Int. J. Computer & Mathematical Sciences 2017. V. 6. No. 10. P. 18–24.
4. *Rubin T.N., Chambers A., Smyth P., and Steyvers M.* Statistical topic models for multi-label document classification // Mach. Learn. 2012. V. 88. No. 1–2. P. 157–208.
5. *Fu R., Qin B., and Liu T.* Open-categorical text classification based on multi-LDA models // Soft Comput. 2014. V. 19. No. 1. P. 29–38.
6. *Onan A., Korukoglu S., and Bulut H.* LDA-based Topic Modelling in Text Sentiment Classification: An Empirical Analysis // Int. J. Comput. Linguist. Appl. 2016. V. 7. No. 1. P. 101–119.
7. *Taşci Ş. and Güngör T.* LDA-based keyword selection in text categorization // 2009 24th Int. Symp. Comput. Inf. Sci. Isc. 2009. P. 230–235.
8. *Li L. and Zhang Y.* An empirical study of text classification using Latent Dirichlet Allocation // Cs.Cmu. Edu. No. 1.
9. *Sriurai W., Meesad P., and Haruechaiyasak C.* Hierarchical Web Page Classification Based on a Topic Model and Neighboring Pages Integration // International Journal of Computer Science and Information Security. 2010. V. 7. No. 2. P. 166–173.

10. *Said D.A.* Dimensionality Reduction Techniques for Enhancing Automatic Text Categorization, 2007.
11. *Agrawal A., Fu W., and Menzies T.* What is wrong with topic modeling? And how to fix it using search-based software engineering // *Inf. Softw. Technol.* 2018. V. 98. P. 74–88.
12. *Hadeel Alazzam, Abdulsalam Alsmady.* A distributed Arabic text classification approach using latent semantic analysis for big data // 2017 12th International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT), 2017.
13. *Pavlinek M. and Podgorelec V.* Text classification method based on self-training and LDA topic models // *Expert Syst. Appl.* 2017. V. 80. P. 83–93.
14. *Zhou S., Li K., and Liu Y.* Text categorization based on topic model // *Lect. Notes Comput. Sci. (including Subser. Lect. Notes Artif. Intell. Lect. Notes Bioinformatics)*. 2008. V. 5009 LNAI. No. 4. P. 572–579.
15. *Sriurai W.* Improving Text Categorization by using a Topic Model // *Adv. Comput.* 2011. V. 2. No. 6. P. 21–27.
16. *Naili M., Chaibi A., and Ghézala H.* Arabic topic identification based on empirical studies of topic models // *Revue Africaine de la Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées, INRIA*, 2017. V. 27. Special issue CARI 2016. <hal-01444574v2>.
17. *Blei D.M., Ng A.Y., Jordan M.I.* Latent dirichlet allocation // *Journal of Machine Learning Research*. 2003. No. 3. P. 993–1022.
18. *Lee S. and Kim J.* An Extension of Topic Models for Semi-supervised Text Classification: a Term Weighting Approach // *BigComp*. 2015. V. 8. P. 8.
19. *Veeramachaneni S., Sona D., and Avesani P.* Hierarchical Dirichlet model for document classification // *Proc. 22nd Int. Conf. Mach. Learn. ICML '05*. 2005. P. 928–935.
20. *Green S., Denero J.* A class-based agreement model for generating accurately inflected translations // *Proc. 50th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics: Long Papers*. 2012. V. 1. P. 146–155.
21. *SAMA.* faqs Banks consumers, 2017. Disponivel em: <<http://www.sama.gov.sa/arsa/ConsumerProtection/Pages/faqsBanksconsumers.aspx>>.
22. *DORAR*, 2017. Disponivel em: <<https://www.dorar-aliraq.net/threads/445044>>.
23. *Zhao W., Chen J. and Zen W.* Best practices in building topic models with LDA for mining regulatory textual documents // *Cder* 9th November, 2015.

Khazal Ghassan, аспирант; ghassan_khazal@yahoo.com;

Zamyatin Alexander, д.т.н., профессор; avzamyatin@inbox.ru

To the problem of three points in computer vision¹

B.M. Shumilov

Tomsk State University of Architecture and Building – TSUAB, Tomsk, Russia

Rapid growth of quantity of auto- and motor-vehicles exceeds many times the speed of road construction. Therefore the road network is overstrained in the country. The conditions of highways, quality of a covering, visibility and radiuses of curves, carriageway width, an availability of the corresponding roadway markers, traffic lights, existence of traffic signs, barriers – essentially influence traffic safety and define the concept of the "road conditions" set.

At investigation of the road accidents in most cases it is considered that their main reasons are negligence or the driver mistakes and also malfunctions of vehicle. The most widespread classified road accidents are: collision of moving vehicles, arrival on the motionless vehicle and arrival on an obstacle (motionless or suddenly arisen). Statistical data assure that because of unsatisfactory road conditions from 8 to 15% of all road accidents are made. According to experts, the real influence of road conditions on fulfillment of road accidents is much bigger and makes from 60 up to 80% [1].

Problem definition

The procedure of fixing and registration of road accidents provides three options now:

1. The European protocol, participants of an incident make out and fix all circumstances, with obligatory use of photo and video equipment.
2. The accident commissioner makes out and fixes all circumstances of incident, with obligatory use of photo and video equipment.
3. The inspector of traffic police makes out and fixes all circumstances of incident, use of photo and video equipment isn't obligatory.

Quite often there are disputable situations for which investigation and examination are made on the available materials to which photos and video filming belong. In most cases, the participant of incident uses the mobile device during the fixing and registration of current situation. For example, in fig. 1, *a*) – the driver of the motorcycle has recorded the general road situation.

¹ The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and by the Tomsk oblast, project no. 16-41-700400 r_a.

In Fig. 1, *b*) – for the purpose of understanding the scale and size of potholes, the driver used a glove as a large-scale marker. In this situation, the owner of the motorcycle should prove that the paving doesn't conform to requirements to an operational state, admissible under the terms of the safety of traffic.



Fig. 1. Photos of potholes in a paving: *a*) a general view of a road situation; *b*) a glove of the driver of the motorcycle in a hollow

In recent years computing opportunities of mobile devices have significantly grown that allows setting the task of diagnostics of road damages via measurements data processing on a series of consecutive frames of video filming. Automatic recognition of road distresses is vitally important research area since it reduces economic loss before as cracks and potholes become too severe [2]. Mobile video filming is traditionally used at "manual" diagnostics and certification of current state of highways. One major issue with pure video based systems is their inability to discriminate dark areas not caused by pavement distresses such as tire marks, oil spills, shadows and recent fillings.

The breakthrough in the solution of such tasks has been made with use of the systems based on laser scanning [3]. However work is complicated by the fact that daily use of this sort of hardware and software is available only as a part of the large road-building and design organizations functioning, as a rule, on the main directions. So this technology appears very expensive for municipal and regional budgets.

For the purpose of increase in mobility and reduction in cost of inspection of highways the use of photogrammetric method on the basis of stereo images is offered. Then the problem will come down to transformation of a series of 2D images to digital 3D model [4].

Algorithms for stereovision

We will remind that with introduction of uniform geometrical coordinates the transformation of linear prospect can be written down in the form of two scalar equations in which the matrix of geometrical transformation T of dimension 3×4 , three spatial coordinates of a point of an object x, y, z and two coordinates x^*, y^* of a perspective projection to the picture plane $z = 0$ (Fig. 2) enter:

$$\begin{aligned} (T_{11} - T_{14}x^*)x + (T_{21} - T_{24}x^*)y + (T_{31} - T_{34}x^*)z + (T_{41} - T_{44}x^*) &= 0, \\ (T_{12} - T_{14}y^*)x + (T_{22} - T_{24}y^*)y + (T_{32} - T_{34}y^*)z + (T_{42} - T_{44}y^*) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

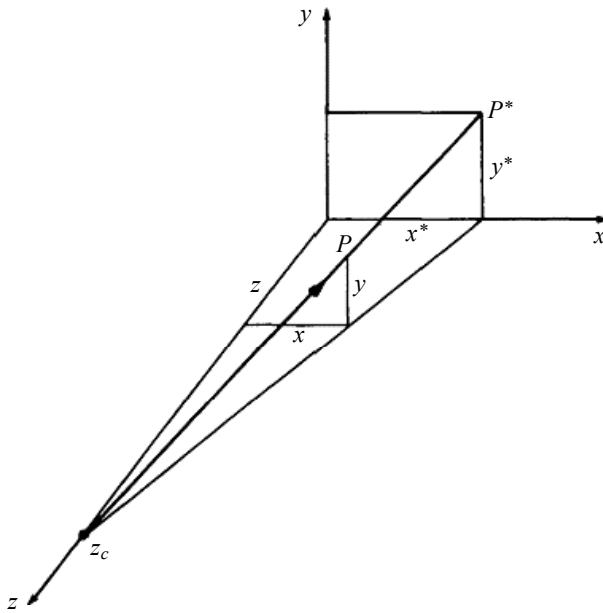


Fig. 2. Perspective projection of a point

In the assumption of the known T, x, y, z these equations are possible to use for modeling directly the photography process.

If are known the x^*, y^*, x, y, z , then these equations represent two equations with 12 unknown elements T . Applying these equations to $n \geq 6$ noncoplanar points in object space and to their images on a perspective projection,

we will receive uniform system of $2n$ equations with 12 unknowns. For the solution of the received system we will transfer terms, containing normalizing coefficient T_{44} , into the right part and we will set value $T_{44} = 1$. Thus, for finding of the decision T the overdetermined system of the equations turns out.

As is well-known from the theory of a method of least squares, the best average decision can be calculated, having multiplied both parts of the matrix equation by the transposed system matrix. Then we will receive the system of 11 linear equations concerning 11 unknowns with symmetric square matrix to which solution it is possible to apply a well-known method of square root. Thus, on the all known coordinates the transformation which has generated this perspective projection, for example, the photo is found.

In the case of the known T, x^*, y^* then two equations with three unknown spatial coordinates x, y, z turn out. It is underdetermined system of the equations therefore it is impossible to solve it. However, if two perspective projections are known, for example, two photos received from different foreshortenings, then equations (1) can be written down for both projections. As a result we will receive four equations with three unknown spatial coordinates x, y, z where for each couple of the equations the matrixes, respectively, of the first and second perspective projections are set. Nevertheless, the received overdetermined system of the equations can be used in effective way, having again applied methods of least squares and square root to finding of the decision.

The real stereo pairs corresponding to two photos of standard road cone against the background of a hollow in road surface are considered (fig. 3). Coordinates of seven vertexes of 3D-object were measured by a ruler. Corresponding pixels of images were fixed in the graphic editor with use of the mouse manipulator. Being set by the measured values of the roadbed point, it is possible to check the performance of Pythagorean theorem. In our case the calculated distance from the cone top to the asphalt basis has made 31,975 cm that for 0,078% differs from the passport value of 32 cm.

Let us notice that at the next movement of the camera in space 11 new parameters of the camera turn out, however not all of them are independent. Namely, five parameters answer for, so-called, internal parameters of the camera which don't change at its movement. Thus, an opportunity at the next movement in space appears to use only three points of an object for creation of matrix of projective transformation. However the received task is significantly nonlinear [5].



Fig. 3. A stereo pair from two photos of a road cone against the background of damage of a road surface

Application of "three-point" method on condition of preliminary determination of internal parameters of the camera has given value of 21,174 cm that provides the relative error of measurements 33,8%. Addition in this context of the fourth point has given value of 30,756 cm (3,8%).

The executed numerical experiments allow recommending at video measurements use of the folding sign of emergency stopping (breakdown triangle). This compact device has exactly 4 easily identified reference points.

The main stages of the decision are [6]:

1. Identification of steady features of video series. Definition of basic frames.
2. Localization and definition of characteristic markers of the video.
3. Solution of the reverse problem of photogrammetry.
4. Receiving three-dimensional mathematical model of an object.
5. Use of this model for expert assessment and formation of the design and estimate documentation.

Examination of character and the list of damages of vehicles provide detailed fixing of damages for definition of a possibility of their formation and participation in the studied event (Fig. 4, 5). Results of visual survey and photography of the damaged vehicle are made out by the corresponding act. Photographic materials and the inspection certificate of the damaged vehicles are the annex to the expert opinion or the report on estimation of the cost of recovery repair of vehicles [7].



Fig. 4. Photos of the car damaged in road accident



Fig. 5. Photos of the car damaged as result of falling of snow heap

Conclusions

Certainly, the photogrammetric method is a telling argument at the solution of disputable situations and determination of the actual amount of damages of the vehicles elements according to photos and video filming is a relevant task.

REFERENCES

1. *Domke E.R.* Investigation and examination of the road accidents. M.: Publishing center "Academia", 2009. 288 p. (In Russian.)
2. *Bao G.* Road distress analysis using 2D and 3D information. The University of Toledo Digital Repository Theses and Dissertations, 2010. 95 p.
3. *Shumilov B.M., Baigulov A.N.* A study on modeling of road pavements based on laser scanned data and a novel type of approximating hermite wavelets // WSEAS Transactions on signal processing. 2015. V. 11. P. 150–156.

4. *Rogers D.F., Adams J.A.* Mathematical elements for computer graphics. 2nd ed. McGraw-Hill, 1990. 611 p.
5. *Shapiro L.G., Stockman G.C.* Computer Vision. Prentice Hall, 2001. 617 p.
6. *Prohanov S.A., Shumilov B.M., Kuduev A.J., Abdykalykov K.A.* Use of algorithms of data processing of mobile video measurements for recognition and classification of damages of a road surface // Ninth Siberian conference on parallel and high-performance calculations. Tomsk: Tomsk Univ. Publ., 2017. P. 102–108. (In Russian.)
7. *Fedotova M.A., Kovalev A.P., Kushel A.A. et al.* Assessment of cars and equipment. Moscow: INFA-M, 2017. 324 p. (In Russian.)

Shumilov Boris Mihailovich, д.ф.-м.н., профессор; b_shumilov@math.tsu.ru

Исследование основных методов распознавания лиц на фотографиях

Д.А. Докучаев, И.В. Баранова

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

Распознавание образов является одним из наиболее перспективных и востребованных направлений в области анализа данных, информационной безопасности и искусственного интеллекта. Распознавание образов – раздел статистического анализа данных, объединяющий методы разбиения объектов по нескольким категориям. Его назначением является разработка принципов и методов классификации объектов различной природы.

В данной работе рассматривается один из частных случаев задачи распознавания – задача распознавания лиц на изображениях и фотографиях.

Для ее решения можно использовать различные подходы, предложенные в теории распознавания образов и классификации: метод опорных векторов, метод потенциальной функции, байесовские классификаторы и ряд других. Однако наиболее эффективными методами ее решения является метод Виолы – Джонса и алгоритмы, основанные на нейронных сетях.

Постановка задачи

Пусть задано множество $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, где x_i , $i = \{1, \dots, N\}$, является объектом распознавания. Существует индикаторная функция, которая неизвестна.

Индикаторная функция – это функция вида $g(x): X \rightarrow M$, $M = \{1, \dots, m\}$.

Пусть F – это пространство признаков, а $f(x): F \rightarrow X$ – функция, ставящая в соответствие каждому объекту $x_i \in X$ точку $f(x)$. Вектор $f(x)$ называется образом объекта $x \in X$. В пространстве образов признаков определены непересекающиеся множества точек $K_i \in F, i = (1, \dots, m)$, соответствующих образам одного класса.

Функция $\hat{g}(f): F \rightarrow M$ называется решающим правилом и представляет собой оценку для $g(x)$ на основании $f(x)$, то есть $\hat{g}(f) = \hat{g}(f(x))$.

Пусть $f_j = f(x_j), j = (1, \dots, N)$, – доступная информация о функциях $f(x)$ и $g(x)$, но сами эти функции неизвестны. Тогда (g_j, f_j) – множество прецедентов.

Требуется построить такое решающее правило $\hat{g}(f)$, чтобы распознавание и классификация проводились с минимальным числом ошибок.

Метод Виолы – Джонса

Метод Виолы – Джонса показывает хорошие результаты и позволяет обнаружить лица на фотографиях по принципу сканирующего окна. Основные принципы, на которых основан метод Виолы – Джонса:

- используются изображения в интегральном представлении;
- используются признаки Хаара для поиска необходимых объектов;
- выбираются наиболее подходящие признаки для искомого объекта;
- признаки пропускают через обученный классификатор для получения ответа;
- используют каскады признаков, чтобы отбросить окна, в которых объект не был найден.

Нейронные сети. Сети прямого распространения

Искусственная нейронная сеть – математическая модель, построенная по принципу организации и функционирования биологической нейронной сети.

Сетью прямого распространения называется сеть, в которой сигнал направлен строго от входных нейронов к выходным. Нейроны скрытых и выходного слоев не имеют связей с предшествующими им слоями.

Каждый нейрон связан с последующим синапсом. Для нейронов определены две функции: сумматор, который собирает значения с связанных нейронов на предыдущем слое и активационная функция. Активационная функция выбирается такой, чтобы ее производная была достаточно простой либо выражалась через исходную функцию.

Метод обратного распространения ошибки

Пусть h – классификатор, который на вход получает признаки объекта, а на выходе предъявляет нам класс, к которому этот объект принадлежит. X – пространство признаков объекта и C – множество классов, тогда классификатор работает по принципу $h: X \rightarrow C$.

Идея обучения сети состоит в том, чтобы минимизировать целевую функцию вида

$$E = \frac{1}{2}(y_i - d_i)^2. \quad (1)$$

Обучение сети будем производить градиентными методами, вычисляя градиент функции (1) и изменяя веса в обратном направлении полученного градиента. Корректировка весов будет проводиться по формуле $W = W - \Delta W$, где $\Delta W = \eta \nabla E$ (η – коэффициент скорости обучения).

Градиент будем искать в виде

$$\begin{aligned} \nabla E &= \partial E / \partial W = y \delta^T, \\ \delta_{out} &= \partial E / \partial y_j = y_j - d_j, \\ \delta_{hid} &= \partial y_i / \partial s_i \sum_j \delta_j \omega_{ij}. \end{aligned}$$

d_j – желаемый выход сети; s_i – результат функции сумматора нейрона i .

Метод градиентного спуска

Данный и последующие методы базируются на методе обратного распространения ошибки. Теперь $\Delta W_t = \eta(\nabla E + \rho W_{t-1}) + \mu \Delta W_{t-1}$, где ρW_{t-1} – член регуляризации, ρ – коэффициент регуляризации, $\mu \Delta W_{t-1}$ – фактор момента, μ – коэффициент момента. Также будем изменять коэффициент скорости обучения на каждой итерации. Пусть $\alpha = 0.99$, $\beta = 1.01$, $\Delta E = E_t - \gamma E_{t-1}$, $\gamma = 1.01$, тогда η будет иметь вид

$$\eta_t = \begin{cases} \alpha \eta, \Delta E > 0, \\ \beta \eta, \Delta E \leq 0. \end{cases}$$

Метод rProp

Идея метода заключается в том, что коэффициент скорости обучения задается для каждого веса отдельно:

$$\eta(t) = \begin{cases} \min(\eta_{\max}, \alpha\eta(t-1)), & S > 0, \\ \max(\eta_{\min}, \beta\eta(t-1)), & S < 0, \\ \eta(t-1), & S = 0, \end{cases}$$

где $S = \nabla E(t-1)\nabla E(t)$, $\eta_{\max} = 50$, $\eta_{\min} = 10^{-6}$, $\alpha = 1.2$, $\beta = 0.5$. Формула для вычисления весов изменится следующим образом:

$$\Delta W_t = \eta(\text{sign}(\nabla E) + \rho W_{t-1}) + \mu \Delta W_{t-1}.$$

Решение практической задачи и вычислительный эксперимент

Был разработан программный модуль, в котором была реализована работа вышерассмотренных методов распознавания. Также в работе была проведена серия вычислительных экспериментов с использованием реализованного программного обеспечения.

Вычислительные эксперименты позволили оценить работу алгоритмов на ряде тестовых обучающих выборок. В каждой выборке находились изображения как с лицами людей, так и без них. Размер данных изображений мог быть любым. Изображения могли быть как цветными, так и черно-белыми.

Каждому из методов, реализованных в программном решении, на вход была подана обучающая выборка. После обучения алгоритму были даны 10 заранее подобранных изображений, для которых он должен был решить задачу распознавания лиц: т.е. решить – есть ли на изображении лицо или нет. На входные изображения накладываются те же условия, что и на файлы обучающей выборки. Все результаты фиксировались экспертом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лепский А.У., Броневиц А.Г.* Математические методы распознавания образов. Таганрог: ТГИ ЮФУ, 2009. 55 с.
2. *Хайкин С.* Нейронные сети. Полный курс. М.: Вильямс, 2006. 1104 с.
3. *Осовский С.* Нейронные сети для обработки информации. М.: Финансы и статистика, 2002. 344 с.

Баранова Ирина Владимировна, к.ф.-м.н., доцент; irinabar@yandex.ru;
Докучаев Дмитрий Александрович; dokuchaev.dmitry95@yandex.ru

Интеллектуальная поддержка принятия решений в диагностике и лечении наркозависимых

А.В. Катаева

*Институт математики и фундаментальной информатики,
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия*

В диагностике наркомании существенным является раннее определение спектра принятых пациентом наркотических веществ. Правильная и своевременная диагностика состояния наркотического опьянения необходима для выбора лечебного воздействия, социальной реабилитации и предупреждения развития наркотической зависимости. В настоящее время существует несколько основных способов подтверждения употребления наркотических препаратов: по косвенным признакам и с применением лабораторной диагностики [1, 2]. Анализ косвенных признаков наркотического опьянения предполагает оценку психического состояния, сомато-вегетативных и неврологических признаков. Существуют специфические симптомы употребления отдельных наркотических веществ, по которым еще до проведения лабораторных исследований можно определить, что именно принял пациент [2, 3]. К сожалению, в современном мире постоянно появляются новые наркотические вещества, для которых еще не изучены такие симптомы. Поэтому представляет интерес анализ характерных симптомов опьянения при приеме нескольких наркотических средств, установление ранее неизученных симптомов для новых наркотических препаратов, выявление типичных и нетипичных случаев. Для решения подобных задач в настоящее время широко применяются методы интеллектуального анализа данных (Data Mining) и, в частности, ассоциативные правила (Association Rule) и функции конкурентного сходства (FRiS-функции) [4, 5]. Ассоциативные правила – класс зависимостей между данными, которые отражают, какие признаки или события встречаются совместно и насколько часто это происходит [9]. Использование ассоциативных правил позволяет определить характерные признаки опьянения для нескольких наркотических веществ и выявить ранее неизученные симптомы для новых наркотических препаратов. Функции конкурентного сходства дают возможность установить типичные и нетипичные случаи наркотического опьянения. Такой анализ необходим в диагностке и лечении наркозависимых.

Цель настоящей работы – разработка алгоритмов и программ, основанных на методах Data Mining, и предназначенных для выявления зависимостей между признаками, типичных и нетипичных случаев, интересующих врачей-наркологов в их медицинской практике.

Постановка задачи

При поиске ассоциативных правил анализируемое множество данных традиционно описывается бинарным контекстом $K = (G, M, I)$ – матрицей, строки которой соответствуют объектам G рассматриваемой предметной области, столбцы – признакам M этих объектов, $I \subseteq G \times M$ отношение инцидентности между G и M . При этом единичное значение элемента такой матрицы интерпретируется как наличие у объекта соответствующего признака, а нулевое – как его отсутствие [10]. В случае диагностики наркотической зависимости объектами являются исследуемые пациенты, а признаками – наркотические препараты, которые принимали эти пациенты, и симптомы, возникающие при приеме этих препаратов.

Ассоциативным правилом на множестве признаков M бинарного контекста $K = (G, M, I)$ называется упорядоченная пара подмножеств множества M :

$$r = (X, Y), X, Y \subseteq M.$$

Принято ассоциативное правило $r = (X, Y)$ записывать в виде $X \Rightarrow Y$. В ассоциативном правиле $X \Rightarrow Y$ множества X и Y называют посылкой (или причиной) и заключением (или следствием) соответственно [9, 10].

Применительно к заданному контексту $K = (G, M, I)$ всякое ассоциативное правило $X \Rightarrow Y$ количественно характеризуется с помощью двух числовых функций: поддержки и достоверности. Эти числовые функции играют роль мер значимости, позволяют фильтровать найденные ассоциативные правила и отбирать среди них наиболее существенные для исследуемой предметной области [12].

Поддержкой $\delta(X \Rightarrow Y)$ ассоциативного правила $X \Rightarrow Y$ относительно контекста $K = (G, M, I)$ называется величина

$$\delta(X \Rightarrow Y) = \delta(X \cup Y) = |(X \cup Y)'| / |G|,$$

где $|(X \cup Y)'|$ определяет число объектов, обладающих множеством признаков $X \cup Y$, а число $|G|$ задает количество строк контекста. Таким образом, поддержка $\delta(X \Rightarrow Y)$ указывает, какая доля объектов контекста $K = (G, M, I)$ имеет признаки $X \cup Y$.

Достоверность $\gamma(X \Rightarrow Y)$ ассоциативного правила $X \Rightarrow Y$ относительно контекста $K = (G, M, I)$ определяется как отношение числа объектов, обладающих всеми признаками из $X \cup Y$, к числу $|X'|$ объектов, которым свойственны только признаки X :

$$\gamma(X \Rightarrow Y) = |(X \cup Y)'| / |X'|.$$

Достоверность ассоциативного правила всегда находится в границах $0 \leq \gamma(X \Rightarrow Y) \leq 1$. Чем ближе значение $\gamma(X \Rightarrow Y)$ к 1, тем с большей вероятностью можно сказать, что признаки Y появляются в объектах рассматриваемого контекста вместе с признаками X . Часто достоверность ассоциативного правила называют величиной его значимости. Самыми значимыми считаются строгие ассоциативные правила – ассоциативные правила с достоверностью 1.

Задача поиска ассоциативных правил формулируется следующим образом. Задан контекст $K = (G, M, I)$. Пусть также заданы δ_0 и γ_0 – вещественные числа из $[0, 1]$, являющиеся пороговыми значениями для поддержки и достоверности ассоциативного правила $X \Rightarrow Y$. Требуется в контексте $K = (G, M, I)$ найти множество ассоциативных правил, удовлетворяющих следующим ограничениям:

$$\gamma_0 \leq \gamma(X \Rightarrow Y) \leq 1; \quad (1)$$

$$\delta_0 \leq \delta(X \Rightarrow Y) \leq 1. \quad (2)$$

Решение данной задачи, как правило, сводится к выполнению следующих двух этапов: построению различных подмножеств множества M с вычислением для каждого из них поддержки и проверки неравенства (2); генерации ассоциативных правил с учетом найденных подмножеств, удовлетворяющих (2), и контролю выполнимости неравенства (1). Наличие на обоих этапах комбинаторных переборов приводит к тому, что решение данной задачи требует значительных вычислительных ресурсов. Очевидно, что чем больше пороговые значения, тем быстрее находится соответствующий набор ассоциативных правил и тем меньше число правил в этом наборе. В общем случае число найденных ассоциативных правил может экспоненциально зависеть от количества признаков, представленных в $K = (G, M, I)$. Чрезмерно большое число правил затрудняет их экспертный анализ. При этом многие из сгенерированных правил чаще всего являются избыточными и их удаление не приводит к потере знаний, извлекаемых из исходного контекста. Далее предлагаются некоторые методы и приемы, позволяющие в той или иной степени решить описанную выше проблему размерности.

Предагаемые методы и подходы решения задачи

Предложение 1. *Внести некоторые знания о существующих и известных связях между данными в условия решаемой задачи.* Применительно к задаче поиска ассоциативных правил такими знаниями могут служить сведения о разделении множества рассматриваемых признаков на три группы:

- признаки, которые могут играть роль посылки;
- признаки, которые могут являться только следствием;
- признаки, которые могут выступать как в роли причины, так и в роли следствия.

Такое разделение признаков позволяет существенно сократить число генерируемых ассоциативных правил, при этом выявленные правила более реалистичные.

Предложение 2. *Использование эффективных алгоритмов построения избыточного базиса ассоциативных правил.* К настоящему времени разработано большое число алгоритмов поиска ассоциативных правил. Их обзор представлен в работе [10]. Основополагающим среди них является алгоритм Apriori [11]. Достоинство алгоритма Apriori – возможность построения множества ассоциативных правил с любой заданной достоверностью. Недостатком этого алгоритма является генерация большого количества избыточных ассоциативных правил. Алгоритм Close позволяет генерировать только строгие ассоциативные правила [12], и их количество значительно меньше общего числа возможных ассоциативных правил. Однако среди них все равно могут содержаться избыточные. Множество ассоциативных правил, не содержащее избыточных (в некотором смысле) правил, принято называть базисом. В работах [6, 7] был предложен алгоритм MClose, позволяющий для строгих ассоциативных правил построить избыточный базис с сохранением поддержки ассоциативных правил. Применение данного алгоритма позволяет в большинстве случаев существенно снизить число выявленных в исходном контексте строгих ассоциативных правил.

Предложение 3. *Применение FRiS-функции для определения типичных и нетипичных случаев.* FRiS-функция (Functions of Rival Similarity) – функция конкурентного сходства и различия [4, 5]. Она отражает меру сходства некоторого пациента z с представителем a из первого класса A пациентов и с ближайшим к a представителем b из другого (конкурирующего) класса B пациентов. FRiS-функция вычисляется по следующей формуле:

$$F_{za/b} = (R_b - R_a)/(R_a + R_b),$$

где R_a – расстояние от объекта z до объекта a , R_b – расстояние от объекта z до объекта b . Применение FRiS-функций дает возможность выявить типичные и нетипичные случаи (пациентов, препаратов или симптомов) и использовать их для сокращения размерности задачи анализа данных по наркозависимым.

Результаты вычислительных экспериментов

В диагностике наркотического опьянения, как правило, в качестве исследуемых признаков выступают препараты и симптомы, представленные в табл. 1 [1, 2]. Данное множество признаков можно разделить на две группы: признаки, которые могут играть роль посылки в ассоциативном правиле (указаны в первом столбце табл. 1); признаки, которые могут являться только следствием в ассоциативном правиле (указаны во втором столбце табл. 1). В рассматриваемом случае отсутствуют признаки, которые могут выступать как в роли причины, так и в роли следствия.

Т а б л и ц а 1

Анализируемое множество признаков

Группа 1: посылка ассоциативного правила (демографические признаки и принимаемые препараты)	Группа 2: следствие ассоциативного правила (наблюдаемые симптомы)
Возраст. пол мужской. пол женский. ТГК. MDPV. Морфин. Этанол. Димедрол. Наркотических веществ не обнаружено. Карбокситетра канабинол. ПВП. Тропикамид. Фенобарбитал. Каннабидиол. Галоперидол. Декстрометорфан. Лидокаин. Метронидазол. 3,4 метилendioксипиралиндинобутирофенон. Атропин. Карбамазепин. Кодеин. Доксиламин. Декторфан. Хлорфенамин. бмоноацетилморфин. Бензодеазепин. Прометазин. Амфетамин. Исследование не проводилось. Амитриптилин. Каннабиноиды. Пирровалерон. Другие вещества	Бред преследования. Страх. Повреждение предметов. Возбуждение. Угроза жизни (убить могут). Речь (ответы не по сути). Галлюцинации зрительные. Галлюцинации слуховые. Попытки подбросить наркотики. Воздействие током. Защита от преследователей (прячется). Защита от преследователей (нападает). Идеи самоуничтожения. Агрессия к окружающим. Самоповреждения шантажные. Самоповреждения депрессивные. Тревога. Отсутствие сна. Нарушения сознания (дезориентировка). Отсутствие контакта. Психосенсорные расстройства. Отсутствие одежды или снимает. Идеи отравления. Суицидальные мысли. Сенестопатии вынимают или выпадают внутренности. На теле жучки. Судороги. Идеи величия. Двигательное возбуждение. Бег. Желание прыгнуть с высоты

Для проверки эффективности предложенных методов и подходов выполнены вычислительные эксперименты, целью которых было сравнение алгоритмов Apriori, Close и MClose по числу сгенерированных ими строгих ассоциативных правил (АП) и времени их работы. Во всех случаях пороговое значение поддержки равнялось $\delta_0 = 0.1$. Вычислительные эксперименты были проведены с помощью разработанных программных средств [13, 14]. Эффективность предложения 1 проверялась по числу сгенерированных ассоциативных правил с разделением множества признаков на группы и без разделения. В первом случае посылками ассоциативных правил являлись только признаки из группы 1, а следствием – из группы 2, а во втором случае все множество исходных признаков могло встречаться и в посылках, и в следствиях. В табл. 2 представлены результаты работы алгоритма Apriori. В табл. 3 – результаты работы алгоритмов Close и MClose.

Таблица 2

Результаты работы алгоритма Apriori

Достоверность, %	Число АП без разделения множества признаков на группы	Число АП с разделением множества признаков на группы	Время вычислений, мс
100	6293	2313	259019880
≥ 80 и < 100	1661	439	14965610
≥ 50 и < 80	11286	2871	871956360

Таблица 3

Результаты работы алгоритмов Close и MClose

Число пациентов	Число АП без разделения множества признаков на группы	Размер минимаксного базиса без разделения множества признаков на группы	Время вычислений, мс	Число АП с разделением множества признаков на группы	Размер минимаксного базиса с разделением множества признаков на группы	Время вычислений, мс
50	124	32	422511	19	5	11720
100	118	28	53307	11	4	14430
150	194	46	32901	47	8	15730
222	126	36	65179	17	5	40950

Как видно из табл. 2 и 3, время работы алгоритма Apriori значительно больше времени выполнения алгоритмов Close и MClose. Ключевым показателем качества работы данных алгоритмов является число сгене-

рированных ассоциативных правил. С точки зрения этого показателя наилучшую эффективность показал алгоритм MCclose.

Для проверки эффективности предложения 3 пациенты были разбиты на два класса в зависимости от принимаемых препаратов: класс А – пациенты, принимающие карбокситетра канабинол (8 пациентов), класс В – пациенты, не принимающие карбокситетра канабинол (214 пациентов). Для этих классов были определены типичные и редкие пациенты. Стоит отметить некоторую особенность исследуемой базы данных – большинство пациентов принимало сразу несколько наркотических препаратов. Вследствие этого типичные пациенты, определенные с помощью FRIS-функций для разных классов, существенно не отличались друг от друга. Это подтверждает общепринятое мнение, что реакция экзогенно-токсического типа не отличается специфической клинической картиной.

Заключение

Применение предложенных в работе методов и подходов позволило построить базовый набор ассоциативных правил и определить типичные симптомы употребления наркотических препаратов. Полученные результаты представляют практический интерес для врачей-наркологов. Разработанные алгоритмические и программные средства могут быть использованы при решении других диагностических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куташов В.А.* Изучение клинико-психологических особенностей лиц, употребляющих наркотики // Системный анализ и управление в биомедицинских системах. 2015. Т. 14. №. 2. С. 261–265.
2. *Вассерман Л.И., Дорофеева С.А., Меерсон Я.А.* Методы нейропсихологической диагностики. СПб.: Стройлеспечать, 1997.
3. *Маслова Т.В.* Реабилитация и ресоциализация лиц, страдающих наркологическими заболеваниями // Социальная работа. 2014. № 1. С. 53–56.
4. *Загоруйко Н.Г., Борисова И.А., Дюбанов О.А., Кутненко В.В.* Количественная мера компактности и сходства в конкурентном пространстве // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13. № 1. С. 59–71.
5. *Загоруйко Н.Г., Борисова И.А., Дюбанов О.А., Кутненко В.В.* Построение сжатого описания данных с использованием функции конкурентного сходства // Сибирский журнал индустриальной математики. 2013. Т. 1. № 1. С. 29–41.
6. *Быкова В.В., Катаева А.В.* О избыточном представлении минимаксного базиса строгих ассоциативных правил // Прикладная дискретная математика. 2017. № 36. С. 113–136.

7. Быкова В.В., Катаева А.В. Сжатое представление строгих ассоциативных правил в анализе данных // Программные продукты и системы. 2017. № 2. С. 187–192.
8. Барсегян А.А., Куприянов М.С., Степаненко В.В. Технологии анализа данных: Data Mining, Visual Mining, Text Mining, OLAP. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: БХВ-Петербург, 2007.
9. Pasquier N., Bastide Y., Taouil R. Lakhal L. Generating a condensed representation for association rules // J. Intelligent Information Systems. 2005. V. 24. No. 1. P. 29–60.
10. Liqiang Geng, Howard J. Hamilton. Interestingness measures for data mining: a survey // ACM Computing Surveys. 2006. V. 38. No. 3. P. 9.
11. Ilayaraja M., Meyyappan T. Mining medical data to identify frequent diseases using Apriori algorithm // Pattern Recognition, Informatics and Mobile Engineering (PRIME), IEEE. 2013. P. 194–199.
12. Ganter B., Wille R. Formal Concept Analyses: Mathematical Foundations. Springer Science and Business Media, 2012.
13. Катаева А.В. Программа сокращения признакового пространства на основе алгоритмов классификации и ROC-анализа // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018611886. Зарегистрировано в РОСПАТЕНТ 8 февраля 2018 г.
14. Катаева А.В. Выявление ассоциативных правил и построение избыточного минимаксного базиса // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018611317. Зарегистрировано в РОСПАТЕНТ 1 февраля 2018 г.

Катаева Алина Владимировна, аспирантка; alisite@mail.ru

Распознавание трехмерных объектов на местности по данным лазерного сканирования

Ю.Л. Костюк, М.И. Литовченко, А.А. Смирнова

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

В настоящее время в архитектуре, строительстве, дорожной отрасли широко применяются инструменты мобильного лазерного сканирования, позволяющие получать координаты объектов на местности. Показания встроенных в систему лазерного сканирования приборов записываются и в последующем обрабатываются специальной программой, например программой IndorCloud [1]. Результатом является облако точек – набор координат точек отражения лазерного луча от поверхностей объектов. Количество точек в облаке может достигать многих миллионов при погрешности измерений в 1–2 см для относительно небольших участков местности.

Примером программных продуктов для работы с данными лазерного сканирования (облаками точек) могут служить системы TerraScan [2] и VisionLidar [3]. Они позволяют классифицировать точки с помощью алгоритмов фильтрации, параметры для которых необходимо задавать вручную. Выделенные при этом группы точек требуют дальнейшей обработки для распознавания трёхмерных моделей объектов, которая чаще всего невозможна без вмешательства человека.

Известны различные алгоритмы распознавания и классификации объектов трехмерного облака. В работах [4, 5] в алгоритмах используется предварительно построенная плоская триангуляция. Многие алгоритмы основаны на обобщенном преобразовании Хафа [6], которое вначале использовалось для обнаружения объектов на плоскости. В работе [7] это преобразование применено для обнаружения 3D-объектов с произвольными формами, в работе [8] – множество алгоритмов распознавания 3D-объектов различных типов, а в работе [9] – для обнаружения линий в трехмерном облаке точек. В работе [10] рассматриваются различные способы повышения эффективности таких алгоритмов распознавания.

Основная проблема использования в алгоритмах распознавания обобщенного преобразования Хафа – его высокая трудоёмкость, которая тем выше, чем сложнее распознаваемые объекты. Поэтому актуальной является задача разработки более эффективных алгоритмов распознавания объектов различных типов.

Клеточное разбиение облака точек

Для облегчения процесса фильтрации, когда облако точек получено для совокупности объектов с большой протяженностью по координатам X и Y и небольшой – по Z , точки целесообразно разделить по квадратным клеткам в плоскости XOY . Для этого необходимо выполнить следующие действия:

- 1) вычислить минимальные ($X_{\min}$, $Y_{\min}$, $Z_{\min}$) и максимальные ($X_{\max}$, $Y_{\max}$, $Z_{\max}$) координаты облака точек;
- 2) вычислить количество клеток k_x по координате X и количество клеток k_y по координате Y :

$$k_x = \lceil (X_{\max} - X_{\min}) / d \rceil, k_y = \lceil (Y_{\max} - Y_{\min}) / d \rceil,$$

где d – размер клетки;

- 3) создать двумерный массив U указателей на будущие списки, размеры массива k_y строк и k_x столбцов;

4) для каждой точки облака из координат (X_i , Y_i , Z_i) вычесть соответственно минимальные координаты ($X_{\min}$, $Y_{\min}$, $Z_{\min}$);

5) для каждой точки облака координаты (X_i , Y_i) разделить на d , получив соответственно номер строки p и номер столбца q для элемента массива U_{pq} , и присоединить эту точку к соответствующему списку, корректируя при этом минимальное $Z_{\min pq}$ и максимальное $Z_{\max pq}$ значение координаты Z для этого списка.

Затем всё пространство, занимаемое облаком точек, разделим на виртуальные слои высотой d_z , количество слоёв k_z :

$$k_z = \lceil (Z_{\max} - Z_{\min}) / d \rceil.$$

Для каждого списка точек, адресуемого элементом массива U_{pq} , создадим массив вокселей, т.е. слоёв, привязанных к горизонтальной клетке. Количество элементов массива определяется количеством вокселей, занимаемых этим списком точек. Список точек упорядочим по возрастанию координаты Z , после чего отслеживаем точки, попавшие в отдельные воксели, подсчитываем количество точек для каждого вокселя и создаём ссылку на группу элементов списка точек вокселя. Кроме того, для каждого вокселя вычисляем средние координаты точек по X , Y и Z . Количество точек, ссылку и средние координаты точек запоминаем в соответствующем элементе массива вокселей.

Размеры клеток d и высоту виртуальных слоёв d_z следует выбирать так, чтобы среднее количество точек во всех вокселях было около 10.

Построение модели подстилающей поверхности

Точки в облаке, отражённые от поверхности земли, имеют наименьшие координаты Z . Если поверхность земли строго горизонтальная, то эти точки легко выделить, как попавшие в воксели нулевого виртуального слоя. Если же поверхность образует сложный рельеф с перепадами высот, то процесс выделения может быть следующим:

1) создать и обнулить двумерный массив B признаков для клеток разбиения, размеры массива k_y строк и k_x столбцов;

2) просмотреть последовательно все клетки разбиения; клетку, в которой есть воксель из нулевого виртуального слоя, пометить признаком в массиве B , номер клетки поместить в очередь;

3) просмотреть последовательно созданную очередь номеров клеток; для каждой клетки очереди просмотреть 8 окружающих её соседних клеток и для каждой из них проверить:

– если клетка помечена признаком в массиве B , то её пропустить;

– иначе, если в клетке есть воксель нижнего слоя, уровень которого не больше чем на 1 уровня центральной клетки, то эту клетку пометить признаком в массиве B , а номер клетки поместить в конец очереди;

– иначе клетку пропустить;

4) ещё раз просмотреть созданную очередь номеров клеток; для каждой клетки точки из вокселя нижнего слоя поместить в массив точек P ;

5) по точкам массива P построить триангуляцию в горизонтальной плоскости, аналогично тому, как это описано в [5];

6) просмотреть граничные треугольники построенной триангуляции и удалить те из них, у которых есть рёбра длиннее, например, $3d$.

Полученная триангуляция с добавленными координатами Z точек будет представлять модель подстилающей поверхности. Точки, вошедшие в эту модель, следует исключить для дальнейшего распознавания.

Распознавание одиночных высоких объектов

Распознавание таких объектов, как столбы или отдельно стоящие деревья, можно начинать с вокселей верхних слоёв:

1) обнулить двумерный массив $B2$ признаков для клеток разбиения;

2) просматривать последовательно все клетки разбиения; клетку U_{pq} , в которой есть воксель из верхнего (l -го) виртуального слоя, у соседних клеток которой воксели из верхнего слоя не превышают l , и, кроме того,

воксель из нижнего виртуального слоя клетки U_{pq} был отнесён к поверхности земли, пометить признаком в массиве $B2$, номер клетки поместить в очередь;

3) просмотреть последовательно созданную очередь номеров клеток; для каждой клетки очереди просмотреть 8 окружающих её соседних клеток и для каждой из них проверить:

- если клетка помечена признаком в массиве $B2$, то её пропустить;
- иначе, если в клетке есть воксель того слоя l , то клетку пометить признаком в массиве $B2$, а номер клетки поместить в конец очереди;
- иначе клетку пропустить;

4) ещё раз просмотреть созданную очередь номеров клеток; для каждой клетки точки из вокселя слоя l поместить в массив точек P ;

5) по точкам массива P построить границу объекта – «почти» выпуклую оболочку в горизонтальной плоскости в слое l ;

6) если слой l выше поверхности земли, то $l = l - 1$, и перейти к п. 3.

В результате будет создана модель объекта в виде совокупности граничных слоёв, как показано на рис. 1. После этого можно продолжить просмотр клеток разбиения в соответствии с п. 2.

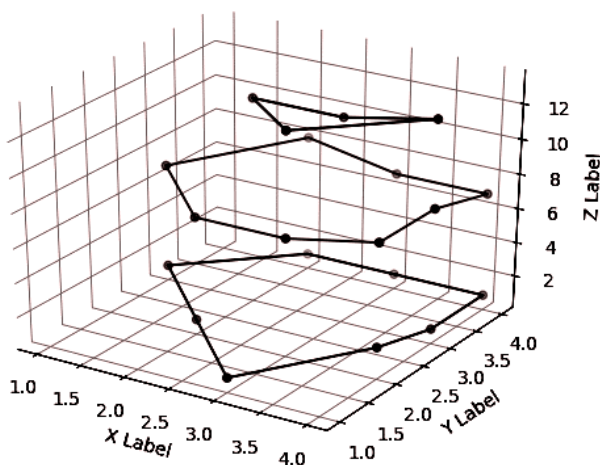


Рис. 1. Граничные слои одиночного высокого объекта

Распознавание горизонтальных плоских граней объектов

Горизонтальные плоскости задаются одним параметром – высотой Z , поэтому применение обобщенного преобразования Хафа для их распознавания весьма эффективно. В целом действия по распознаванию могут быть следующими:

1) создать и обнулить аккумуляторный массив A из k_z элементов, для каждого слоя по Z – отдельный элемент;

2) просматривать последовательно все клетки разбиения; для каждой клетки цикл по элементам массива вокселей, количество точек вокселя добавить к соответствующему элементу массива A .

3) просматривать элементы массива A для поиска номера i элемента с максимальным значением;

4) обнулить двумерный массив $B3$ признаков для клеток разбиения;

5) просматривать последовательно все клетки разбиения; клетку, у которой есть воксель уровня i , пометить признаком в массиве $B3$;

6) выделить в массиве $B3$ все связанные области из помеченных клеток; для каждой такой области для каждой клетки точки из вокселя слоя i поместить в массив точек P ; построить «почти» выпуклую оболочку в горизонтальной плоскости (т.е. границу грани) и вычислить по точкам среднюю высоту грани;

7) обнулить i -й элемент массива A и перейти к п. 3 для поиска следующего максимального элемента, пока в массиве A остаются элементы, большие заданного порогового значения.

В результате для каждой распознанной грани будет вычислена граница и средняя высота.

Заключение

Предложенная структурная клеточная структура разбиения облака точек, полученная в результате лазерного сканирования местности, позволяет создавать эффективные алгоритмы распознавания различных типов объектов. Необходимый объем памяти для такой структуры имеет порядок $O(n)$, а трудоёмкость создания структуры (при использовании эффективного алгоритма сортировки на отдельных этапах) – $O(n \cdot \log n)$, где n – количество точек в облаке. Рассмотренные алгоритмы распознавания ряда типов объектов основаны как на идее фильтрации данных, так и на обобщенном преобразовании Хафа, и благодаря использованию структуры клеточного разбиения удалось добиться трудоёмкости алгоритмов $O(n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Медведев В.И., Сарычев Д.С., Скворцов А.В.* Предварительная обработка данных мобильного лазерного сканирования в системе IndorCloud // САПР и ГИС автомобильных дорог. 2014. № 2 (3). С. 67–74.
2. http://www.terrasolid.com/download/user_guides.php
3. <http://www.geo-plus.com/visionlidar-point-cloud-software>
4. *Костюк Ю.Л., Гульбин К.Г., Пешихонов С.В.* Построение поверхностной триангуляции и выделение пространственных фигур по данным лазерного сканирования // Вестник Том. гос. ун-та. Сер. Информатика, кибернетика, математика. 2006. № 293. С. 151–155.
5. *Костюк Ю.Л., Литовченко М.И.* Распознавание граней трехмерных объектов по данным лазерного сканирования // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017): Материалы XVI Международной конференции имени А.Ф. Терпугова. 2017. С. 55–61.
6. *Ballard D.H.* Generalizing the Hough transform to detect arbitrary shapes // Pattern Recognition. 1981. V. 13. No. 2. P. 111–122.
7. *Khoshelham K.* Extending Generalized Hough Transform to Detect 3D Objects in Laser Range Data // ISPRS Workshop on Laser Scanning 2007 and SilviLaser 2007. Espoo, Finland, 12–14 September 2007. Finland, 2007. V. 36. Part 3. P. 206–210.
8. *Woodford O.J.* [et al.]. Demisting the hough transform for 3D shape recognition and registration // Int. J. Comput. Vis. 2014. No. 106 (3). P. 1–10.
9. *Dalitz C., Dalitz C., Schramke T., Jeltsch M.* Iterative Hough transform for line detection in 3D point clouds // Image Processing On Line. 2017. No. 7. P. 184–196.
10. *Ручкин К.А., Шевченко Е.А.* Повышение эффективности обобщенного 3D преобразование Хафа // Вестник НТУ ХПИ. 2014. № 35 (1078). С. 161–169.

Костюк Юрий Леонидович, д.т.н., профессор; kostyuk_y_l@sibmail.com;

Литовченко Марина Игоревна, бакалавр;

Смирнова Анастасия Александровна, бакалавр

Алгоритм распознавания дефектов дорожного покрытия с использованием мобильных видеозмерений¹

В.К. Ключников¹, Ю.А. Герасимова², Б.М. Шумилов¹

¹ *Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, Россия*

² *Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия*

В настоящее время актуальной является задача автоматизации паспортизации и диагностики состояния дорожного покрытия. Одной из главных проблем является то, что при планировании ремонта участков автомобильных дорог по существующим методикам повсеместно происходит завышение объема работ. Принимая во внимание доступность и распространенность мобильных устройств, предлагается алгоритм распознавания дефектов дорожного покрытия с использованием мобильных измерений на серии последовательных кадров видеосъемки. В рамках алгоритма рассматривается наиболее доступный метод для определения объема повреждения с помощью маркеров по видеосъемке. В этом случае задача определения объема объекта по его видеоизображению сводится к преобразованию изображения к цифровой объемной модели.

Постановка задачи

Требуется определить характеристики повреждения автомобильной дороги с использованием мобильных видеоизмерений. В этом случае под характеристиками объекта понимается его площадь и объем.

На рис. 1 представлен алгоритм решения поставленной задачи. Основными этапами решения являются:

1. Видеосъемка повреждения дорожного покрытия;
2. Выявление устойчивых особенностей видеоряда и определение опорных кадров;
3. Локализация и определение характерных точек видеокadra;
4. Решение обратной задачи фотограмметрии;

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Администрации Томской области (код проекта 16-41-700400 p_a).

5. Получение трехмерной математической модели объекта;
6. Вычисление характеристик объекта (объема и площади);
7. Использование полученной модели для экспертной оценки и формирования проектно-сметной документации.



Рис. 1. Структура программно-алгоритмического комплекса распознавания повреждений дорожной поверхности

Очевидно, в процессе видеосъемки некоторые точки объекта могут становиться невидимыми. Поэтому для измерений требуется оставить только опорные кадры видеоряда, на которых присутствуют все требуемые для измерений точки. Мы рекомендуем для определения опорных кадров применить один из наиболее современных и эффективных методов обработки изображений – поглощение шумов с помощью специальных шварц-функций [1], впервые описанных в 2006 году. Это необходимо для облегчения отыскания локальных особенностей объекта повреждения при переходе на следующий этап алгоритма.

Нахождение характерных точек (*GCP – ground control point*) видеокadra возможно с использованием метода восстановления трехмерного координатного вектора по двум перспективным проекциям, образующим стереопару [2], или более простого метода с использованием ортографических проекций.

На следующем этапе, для выявления устойчивых особенностей изображения можно применить один из широко известных методов – Собеля, Лапласа, Кани [3–5]. Также целесообразным может быть применение детекторов блобов (*blob – англ. – капля*) [6] из-за наличия локальных неоднородностей на дефектах дорожного покрытия.

Учитывая особенности изображения дефектов дорожного полотна (отсутствие четких границ, наличие посторонних предметов, несущественность некоторых дефектов), следует предусмотреть возможность «ручного» вмешательства. Дорожному мастеру должен быть предоставлен интерфейс, позволяющий выделить характерные точки движением графического курсора. Алгоритм создания такого интерфейса на смартфоне под управлением ОС Андроид изложен в [7].

Построение трехмерной математической модели объекта сводится к вычислению пространственных координат (1) через матрицу преобразования H :

$$X_{Ri} = HX_i, i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Здесь $\{X_{Ri}\}$ – плоские координаты опорных точек, а $\{X_i\}$ – координаты опорных точек в пространстве. Затем, на основе полученной модели, по технологии триангуляции вычисляются площадь и объем геометрической фигуры, характеризующей данное конкретное повреждение. Дальнейшая задача состоит в подготовке заказа-наряда на выполнение ремонтных работ по ликвидации данного дорожного дефекта.

Заключение

Предложенный алгоритм позволит осуществить объективную оценку повреждения дорожного покрытия с минимальными затратами на его реализацию.

Перспективным направлением является использование лазерного дальномера на смартфоне для повышения эффективности алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gao G., Liu Y., Labate D.* A two-stage shearlet-based approach for the removal of random-valued impulse noise in images // *J. Visual Communication and Image Representation*. 2015. V. 32. P. 83–94.
2. *Роджерс Д., Адамс Дж.* Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 604 с.
3. *Шапиро Л., Стокман Дж.* Компьютерное зрение. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 752 с.
4. *Меженин А.В.* Методы и средства распознавания образов и визуализации: учеб. пособие. СПб.: НИУ ИТМО, 2012. 120 с. URL: <http://elib.spbstu.ru/dl/2/8346.pdf/download/8346.pdf>
5. *Sonka M., Hlavac V., Boyle R.* Image Processing, Analysis and Machine Vision. Thomson, 2008. 866 p.
6. *Harris affine region detector.* URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Harris_affine_region_detector.
7. *Tuytelaars T., Mikolajczyk K.* Local Invariant Feature Detectors: A Survey // *Foundations and Trends in Computer Graphics and Vision*. 2007. V. 3. No. 3. P. 177–280.
8. *Герасимова Ю.А., Лаходынова Н.А., Шумилов Б.М., Жумадил уулу А., Абдыкалыков К.А.* О распознавании повреждений дорожной поверхности по результатам мобильных видеоизмерений // Сборник научных трудов Международной научно-технической конференции «Перспективные информационные технологии». 2018. С. 779–781. URL: https://ssau.ru/pagefiles/pit_2018_sbornik.pdf
9. *Проханов С.А., Шумилов Б.М., Кудуев А.Ж., Абдыкалыков К.А.* Использование алгоритмов обработки данных мобильных видеоизмерений для распознавания и классификации повреждений дорожной поверхности // Девятая Сибирская конференция по параллельным и высоко-производительным вычислениям: сборник статей / под ред. А.В. Старченко. Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2017. С. 98–104. URL: <http://conference.tsu.ru/engine/download.php?id=542>

Шумилов Борис Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, b_shumilov@math.tsu.ru;

Герасимова Юлия Андреевна, аспирант, gerasimova.ju@yandex.ru;

Клюшников Вячеслав Константинович

Прогнозирование дневных изменений цен на Биткойн с помощью методов интеллектуального анализа текста

В.А. Мазуренко

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Данная работа рассматривает возможность предсказания колебаний цен на биткойн с помощью анализа новостных сводок и данных из социальных сетей. Для построения предсказательных моделей используются традиционные методы машинного обучения с учителем. Из предыдущих исследований известно, что среднее время воздействия новости на активность трейдеров на рынке составляет около 30 мин [1]. На основании этого факта и был категоризирован и размечен исходный набор данных. Конечная цель – проверить возможность построения модели, которая в режиме реального времени, анализируя сводки новостей и данные из социальных сетей, может с высокой долей вероятности предсказать скачок цены на биткойн либо вверх на 3 %, либо соответственно вниз.

Введение

За последние несколько лет значительно возросла экономическая и социальная значимость криптовалют и естественно увеличилось количество соответствующих новостных сводок и постов в социальных сетях, в частности в «Твиттере». Как и на традиционных финансовых рынках, здесь существует явная связь между состоянием в новостном и социальном медиа-пространстве и текущей ценой криптовалют. Существует множество причин колебаний цен на рынке криптовалют и критически важно исследовать возможность информационных источников предсказывать надвигающееся изменение в цене. Входными данными для обучения модели являются тексты новостей и твитов, проходящие трехступенчатую систему обработки, которая будет рассмотрена далее. После этого применяется самый простой алгоритм логистической регрессии для бинарной классификации для ответа на простой вопрос: «Изменится ли цена на биткойн вверх или вниз благодаря данной новости?»

Набор данных

Данные для обучения модели были собраны во временном интервале с 1 января 2016 года по 31 июля 2017 года из нескольких источников. Изменения цены биткойна в минутном интервале взяты с сайта Kaggle [2]. Для получения первого блока текстовой информации был написан скрипт, позволяющий спарсить 11354 новостных статьи с таких сайтов как bitcoin.com, coindesk.com, csn.com, bitcoinist.com. Для получения второго блока, содержащего информацию из «Twitter», использовался проект J.Henrique на github.com [3], в конечном итоге позволивший собрать 210752 твита от 50 самых популярных твиттер-аккаунтов, связанных с генерацией новостей про биткойн.

Далее производится агрегация всех новостей и твитов в 10-минутные интервалы в 24-часовом формате для того, чтобы существовала возможность оценить суммарное взаимодействие вышедших новостей на цену за прошедшие 10 мин.

Каждому 10-минутному интервалу ставится в соответствие цена биткойна на бирже BitStamp [4] (одна из крупнейших криптовалютных бирж мира), цена через 30 мин, дамми-переменная, показывающая рост на 3 %, и дамми-переменная, показывающая падение цены на 3 %.

В конечном итоге мы получаем дата-фрейм следующего вида.

Т а б л и ц а 1

Дата	Новости/ твиты	Цена	Цена + 30 мин	3 % up	3 % down
2016.07.31 03:50:00	[..., ...]	X	$1.04 \cdot X$	1	0
2016.07.31 04:00:00	[..., ...]	X	$1.01 \cdot X$	0	0
...					
2017.07.31	[..., ...]	X	$0.96 \cdot X$	0	1

Реализация

Извлечение признаков. Используя функции библиотеки scikit-learn [5] и вспомогательный код, каждая новость и твит из 10-минутного интервала были преобразованы к нижнему регистру, очищены от пробелов, знаков пунктуации, стоп-слов (например, 'a', 'the', 'and') и разбиты на лексемы. Максимальное значение N-грамм для построения призна-

ков равно 3. Извлечение признаков было осуществлено с помощью метода CountVectorizer библиотеки scikit-learn, который представляет признаки в виде разреженной матрицы.

Классификация. Модель использует классификатор, построенный на простой логистической регрессии. Он был выбран с силу своей простоты и возможности быстро производить анализ ошибок, чтобы двигаться дальше. Использовался классификатор реализованный в библиотеке scikit-learn.

Метрики качества. Поскольку мы имеем дело с простой бинарной классификацией, то для оценки качества воспользуемся стандартной метриками, такими, как чувствительность, специфичность и точность.

Полученные коэффициенты логистической регрессии. Был рассмотрен набор слов, соответствующий наибольшим и наименьшим коэффициентам логистической регрессии для определения возможных случаев неправильных предсказаний. Благодаря такому подходу, удалось улучшить первичную обработку текстов, включив в список стоп-слов значения, которые часто встречаются в сообщениях, но плохо описывают изменения цены (например, “2017”, “btc” и т.д). Названия признаков и коэффициенты показаны на рис. 1.

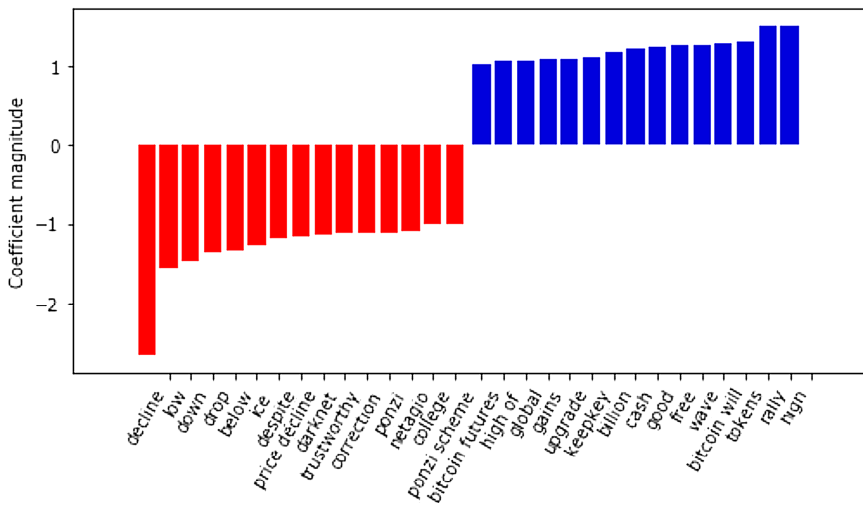


Рис. 1. Наибольшие и наименьшие коэффициенты логистической регрессии

Заключение

Период с 01.01.2016 по 01.07.2017 был выбран в качестве обучающего, а тестовые прогнозы проводились для периода в 1 мес., с 01.07.2017 по 31.07.2017. Из табл. 2 следует, что модель была способна предсказать 38.9 % увеличений цены на 3 % за следующие 30 мин корректно и 48.6 % падений цены на 3 % за последующие 30 мин после выхода новостей соответственно.

Т а б л и ц а 2

Матрица ошибок

	Pred. Increase	Pred. Decrease
Actual Increase	38.9	61.1
Actual Decrease	51.4	48.6

Главная цель исследования была достигнута – построена модель, которая в режиме реального времени, анализируя сводки новостей и данные из социальных сетей, может с высокой долей вероятности предсказать скачок цены на биткойн.

Модель имеет большой потенциал для улучшения:

- Увеличение источников новостей.
- Использование более сложных классификаторов (например, нейронные сети).
- Улучшение качества первичной обработки текста и лемматизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Robert P. Schumaker, Hsinchun Chen.* A quantitative stock prediction system based on financial news // *Information Processing and Management.* V. 45. 2009. P. 571–583.
2. *Kumar S.J.* Cryptocurrency Historical Prices, <https://www.kaggle.com/sudalairajkumar/cryptocurrencypricehistory>
3. *Henrique J.* Get Old Tweets Programatically [Github repository], <https://github.com/Jefferson-Henrique/GetOldTweets-python>
4. *BitStamp*, <https://bitstamp.net>
5. *Scikit-learn*, <http://scikit-learn.org>
6. *Lamon C., Nielsen E., Redondo E.* Cryptocurrency Price Prediction Using News and Social Media Sentiment.
7. *Marc-Andre Mittermayer.* Forecasting intraday stock price trends with text mining techniques // *Hawaii International Conference on System Sciences.* 2004.

Мазуренко Владислав Александрович; vlad.mazurenko.95@gmail.com

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Research of correlation dependences of soil of warm-up highways

I.A. Botygin¹, V.A. Krutikov², V.S. Sherstnev¹, A.I. Sherstneva¹

¹ *National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia*

² *Institute of monitoring of climatic and ecological systems
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russia*

One of important approaches of a research of soils is studying of their water and thermal mode as the defining factor of many pochven-but-climatic phenomena [1–3]. In the publications connected with researches of the temperature modes of soils aspects of their functioning are discussed various.

Changes of temperature condition the srednetayezhnykh of podsolich soils are estimated [4]. Temperature conditions the sezonnopromerzayushchikh of soils of tundra landscapes are discussed [5]. In [6] researches of temperature condition of soils of a northern taiga of Western Siberia, in [7] – the European Subarctic region (the northern suburb of the European subcontinent) are given, and in [8] – the thermal mode of the soil of five coniferous communities of a subband of an average taiga is considered. The characteristic of dynamics of temperature of the meadow and chernozem solonetzic soil of an alasny hollow is provided in the Central Yakutia in [9]. Influence of temperature on a mineralization and hymification of a forest opad is investigated [10]. In [11] temperature condition of the peat soil in a moss and grass ecosystem of the Bakcharsky marsh massif located in a South taiga zone of Western Siberia is investigated. Results of studying of temperature warming up of forest soils are given in a zone of the Black Sea coast of the Caucasus in [12]. In work [13] influence of climate on the modes and properties of soils of the Caspian plain and chernozems of the Central European and southern regions of Russia is investigated. The exhaustive research of temperature condition of a complex soil cover on field material is given in the monograph [2].

In particular, the research problem of temperature moisture conditions in soil of a road bed of the automobile routes laid in climatic zones of Siberia

[14] is very relevant. It should be noted, a research of geocryologic conditions of soil – the difficult scientific task connected with a research of chemical and mineralogical, chemical and granulometric and also structural and textural features of structure of components of soil. At the same time it is very important to receive also the quantitative estimates of a moist and temperature condition of soil necessary for creation of model of transfer of heat in soil. Data of spatial distribution of temperature in soil, and dynamics of change of this distribution in time also are very important for the correct accounting of transport and operational indicators of automobile routes.

Observation scheme

In the real work results of a research of dynamics of change of temperature of a road bed on the federal highway "Surgut – Salekhard" within the Yamal-Nenets autonomous area and are given in the road of territorial value "Korotchayevo – Urengoy". Change of the course of temperature on the different horizons and in different points of observations of the experimental site was investigated. The technique of carrying out researches with use of low-deep wells was used. Observations were made on 10 posts during the period from October 15, 2006 to January 24, 2007. The number of sensors in a garland – 7. Distance between temperature sensors in a garland – 30 cm.

In the cross section of a road bed of a garland have been placed vertically with a carriageway edge. The first sensor was installed at a depth of 30 cm, the last – at a depth of 210 cm (Fig. 1). Each sensor had full non-volatility (up to 2 years), had the digital thermometer for registration of temperature with an accuracy of $\pm 0.5^{\circ}\text{C}$ and internal memory for preservation of measurements. Measurements were made each 4 h.

For work with the valid values of temperatures interpretation of the sensors given from dat-files and also transformation of the values which are written down in an internal format of sensors in the valid values of temperatures according to their technical documentation was carried out. For use in calculations and visualization the data kept by sensors in various periods were going to the general massif and average daily temperatures of the horizons of soil paid off.

In Fig. 1. the fragment of the schedule of the calculated average daily temperatures for one of posts in 1 month of observations is shown.

Visualization of data has allowed to observe visually the following manifestation of feature of the mode of frost penetration: the temperature emissions noticeable on indications of the sensors located closer to a surface are

much worse observed in the average horizons and are almost imperceptible in lower.

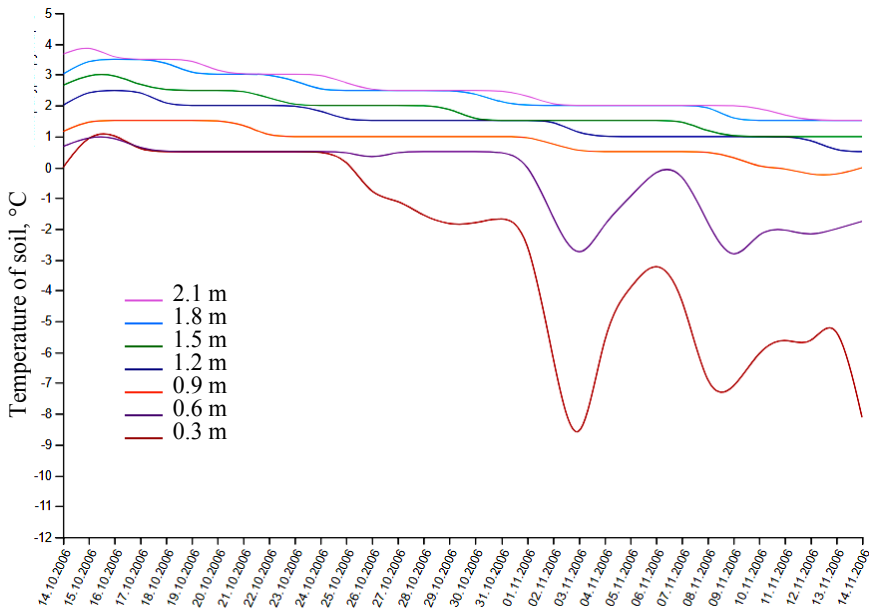


Fig. 1. Fragment of values of average monthly temperatures of soil

Analysis of correlation fields of a temperature condition of soil

When processing big ranks of experimental data for many purposes approximate estimates of the measured sizes on the basis of correlation ratios and communications are very effective [15]. Correlation models and ratios can provide the accuracy of assessment of experimental measurements accepted for practice. In such models the obvious dependence between the measured sizes isn't established, but the synchronism or asynchrony of their changes is predicted that, indirectly, allows to estimate also their quantitative characteristics.

In Fig. 2 the option of calculation of a matrix of coefficients of correlation of values of temperatures of layers of earth on the horizons is presented: 0.3 m, 0.6 m, 0.9 m, 1.2 m, 1.5 m, 1.8 m and 2.1 m.

In Fig. 3 the schedule of change of coefficients of correlation on a time interval from 10/15/2006 to 1/24/2007 is submitted.

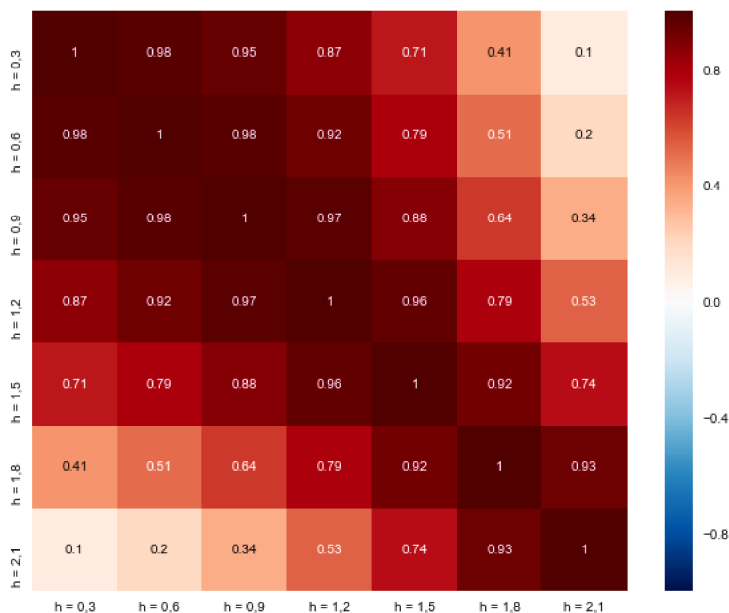


Fig. 2. Matrix of coefficients of correlation on a time interval from 10/15/2006 to 1/24/2007

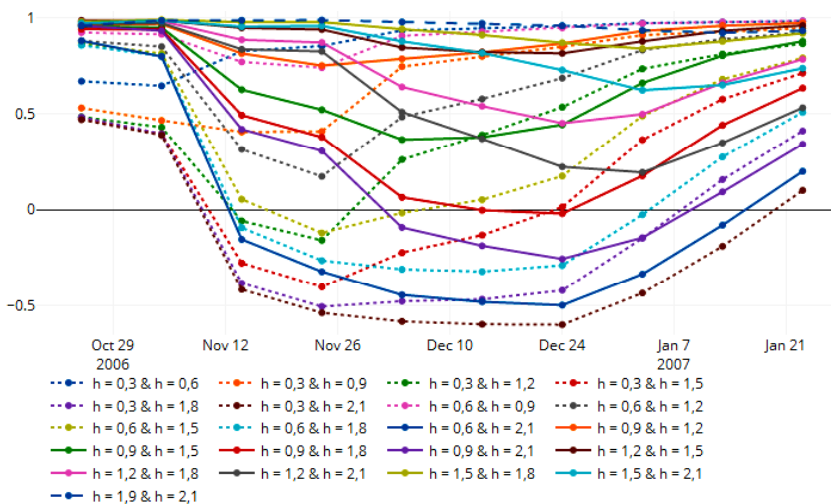


Fig. 3. Change of coefficients of correlation in time

The schedule of change of coefficients of correlation has been constructed on given private matrixes of correlation dependences. Private matrixes of correlation dependences have been calculated on selections with various temporary scales. The first matrix has been constructed on a basis of the data obtained within 10 days since the beginning of observations. The subsequent matrixes were under construction on the basis of the data obtained to the current of 20 days, 30 days, etc. (only 10 matrixes).

Conclusions

With increase in depth of a freezing, the schedule of values of temperatures accepts more flat character (the quantity of "steps" decreases). Time-temperature charts of this or that depth at the end of a time frame are in more narrow area of temperature values. With increase in a difference (remoteness) between the horizons (layers) the coefficient of correlation decreases.

Calculations showed that at parameter with the strong correlative dependence at the end of the schedule, namely, "soil temperature at a depth of 1.9 m – soil temperature at a depth of 2.1 m", the correlation coefficient practically does not change at all temporary scales of selection. At parameters with the strong correlative dependence at the end of the schedule, for example, "soil temperature at a depth of 0.9 m – soil temperature at a depth of 1.2 m", "soil temperature at a depth of 1.2 m – soil temperature at a depth of 1.5 m", "soil temperature at a depth of 1.5 m – soil temperature at a depth of 1.8 m", at average scales of selection is observed minor change of coefficient of correlation. The maximal deviation of a coefficient of correlation is observed on large scales of selection. At parameters with an average coefficient of correlation at the end of the schedule, for example, "soil temperature at a depth of 0.3 m – soil temperature at a depth of 2.1", "soil temperature at a depth of 0.3 m – soil temperature at a depth of 1.8 m", "soil temperature at a depth of 0.6 m – soil temperature at a depth of 2.1 m", at average scales of selection is observed the considerable deviation, and the maximal deviation of a coefficient of correlation is also observed on large scales of selection. At all parameters with increase in temporary scale of selection stabilization of values of coefficients of correlation (the last three selections) is observed.

In general, the analysis of correlative fields of temperatures of a soil allows to predict more precisely values of temperatures and out of levels of the horizons of the recording sensors and to develop practical recommendations for regulation of a thermal conditions of a cloth of the explored automobile

route. Further the received results can be used in a problem of prediction of a temperature schedule of soils on the respective sites and in a problem of establishment of average humidity of a soil with use of data on an atmospheric precipitation and average monthly air temperatures.

LITERATURE

1. *Shulgin A.M.* Soil climate and its regulation. L.: Gidrometeoizdat, 1972. 341 p.
2. *Arkhangelskaya T.A.* Temperature regime of the complex soil cover. Moscow: GEOS, 2012. 282 p.
3. *Aparin B.F.* The laws of natural science V.V. Dokuchaeva // Soil Science: New Challenges. Materials of Int. Sci. Conf. XVI Dokoutchaev youth readings. St. Petersburg, 2013. P. 4–13.
4. *Dymov A.A., Startsev V.V.* Change in the temperature regime of podzolic soils in the process of natural reforestation after clear-cut logging // *Pochvovedenie*. 2016. No. 5. P. 599–608.
5. *Kaverin D.A., Pastukhov A.V.* Peculiarities of the Temperature Regime of Seasonally Prolonging Soils in the Tundra Landscapes of the European Northeast of Russia // *Bul. Soil. Institute for them. V.V. Dokuchaev*. 2017. V. 87. P. 3–21.
6. *Goncharova O.Yu., Matyshak G.V., Bobrik A.A., et al.* The contribution of climatic factors to the formation of temperature regimes of soils of intermittent cryolithozone of the northern taiga of Western Siberia // *Bul. Soil. Institute for them. V.V. Dokuchaev*. 2017. Vol. 87. P. 39–54.
7. *Skytte N.G., Romanis T.V.* Thermal regime of the soils of the thermal tract Pym-yahor // *Natural sciences*. 2013. No. 4. P. 30–37.
8. *Galenko E.P.* Formation of the thermal regime of soils of coniferous ecosystems in the boreal zone depending on the forest forming species and forest type // *Izvestiya Komi Scientific Center, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*. 2013. V. 1. No. 13. P. 32–37.
9. *Desyatkin R.V., Desyatkin A.R.* Thermal regime of cryogenic meadow-chernozem solonetsous soil in the multi-year cycle // *Pochvovedenie*. 2017. No. 11. P. 1344–1354.
10. *Larionova A.A., Maltseva A.N., Lopez de Gerenyu V.O., et al.* Influence of temperature and humidity on mineralization and humification of deciduous litter in a model incubation experiment // *Pochvovedenie*. 2017. No. 4. P. 438–448.
11. *Kiselyov M.V., Voropai N.N., Dyukarev E.A.* Temperature regime of soils of sedge-sphagnum swamp of a highland bog in the southern taiga of Western Siberia // *Geography and Natural Resources*. 2017. No. 3. P. 110–117.
12. *Bityukov N.A.* Temperature regime of brown forest soils under the bibliks // *Izvestiya Sochi State University*. 2012. No. 3(21). P. 219–223.
13. *Bazykina G.S.* Soils of the steppe and dry steppe zones in the abnormal weather conditions of the last decades // *Bulletin of the Soil Institute. V.V. Dokuchaeva*. 2014. Iss. 73. P. 54–68.
14. *Kiryakov E.I., Efimenko V.N.* Refinement of the methodology for predicting the parameters of the water-thermal regime of the roadbed with reference to areas of deep

seasonal freezing // Ensuring the quality of highways in Siberia: coll. sci. works. Kemerovo: Publishing house in Kuzbass. State. Tech., 1997. P. 32–36.

15. *Gordov E.P., Titov A.G., Pritupov A.A., Botygin I.A.* Development of a web-application for calculating the correlation coefficient for climatic and meteorological characteristics // *Izvestiya Tomsk Polytechnic University*. 2014. V. 325. No. 5. P. 91–98.

Крутиков Владимир Алексеевич, д.ф.-м. н., г.н.с., krutikov@imces.ru;

Ботыгин Игорь Александрович к.т.н., доцент, bia@tpu.ru;

Шерстнев Владислав Станиславович к.т.н., доцент, vss@tpu.ru;

Шерстнева Анна Игоревна, к.ф.-м.н., доцент, sherstneva@tpu.ru

Hidden information transmission via cloud computing

G.N. Huseynova

Azerbaijan state oil and industrial university, Baku, Azerbaijan

The cloud computing is a model that allows to acquire general computer resources (for example, networks, providers, data storages, programs and services) on the basis of a search engine through the network. The resources can be obtained by referring to the service providers. It is called a cloud computing as all the resources are collected together and distributed from there.

Through this technology users make searches on images, plays, videos etc. in one of the servers in the internet. If the results of a search exist in a data storage of the server the operation is considered to be finished. Thus, the users obtain on the spot required information using their pcs, notebooks, netbooks, mobile phones, tablets etc.

The Internet provides a great opportunity to create covert channel of hidden information. For example, covert channels can be created using the Internet protocols such as TCP, VOIP, HTTP, social networks like Facebook, Google+, Twitter, LinkedIn, Instagram, a cloud storage like Google Photos, Google Drive, Google Docs, Google App Engine, Google Cloud Storage, Amazon Simple Storage Service, Amazon Elastic Compute Cloud, Microsoft SkyDrive, Windows Azure, the services and technologies such as Youtube which allows to implement covert channels [1].

One of these covert channels can be created by the opportunities presented by Google Cloud Storage.

Google users can transform the certain information confidentially, in other words, they can create covert channel via their own accounts. Here, it should be taken into account that, placement, transfer and acquisition process of the information can be exposed to some changes so that it may result in the loss of the hidden information. So, using JPEG stenographic method, the information can be hidden in the images of JPEG format and thus it can be transmitted to other users.

Among all covert channel, the JPEG (Joint Photographic Experts Group) is the most prevalent medium for steganography. There are various techniques accessible for steganography. In any case, just a couple of algorithms work with JPEG compressed pictures. JPEG-based steganography calculations work just and just with the DCT (Discrete Cosine Transformation) coefficients, that are whole number values in the scope of

$[-2p-1 \dots 2p-1]$ for a p -bit encoding. Couple of other compression techniques work with DCT quantization values, considering the adjusting error. JPEG techniques do not work with quantization errors. Along these lines, there is no simple approach to control the adjustment bending [2].

Google Photos as a covert channel in cloud computing. As mentioned above, as Google Photos support JPEG format images, working on the software supporting JPEG format images through the images included in "35 Best Steganography Software For Windows" is considered appropriate. These software are: Stegan PEG, JP Hide and Seek, DeEgger Embedder, Hide N Send, SilentEye.

Thus, eight stenographic methods were tested. Among the tools the removal of confidential information was success only in 5 luminance interval in Silent Eye.

Gmail as a covert channel in cloud computing. While sharing the stenographic image in Google Photos, the images are simultaneously delivered to gmail address of the reciever. Thus, accessing its gmail address, the reciever can download these images and acquire the confidential information in it.

Google drive as a covert channel in cloud computing. Google Drive gives opportunities to its users to share their files via Gmail, Google+, Facebook and Twitter. Google drive also can use these files as stego container: Archive files (.ZIP, .RAR, tar, gzip), Audio formats (MP3, MPEG, WAV, .ogg), Image files (.JPEG, .PNG, .GIF, .BMP), Markup/Code (.CSS, .HTML, .PHP, .C, .CPP, .H, .HPP, .JS), Text files (.TXT), Video files (WebM, .MPEG4, .3GPP, .MOV, .AVI, .MPEGPS, .WMV, .FLV, .ogg), Autodesk AutoCad (.DXF), Illustrator (.AI), Photoshop (.PSD), Portable Document Format (.PDF), PostScript (.EPS, .PS), Scalable Vector Graphics (.SVG), Tagged Image File Format (.TIFF) – best with RGB .TIFF images, TrueType (.TTF), Excel (.XLS and .XLSX), PowerPoint (.PPT and .PPTX), Word (.DOC and .DOCX), XML Paper Specification (.XPS) [1].

REFERENCES

1. *Huseynova G.N.* Realization of the covert channel for information transmission via cloud technology // AzTU Scientific Works. 2017. No. 2. P. 108–113.
2. *Huseynova G.N., Mustafayeva E.A.* Hidden information transmission through whatsapp // The 16th International Conference named after A.F. Terpuhov «Information Technologies and Mathematical Modelling» (ITMM – 2017). 2017. P. 231–233.

Huseynova Gunay Natig, assistant of professor; gunayhuseyn@yahoo.com

Вербализация структурного компонента ERM-схем

А.М. Бабанов

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

При создании информационных систем (ИС) возникает проблема общения экспертов со стороны заказчика с разработчиками. В том числе для решения и этой проблемы создаются высокоуровневые, ориентированные на человека модели и языки представления аналитической информации. Одни (эксперты) передают на таком языке сведения о своих бизнес-процессах, другие (разработчики) осуществляют адекватное формальное их описание, необходимое для последующих шагов реализации ИС. Помимо использования общепринятого понятийного базиса и общеупотребительной лексики, а также наглядных, преимущественно графических форм для представления семантики предметной области (ПрО) часто дополнительно прибегают к такому средству, как псевдоестественный язык.

При построении систем баз данных (БД) его можно применять как для первоначального представления семантики явлений ПрО при проектировании схемы БД, так и для контрольного словесного описания построенной схемы – ее вербализации. Первый подход можно использовать при автоматизированном проектировании схем БД, основанном на трансляции описаний на псевдоестественном языке в команды СУБД. Автору не известны реализации этого подхода. А вот проблемой вербализации схем занимались многие исследователи, однако широко известны только два подхода [1–3].

ER-схема в нотации Баркера [1] – это граф, вершины которого представляют множества сущностей, а ребра – бинарные множества связей. Общепринятым стандартом для именования множеств сущностей является использование слова или короткой фразы, содержащей существительное в единственном числе. При создании множества связей (ребра графа) указывается имя роли «откуда» («from») для начальной вершины и имя роли «куда» («to») для конечной вершины.

Нужно четко представлять себе правила чтения таких диаграмм. Традиционная схема чтения использует следующий шаблон: «Каждый А {может | должен} <имя роли А> {один и только один | один или несколько} В», где А – имя множества сущностей на одном конце ребра, В – имя множества сущностей на другом конце ребра. В высказывании о схеме

выбирается подходящий компонент для каждой пары альтернатив, расположенных в фигурных скобках и разделенных вертикальной чертой. Например, «Каждый ПАЦИЕНТ может предоставить материал для одного или нескольких АНАЛИЗОВ» и «Каждый АНАЛИЗ должен быть произведен для одного и только одного ПАЦИЕНТА». Требуется два независимых предложения, чтобы полностью передать смысл связи. Высказывания полностью разъясняют мощностную и необходимость связи.

К сожалению, подход Баркера предполагает только бинарные связи (других в его модели нет) и высказывания на английском языке. Это отмечает и Халпин:

«Подход Баркера слишком ограниченный, поскольку он предполагает только бинарные ассоциации. Напротив, подход ORM (модель Халпина «Объект – Роль») применяется для предикатов любой степени и охватывает к тому же больше видов ограничений как графически, так и в текстовом виде [3, с. 43].

«Как только мы принимаем, что при вербализации должны поддерживаться предикаты любой степени, из этого вытекает, что должна использоваться инфиксная нотация. Хотя можно использовать также префиксную или постфиксную нотацию, например PlayedFor (X, Y, Z), это было бы неестественно для нетехнических людей» [3, с. 41].

Для бинарных связей Халпин предлагает использовать шаблон, похожий на шаблон Баркера: «Each A {must | may} be R {one and only one B | one or more B-plural-form}». Например: «Each Moon must be an orbiter of one and only one Planet» и «Each Planet may be orbited by one or more Moons».

Для связей степени большей двух Халпин использует выражения типа:

«Given any Room and HourSlot that Room at that HourSlot is booked for at most one Course», «For each Course some Room at some HourSlot is booked for that Course», «Given any Person1, Person2 and Language Person1 judged Person2 to have at most one SkillLevel in that Language», «For each Building and RoomNr there is at most one Room that is in that Building and has that RoomNr».

В своей статье Халпин высказывает мысли по поводу выбора псевдоестественного языка для вербализации схем данных. «Для текстового языка описания структур данных и бизнес-правил наиболее существенными кажутся следующие факторы:

- выразительность языка означает способность представить широкий спектр понятий, их взаимосвязей и бизнес-правил;

- ясность позволяет сделать структуры и правила понятными нетехническим экспертам ПрО;
- гибкость языка поддерживает высказывания любой сложности;
- формальность предполагает, что правила недвусмысленны и в идеале должны быть реализуемы» [3, с. 40].

Подход к вербализации ERM-схем [4] упрощается тем, что модель имеет лингвистические корни. Отображение (основное базовое понятие модели), по сути, представляет собой предметную функцию логики, а последняя является универсальной семантической категорией естественного языка, с помощью которой можно выразить все значимые выражения языка, кроме предложений и единичных имен [5]. С использованием отображений утвердительные предложения приобретают функциональную форму с ярко выраженными подлежащим и сказуемым.

При синтезе псевдоестественного языка вербализации ERM-схем использованы следующие положения логики [5]:

- суждение – мысль, содержащая утверждение о наличии в действительности некоторого положения дел;
- высказывание – предложение, выражающее определенное суждение, т.е. выражающее мысль о наличии определенного положения дел;
- по характеру субъектов простые суждения делятся на единичные (все термины, играющие роль субъектов, – единичные имена) и множественные (по крайней мере, один из субъектов представляет класс предметов).

Поскольку элементами схемы являются понятия (типы), при вербализации они описываются множественными высказываниями, например: «объекты типа ВРАЧ играют роль КТО в отношениях типа НАПРАВЛЕНИЕ». В случае экземплиризации (демонстрации объектов понятий (знаков)) используют единичные высказывания, например: «ВРАЧ Иванов играет роль КТО в отношении типа НАПРАВЛЕНИЕ с номером 111».

Помимо уяснения информационных возможностей схемы с помощью вербализации эксперты и пользователи могут при этом высказать свои замечания и предложения по ее уточнению и приведению в соответствие с семантикой ПрО. Если исходная схема определена в терминах базовых, весьма абстрактных понятий, для удобства восприятия ее пользователями автоматически строится представление в традиционных «человеческих» структурных понятиях, таких, как «сущность», «связь» и «значение».

Для структурного компонента ERM-схем предлагаются следующие шаблоны вербализации, основанные непосредственно на элементах мета-схемы модели:

- объекты типа <имя множества сущностей> играют роль <имя роли> в отношениях типа <имя множества связей>;

- отношения типа <имя множества связей> образуют: объекты типа <имя множества сущностей> в роли <имя роли>, объекты типа <имя множества сущностей> в роли <имя роли>, ...;

- объекты типа <имя множества сущностей> описываются значениями следующих характеристик: <имя атрибутного отображения>, <имя атрибутного отображения>, ...;

- отношения типа <имя множества связей> описываются значениями следующих характеристик: <имя атрибутного отображения>, <имя атрибутного отображения>, ...;

- специализацию объектов класса <имя множества сущностей> на основании значений характеристики <имя атрибутного отображения> образуют подклассы <имя множества сущностей>, <имя множества сущностей>, ...;

- специализацию отношений класса <имя множества связей> на основании значений характеристики <имя атрибутного отображения> образуют подклассы <имя множества связей>, <имя множества связей>, ...;

- специализацию объектов класса <имя множества сущностей> на основании наличия/отсутствия у них отношений типа <имя множества связей> образуют подклассы <имя множества сущностей>, <имя множества сущностей>;

- объект суперкласса <имя множества сущностей> принадлежит подклассу <имя множества сущностей> специализации, если у него есть значение характеристики <имя атрибутного отображения>, равное <значение>;

- отношение суперкласса <имя множества связей> принадлежит подклассу <имя множества связей> специализации, если у него есть значение характеристики <имя атрибутного отображения>, равное <значение>;

- объект суперкласса <имя множества сущностей> принадлежит подклассу <имя множества сущностей> специализации в случае наличия (отсутствия) у него отношений типа <имя множества связей>;

- категоризация объектов класса <имя множества сущностей> определена на классах <имя множества сущностей>, <имя множества сущностей>, ...;

- категоризация отношений класса <имя множества связей> определена на классах <имя множества связей>, <имя множества связей>,

Для примера (рис. 1) можно привести следующие вербализующие схему высказывания:

- объекты типа ВРАЧ играют роль КТО в отношениях типа НАПРАВЛЕНИЕ;
- объекты типа ПАЦИЕНТ играют роль КОГО в отношениях типа НАПРАВЛЕНИЕ;
- объекты типа АНАЛИЗ играют роль НА ЧТО в отношениях типа НАПРАВЛЕНИЕ;
- объекты типа ПАЦИЕНТ играют роль ЧЕЙ в отношениях типа АНАЛИЗ ПАЦИЕНТА;

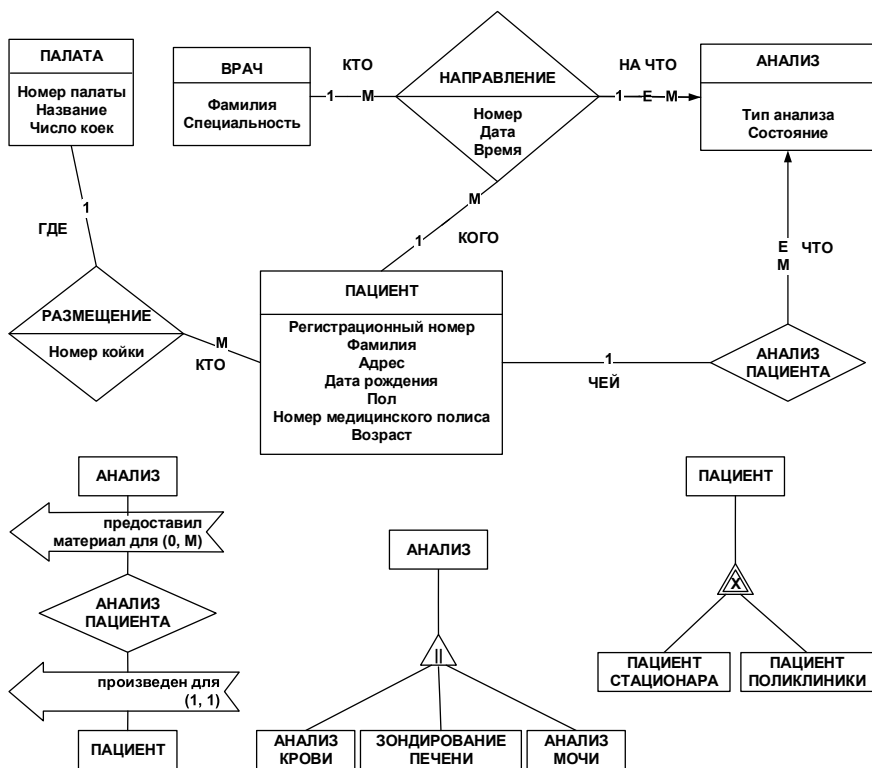


Рис. 1. Фрагменты ERM-схемы

- объекты типа АНАЛИЗ играют роль ЧТО в отношениях типа АНАЛИЗ ПАЦИЕНТА;

- отношения типа НАПРАВЛЕНИЕ образуют: объекты типа ВРАЧ в роли КТО, объекты типа ПАЦИЕНТ в роли КОГО, объекты типа АНАЛИЗ в роли НА ЧТО;

- объекты типа ПАЦИЕНТ описываются значениями следующих характеристик: Регистрационный номер, Фамилия, Адрес, Дата рождения, Пол, Номер медицинского полиса, Возраст;

- отношения типа НАПРАВЛЕНИЕ описываются значениями следующих характеристик: Номер, Дата, Время;

- специализацию объектов класса АНАЛИЗ на основании значений характеристики Тип анализа образуют подклассы АНАЛИЗ КРОВИ, ЗОНДИРОВАНИЕ ПЕЧЕНИ, АНАЛИЗ МОЧИ;

- специализацию объектов класса ПАЦИЕНТ на основании наличия/отсутствия у них отношений типа РАЗМЕЩЕНИЕ образуют подклассы ПАЦИЕНТ СТАЦИОНАРА, ПАЦИЕНТ ПОЛИКЛИНИКИ;

- объект суперкласса АНАЛИЗ принадлежит подклассу АНАЛИЗ КРОВИ специализации, если у него есть значение характеристики Тип анализа равное АНАЛИЗ КРОВИ;

- объект суперкласса АНАЛИЗ принадлежит подклассу ЗОНДИРОВАНИЕ ПЕЧЕНИ специализации, если у него есть значение характеристики Тип анализа равное ЗОНДИРОВАНИЕ ПЕЧЕНИ;

- объект суперкласса АНАЛИЗ принадлежит подклассу АНАЛИЗ МОЧИ специализации, если у него есть значение характеристики Тип анализа равное АНАЛИЗ МОЧИ;

- объект суперкласса ПАЦИЕНТ принадлежит подклассу ПАЦИЕНТ СТАЦИОНАРА специализации в случае наличия у него отношений типа РАЗМЕЩЕНИЕ;

- объект суперкласса ПАЦИЕНТ принадлежит подклассу ПАЦИЕНТ ПОЛИКЛИНИКИ специализации в случае отсутствия у него отношений типа РАЗМЕЩЕНИЕ.

Предлагаемые формы высказываний определяют основные понятия Про и их взаимосвязи, что позволяет эксперту оценить их корректность и адекватность моделируемому миру.

Представленный доклад затрагивает лишь первую часть решения задачи вербализации ЕRM-схем – описание структурного компонента схемы. На базе этих высказываний можно перейти к процессу вербализации ограничений целостности и формулировать бизнес-правила.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barker R.* CASE Method: Entity Relationship Modelling. Addison-Wesley, 1990. 240 p.
2. *Halpin T. and Morgan T.* Information Modeling and Relational Databases. Second Edition. Morgan Kaufman, 2008. 943 p.
3. *Halpin T.* Business Rule Verbalization / Anatoly Doroshenko, Terry Halpin, Stephen Liddle, and Heinrich C. Mayr, eds. Information Systems Technology and its Applications. Proc. 3rd Int. Conf. ISTA 2004. V. P-48 of Lecture Notes in Informatics. Kollen Druck+Verlag, Bonn, Germany, 2004. P. 39–52
4. *Бабанов А.М.* Семантическая модель «Сущность – Связь – Отображение» // Вестник Томс. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2007. № 1. С. 77–91.
5. *Войшвилло Е.К., Дегтярев М.Г.* Логика как часть теории познания и научной методологии (фундаментальный курс): в 2 кн. М.: Наука, 1994.

Бабанов Алексей Михайлович, к.т.н., доцент; babanov2000@mail2000.ru

«IS-A»-отношения в моделях представления знаний и данных

А.М. Бабанов, Е.С. Квач

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Наиболее широко распространённой формой представления обобщенных и специализированных понятий в различных моделях знаний и данных являются «IS-A»-отношения, которые позволяют переходить от частных явлений к их абстракциям различных уровней и наоборот. Любая предметная область включает в себя «IS-A»-отношения, – «*сотрудник* есть некоторый *человек*», «*преподаватель* есть некоторый *сотрудник*». Однако в этих моделях даются разные определения этому понятию, различны и ограничения целостности, и способы проектирования. Чтобы получить полную и непротиворечивую картину представлений об «IS-A»-отношениях, авторы рассматривают это явление в логике, искусственном интеллекте, семантических моделях данных и программировании.

«IS-A»-отношения в логике

В современной логике рассматриваются операции обобщения и ограничения понятий (рис. 1). «Обобщение некоторого понятия есть операция образования из этого понятия некоторого нового с более широким объемом. Обратная операция перехода от некоторого понятия к понятию с меньшим объемом называется ограничением понятия» [1].



Рис. 1. Представление «IS-A»-отношений в логике

Также в логике рассматривается деление понятия, цель которого состоит в том, чтобы в объеме понятия выделить все возможные подвиды предметов каждый раз по некоторому определенному основанию. Важно отметить, что «всякое деление должно осуществляться по одному основанию» [2].

Деление является правильным, если оно удовлетворяет условиям:

1. Деление должно происходить по одному основанию.
2. Полученные при делении понятия должны быть попарно несовместимы.
3. Члены деления как классы должны исчерпывать объем исходного понятия.
4. Никакой из членов деления не должен быть пустым классом.
5. Деление должно быть непрерывным».

Бочаров В.А. и Маркин В.И. [2] дополняют эту картину рассмотрением возможных вариантов деления понятий. «В случае дихотомического деления родового понятия основанием деления является некоторый признак, присущий лишь части предметов, входящих в объем исходного понятия. Деление осуществляется по наличию или отсутствию этого признака у предметов делимого понятия». Если в качестве примера рассматривать приёмную комиссию университета, то основанием деления молодых людей на *студентов* и *абитуриентов* будет наличие или отсутствие *приказа о зачислении* (если есть *приказ о зачислении*, то человек является *студентом*, иначе – *абитуриентом*). «В случае деления по видоизменению основания в качестве основания деления используется предметно-функциональная характеристика элементов объема делимого понятия. Необходимо только, чтобы предметная функция, использующаяся в качестве основания, была всюду определенной на этом объеме. При таком делении объемы видовых понятий представляют собой собрания тех и только тех предметов *a* и *b*, для которых выполняется условие $f(a) = f(b)$ ». Например, в зависимости от типа должности *сотрудник* является либо *преподавателем*, либо *администратором*, либо *научным сотрудником*.

«IS-A»-отношения в искусственном интеллекте

В искусственном интеллекте «IS-A»-отношения используются в семантических сетях и являются основным элементом в сети. Связь «IS-A» устанавливает иерархию типов в сети и используется для определе-

ния наиболее специфического семантического типа (общий/специфический семантический тип – аналог понятия суперкласс, конкретный семантический тип – аналог понятия подкласс в семантических моделях) [3]. Понятия становятся более абстрактными по мере продвижения вверх по иерархии. В иерархически структурированной семантической сети свойства и отношения любого типа могут быть унаследованы всеми его подтипами [4]. В семантических сетях (рис. 2) выделяются «IS-A»-отношения между классами (IS-A type of) и между экземплярами и классами (IS-AN instance of) [5].

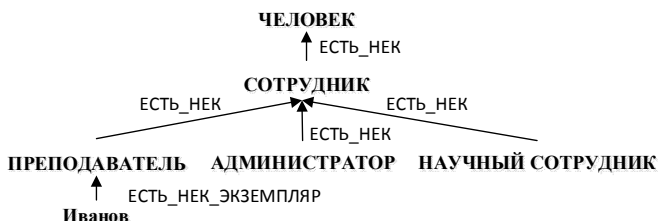


Рис. 2. Представление «IS-A»-отношений в семантических сетях

Для «IS-A»-отношений устанавливаются ограничения целостности [6]: они являются транзитивными, направленными и не образуют петель. Если каждый *преподаватель* является *сотрудником* и каждый *сотрудник* является *человеком*, то каждый *преподаватель* является *человеком*, независимо от того, есть ли «IS-A»-отношение, явно говорящее об этом.

«IS-A»-отношения в семантических моделях данных

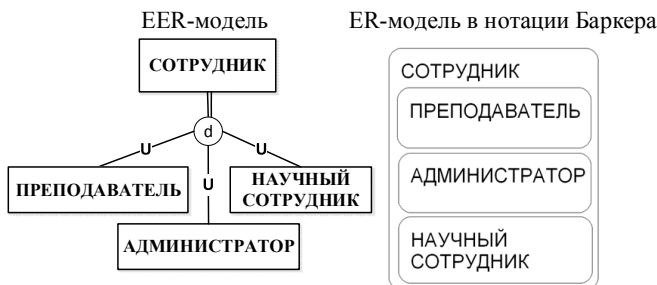
Что касается представления «IS-A»-отношений в семантических моделях данных, то в расширенной модели «Сущность – Связь» (Enhanced/Extended Entity-Relationship Model – EERM) выделяют специализации – нисходящий процесс образования «IS-A»-иерархий с полным наследованием признаков и генерализации – обратный процесс, при котором эти «IS-A»-иерархии образуются с помощью восходящего процесса. Можно отметить, что логики обращают внимание, прежде всего, на содержание (признак) понятий деления, а специалисты по моделированию данных [7–10] видят преимущественно структурные и ог-

раничительные особенности классов данных. Терри Халпин [10], автор модели «Объект – Роль» (Object-Role Model – OR-модель), кроме этого, замечает, что специализации позволяют делать опциональные роли суперкласса обязательными для подкласса и за счет этого вводить дополнительные ограничения целостности. Аналогично ограничениям на «IS-A»-отношения в искусственном интеллекте [6], Т. Халпин утверждает, что специализации транзитивны и любая подсхема взаимосвязей тип – подтип формирует направленный ациклический граф.

В ER-модели нотации Баркера, используемой в Oracle Designer, вводятся дополнительные правила для подтипов, аналогичные второму и третьему условиям правильного деления в логике: взаимоисключающее правило (каждый экземпляр супертипа одновременно является экземпляром одного и только одного подтипа) и исчерпывающее правило (каждый экземпляр супертипа должен быть экземпляром одного из подтипов) [11]. Однако этим правилам удовлетворяют лишь полные непересекающиеся специализации. Во многих моделях данных (в частности, в EERM) помимо этого типа специализаций используются также полные пересекающиеся, частичные непересекающиеся, частичные пересекающиеся.

Джон М. и Диана К. Смит [12] в своей концепции, как и в логике, предлагают сводить иерархии обобщения к отдельным правильным делениям родительских понятий. «Наш метод требует, чтобы непосредственные потомки любого узла были разбиты на группы. Каждая группа должна содержать родовые объекты, классы которых являются взаимно-исключающими. Назовем взаимно-исключающие группы родовых объектов, имеющие общие родительские объекты, кластерами». Например, потомки *человека* могли бы быть сгруппированы следующим образом: {преподаватель, администратор, научный сотрудник} и {магистр, бакалавр, аспирант}. Первая группа содержит взаимно-исключающие классы, которые соответствуют должностям *сотрудников*. Вторая группа, в свою очередь, содержит взаимно-исключающие классы, которые соответствуют различным степеням в системе высшего образования *студентов*. В итоге, мы можем говорить о двух кластерах, относящихся к *человеку* – кластер, относящийся к *студентам*, и кластер, относящийся к *сотрудникам*.

На рис. 3 приведены варианты представления «IS-A»-отношений в семантических моделях данных.



Концепция представления иерархий
Джона М. и Дианы К. Смит

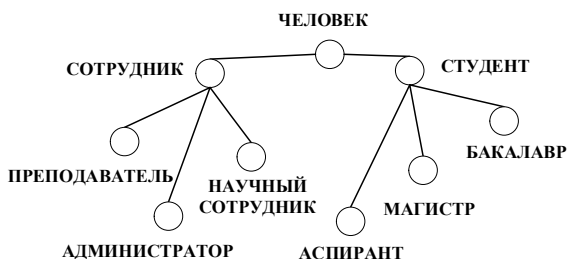


Рис. 3. Представление «IS-A»-отношений
в семантических моделях данных

«IS-A»-отношения в программировании

В объектно-ориентированном программировании (ООП) «IS-A»-отношения можно встретить в унифицированном языке моделирования (Unified Modeling Language – UML). Здесь используется термин обобщение – отношение между классом и одной или несколькими его вариациями. Обобщение объединяет классы по их общим свойствам [13];

В соответствии со спецификой ООП, в UML, помимо атрибутов и отношений подтипы наследуют ещё и методы супертипа. Более того, реализация методов в подтипе замещает реализацию того же метода супертипа – это явление называется полиморфизмом [14]. Аналогично основанию деления в логике специалисты, изучающие UML, дополнительно вводят понятие дискриминатор [15] или набор обобщений [13,14]. Обобщение с именем означает декомпозицию суперкласса на подклассы в каком-то определенном аспекте, называемом набором обобщения [14]. Имя набора обобщений – это перечислимый атрибут,

показывающий, какой аспект подклассов обобщается (аналогично, делению по видоизменению основания в логике). Каждое обобщение должно производиться по одному аспекту [13]. Например, аспектом обобщения для класса *сотрудник* является *тип должности* (рис. 4). Значения набора обобщения находятся во взаимно-однозначном соответствии с подклассами (если *тип должности* = «преподавательская», то *сотрудник* является *преподавателем* и т.д., при этом каждому *типу должности* должен соответствовать один и только один подкласс и наборот).



Рис. 4. Представление «IS-A»-отношений в UML

Заключение

«IS-A»-отношения являются важным элементом человеческой умственной деятельности (не только научной). Это понятие давно изучается исследователями, однако, в каждой из представленных областей знаний даны разные определения обобщённым и специализированным понятиям, различны и ограничения целостности, и способы проектирования. Рис. 1 – 4 отображают возможные варианты представления «IS-A»-отношений в моделях представления знаний и данных.

Проанализировав особенности «IS-A»-отношений в различных информационных технологиях, авторы пришли к необходимости более строгой формализации обобщений и введению для этого нового базового понятия «IS-THE»-отношения в семантической модели «Сущность – Связь – Отображение» (Entity-Relationship-Mapping Model – ERMM) [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Войшвилло Е.К., Дегтярев М.Г. Логика как часть теории познания и научной методологии (фундаментальный курс): в 2 кн. М.: Наука, 1994.
2. Бачаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. М.: Инфра-М, 1998. 297 с.
3. U.S. National Library of Medicine, The Unified Medical Language System, UMLS Reference Manual, URL: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK9676/>

4. *Eileen C.W.* Knowledge Representation and Metaphor. Springer Science+Business Media Dordrecht, 1991. 271 p.
5. *Bundy A.* Catalogue of Artificial Intelligence Tools. Berlin; Heidelberg.; New York; Tokyo: Springer-Verlag, 1984. 150 p.
6. *Fahlman S.E.* NETL: A System for Representing and Using Real-World Knowledge. MIT Press, 1979. 269 p.
7. *Coronel C., Morris S., Rob P.* Database Systems: Design, Implementation, and Management. USA: Cengage Learning, 2011. 724 p.
8. *Connolly T., Begg C.* Database Systems: A Practical Approach to Design, Implementation, and Management, 4th edition. Addison-Wesley, 2010. 1400 p.
9. *Elmasi R., Navahe S.B.* Fundamentals of Database Systems, 6th edition. Addison-Wesley, 2011. 1201 p.
10. *Halpin T., Morgan T.* Information Modeling and Relational Databases, edition 2. Morgan Kaufman, 2008. 943 p.
11. *Barker R.* CASE Method: Entity Relationship Modelling. Addison-Wesley, 1990. 240 p.
12. *Smith J., Smith D.* Database abstractions: aggregation and generalization // ACM Transactions on Database Systems. 1977. V. 2. No. 2. P. 105–133.
13. *Рамбо Д., Блаха М.* UML 2.0. Объектно-ориентированное моделирование и разработка. 2-е изд. СПб.: Питер, 2007. 544 с.
14. *Буч Г., Рамбо Д., Якобсон А.* Язык UML. Руководство пользователя. ДМК Пресс, 2007. 496 с.
15. *Фаулер М., Скотт К.* UML основы. 2-е изд. Символ-Плюс, 2002. 188 с.
16. *Бабанов А.М., Квач Е.С.* «IS-THE»-отношения в семантических моделях данных: основные понятия и разновидности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1(34). С. 69–78.

Бабанов Алексей Михайлович, к.т.н., доцент; babanov2000@mail2000.ru;
Квач Елена Сергеевна, аспирант; kvachelena93@gmail.com

Об оценке ресурсных возможностей мультисервисных сетей

В.В. Быкова, А.А. Солдатенко

*Институт математики и фундаментальной информатики,
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия*

Большинство современных телекоммуникационных сетей являются мультисервисными, поскольку предоставляют пользователям множество услуг, касающихся проводной телефонии, сотовой связи, кабельного телевидения и передачи данных. Качество обслуживания в мультисервисных сетях определяется такими параметрами, как полоса пропускания, задержка, вариация задержки, стоимость и надежность передачи данных [1]. Всякий запрос пользователя на оказание услуги предполагает определение некоторого (желательно оптимального по затратам, например, по времени или стоимости) маршрута между двумя узлами с учетом ресурсных возможностей этой сети. Задача оптимального обслуживания пользователя в мультисервисной сети может быть математически сформулирована как задача поиска ресурсоограниченного кратчайшего пути в графе. Данная задача известна в литературе под названием Resource Constrained Shortest Path, или кратко RCSP [1]. Показано, что даже при ограничении на один ресурс задача RCSP является NP-трудной [2]. На практике RCSP возникает как при проектировании, так и при эксплуатации мультисервисных сетей. В настоящее время мультисервисные сети активно расширяются путем увеличения числа предоставляемых услуг и входящих в них узлов. Количество узлов в сети может достигать нескольких сотен тысяч.

Выделяют три класса методов, способных находить точное или приближенное решение задачи RCSP: методы ранжирования путей [3], методы маркировки вершин [1, 4], методы лагранжевой релаксации [5, 6]. Первые два класса методов основаны на теоретико-графовой постановке задачи, а методы третьего класса исходят из постановки задачи RCSP на языке целочисленного линейного программирования. Большинство этих методов медленно работают на сетях большой размерности. Поэтому актуальны различные приемы их ускорения, а также разработка новых подходов к решению задачи RCSP [6].

Постановка задачи

Пусть мультисервисная сеть описана взвешенным ориентированным графом (далее просто графом) $G = (V, E)$ без кратных дуг и петель, в котором каждая вершина $v \in V$ задает узел сети, каждая дуга $e \in E$ – канал связи между соответствующими узлами сети. Считаем, что на множестве дуг графа $G = (V, E)$ задана функция $w(e) : E \rightarrow R^+$, присваивая каждой дуге $e \in E$ ее вес $w(e) \geq 0$. Пусть для вершин $s, d \in V$ в графе $G = (V, E)$ существует путь P , идущий от вершины s к вершине d . Полагаем, что вес этого (s, d) -пути P вычисляется как сумма весов всех входящих в него дуг:

$$w(P) = \sum_{e \in P} w(e), \quad (1)$$

т. е. функция $w(e)$ является аддитивной. Если $w(e)$ – стоимость передвижения по дуге e , то $w(P)$ можно интерпретировать как стоимость прохождения (s, d) -пути P в графе $G = (V, E)$.

Пусть для каждой дуги графа $G = (V, E)$ кроме $w(e)$ заданы весовые функции $w_r(e) : E \rightarrow R^+$, $r = 1, \dots, k$, отражающие потребности в ресурсах, которые необходимы для передвижения по этой дуге. Полагаем, что для любого (s, d) -пути P верны равенства

$$w_r(P) = \sum_{e \in P} w_r(e), r = 1, \dots, k.$$

Считаем, что также заданы величины $W_r \in R^+$, $r = 1, \dots, k$, определяющие ресурсные ограничения рассматриваемой мультисервисной сети.

Всякий (s, d) -путь P называется допустимым, если он удовлетворяет ресурсным ограничениям

$$\sum_{e \in P} w_r(e) \leq W_r, r = 1, \dots, k. \quad (2)$$

Ясно, что кратчайший (s, d) -путь в графе $G = (V, E)$ не всегда допустим.

Теперь задачу RCSP можно сформулировать следующим образом. Задан граф $G = (V, E)$, на дугах которого определены неотрицательные вещественнозначные функции $w(e)$ и $w_r(e)$, также заданы величины W_r , $r = 1, \dots, k$, и (s, d) -запрос. Требуется найти в $G = (V, E)$ ресурсноограниченный кратчайший (s, d) -путь, т. е. такой (s, d) -путь P , который минимизирует $w(P)$ в (1) и удовлетворяет ограничениям (2). Задача RCSP может не иметь решения, если множество допустимых (s, d) -путей пусто.

Предлагаемые алгоритмы решения

Для решения задачи RCSP предлагается эвристический алгоритм A_1 , являющийся модификацией алгоритма Дейкстры. Как известно, алгоритм Дейкстры – маркировочная процедура, осуществляющая поиск кратчайшего пути в графе на основе меток вершин за полиномиальное время [4]. В алгоритме A_1 к меткам алгоритма Дейкстры добавлены еще две метки: величина затраченных ресурсов при прохождении пути от стартовой вершины s до текущей вершины v и допустимость (да/нет) использования вершины v для дальнейшего построения искомого пути. Применение этих двух меток позволяет, прежде всего, находить допустимые пути и далее среди них – кратчайший путь, не увеличивая существенно время поиска. В остальном алгоритм A_1 полностью соответствует классическому алгоритму Дейкстры. Если множество допустимых решений задачи RCSP не пусто, то решение, найденное алгоритмом A_1 всегда допустимое, но не обязательно оптимальное.

С целью применения алгоритма Дейкстры к графам большой размерности в настоящее время разрабатываются всевозможные приемы ускорения данного алгоритма [7, 8]. Одним из таких приемов является применение потенциальных функций, которые могут определяться различными способами, в частности с помощью ориентиров. Предлагаемый двухфазный алгоритм A_2 предназначен для ускорения по времени выполнения алгоритма A_1 . На первой фазе алгоритм A_2 производит расстановку ориентиров в вершинах графа и вычисляет потенциальные функции, на второй фазе – осуществляет с помощью алгоритма A_1 и вычисленных потенциальных функций поиск ресурсоограниченного оптимального маршрута в графе. Алгоритм A_2 имеет следующие параметры организации: число ориентиров и стратегия их расстановки (случайным образом в вершинах графа, случайным образом в вершинах, образующих оболочку графа, и др.). Для вычисления потенциальных функций алгоритм A_2 использует евклидову метрику.

Вычислительные эксперименты

Для оценки эффективности предложенных алгоритмов были проведены серии вычислительных экспериментов. В табл. 1 представлены параметры графов, на которых проводились эксперименты. Первая серия экспериментов состояла в сравнении предложенного алгоритма A_1 и пакета IBM ILOG CPLEX [9].

Эксперименты проводились на случайно сгенерированных графах с различным числом вершин и ребер для последовательности σ , состоящей из 1000 случайно сгенерированных (s, d) -запросов. Сравнение осуществлялось по числу выполненных запросов, точности найденного решения, а также времени работы алгоритмов. Запрос считался выполненным, если для него получено точное или приближенное решение задачи RCSP. Точность приближенного решения, найденного алгоритмом A_1 , оценивалась относительно результата, вычисленного с помощью CPLEX.

Таблица 1

Параметры исследуемых графов

Название графа	Число вершин	Число дуг
G_1	100	720
G_2	625	4800
G_3	2500	19600
AK	69082	157662
CT	153011	375310
MA	308401	771362

Результаты первой серии экспериментов представлены в табл. 2, где параметр q_{err} обозначает количество запросов, для которых было найдено приближенное решение, а параметр err – максимальную относительную погрешность. По этим результатам можно сделать следующие выводы. Время нахождения точного решения существенно зависит от размеров графа и числа рассматриваемых ресурсов. Например, для исходного графа с числом вершин 2500, числом ребер 19600 и количеством ресурсов 10 с помощью пакета CPLEX не удалось получить решение за 1000 секунд. Алгоритм A_1 выполняет примерно такую же долю запросов, что пакет CPLEX, затрачивая на это на два порядка меньше времени. Эвристический характер данного алгоритма не исключает ситуации, когда построенное решение не является точным. Однако, как показывают выполненные эксперименты, это происходит сравнительно редко и с малой относительной погрешностью. Таким образом, алгоритм A_1 можно применять к мультисервисным сетям с числом узлов, не превосходящим 10000, для которых приемлема небольшая потеря точности в решении.

Цель второй серии экспериментов – сравнение алгоритмов A_1 и A_2 на графах большой размерности. Для алгоритма A_2 были выбраны следующие параметры организации: число ориентиров – 12, стратегия расстановки ориентиров – случайное размещение в вершинах графа.

Сравнение производилось по времени работы этих алгоритмов, а также числу выполненных запросов. Результаты второй серии экспериментов представлены в табл. 3.

Таблица 2

Результаты сравнения алгоритма A_1 с пакетом CPLEX

Название графа	Количество ресурсов	CPLEX		A_1			
		Время обработки σ , с	Число выполненных запросов	Время обработки σ , с	Число выполненных запросов		err , %
					Всего	q_{err}	
G_1	1	39.8	945	0.050	937	1	2
G_2	1	79.1	855	0.339	829	1	0.4
G_3	1	267.2	959	5.919	944	3	3
G_1	2	39.6	961	0.048	872	4	7
G_2	2	79.6	807	0.294	757	3	4
G_3	2	284.1	799	3.541	783	6	0.7
G_1	5	40.0	756	0.029	727	3	11
G_2	5	89.0	703	0.264	701	2	1
G_3	5	362.6	666	2.337	647	4	0.2
G_1	10	43.6	828	0.038	807	0	0
G_2	10	111.9	712	0.245	703	7	1
G_3	10	—	—	2.836	694	—	—

Таблица 3

Результаты сравнения алгоритмов A_1 и A_2

Название графа	Количество ресурсов	A_1		A_2	
		Число выполненных запросов	Время обработки σ , с	Число выполненных запросов	Время обработки σ , с
AK	1	531	511.171	531	434.538
CT	1	821	1100.88	821	117.283
MA	1	738	687.516	738	103.052
AK	2	587	548.222	587	397.847
CT	2	667	735.669	667	73.765
MA	2	802	776.492	802	158.573
AK	5	523	473.254	523	368.664
CT	5	813	1152.33	813	123.665
MA	5	806	756.533	806	137.998
AK	10	541	410.330	541	329.267
CT	10	679	688.384	679	73.905
MA	10	557	258.307	557	52.353

Из табл. 3 видно, что время работы алгоритма A_2 меньше времени работы алгоритма A_1 в несколько раз, при этом число выполненных запросов в точности совпадает. Это позволяет сделать следующий вывод: алгоритм A_2 можно применять к реальным мультисервисным сетям с числом узлов в несколько сотен тысяч.

В работе рассмотрена задача RCSP, возникающая при проектировании и эксплуатации мультисервисных сетей, и предложены два эвристических алгоритма ее решения. Данные алгоритмы предназначены преимущественно для решения таких задач проектирования, как выявление «узких мест» и оценка ресурсных возможностей сети. В дальнейшем предполагается совершенствование предложенных алгоритмов с целью использования их на этапе эксплуатации мультисервисных сетей с учетом требований современных протоколов маршрутизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Van Mieghem P., Kuipers F.A., Korkmaz T., et al.* Quality of Service Routing // Lecture Notes in Computer Science. 2003. V. 2856. P. 80–117.
2. *Dror M.* Note on the complexity of the shortest path models for column generation in VRPTW // Operation Reseach. 1994. V. 42. P. 977–978.
3. *Mehlhorn K., Ziegelmann M.* Resource constrained shortest paths // Proceedings of the 7th Annual European Symposium on Algorithms. 2000. LNCS 1879. P. 326–337.
4. *Dumitrescu I., Boland N.* Improved preprocessing, labeling and scaling algorithms for the weight-constrained shortest path problem // Networks. 2003. V. 42. P. 135–153.
5. *Jepsen M., Petersen B., Spoorendonk S., Pisinger D.* A branch-and-cut algorithm for the capacitated profitable tour problem // Discrete Optimization. 2014. V. 14. P. 78–96.
6. *Horvath M., Kis T.* Solving resource constrained shortest path problems with LP-based methods // Computers & Operations Research. 2016. V. 73. P. 150–164.
7. *Быкова В.В., Солдатенко А.А.* Оптимальная маршрутизация по ориентирам в нестационарных сетях // Прикладная дискретная математика. 2017. № 37. С. 114–123.
8. *Быкова В.В., Солдатенко А.А.* Адаптивное размещение ориентиров в задаче о кратчайшем пути для графов большой размерности // Программные продукты и системы. 2016. № 1. С. 60–67.
9. *IBM Corp.* IBM ILOG CPLEX Optimizer Studio. CPLEX User's Manual. Version 12. Release 6, 2015. P. 586.

Быкова Валентина Владимировна, д.ф.-м.н., профессор; bykvalen@mail.ru;
Солдатенко Александр Александрович; glinckon@gmail.com

Выбор технологий виртуальной реальности для применения в учебных курсах

С.С. Елесин, А.Н. Моисеев

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Виртуальная реальность (VR) в настоящее время уверенно вошла в нашу жизнь. Сложно придумать профессиональную область, в которой бы не использовались технологии VR. Наиболее широкое распространение они получили в развлекательной индустрии. В каждом городе открываются клубы VR, а в торговых центрах размещаются VR-комплексы. Не отстает также и киноиндустрия. Большой популярностью пользуются так называемые VR experience, представляющие из себя отрывки из культовых фильмов в формате 360°. Также это может быть интерактивная VR-среда, связанная с фильмом. Крупные компании, разрабатывающие САПР, занимаются созданием таких систем в виртуальной и смешанной реальностях. В частности, компания Autodesk уже предлагает несколько решений для проектирования и визуализации проектов различной сложности.

Что касается образования – здесь сложно назвать типичные примеры применения VR. В настоящее время проводится множество исследований (например, в статье [1] приводится обзор и систематизация 53 исследований виртуальных образовательных пространств). Разработчики реализуют отдельные проекты как для школ, так и для высших учебных заведений. Исследования в большей степени показывают увеличение образовательного эффекта по отношению к стандартным практикам.

В серии статей Селиванова В.В. и Селивановой Л.Н. [2–4] VR рассматривается как метод и средство обучения, а также как дидактическая среда. Отмечается эффективность использования VR в обучении, приводятся результаты эмпирических исследований. Из основных выводов следует, что VR способствует прогрессивному формированию характеристик мышления, улучшает традиционные показатели образной кратковременной памяти, наблюдательности, устойчивости, концентрации внимания, способности к обобщению и классификации, способствует повышению полнезависимости. Работа в обучающих VR-программах формирует специфически познавательную мотивацию, интерес к обучению и создание позитивных, гармоничных психических состояний. Развивающий эффект дидактических программ в VR определяется

трехмерным изображением познаваемых объектов, широкой возможностью осуществления действий с предметами (анимацией), эффектом присутствия, интерактивностью ситуации, осуществлением визуализации абстрактных моделей и др. В статьях также отмечаются и негативные моменты. Например, «сверхообразная», наглядная подача содержания образования (при неправильном построении) может редуцировать развитие абстрактных понятий, символического мышления. Обучающая виртуальная среда способствует снижению традиционных показателей переключения внимания. Также указывается, что виртуальная среда не может полностью заменить преподавание в учебных заведениях, так как представляет собой только имитацию реального мира.

В выводах также говорится, что целесообразнее использовать виртуальное пространство для изучения сложных тем, а также для тренинга профессиональных навыков. В статье [5] делается подобный вывод. Автор приводит негативные результаты использования vAcademia – российской desktop-base виртуальной среды (VR в более широком смысле, без использования специальных средств, средством вывода изображения является монитор компьютера). Вероятно, при разработке vAcademia были допущены некоторые ошибки, мешающие достижению образовательных эффектов. В частности, пользователям было дано слишком много свободы, из-за чего они занимались чем угодно, кроме обучения. Более того, desktop-base-виртуальная среда предоставляет минимальную степень погружения, лишая такую систему одного из важнейших преимуществ VR.

В последнее время все больше набирает популярность игрофикация, которая также имеет положительные результаты в образовании. Не все исследования направлены на сравнение виртуальной среды и классического образования. Также проводятся исследования для выявления наиболее эффективных типов виртуальных пространств для образования. Так, в исследовании [6] проводится мета-анализ игр, симуляций и виртуальных миров. Все три типа показывают свою эффективность, но игры выделяются больше всех, имея самые высокие статистические результаты в обучении.

Авторы статьи [7] провели сравнение образовательной игры с аналогичным неигровым приложением, а также с развлекательными компьютерными играми. Также опытным путем выяснялось, какое влияние оказывает образовательная игра на различные группы обучающихся (по уровню оценок, по опыту игры в компьютерные игры). Несмотря на то, что игра была desktop-base, авторы исследования получили положи-

тельные результаты. Интересно, что рассматриваемая образовательная игра, хоть и уступила развлекательным играм по многим пунктам, не сильно отстала от них. Поэтому был сделан вывод о том, что образовательные игры должны быть максимально приближены к развлекательным (иметь интересный сюжет, высокое качество визуальных эффектов, продуманный функционал, систему прогресса и т.д.).

Несмотря на высокие результаты образовательных игр следует понимать, что они не будут являться оптимальным решением любой образовательной задачи. Также свое место могут найти и симуляторы, и виртуальные миры, а также более простые варианты (например, короткая демонстрация в VR какого-либо процесса, места, предмета и т.д.). В частности, симуляторы VR находят широкое применение в области подготовки будущих врачей (хирургов, стоматологов и др.) [8–9].

Практически все исследования, указанные выше, показывали положительные образовательные эффекты. Но практика внедрения таких проектов не имела широкого распространения. Нет чего-либо единого, глобального. Это не удивительно. VR предоставляет широкий круг возможностей для образования. И, если в сфере развлечений устоявшиеся принципы разработки программного обеспечения можно линейно перенести в VR, то в образовании нужна более сложная формула. А для выведения такой формулы необходимы частные эмпирические исследования. Сейчас, опираясь на опыт исследователей, можно выделить наиболее успешные практики применения технологий VR в образовании и задуматься над созданием единой платформы. Преимущества такой платформы по отношению к отдельным проектам очевидны.

1. Привлечение широкого круга разработчиков. При наличии единой платформы разработчики могут создавать отдельные элементы (VR experience для курсов, VR-игры, целые курсы в VR и т.д.), вместо того чтобы инициировать что-то обособленное.

2. Единая материальная база. Различные проекты предполагают использование разных устройств VR. Платформа же предполагает работоспособность всего контента на единых устройствах.

3. Образовательные учреждения станут на шаг ближе к VR. Сейчас создание образовательных проектов в области VR связаны с огромной трудоёмкостью. Платформа позволит миновать первый и самый трудный шаг, позволяя образовательным учреждениям сразу создавать контент.

4. Создание VR непрофессионалами. Технологическая база платформы позволит создавать виртуальный интерактив интуитивно понятными инструментами.

5. Расширяемость. Так как платформа не нацелена на решение узкого круга задач, то ее функционал можно постоянно расширять.

Такая платформа должна представлять собой не только пространство, в котором размещается образовательный VR-контент. Подобно LMS (Learning Management System) и открытым платформам с MOОКами (Массовыми Открытыми Онлайн Курсами) они должны иметь инструменты коммуникации и автоматизацию работы с курсами. Платформа должна быть оснащена инструментарием для создания/редактирования/использования VR-контента. Здесь необходимо учесть различные сценарии взаимодействия, которые могут быть полезны, применимо к тем или иным образовательным практикам (лекционные занятия, когда студент практически не может взаимодействовать со средой, семинарские занятия в форме аватаров, игровые элементы, симуляторы, песочницы и т.д.). Такой инструмент будет служить мостом между образованием и VR-технологиями.

Специальные устройства для работы с VR-приложениями можно разделить на 2 типа: автономные и стационарные. Стационарные шлемы обладают рядом преимуществ. Они предоставляют пользователям больше степеней свободы, систему внутреннего позиционирования (ограниченно), а также качество контента на несколько порядков выше. Но также они имеют и свои недостатки. К ним относятся:

- стационарность (шлем не может работать без прямого подключения к компьютеру);
- сложность подключения и установки;
- высокая стоимость.

Автономные шлемы используют в качестве средства обработки и вывода информации смартфоны либо встроенные мобильные устройства. Качество контента диктуется производительностью мобильных устройств. При этом у таких шлемов отсутствуют недостатки стационарных шлемов.

Поэтому, если мы хотим сделать платформу открытой и широко доступной, то должны учесть и возможности потребителя. Конечный пользователь, вероятнее всего, станет приобретать дорогой стационарный шлем в первую очередь для развлекательных целей (как игровые приставки). Сложно представить, что такие устройства будут покупать для образовательных целей. Автономные шлемы, более доступные финансово и предоставляющие приемлемое качество отображения, получат более широкое распространение (учитывая, что для таких устройств также доступно немалое количество развлекательного контента). Таким

образом, жертвуя качеством отображения и частью функциональных возможностей, получится сделать образовательную VR-платформу действительно доступной.

Автономные шлемы очень схожи по своему функционалу между собой. Но есть ряд устройств, выделяющихся из общей массы. До настоящего времени к таким устройствам можно было причислить только Google Daydream View и Samsung Gear VR. Главным преимуществом этих устройств является контроллер с отслеживанием положения в пространстве. Наличие такого контроллера позволяет добавить немало интерактива к мобильным приложениям VR. Но они, помимо общих недостатков автономных шлемов, имеют одно существенное ограничение – поддерживаемые устройства. Первый поддерживает только флагманские устройства на системе Android, а второе – только некоторые смартфоны Samsung. Более того, еще одним недостатком автономных шлемов является нагрузка на глаза, так как экран смартфона размещается в непосредственной близости от глаз пользователя. По этой причине пользоваться такими шлемами длительное время не представляется возможным.

Совсем недавно к этим устройствам присоединилось еще одно, произведенное компанией Facebook. Oculus GO – новое слово в области автономных устройств VR. Помимо улучшенной эргономики и удобного контроллера с отслеживанием положения этот шлем имеет 2 преимущества. Во-первых, он не требует подключения смартфона. Компания Facebook сделала полностью автономный шлем с собственной «начинкой». Во-вторых, технология экранов, используемых в шлеме, схожа с той, которая используется в более продвинутой версии шлема – Oculus Rift. Экраны не оказывают нагрузку на глаза, таким образом позволяя использовать шлем длительное время. С поступлением этого шлема в продажу открытая VR-платформа стала более реальной и осязаемой.

Внедряя новые технологии в образовательный процесс, важно учитывать все возможные факторы. Не всегда достаточно воспользоваться лучшими средствами и применить лучшие методики. Необходимо учитывать ограничения, накладываемые на конкретную задачу. Оставив без внимания один из параметров, разработчик рискует создать очень эффективный и качественный инструмент, который не будет востребован. Иногда приходится жертвовать качеством, чтобы найти компромисс между всеми параметрами. В этом случае продукт действительно может претендовать на массовость.

Oculus GO является наиболее перспективным устройством для открытой образовательной VR-платформы.

Шлем предоставляет следующие преимущества:

- достаточно высокое качество отображения контента;
- приемлемая цена;
- отсутствие необходимости в смартфоне;
- удобный контроллер с отслеживанием положения;
- экран, оказывающий минимальную нагрузку на глаза;
- более 1000 единиц развлекательного контента на момент поступления в продажу.

Представленный в работе анализ технологий VR будет использован для реализации системы с рабочим названием «Institution VR».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mikropoulos T.A., Natsis A.* Educational virtual environments: A ten-year review of empirical research (1999–2009) // *Computers & Education*. 2011. V. 56. No. 3. P. 769–780.
2. *Селиванов В.В., Селиванова Л.Н.* Виртуальная реальность как метод и средство обучения // *Образовательные технологии и общество*. 2014. Т. 17. № 3.
3. *Селиванов В.В., Селиванова Л.Н.* Эффективность использования виртуальной реальности при обучении в юношеском и взрослом возрасте // *Непрерывное образование: XXI век*. 2015. № 1 (9).
4. *Селиванов В.В., Селиванова Л.Н.* Виртуальная реальность как дидактическая среда // *Известия Смоленского государственного университета*. 2014. № 3. С. 322–338.
5. *Елесин С.С., Феценко А.В.* Виртуальная реальность в образовании: сомнения и надежды // *Гуманитарная информатика*. 2016. № 10.
6. *Merchant Z. et al.* Effectiveness of virtual reality-based instruction on students' learning outcomes in K-12 and higher education: A meta-analysis // *Computers & Education*. 2014. Т. 70. С. 29–40.
7. *Virvou M., Katsionis G.* On the usability and likeability of virtual reality games for education: The case of VR-ENGAGE // *Computers & Education*. 2008. V. 50. No. 1. P. 154–178.
8. *Мареев О.В., Мареев Г.О., Князев А.Б.* Валидация виртуального отоларингологического симулятора // *Здоровье и образование в XXI веке*. 2018. № 1.
9. *Haluck R.S., Krummel T.M.* Computers and virtual reality for surgical education in the 21st century // *Archives of Surgery*. 2000. V. 135. No. 7. P. 786–792.
10. *Виртуальная реальность: сферы применения, главные проблемы отрасли и перспективы развития* [Электронный ресурс]. URL: <https://hype.ru/@id103/virtualnaya-realnost-sfery-primeneniya-glavnye-problemy-otrasli-i-perspektivy-razvitiya-7gylbky1> (дата обращения: 27.04.2018).

Моисеев Александр Николаевич, д.ф.-м.н., профессор; moiseev.tsu@gmail.com;
Елесин Сергей Сергеевич, аспирант

Разработка программы для нахождения оптимальных маршрутов вывоза твердых коммунальных отходов

М.В. Лепший, Ю.В. Шинкевич, Д.С. Труфанов

*Сибирский государственный университет науки и технологий
имени академика М.Ф. Решетнева, филиал СибГУ в г. Лесосибирске,
г. Лесосибирск, Россия*

Проблема снижения затрат ресурсоснабжающих организаций в области обращения с твердыми коммунальными отходами (ТКО) очень актуальна в современных экономических условиях.

Организация сбора отходов предполагает оборудованную площадку и наличие контейнеров для их сбора и накопления. После систематического накопления и складирования производится вывоз ТКО. Наиболее затратной деятельностью в сфере обращения ТКО является транспортировка отходов к месту, где осуществляется их утилизация.

Постановка задачи

С целью снижения затрат на транспортировку ТКО до места утилизации (полигона) поставлена задача, заключающаяся в определении оптимальных маршрутов вывозки отходов. Критерием оптимальности является минимальная протяженность маршрута при максимальной загрузке машины. Необходимо найти маршрут движения мусоровоза, проходящий один раз через все пункты сбора ТКО с последующей выгрузкой их на полигоне.

Существует множество способов оптимизации, к которым относятся как математические, так и эвристические методы. Основными недостатками таких математических методов, как метод полного перебора и метод ветвей и границ, является их высокая временная и емкостная сложность. Эвристические методы: «метод ближайшего соседа», метод Кларка – Райта, «жадный алгоритм», генетический алгоритм, «алгоритм муравьиной колонии», метод включения ближайшего города и другие, способны сократить полный перебор.

Среди эвристических методов наиболее эффективным для задач с грузоподъемностью является метод Кларка – Райта. Он позволяет учесть объем мусора площадок и грузоподъемность транспортного

средства для определения оптимальных маршрутов и оптимального количества рейсов грузоперевозки.

Несмотря на то, что метод Кларка – Райта прост, надежен и гибок, а также относится к методам, которые возможно реализовать программно, на данный момент не существует его известной (распространенной) компьютерной реализации.

Для решения поставленной задачи нахождения оптимальных маршрутов разработано приложение в среде Embarcadero RAD Studio 10.2 с использованием императивного структурированного объектно-ориентированного языка программирования Delphi. При разработке приложения стояла задача сделать его не только динамическим, но и разработать понятный пользователю интерфейс с учетом современных требований UI/UX-дизайна. В программе также необходимо предусмотреть: вывод адресов контейнерных площадок; домов, принадлежащих к ним, количество и объем контейнеров.

Для хранения, изменения и обработки взаимосвязанной информации используются таблицы Microsoft Excel. Разработанная программа в ходе выполнения подключается к файлу Microsoft Excel и считывает с него всю необходимую информацию (адрес контейнерной площадки, количество контейнеров, объем и ее координаты). Подобная реализация позволяет пользователю использовать созданное приложение без установки дополнительного программного обеспечения для работы с базой данных.

Вся считанная информация выводится в табличном виде, при необходимости пользователь может ее изменять и дополнять. Пример созданного интерфейса и табличного представления данных в программе представлены на рис. 1.

Разработанная программа позволяет пользователю добавлять новые контейнерные площадки и привязанные к ней дома. Кроме того, в программу можно вносить информацию об организациях (юридических лицах), расположенных непосредственно вблизи каждой контейнерной площадки для корректировки объема мусора, накапливающихся на них. Добавление данных показано на рис. 2.

Помимо табличного представления информации программа позволяет посмотреть расположение контейнерной площадки на карте и всю необходимую информацию по ней, такую как: количество обслуживаемых домов, ближайшие юридические лица, количество контейнеров и вместимость площадки. Для реализации отображения на карте подключена технология API Яндекс.Карт, которая позволяет использовать картографические данные и технологии Яндекса.

Данные

Адрес площадки	Количество контейнеров	Объем (м3)	Широта	Долгота
ул. 60 лет ВЛКСМ 6 - торец	9	5,36	178256	540563
ул. 60 лет ВЛКСМ 6 - двор	3	2,32	177752	539409
ул. Победы 47	5	3,12	180369	536976
ул. Победы 43	4	2,33	181238	535125
ул. Карла Маркса 3	6	5,42	182685	536266
ул. Яблочкова 1	7	3,91	181224	540515
ул. Яблочкова 1А	2	1,76	180595	540043
ул. 60 лет ВЛКСМ 7	8	4,71	177195	538305
ул. 60 лет ВЛКСМ 12	8	5,06	177033	535466
ул. Победы 52	4	3,68	178448	535745
ул. Привокзальная 72Б	4	2,77	178642	529852
ул. Привокзальная 73А	4	2,77	178476	532852
ул. Привокзальная 68	4	3,19	179482	529888
ул. Привокзальная 41	7	4,66	182808	527597

Количество контейнерных площадок: 31

Добавить площадку

Рис. 1. Табличное представление информации

Добавление контейнерных площадок

Адрес:

Количество контейнеров:

Объем:

Широта:

Долгота:

Обслуживаемые дома:

Юридические лица:

Расстояние от новой площадки:

Полигон

ул. 60 лет ВЛКСМ 6 - торец

ул. 60 лет ВЛКСМ 6 - двор

Выход

Добавить площадку

Рис. 2. Добавление контейнерных площадок

Технология API Яндекс.Карт подключается к среде быстрой разработки приложений Embarcadero RAD Studio 10.2 посредством установленного модуля CEF4Delphi, в который внедряли сторонний язык программирования JavaScript, язык гипертекстовой разметки HTML и каскадные таблицы стилей CSS. Отображение контейнерных площадок на карте представлено на рис. 3.

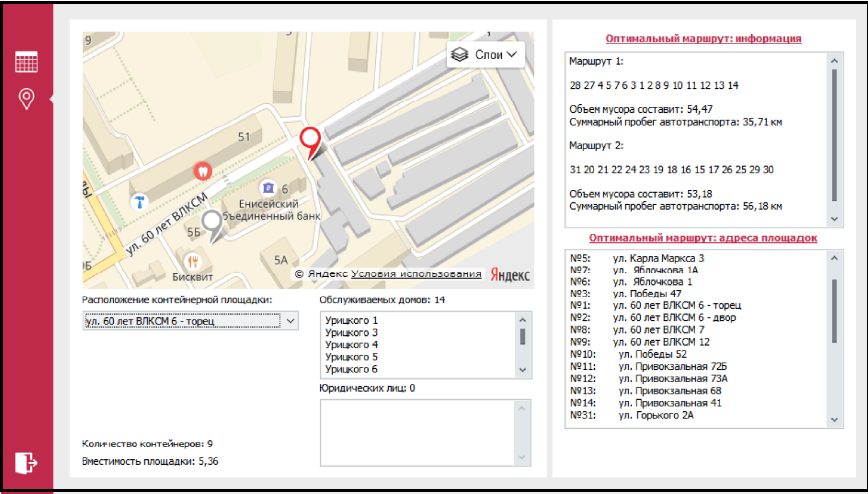


Рис. 3. Отображение контейнерных площадок на карте

Оптимальные маршруты вывозки отходов с контейнерных площадок на полигон (места вывоза мусора) в приложении определяются методом Кларка – Райта. Исходными данными для реализации алгоритма, которые задает пользователь, являются: грузоподъемность машины; коэффициент уплотнения; количество и местоположение контейнерных площадок, их объем, координаты полигона. В результате расчетов определяются оптимальные маршруты движения машины, определяющие порядок сбора мусора, их минимальная протяженность и объем перевезенных отходов. Знание минимального пробега транспортного средства с учетом времени на загрузку и разгрузку машины позволит определить минимальный расход ГСМ и соответствующие затраты при вывозке ТКО.

Заключение

Разработанная программа позволяет определять оптимальные маршруты вывозки твердых коммунальных отходов, которые позволят снизить пробег мусоровозов и, как следствие, расход ГСМ, что приведет к сокращению затрат компаний, осуществляющих вывоз ТКО.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черкесов А.Г.* Экономика: практические задачи и решения: учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2002. С. 32–37.
2. *Витвицкий Е.Е.* Теория транспортных процессов и систем (Грузовые автомобильные перевозки). Омск: СибАДИ, 2014. №2. С. 191–199.
3. *Планирование развозочных маршрутов методом Кларка – Райта* [Электронный ресурс]. URL: <http://www.nicemanagement.ru/doips-224-1.html> (дата обращения: 22.04.2018).
4. *Аземша С.А.* Повышение эффективности функционирования грузового автомобильного подвижного состава при работе на сборных (развозочных) маршрутах: Пособие для дипломного проектирования. Гомель: УО «БелГУТ», 2005. 36 с.
5. *Гаджинский А.М.* Логистика: Учебник. 20-е изд. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2012. 484 с.
6. *Разработка маршрутов и составление графиков доставки товаров автомобильным транспортом* [Электронный ресурс]. URL: <https://stud-baza.ru/razrabotka-marshrutov-i-sostavlenie-grafikov-dostavki-tovarov-avtomobilnyim-transportom-referatyi-transport> (дата обращения: 26.04.2018).
7. *Фомина Н.И., Лобов Н.В., Кузнецов П.А.* Логистические подходы при транспортировке твердых бытовых отходов в крупных населенных пунктах на примере г. Перми [Электронный ресурс] // Научные исследования и инновации. 2010. № 3. Т. 4. С. 87–93. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=14866516> (дата обращения: 26.04.2018).
8. *Егоров В.И., Михайлов А.В., Мельберт А.А.* Разработка программы для планирования маршрутов мусоровоза [Электронный ресурс] // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 2. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=12755> (дата обращения: 26.04.2018).
9. *Яндекс. API карт* [Электронный ресурс]. URL: <https://tech.yandex.ru/maps/doc/theory/concepts/coordinates-docpage/> (дата обращения: 26.04.2018).

Лепший Максим Вадимович, reborn-max@yandex.ru;

Шинкевич Юлия Васильевна, Juliya_Shi@mail.ru;

Труфанов Денис Сергеевич, Icojelifairy@gmail.com

Применения 3D-моделирования в задачах разработки проектов модернизации производства ДВП

И.А. Любезнов, М.Г. Биллер

*Сибирский государственный университет науки и технологий
имени академика М.Ф. Решетнева, филиал СибГУ в г. Лесосибирске,
г. Лесосибирск, Россия*

Современные производственные предприятия применяют технологию 3D-моделирования. Она позволяет экономить материалы и денежные средства на инженерное проектирование продукции. Современные тенденции перехода к комплексным САПР говорят об использовании на машиностроительных предприятиях интегрированных CAD / CAM / CAE . Системы 3D-моделирования могут быть эффективными не только при их использовании конструкторами-проектировщиками, но и при модернизации оборудования в технологических подразделениях. В частности, мы рассмотрим процесс модернизации работы отливной машины в производстве ДВП.

Постановка задачи

В рамках поставленной задачи решения проблемы разнотолщинности производства ДВП мокрым способом конструктивно необходимо автоматизировать плоскосеточные отливные машины.

Конструкторское решение: Заменить в регуляторе концентрации системы датчик в виде фрикционного винта на автоматический датчик регулирования скорости напускного устройства и силоизмерительный датчик скорости сетки отливной машины.

Цель работы: Создание 3D-модели автоматизации отливной машины производства ДВП при разработке проекта модернизации.

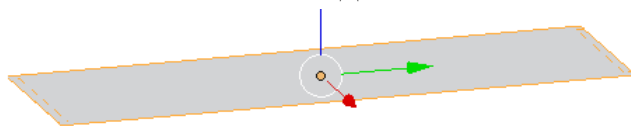
Особенность работы технологических отделов заключается в том, что они являются последним этапом подготовки производства, далее следует воплощение идеи конструктора в металле. Конструкторская документация, поступающая к технологу, может иметь различные недостатки и ошибки, и если они выявляются только на стадии производства, то это приводит к тому, что затраты на ее исправления возрастают на порядок. Применение системы 3D-моделирования для контрольной сборки изделия – наиболее эффективная область ее использования.

В результате трехмерного моделирования создается визуальный объемный образ желаемого объекта. Полученное изображение какого-либо предмета в результате 3D-моделирования можно увидеть на экране монитора в различных ракурсах, при различном освещении. Поэтому 3D-моделирование часто применяется при создании новых видов продукции, или когда имеющееся двухмерное изображение предмета является недостаточным для реализации поставленных целей.

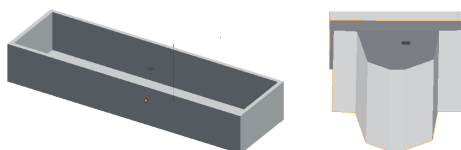
В качестве программной среды для 3D-моделирования отливной машины производства ДВП мы остановились на Blender, который имеет небольшой размер в сравнении с популярными пакетами для 3D-моделирования, также хороший пользовательский интерфейс с двумя режимами работы, прозрачные плавающие элементы, систему просмотра дерева объектов.

Алгоритм создания отливной машины:

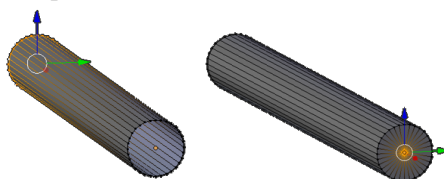
1. Найдем чертежи и рисунки будущей модели.
2. Создадим источник света «Создать» «Солнце».
3. Бассейны. Создадим плоскость. Добавим несколько точек.



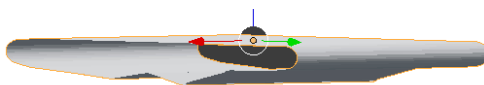
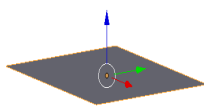
4. Чтобы добавить полигоны, выделим точки и нажмем кнопку «Е».



5. Грудной вал, направляющие ролики. Добавим круг. Выделим примитив и нажмем кнопку «Е», чтобы добавить полигоны. Выделим точки и нажмем кнопку «Е», чтобы добавить полигоны. Затем кнопку «S», чтобы задать направление.

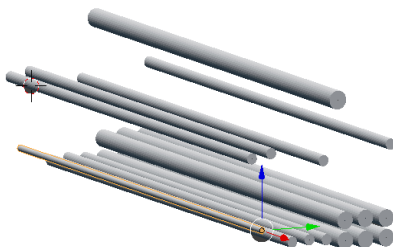


6. Сетка. Создадим плоскость. Добавим полигоны.

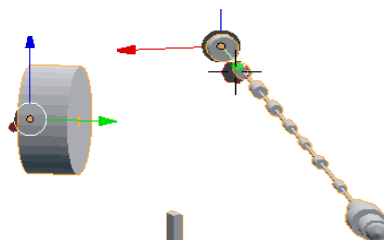


7. Фотопресс.

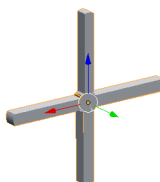
Сначала создадим валы,
натяжной валик.



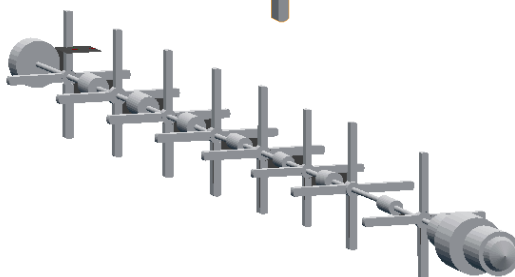
8. Мешалка. Добавим круг и
будем добавлять полигоны
и точки. Создав основание,
создадим оси мешалки,
продолжим добавлять
полигоны.



9. Лопасть мешалки.
Создадим круг
и добавим полигоны.



Итоговый результат
деталь «Мешалка».



Заключение

3D-моделирование модернизации отливной машины в производстве ДВП позволит определить: возможность выполнения производственной программы на заданном оборудовании в заданных помещениях; крити-

ческие операции по существующим технологиям; выявить узкие места и предложить решения по их устранению; найти период времени, необходимый для выполнения производственной программы на заданных (имеющихся) мощностях; оптимальную схему расстановки оборудования, подтвердить необходимость использования предполагаемого оборудования в плане возможности выполнения программы, определить или оптимизировать размер производства; отработать технологические процессы по их выполнимости, предварительному нормированию до их фактического внедрения; рассчитать (смоделировать) конвейерные линии; составить график поставки комплектующих (материала); оптимизировать материальные потоки, снизить величину запасов, рассчитать оптимальные размеры буферных запасов, определить или оптимизировать транспортные ресурсы.

Применение имитационных моделей дает множество преимуществ по сравнению с выполнением экспериментов над реальной системой и использованием других методов.

В современных САПР процесс проектирования и производства сложных и многокомпонентных изделий требует одновременной работы всех участвующих в проектировании электронной модели деталей, узлов, агрегатов, систем и всего изделия в целом. Не дожидаясь полного окончания разработки нового изделия в конструкторском отделе, информация о нем должна использоваться для технологической подготовки производства и всего производства в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Имитационное моделирование производственных систем* / под общ. ред. чл.-кор. АН СССР А.А. Вавилова. М.: Машиностроение; Берлин: Техника, 1983. 416 с.
2. *Васильев В.Н.* Организация, управление и экономика гибкого интегрированного производства в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 312 с.
3. *Киселев Г.А.* Переналаживаемые технологические процессы в машиностроении. М.: Издательство стандартов, 1980. 272 с.
4. *Гибкие производственные комплексы* / под ред. П.Н. Белянина и В.А. Лещенко. М.: Машиностроение, 1984. 384 с.
5. *Маслов К.Ю., Похорукова М.Ю.* 3D-моделирование в промышленной сфере // Молодой ученый. 2016. № 11.3. С. 19–22. URL: <https://moluch.ru/archive/115/31349/> (дата обращения: 03.04.2018).

Любезнов Иван Александрович; iwan534t@mail.ru;

Биллер Марина Георгиевна; к.п.н., доцент, arinna3@mail.ru

Исследование испаноязычной поэзии Золотого века методами тематического моделирования

В.В. Манхирова

*Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского
федерального университета – г. Красноярск, Россия*

Представляют интерес исследования коллекции испаноязычной поэзии с филологической и лингвистической точек зрения [1]. Некоторые результаты подобных исследований представлены в работах [2, 3]. Как правило, целью исследований являются определение тематики произведений, изучение средств образного выражения, выявление способов обозначения тематики произведений и изменение ее во времени. При этом используются методы семантического и лексического анализов, сравнительно-исторический метод.

Для решения поставленной задачи применимы математические методы и информационные технологии, на которых базируется корпусная лингвистика и интеллектуальный анализ данных [4–7]. Для выявления средств выражения тематики анализируемых коллекций произведений целесообразно применение тематического моделирования.

Тематическое моделирование является одной из задач анализа текстовых документов на естественном языке наряду с такими задачами, как реферирование, рубрикация (или классификация), обнаружение дубликатов, выявление спама, построение словарей синонимов и др. В анализе естественно-языковых текстов применяются два основных подхода: лингвистический и статистический (частотный). При лингвистическом подходе анализ текстовых документов осуществляется с учетом особенностей естественного языка, т.е. модели языка, которая определяется экспертами-лингвистами. При статистическом подходе обработка текстовых документов выполняется на основе общих подходов, базирующихся на методах теории вероятностей и математической статистики. В большинстве случаев используются оба подхода.

В настоящей работе исследуется коллекция сонетов на испанском языке следующих авторов Золотого века (1492 – 1659): Гарсиласо де ла Вега, Хуана Боскана, Мигеля де Сервантеса, Луиса де Гонгора, Франциско де Кеведо [8]. Жанр рассматриваемых произведений – сонет – предусматривает строгие правила формы произведения: традиционно сонет состоит из 14 строк, сначала два четверостишья и затем два трех-

стишья. Для сонетов характерна, как правило, следующая тематика: любовь, дружба, смысл жизни, смерть, природа, красота, молодость, старость и т.д. Наличие авторского стиля и перечисленной тематики обуславливает специфичный словарь термов (слов или словосочетаний). Флективность испанского языка (словообразование преимущественно при помощи флексий) обуславливает усиление лексической составляющей в анализе испаноязычных текстов [9, 10]. Перечисленные особенности во многом определяют специфику тематического моделирования коллекции сонетов на испанском языке.

Методы тематического моделирования опираются на некоторую модель текстового документа и словарь термов. Их формирование для исходной коллекции текстовых документов – важнейшая и трудоемкая подготовительная процедура обработки текстов, которая всегда предшествует тематическому моделированию. Данная процедура называется предобработкой (предварительной обработкой) текстовых документов.

В статье предлагаются схема предобработки и методы тематического моделирования исследуемой коллекции текстовых документов.

Постановка задачи тематического моделирования

Тематическая модель – модель коллекции текстовых документов, которая определяет, к каким темам относится каждый документ заданной коллекции и какие термы образуют каждую тему. Процесс ее построения принято называть тематическим моделированием. При тематическом моделировании предполагается, что документы и термы являются наблюдаемыми, а темы – латентными (ненаблюдаемыми). Кроме того, считается: каждый отдельный документ или терм может относиться к одной или нескольким темам; порядок документов в коллекции и порядок термов в документе не важны; слово в разных формах определяет один и тот же терм.

В тематическом моделировании каждый текстовый документ d из заданной коллекции D представляется вектором $d = (w_1, \dots, w_n)$ в пространстве термов W . Предполагается, что употребление термина $w \in W$ в документе $d \in D$ связано с некоторой темой $t \in T$, которая неизвестна.

Задача тематического моделирования заключается в построении тематической модели, то есть для заданной коллекции документов D и заданного словаря термов W требуется построить тематическую модель: определить, к каким темам относится каждый документ и какие термы образуют каждую тему.

Особенности предобработки коллекции сонетов

Все алгоритмы тематического моделирования опираются на векторное представление текстового документа и словарь термов. Их формирование для исходной коллекции текстовых документов – важнейшая и трудоемкая подготовительная процедура обработки текстов, которая всегда предшествует тематическому моделированию. Данная процедура называется предобработкой (предварительной обработкой) текстовых документов.

На вход этой процедуры поступает: ID – исходная коллекция текстовых документов, каждый из которых задан последовательностью (строкой) символов; модель естественного языка в виде алфавита, морфологических и синтаксических правил; лингвистические ресурсы (базы данных словоформ, основ, аффиксов и т.п.) и процессоры для рассматриваемого естественного языка.

На выходе процедура должна выдать: W – словарь-множество всех употребляемых в документах из ID термов; D – коллекцию текстовых документов, в которой каждый документ представлен вектором в пространстве термов W (рис. 1).

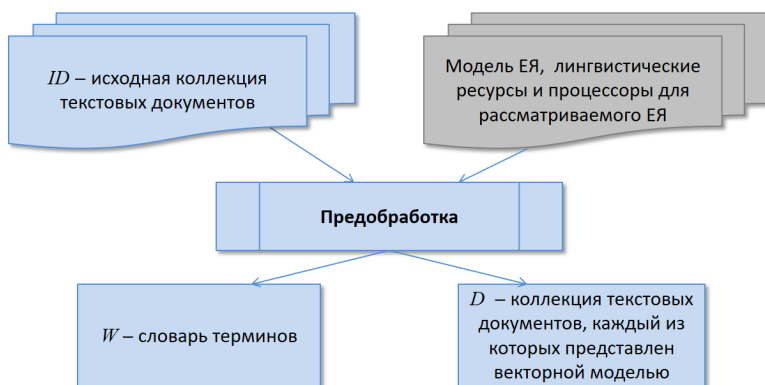


Рис. 1. Схема предобработки текстовых документов

Крайне важно отметить тот факт, что процедура предобработки не является универсальной, она во многом зависит от особенностей естественного языка. Чем лучше изучен язык, чем больше для него создано лингвистических ресурсов и процессоров, тем легче выполнять предоб-

работку текстовых документов, представленных на этом языке. Данная процедура предусматривает три этапа.

На втором этапе создается словарь термов W путем выделения в тексте каждого отдельного документа слов и словосочетаний, вычисления частоты их появления и удаления стоп-слов. При реализации данного этапа используются как лингвистические, так и статистические методы. Здесь также необходим список стоп-слов естественного языка.

На третьем этапе формируются векторные представления документов. Этот этап преимущественно реализуется алгоритмическими методами на основе результатов предшествующих этапов.

Первые два этапа в большей степени привязаны к особенностям естественного языка, и поэтому они являются самыми трудоемкими и ответственными.

Рассматриваемая коллекция документов (сонеты на испанском языке) требует специализированной предварительной обработки, которая может быть осуществлена при помощи привлечения экспертов-лингвистов и соответствующих лингвистических ресурсов и процессоров. Так, например, возможно использование в качестве ресурса существующих корпусов испанского языка. При предобработке следует учитывать характерные черты рассматриваемого языка и выбранный формат текстов. Испанский язык флективен, следовательно, количество словоформ одного слова и однокоренных слов будет выше, нежели в языках других типов. Кроме того, формат исследуемых текстов – сонет – предполагает применение методов предобработки коротких текстов, то есть редко встречающиеся слова не будут отбрасываться и считаться незначимыми.

Методы тематического моделирования коллекции сонетов

Известны два подхода построения тематических моделей: алгебраический и вероятностный [5].

Математический аппарат алгебраического подхода основан на сингулярном разложении (Singular Value Decomposition, SVD) начальной матрицы «документ – терм». Основная цель SVD – снижение размерности исходной матрицы.

Вероятностное тематическое моделирование представляет каждый документ как набор тем с вероятностным распределением. Каждая тема представляет собой набор слов с распределением вероятностей, объясняющих важность каждого слова для темы.

Выбор метода тематического моделирования напрямую зависит от поставленной задачи и специфики входных данных. Перечисленные методы показывают хорошие результаты на больших текстах. В случае, если входные данные – короткие тексты (например, сонеты), то рассмотренные методы нуждаются в модификации.

Заключение

Результаты тематического моделирования используются при решении многих прикладных задач. Тематические модели коллекций документов (размеры этих коллекций могут быть огромными), позволяют оперировать сравнительно небольшим набором тем при решении различных прикладных задач, с алгоритмической точки зрения – это снижение размерности решаемых задач.

Примерами прикладных задач могут служить: ранжирование документов по степени релевантности заданной теме (тематический поиск); построение тематического каталога коллекции документов; исследование динамики изменения тем во времени (предполагается, что для каждого документа известно время его создания); исследование тематики авторов (для каждого документа известен список авторов); фильтрация спама; поиск генетических паттернов в различных популяциях и определение пропорции этих паттернов у конкретного индивидуума и др.

Кроме того, задача тематического моделирования как задача «мягкой» кластеризации позволяет решать проблему синонимии и омонимии термов, возникающих при обычной «жесткой» кластеризации. Синонимы, как правило, с большой вероятностью попадают в одну тему, омонимы распределяются между несколькими.

Определены следующие направления дальнейших исследований.

1. Исследовать информационные и функциональные возможности корпусов испанского языка с целью их дальнейшего использования в процессе предобработки испаноязычных текстов.

2. Исследовать модель испанского языка и его вариаций, используемых в поэзии Золотого века.

3. Разработать формы (модели) представления исходной коллекции сонетов, включая известные их переводы на русский язык, а также векторных моделей этих произведений. Сформировать обучающую и контрольную выборки.

4. Разработать алгоритмы и программы процедуры предобработки и тематического моделирования коллекции сонетов.

5. Экспериментально проверить правильность выбранных подходов и методов. Интерпретировать результаты. Оценить качество построенных моделей

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев А.И.* Антология испанской поэзии Золотого века. Ижевск: Изд-во Удмуртск. ун-та, 2011. – 280 с.
2. *Casal C.* La poesía satírica en el Siglo de Oro: el modelo ariostesco // *Bulletin of Spanish Studies*. 2004. V. 83. No. 3. P. 465–491.
3. *Gareth Walters D.* Some Observations on the Sonnet in Golden-Age Plays and Quevedo's Dramatic Sonnets // *Bulletin of Spanish Studies*. Hispanic Studies and Researches on Spain, Portugal and Latin America. 2015. V. 92. No. 8–10. P. 189–201.
4. *Васильев В.Г., Кривенко М.П.* Методы автоматизированной обработки текстов. М.: ИПИ РАН, 2008. 304 с.
5. *Кориунов А., Гомзин А.* Тематическое моделирование текстов на естественном языке // *Труды Института системного программирования РАН*. 2012. Т. 23. С. 215–244.
6. *Шереметьева С.О., Осминин П.Г.* Методы и модели автоматического извлечения ключевых слов // *Вестник ЮУрГУ. Серия Лингвистика*. 2015. Т. 12. № 1. С. 76–81.
7. *Корнеев В.В., Гареев А.Ф., Васютин С.В., Райх В.В.* Базы данных. Интеллектуальная обработка информации. М.: Нолидж, 2000. 352 с.
8. *Шишкина Т.Н., Беляева Н.Т.* Испанская поэзия в русских переводах. М.: Радуга, 1984. 1022 с.
9. *Мыларицкова Т.Ю., Бабина О. И.* Извлечение именных групп из корпуса текстов на испанском языке // *Вестник ЮУрГУ. Сер. Лингвистика*. Челябинск: ЮУрГ. 2011. Вып. 13. № 22 (239). С. 47–53.
10. *Мыларицкова Т.Ю.* Моделирование содержания испанского технического текста // *Вестник ЧитГУ. Филологические науки*. 2012. № 7 (86). С. 84–89.

Манхирова Виктория Викторовна, mankhirova.v@mail.ru

О классификации произведений тувинского фольклора и распознавании жанра героического эпоса

Ч.М. Монгуш

*Институт математики и фундаментальной информатики,
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия*

Исследования тувинских лингвистов и филологов направлены на выявление и сохранение историко-культурных и этнографических знаний о прошлом тувинского народа. Работы по собиранию, изданию и изучению тувинского фольклора на протяжении многих лет ведутся в Тувинском институте гуманитарных и прикладных социально-экономических исследований. В научном архиве этого института хранится большое собрание записей (рукописных и печатных) произведений тувинского фольклора. Под руководством профессора Тувинского государственного университета М.В. Бавуу-Сюрюн также создана электронная коллекция «Тувинские героические сказания», содержащая оцифрованные тексты и метаописания более 50 произведений тувинского фольклора. Электронная коллекция «Тувинские героические сказания» – информационный и лингвистический ресурс, позволяющий решать многие лингвистические, филологические и культурологические задачи с помощью математических методов и информационных технологий в рамках корпуса тувинского языка [1]. Одной из таких задач является распознавание произведений, относящихся к тувинскому героическому эпосу. С точки зрения технологии анализа данных эта задача относится к задаче классификации естественно-языковых текстов.

Традиционными подходами для решения задачи классификации текстовых данных являются алгоритмы машинного обучения, базирующиеся на частотных характеристиках и количественных мерах близости анализируемых текстов. Между тем имеется математический аппарат, известный в научных изданиях как анализ формальных понятий или коротко АФП, позволяющий осуществлять классификацию текстов на семантическом уровне [2–4]. В рамках АФП анализируемая коллекция текстов представляется бинарным контекстом, отражающим наличие или отсутствие тех или иных признаков в произведениях, входящих в эту коллекцию. Контексты формируются исходя из паспортов отдельных произведений коллекции.

В работе автора [6] представлена программа FCACorpus, в которой алгоритмически усовершенствованы и программно реализованы основные методы АФП. Цель настоящей работы – показать, как с помощью АФП можно решать задачу бинарной классификации тувинского фольклора. Все представленные в работе результаты вычислительных экспериментов получены с использованием программы FCACorpus и электронной коллекции «Тувинские героические сказания».

Основные термины и обозначения

Для понимания излагаемого далее алгоритма классификации приведем необходимые термины и обозначения, применяемые в АФП [4].

Пусть заданы два непустых конечных множества G и M и отношение $I \subseteq G \times M$ инцидентности между ними. Множества G и M обычно интерпретируют как множества объектов и признаков соответственно. Существование в I пары (g, m) , $g \in G$ и $m \in M$, означает, что объект g имеет признак m и признак m присущ объекту g . Тройку $K = (G, M, I)$ называют контекстом. Например, в роли объектов можно рассматривать отдельные произведения электронной коллекции, а в роли признаков – характерные особенности этих произведений.

Введем для $A \subseteq G$ и $B \subseteq M$ следующие обозначения:

$$A' = \{m \in M \mid \forall g \in A (g, m) \in I\},$$

$$B' = \{g \in G \mid \forall m \in B (g, m) \in I\}.$$

Исходя из этого, A' – набор признаков, общих для всех объектов из A , а B' – множество объектов, которые обладают всеми признаками из B [4]. Говорят, что пара (A, B) , $A \subseteq G$, $B \subseteq M$, образует в $K = (G, M, I)$ формальное понятие с объемом A и содержанием B , если $A' = B$ и $B' = A$.

Обозначим через FC_K множество всех формальных понятий контекста K . Введем отношение частичного порядка $\sqsubseteq$ на FC_K :

$$(A_1, B_1) \sqsubseteq (A_2, B_2), \text{ если } A_1 \subseteq A_2 \text{ (или } B_2 \subseteq B_1),$$

где $A_1, A_2 \subseteq G$ и $B_1, B_2 \subseteq M$. Определим на FC_K операции пересечения $\sqcap$ и объединения $\sqcup$ через одноименные теоретико-множественные операции $\cap$ и $\cup$ следующим образом:

$$(A_1, B_1) \sqcap (A_2, B_2) = (A_1 \cap A_2, (A_1 \cap A_2)'),$$

$$(A_1, B_1) \sqcup (A_2, B_2) = ((B_1 \cap B_2)', B_1 \cap B_2).$$

Тогда частично упорядоченное множество $(FC_K, \sqsubseteq)$ образует решетку $L_K = (FC_K, \sqcap, \sqcup)$ [5]. Данная решетка называется решеткой формальных понятий контекста $K = (G, M, I)$. На основе $L_K = (FC_K, \sqcap, \sqcup)$ можно классифицировать объекты, представленные в $K = (G, M, I)$.

Задача бинарной классификации и алгоритм ее решения

Задача бинарной классификации в терминах АФП формулируется следующим образом [2].

Пусть задано конечное множество объектов G , разбитое на два класса G^+ и G^- , $G^+ \cap G^- = \emptyset$, $G^+ \cup G^- = G$. Классы G^+ и G^- установлены с помощью некоторого целевого бинарного признака z . Все объекты из G описаны через конечное множество признаков M . Эти описания заданы контекстом $K = (G, M, I)$. Классу G^+ отвечает положительный контекст $K^+ = (G^+, M, I^+)$, а классу G^- – отрицательный контекст $K^- = (G^-, M, I^-)$. Пусть также задан объект $x \notin G$, которому присущ набор признаков $M_x \subseteq M$. Требуется найти решающее правило, которое для объекта x определяет класс принадлежности.

Известны два типа алгоритмов классификации на основе АФП. Это алгоритмы (например, Rulelearner, Galois, Grand, Citrec и Legal), использующие всю решетку формальных понятий, и алгоритмы, основанные на гипотезах и работающие с решетками, построенными для классов [2]. В программе FCACorpus используется алгоритм второго типа.

Гипотезой называется набор признаков, который присутствует в описании объектов одного класса и не присутствует в описании объектов другого класса. Гипотезы извлекаются из решеток формальных понятий L_{K^+} и L_{K^-} , построенных для K^+ и K^- соответственно. Содержание B^+ формального понятия $(A^+, B^+) \in L_{K^+}$ считается положительной гипотезой, если в $K = (G, M, I)$ нет другого формального понятия $(A^-, B^-) \in L_{K^-}$, такого, что $B^+ \subseteq B^-$. Аналогичным образом определяются отрицательные гипотезы.

Решающее правило классификации определяется следующим образом [2, 6]. Объект x входит в класс G^+ , если M_x включает хотя бы одну положительную гипотезу и не включает ни одной отрицательной гипотезы. Объект x принадлежит к классу G^- , если M_x содержит хотя бы одну отрицательную гипотезу и не содержит ни одной положительной гипотезы. Отказ от классификации происходит, если M_x содержит и положительные и отрицательные гипотезы или M_x не включает в себя ни положительных, ни отрицательных гипотез.

В целом процесс решения задачи бинарной классификации состоит из следующих действий: нахождение всех формальных понятий для K^+ и K^- ; построение решеток L_{K^+} и L_{K^-} ; выявление гипотез; применение решающего правила для объекта $x \notin G$.

Известно, что задача построения по заданному контексту решетки формальных понятий является NP-трудной [3]. Для снижения вычислительной сложности этой задачи в работе [7] были предложены два приема, не приводящие к потере искомых формальных понятий. Это уменьшение размера величин $|G|$ и $|M|$ с помощью определенной предобработки исходного контекста $K = (G, M, I)$ и разделение контекста на полиномиальное число частей. Данные приемы реализованы в программе FCAScorpus, что позволяет применять ее при решении реальных практических задач, решаемых с помощью АФП.

Результаты вычислительных экспериментов

Продemonстрируем применение АФП и программы FCAScorpus для классификации текстов тувинского фольклора и распознавания их принадлежности к жанру героического эпоса.

В табл. 1 представлен фрагмент контекста, сформированного на основе метаописаний фольклорных произведений, взятых из электронной коллекции «Тувинские героические сказания». Основные признаки, характеризующие произведения тувинского фольклора с точки зрения принадлежности или не принадлежности к жанру героического эпоса, приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 1

Контекст произведений тувинского фольклора

	№	s_1	s_2	s_3	s_4	a_1	a_2	g_1	g_2	c_1	c_2	c_3	t_1	t_2	t_3	z
K^+	1			1		1		1		1			1			+
	2	1					1	1		1				1		+
	3		1			1		1			1				1	+
	4			1		1		1			1		1			+
K^-	5				1		1		1			1		1		–
	6				1	1		1		1				1		–
	7				1		1		1			1			1	–
x	8		1			1		1			1		1			?

Основные признаки, характеризующие произведения тувинского фольклора

Идентификатор признака	Значение признака
s_1	Сказитель Кашкак
s_2	Сказитель Хертек
s_3	Сказитель Ооржак
s_4	Другой сказитель или автором является народ
a_1	Горный ареал
a_2	Степной ареал
q_1	Есть богатырь
q_2	Нет богатыря
c_1	Сюжет «Сватовство»
c_2	Сюжет «Сестра добывает брату суженую»
c_3	Сюжет, отличный от c_1 и c_2
t_1	Зачин «Эрте шагның эктинде, бурун шагның мурнунда»
t_2	Зачин «Шыянам, эрте бурунгу шагда»
t_3	Зачин «Шыянам, эртенгиниң эртезинде бурунгунуң мурнунда»

Положительному контексту $K^+ = (G^+, M, I^+)$ отвечают строки 1–4 табл. 1, характеризующие тексты тувинского героического эпоса:

$$G^+ = \{\text{«Арзылаң-Кара аъттыг Хунан-Кара», «Мөрүн-Хүлүк», «Өлээдей-Мерген», «Элестей ашак»}\}.$$

Отрицательному контексту $K^- = (G^-, M, I^-)$ соответствуют строки 5, 6, 7 табл. 1, в них отражены описания трех произведений тувинского фольклора, не относящиеся к жанру героического эпоса:

$$G^- = \{\text{«Чечен-Маанай и Тенек-Тулун», «Караты-Хаан биле Алдын-кыс», «Кыс-Халыыр»}\}.$$

Бинарный признак z (табл. 1) служит для выделения классов объектов G^+ и G^- . Пусть задано некоторое произведение x (последняя строка табл. 1) с множеством признаков $M_x = \{s_2, a_1, q_1, c_2, t_1\}$. Требуется для x определить класс, к которому его можно отнести.

Положительный контекст K^+ порождает 10 формальных понятий, которые образуют решетку L_{K^+} (рис. 1). В решетке L_{K^+} положительными гипотезами являются множества признаков:

$$\{s_3, a_1, q_1, t_1\}, \{a_1, q_1, c_2\}, \{s_1, a_2, q_1, c_1, t_2\}, \{s_3, a_1, q_1, c_1, t_1\}, \\ \{s_2, a_1, q_1, c_2, t_3\}, \{s_3, a_1, q_1, c_2, t_1\}.$$

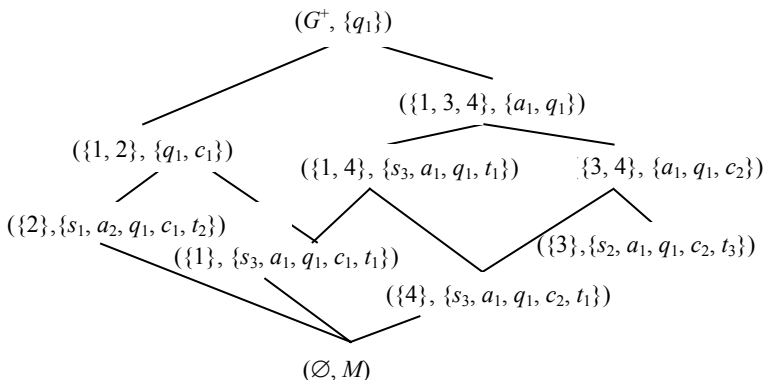


Рис. 1. Решетка формальных понятий L_{K^+} контекста K^+

Контекст K^- порождает 7 формальных понятий, которые образуют решетку L_{K^-} (рис. 2). В решетке L_{K^-} отрицательными гипотезами являются множества признаков:

$$\{s_4\}, \{s_4, t_2\}, \{s_4, a_2, q_2, c_3\}, \{s_4, a_2, q_2, c_3, t_3\}, \\ \{s_4, a_1, q_1, c_1, t_2\}, \{s_4, a_2, q_2, c_3, t_2\}.$$

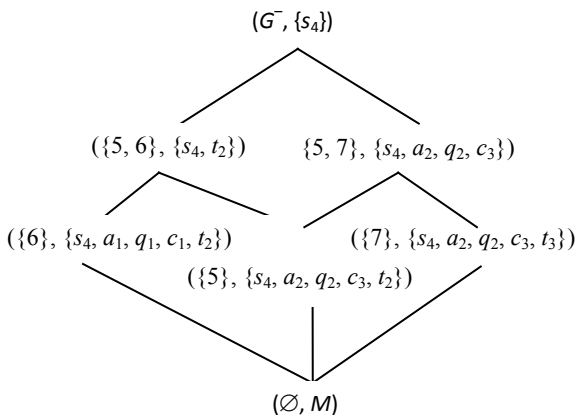


Рис. 2. Решетка формальных понятий L_{K^-} контекста K^-

По правилу бинарной классификации произведение x с набором признаков $M_x = \{s_2, a_1, q_1, c_2, t_1\}$ будет отнесено к классу G^+ , т. е. к жанру

героического эпоса, так как множество M_x включает положительную гипотезу $\{a_1, q_1, c_2\}$ и не содержит отрицательных гипотез. Если $M_x = \{s_4, t_2, c_3\}$, то произведение x будет отнесено к классу G^- , поскольку содержит отрицательную гипотезу $\{s_4, t_2\}$ и не содержит положительных гипотез. Полученные результаты классификации не противостоят мнениям экспертов относительно анализируемых произведений.

Заключение

Вычислительные эксперименты показали, что программа FCAScorpus может быть использована для решения лингвистических и филологических задач, решаемых в рамках корпуса тувинского языка и сводимых к задаче бинарной классификации по прецедентам. Однако число учитываемых признаков литературных произведений должно быть ограничено двумя, тремя десятками. Между тем, число анализируемых произведений может достигать нескольких сотен. В дальнейшем предполагается совершенствование программы FCAScorpus с целью повышения эффективности применяемых в ней алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салчак А.Я., Байыр-оол А.В. Электронный корпус тувинского языка: состояние, проблемы // Мир науки, культуры, образования. 2013. № 6. С. 408–409.
2. Гуров С.И., Онищенко А.А. Классификация на основе АФП и бикластеризации: возможности подхода // Прикладная математика и информатика. 2011. Т. 38. С. 77–87.
3. Кузнецов С.О. Автоматическое обучение на основе анализа формальных понятий // Автоматика и телемеханика. 2001. № 10. С. 3–27.
4. Ganter B., Wille R. Formal Concept Analyses: mathematical foundations. Springer Science and Business Media, 2012. 284 p.
5. Биргоф Г. Теории решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.
6. Быкова В.В., Монгуш Ч.М. Алгоритмы концептуального моделирования и классификации текстов в корпусе тувинского языка // Программные продукты и системы. 2017. Т. 30. № 3. С. 487–495.
7. Bykova V.V., Mongush Ch.M. On Algebraic Approach of R. Wille and B. Ganter in the Investigation of Texts // J. Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2017. No. 3(10). P. 372–384.

Монгуш Чодураа Михайловна; mongushchod91@yandex.ru

Программная поддержка управления портфелем ценных бумаг на основе ликвидности

С.А. Поттосина, И.Л. Сергеева

*Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники, г. Минск, Беларусь*

Исследование инвестиционных процессов белорусского фондового рынка позволило сделать вывод о необходимости привлечения физических лиц к участию в процессе инвестирования. Роль домашних хозяйств в финансовой системе страны зачастую остается недооцененной. Для данного частного инвестора было выделено понятие – субъект домашнего хозяйства. Это частный инвестор – отдельно взятый индивид или семья, доходы которого формируются главным образом от продажи факторов производства (труд и капитал), а расходы представлены потреблением и сбережением. Выступая в качестве инвестора, он придерживается финансовых инвестиций в качестве объекта вложения и не стремится к контролю над процессом управления. Выявлены наиболее значимые особенности субъекта домашнего хозяйства как участника инвестиционного процесса: инерционность при выполнении сберегательно-инвестиционной функции; отсутствие знаний или их ограниченность о средствах и методах принятия инвестиционных решений. Данные участники процесса характеризуются и высокой долей субъективности при принятии решений.

Возможные альтернативы при принятии решения об управлении финансовыми средствами субъекта домохозяйства включают сберегательный и инвестиционный портфели. Основное предназначение сберегательного портфеля – обеспечение доходности активов домохозяйства в долгосрочной перспективе при умеренном уровне риска. Управление содержащимися в нем акциями подразумевает пассивную стратегию. Инвестиционный портфель домохозяйства в полной мере соответствует своему общему определению и включает такие понятия, как максимальная доходность, минимальный риск, управление основными характеристиками портфеля – доходностью, риском, ликвидностью.

Существует необходимость разработки методик формирования и пересмотра структуры портфеля ценных бумаг, которые позволяли бы индивидуальным инвесторам (субъект домашнего хозяйства) адекватно оценивать инвестиционные возможности, осуществлять эффективное

управление пассивным и активным портфелем. В предложенной авторами методике формирования и управления инвестиционным портфелем субъектом домашнего хозяйства учитываются такие важнейшие характеристики ценных бумаг, как доходность, риск и ликвидность.

В основе формирования структуры портфеля лежит алгоритм EGP построения касательного портфеля [1]. Он обладает тем преимуществом, что производит расчет долей ценных бумаг, которые максимизируют отношение доходности формируемого портфеля к его риску. С его помощью, исходя из финансовых возможностей инвестора, формируется касательный портфель, который послужит подходящей отправной точкой при управлении как пассивным, так и активным портфелями. Кроме того, алгоритм EGP обладает такими преимуществами, как простота и быстрота расчетов, прозрачность и ясность для пользователя, возможность ранжирования ценных бумаг в соответствии с лучшими характеристиками.

При изменении структуры портфеля используется алгоритм расчета ликвидности ценных бумаг [2]. Под ликвидностью понимают свойство актива к превращению в денежные ресурсы за максимально короткий срок при минимальной потере стоимости. Для инвестора, осуществляющего сберегательное инвестирование, поддержание достаточной ликвидности портфеля позволяет при необходимости без затруднений выводить средства из портфеля и направлять их на текущее потребление. Для портфельного инвестора, осуществляющего активную инвестиционную политику, ликвидность – это не только возможность обеспечивать активное управление портфелем, но и важнейший дополнительный механизм компенсации повышенного риска, позволяющий в случае негативной динамики рынка быстро закрывать убыточные позиции.

Процедура пересмотра структуры портфеля представляет собой итерационный процесс. На каждой итерации вычисляется ликвидность портфеля. Если ее значение окажется не ниже заданного уровня, структура текущего портфеля не меняется и начинается следующая итерация. В противном случае осуществляется переход к новой структуре. Пересмотр структуры целесообразно проводится каждые 3 месяца владения портфелем.

Изменение состава портфеля проводится по следующей схеме. Определяется касательный портфель, актуальный к моменту пересмотра текущего портфеля. Из текущего портфеля удаляются бумаги с низким уровнем ликвидности. На их место вводятся бумаги, составляющие актуальный касательный портфель, в порядке убывания значения коэф-

фициента Шарпа. При этом учитываются финансовые возможности инвестора, наличие нужных бумаг на рынке и требование того, чтобы риск нового портфеля был не больше, чем риск предыдущего. Построенный таким образом портфель становится текущим и начинается новая итерация.

Предложенная методика была применена к реальным данным; проведены численные эксперименты, использующие перечисленные выше алгоритмы по формированию и пересмотру структуры портфеля. Реализована инструментальная поддержка формирования и управления инвестиционным портфелем, позволяющая эффективно осуществлять портфельное инвестирование на фондовом рынке.

Разработана и реализована система «Личный банк», позволяющая формировать портфель ценных бумаг, принимать решения о переформировании структуры портфеля в тот или иной момент времени, а также проводить мониторинг основных характеристик портфеля за весь период владения.

Результат формирования портфеля ценных бумаг на основе метода EGP представлен на рис. 1. Здесь приведена основная информация, касающаяся уже созданного портфеля: тип, стоимость, дата создания, дата вывода и дата последнего переформирования (при необходимости); а также перечислены составляющие его ценные бумаги с основными характеристиками и показателями.

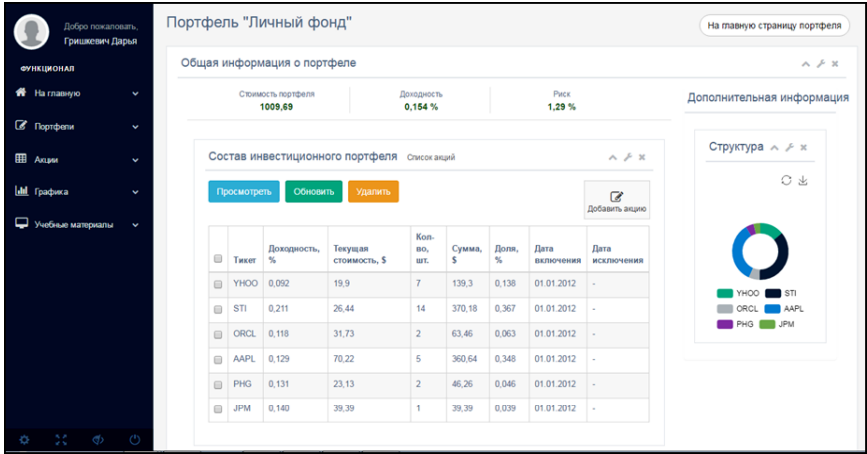


Рис. 1. Визуальное представление структуры портфеля

В случае первоначально создаваемого инвестиционного портфеля пользователю будут недоступны функции по управлению им, а будет предоставлена возможность загрузить информации по ценным бумагам и рассчитать характеристики портфеля. Импорт котировок бумаг необходимо производить в формате csv-файла, информация по ценным бумагам в свободном пользовании размещена в сети Интернет и доступна для использования.

Статистическая информация по бумагам желательно должна быть представлена на период с момента последнего переформирования портфеля по текущий момент (для инвестиционного портфеля, прошедшего хоть раз реструктуризацию) и на годовой интервал с текущего момента (для только сформированного портфеля).

Для мониторинга портфеля и контроля над его состоянием пользователь может просматривать статистику по основным характеристикам за последние несколько месяцев, недель, кварталов, лет. Графики доходности и стоимости сберегательного портфеля с консервативным типом управления доступны пользователю визуально. При анализе сформированного портфеля применяется визуальное представление доходностей и стоимостей портфеля и входящих в него ценных бумаг, динамика рыночного индекса, а также динамика основных показателей эффективности портфеля: коэффициенты бета, Шарпа, Трейнора. Так, на рис. 2 представлена динамика доходности ценных бумаг как пример визуального отображения статистической информации.

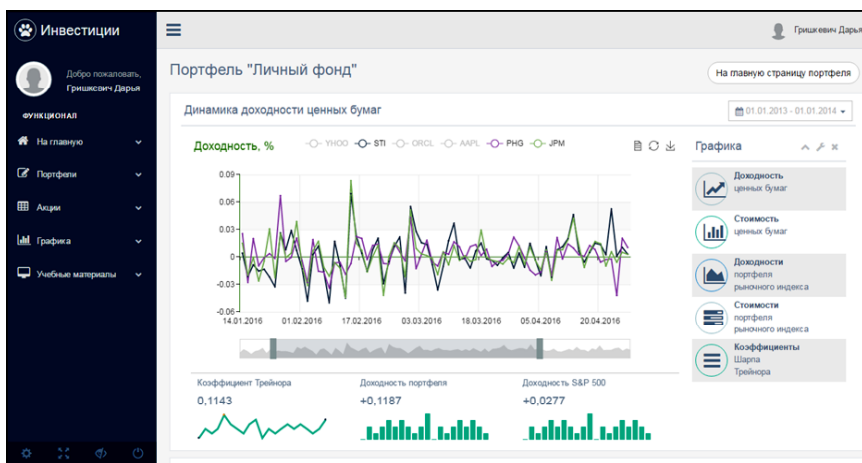


Рис. 2. Динамика доходности ценных бумаг на первые 3 квартала 2016 г.

При инвестиционном портфеле с активным типом управления полезно и необходимо просматривать не только общую информацию по портфелю, но и более детальное поведение входящих в него акций за прошедший период. Эти сведения представляют собой сочетание графиков доходности и стоимости акций, а также представление показателей риска и коэффициента Шарпа, Трейнора, бета.

Результат управления портфелем на основе расчета ликвидности представлен в виде динамики процесса реструктуризации портфеля (в течение годового интервала за каждый месяц с отметкой о выполненном переформировании) и изображен в виде графика на рис. 3.

На представленном ниже графике динамики ликвидности портфеля видно, что для второго квартала не была произведена реструктуризация и перерасчет ликвидности портфеля. Показатель ликвидности портфеля для данного этапа перерасчета соответствовал своему допустимому значению (выше трети от периода пересмотра для активной стратегии управления).

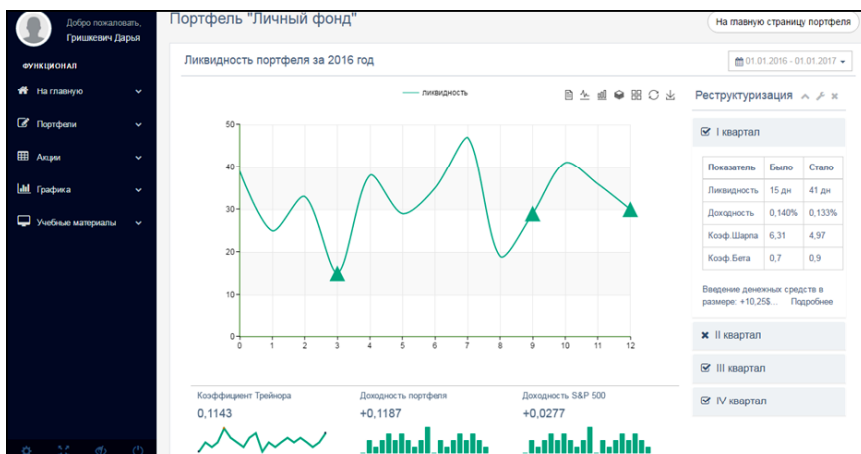


Рис. 3. Динамика процесса реструктуризации портфеля за 2016 г.

Представленная система формирования и управления инвестиционным портфелем позволит усовершенствовать работу частного инвестора на фондовом рынке не только за счет программной реализации алгоритмов расчетов, но и благодаря визуализации расчетов и статистической информации по портфелю и его составляющим. Это поможет ин-

вестору эффективно использовать свободные финансовые средства для осуществления портфельного инвестирования на фондовом рынке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Терпугов А.Ф.* Математика рынка ценных бумаг. Томск: Изд-во НТЛ, 2004. 167 с.
2. *Сергеева И.Л., Поттосина С.А.* Ликвидность как фактор управления инвестиционным портфелем // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2016): материалы XV междунар. конф. им. А.Ф. Терпугова. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2016. Ч. 2. С. 64–68.

Поттосина Светлана Анатольевна, к.ф.-м.н, доцент; s.pottosina@gmail.com;
Сергеева Ирина Леонидовна; i.sergeeva.mail@gmail.com

Внедрение и сопровождение информационной базы «КАМИН:Кадровый учет 3.0» с добавлением новых функциональностей

О.В. Шинкевич

*Лесосибирский филиал Сибирского государственного университета науки
и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Лесосибирск, Россия*

В настоящее время многие предприятия для работы с документами, несмотря на наличие специализированных программных продуктов (ПП), таких, как 1С:Предприятие, Парус и других, в которых обеспечивается простота и удобство использования за счет настроенных конфигураций, применяют ПП, похожие на Microsoft Word и Microsoft Excel, в которых зависимость элементов невозможно программно реализовать, и функциональность которых очень сильно ограничена.

Обычно это связано либо с отсутствием в данном ПП конфигураций, необходимых для работы с информационной системой, либо с необученностью персонала. Если данная проблема связана с отсутствием необходимой конфигурации, то для её решения приглашают специалиста для создания и настройки конфигурации, а если с необученностью персонала, то тогда проводят мероприятия по внедрению информационной системы и ее дальнейшему сопровождению.

В данной статье будет описано внедрение и сопровождение информационной базы (ИБ) «КАМИН:Кадровый учет 3.0» с добавлением новых функциональностей, отсутствующих в текущей версии ПП.

Постановка задачи

Добавить функциональность, способствующую работе с ИБ отдела кадров, с помощью которой стало бы возможно автоматизировать процесс составления отчетных документов в конфигурацию «КАМИН:Кадровый учет 3.0». Для добавления функциональности в конфигуратор поставщика разработать отдельно конфигуратор для работы с ИБ отдела кадров, проверить его на работоспособность и провести обновление конфигурации путем объединения.

«1С:Предприятие» является универсальной системой автоматизации экономической и организационной деятельности предприятия. Она может приспосабливаться к особенностям конкретной области деятель-

ности, в которой применяется. Логически всю систему можно разделить на две большие части, тесно взаимодействующие друг с другом – конфигурацию и платформу. Платформа обеспечивает работу конфигурации и позволяет вносить в нее изменения или создавать собственную конфигурацию [1].

Для обозначения одного и того же предмета могут употребляться два разных термина: «конфигурация» и «прикладное решение». Употребление одного или другого термина зависит от применяемого контекста. Если речь идет о действиях разработчика, то употребляется термин «конфигурация», поскольку это точный термин «1С:Предприятия». Термин «прикладное решение» является более общепринятым и понятным для пользователя системы «1С:Предприятие» [1].

Обычно для внедрения ИБ проводят обучение персонала на основе уже имеющейся ИБ на этапе построения. Для более эффективного обучения на основе имеющейся базы добавляют дополнительные возможности, которые в результате освоения и последующего внедрения несут сильный положительный эффект на всю информационную систему [2].

При разработке конфигуратора для работы с ИБ отдела кадров учитывалась следующая кадровая информация: ФИО (как полное, так и сокращенное, не доступное для редактирования на форме); отдел; должность (в отделах должности могут не совпадать, один сотрудник работает только в одном отделе только на одной должности); дата рождения; дата начала работы; пол; возраст (не доступный для редактирования на форме); комментарий (для внесения дополнительной информации о сотрудниках). После чего в конфигураторе создавались три справочника: «Отделы», «Должности» и «Сотрудники» (с добавлением необходимых реквизитов), и происходило связывание справочника «Должности» со справочником «Отделы» (путем добавления владельца в справочник «Должности»). Далее создавались форма элемента в справочнике «Сотрудники» и форма списка в справочнике «Отделы», после чего в справочнике «Сотрудники» в модуле разрабатывались необходимые для вычисления и вывода реквизитов «Возраст» и «Дата Рождения» процедуры, код которых можно увидеть на рис. 1.

При завершении разработки конфигуратора происходило заполнение ИБ для проверки правильности работы созданного конфигуратора. Заполненная ИБ предоставлялась кадровому отделу для поиска недостатков в реализованной версии конфигуратора.

После проведения испытаний и получения удовлетворительных результатов данная конфигурация проходила внедрение в кадровом отде-

ле в «КАМИН:Кадровый учет 3.0» с помощью добавления в конфигурацию «КАМИН:Кадровый учет 3.0» элементов, присутствующих в проверенной конфигурации. Добавление элементов происходило с

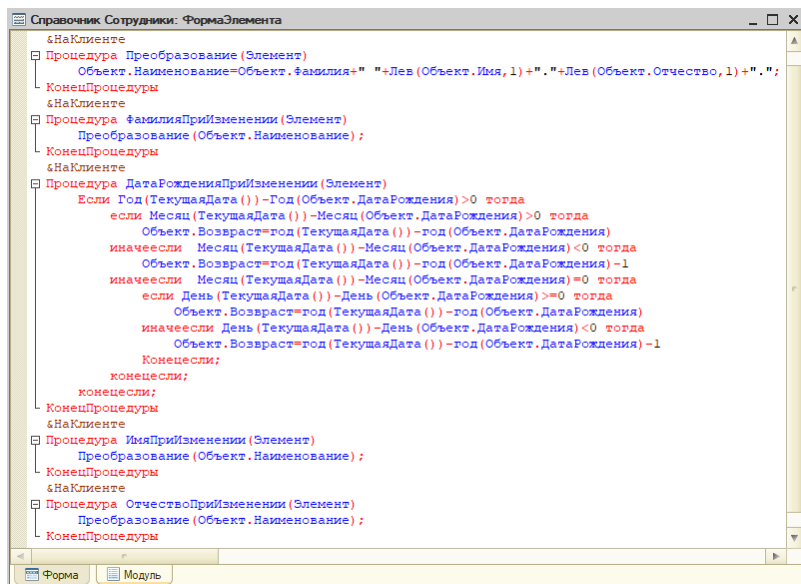


Рис. 1. Содержание модуля справочника «Сотрудники»

The screenshot shows a window titled 'Предварительный просмотр' displaying a table of employee data. The table has the following columns: ФИО, Отдел, Должность, Дата рождения, Начало работы, Комментарий.

ФИО	Отдел	Должность	Дата рождения	Начало работы	Комментарий
Бухгалтерия					
Птолемей Г.Р.	Бухгалтерия	Бухгалтер	19.12.1996	15.12.2016	д.э.н.
ГСПД					
Иванов И.И.	ГСПД	Старший преподаватель	04.05.1982	17.12.2015	
Иванова В.В.	ГСПД	Заведующий кафедрой	19.12.1971	07.06.2010	
ИТС					
Петров П.В.	ИТС	Старший преподаватель	19.12.1996	01.02.2011	
Петрова А.А.	ИТС	программист	15.03.1971	15.12.2011	
Секретариат					
Баранов А.В.	Секретариат	Секретарь	15.12.1971	11.12.2015	д.т.н.
Фортунов А.В.	Секретариат	Секретарь	15.03.1971	12.12.2015	
ТЛДП					
Сидоров А.А.	ТЛДП	Учебный мастер	12.12.1972	19.12.2015	
ЭИСД					
Чидов С.Д.	ЭИСД	Профессор	01.03.1900	06.12.2013	к.ф.н.

At the bottom of the window, it says 'Страница 1 из 1'.

Рис. 2. Пример созданного отчета для печати с помощью внедренных в конфигурацию «КАМИН:Кадровый учет 3.0» новых возможностей

помощью обновления конфигурации. Так как изменяемые объекты не используют функционал конфигурации поставщика, то есть решают абсолютно другие учетные задачи, то процесс обновления может быть выполнен полностью автоматически. Пример использования внедренной конфигурации можно увидеть на рис. 2.

Заключение

Разработка и возможность внедрения конфигуратора в различные прикладные решения позволяет добавить новую функциональность и увеличить эффективность работы с ИБ.

В результате разработки конфигуратора для работы с ИБ отдела кадров и последующим внедрением данной конфигурации в конфигурацию «КАМИН:Кадровый учет» стало возможно хранить в ИБ логически связанные данные о сотрудниках, а также появилась возможность автоматизировать процесс составления отчетных документов.

Предложенный конфигуратор может быть эффективно применен для формирования различных отчетов о сотрудниках во многих прикладных решениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Радченко М.Г.* 1С:Предприятие 8.3. Практическое пособие разработчика. Примеры и типовые приемы. М.: ООО «1С-Паблишинг», 2013. 964 с.
2. *Использование и поддержка информационных систем* [Электронный ресурс]. URL: http://life-prog.ru/1_5444_ispolzovanie-i-podderzhka-informatsionnih-sistem.html (дата обращения: 23.04.2018).
3. *Поддержка и сопровождение информационных систем* [Электронный ресурс]. URL: <http://www.inln.ru/soft/support/> (дата обращения: 24.04.2018).
4. *Важдаев А.Н.* Программная инженерия: методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Программная инженерия» для бакалавров, обучающихся по направлению 09.03.03 «Прикладная информатика». Юрга: Изд-во Юргинского технологического института (филиала) Томского политехнического университета, 2017. 113 с.
5. *Обзор системы «1С:Предприятие 8»* [Электронный ресурс]. URL: <http://v8.1c.ru/overview/> (дата обращения: 20.04.2018).
6. *1С:Предприятие 8.3* Версия для обучения программированию [Электронный ресурс]. URL: <https://online.1c.ru/catalog/free/18610119/> (дата обращения: 25.03.2018).
7. *Технология обновления нетиповых конфигураций 1С:Предприятия 8* (редакция 12.04.2012) [Электронный ресурс]. URL: <http://catalog.mista.ru/public/18562/> (дата обращения: 25.04.2018).

ПРИКЛАДНОЙ ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ И ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Модель системы обслуживания-запасания с разнотипными заявками

И.А. Алиев

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

Последние годы интенсивно исследуются системы обслуживания-запасания (Queuing-Inventory Systems, QIS) [1]. Подробный обзор работ, посвященных различным аспектам изучению таких систем, можно найти в работе [2]. В подавляющем большинстве известных работ считают, что заявки являются идентичными по всем показателям. Однако на практике поставщики товаров различают своих клиентов, и потому для поощрения выгодных клиентов используются различные схемы приоритетов. Подобные модели QIS с разнотипными заявками в доступной литературе мало изучены. Так, в работах [3–6] представлены модели QIS с мгновенным обслуживанием и двумя типами заявок при использовании $(S-1, S)$ -политики пополнения запасов; подобные модели при использовании (s, S) -политики изучены в работах [7, 8]. В работе [9] изучена модель QIS с двумя типами заявок и (s, S) -политикой, в которой заявки низкого приоритета уходят в орбиту бесконечного размера, если в моменты их поступления уровень запасов системы меньше, чем s ; заявки высокого приоритета принимаются, если уровень запасов системы больше нуля. Дальнейшую библиографию в этом направлении можно найти в списках литературы указанных работ. В работе [10] изучена модель QIS с разнотипными заявками и положительным временем обслуживания. В системе используется рандомизированная политика пополнения запасов, и задача нахождения оптимальных размеров заказов сформулирована как задача марковского программирования. Критерием задачи является минимизация суммарных убытков, связанных с ожиданием заявок в очереди, их потери, доставкой и хранением запасов. Предложены точный и приближенный методы решения поставленной задачи.

Анализ доступных работ показал, что в них дифференциация заявок осуществляется либо с помощью введения критического уровня запасов [3–9] либо по их размеру [10]. В данной работе в отличие от них предлагается другая схема дифференциация: заявки высокого приоритета принимаются при наличии хотя бы одного свободного места в буфере, а заявки низкого приоритета принимаются лишь тогда, когда общая длина очереди заявок меньше заданного порогового значения. Разработан метод расчета характеристик этой системы при использовании предложенной схемы дифференциации заявок.

Склад системы имеет ограниченный размер S , $S < \infty$, и эта система обслуживает пуассоновские потоки заявок двух типов: обычные и приоритетные. Интенсивность обычных заявок (поток заявок первого типа) равна λ_1 , а интенсивность приоритетных заявок (поток заявок второго типа) – λ_2 . После обслуживания заявки любого типа она с вероятностью $\sigma_1 > 0$ не получает запас и с дополнительной вероятностью $\sigma_2 = 1 - \sigma_1$ получает запас. Если заявка любого типа получает запас, то уровень запасов системы уменьшается на единицу, т.е. заявки являются идентичными по размеру.

Время обслуживания заявок обоих типов зависит от того, получила ли она запас или нет; в обоих случаях эта величина имеет показательную функцию распределения (ф.р.), при этом если заявка не получила запас, то среднее значение времени обслуживания равно μ_1^{-1} , в противном случае оно равно μ_2^{-1} . В реальных системах имеет место соотношение $\mu_1 \neq \mu_2$, так как в случае приобретения запаса выполняются определенные процедуры по его оформлению.

Здесь рассматривается модель QIS с конечной общей очередью разнотипных заявок. Это означает, что заявки обоих типов ожидают в очереди максимальной длины N , $N < \infty$. Предполагается, что если в момент поступления заявки уровень запасов положительный, то заявка первого типа принимается лишь тогда, когда в момент ее поступления суммарная длина очереди меньше, чем заданное пороговое значение r , $1 \leq r \leq N-1$; заявки второго типа теряются лишь тогда, когда очередь полностью заполнена.

Если в момент поступления заявки любого типа уровень запасов равен нулю, то она с вероятностью ϕ_1 присоединяется к очереди, а с до-

полнительной вероятностью $\varphi_2 = 1 - \varphi_1$ она уходит из системы не обслуженной. Заявки обоих типов являются нетерпеливыми, если во время их ожидания в очереди уровень запасов системы опускается до нулевого значения, т.е. если при наличии очереди уровень запасов системы опускается до нулевого значения, то заявка каждого типа уходит из системы после случайного времени, которое имеет показательную ф.р. с параметром $\tau > 0$.

В системе используется известная (s, S) -политика, т.е. заказ для поставки запасов делается тогда, когда их уровень опускается до величины s , $s < S/2$, при этом объем заказа равен $S - s$.

Считается, что заказы выполняются с некоторыми случайными задержками, которые имеют показательную ф.р. с параметром $v > 0$.

Задача заключается в нахождении совместного распределения уровня запасов системы и числа заявок в системе, и нахождении усредненных характеристик системы: среднего уровня запасов (S_{av}); средней интенсивности заказов (RR); вероятности потери заявок каждого типа (PB_1, PB_2).

Работа системы с конечной очередью описывается двумерной цепью Маркова с состояниями вида (m, n) , где m – уровень запасов системы, n – общее число заявок в системе. Пространство состояний (ПС) определяется так:

$$E = \{(m, n) : m = \overline{0, S} ; n = \overline{0, N}\}. \quad (1)$$

Переход от состояния (m, n) в состояние (m', n') обозначается через $(m, n) \rightarrow (m', n')$, а его интенсивность обозначается через $q((m, n), (m', n'))$. Совокупность этих величин составляет производящую матрицу данной цепи. Рассмотрим задачу ее построения.

Анализируя механизм принятия заявок, схему их обслуживания и поведения в очереди при отсутствии запасов, заключаем, что искомые переходы и интенсивности определяются так:

- интенсивность перехода $(m, n) \rightarrow (m, n+1)$ при выполнении условий $m > 0, n < r$ равна λ , где $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$;
- интенсивность перехода $(m, n) \rightarrow (m, n+1)$ при выполнении условий $m > 0, n \geq r$ равна λ_2 ;
- интенсивность перехода $(0, n) \rightarrow (0, n+1)$ равна $\lambda \varphi_1$;
- интенсивность перехода $(m, n) \rightarrow (m, n-1)$ при выполнении условий $m > 0, n > 0$ равна $\mu_1 \sigma_1$;

- интенсивность перехода $(0, n) \rightarrow (0, n-1)$ при выполнении условия $n > 0$, равна $\mu_2 \sigma_2$;
- интенсивность перехода $(0, n) \rightarrow (0, n-1)$ при выполнении условия $n > 0$, равна $n \tau$;
- интенсивность перехода $(m, n) \rightarrow (m+S-s, n)$ при выполнении условия $m \leq s$, равна v .

Все состояния изучаемой конечномерной цепи сообщаются друг с другом, т.е. в ней существует стационарный режим. Стационарная вероятность состояния $(m, n) \in E$ обозначается через $p(m, n)$. Эти вероятности удовлетворяют следующую систему уравнений равновесия (СУР):

$$p(m, n) \sum_{(m', n') \in E_{mn}^+} q((m, n), (m', n')) = \sum_{(m', n') \in E_{mn}^-} q((m', n'), (m, n)) p(m', n'). \quad (2)$$

Здесь используются следующие обозначения: $q((m, n), (m', n'))$ – интенсивность перехода $(m, n) \rightarrow (m', n')$; E_{mn}^+ – множество тех состояний из (1), в которых можно попасть из состояния (m, n) за один шаг; E_{mn}^- – множество тех состояний из (1), из которых можно попасть в состояния (m, n) за один шаг.

Исходя из вышеизложенных фактов об определении интенсивностей переходов между состояниями из ПС (1), заключаем, что СУР (2) в явном виде записывается так:

Случай $s < m \leq S$:

$$\begin{aligned} & (\lambda I(n < r) + \lambda_2 I(n \geq r) + (\mu_1 \sigma_1 + \mu_2 \sigma_2) I(n > 0)) p(m, n) = \\ & = \lambda p(m, n-1) I(n \leq r) + \lambda_2 p(m, n-1) I(n > r) + \\ & + \mu_1 \sigma_1 p(m, n+1) + \mu_2 \sigma_2 p(m+1, n+1) + v p(m-S+s, n). \end{aligned} \quad (3)$$

Случай $0 < m \leq s$:

$$\begin{aligned} & (\lambda I(n < r) + \lambda_2 I(n \geq r) + (\mu_1 \sigma_1 + \mu_2 \sigma_2) I(n > 0) + v) p(m, n) = \\ & = \lambda p(m, n-1) I(n \leq r) + \lambda_2 p(m, n-1) I(n > r) + \\ & + \mu_1 \sigma_1 p(m, n+1) + \mu_2 \sigma_2 p(m+1, n+1). \end{aligned} \quad (4)$$

Случай $m = 0$:

$$(\lambda \varphi_1 + n \tau + v) p(0, n) = \lambda \varphi_1 p(0, n-1) I(n > 0) + \mu_2 \sigma_2 p(1, n+1). \quad (5)$$

Здесь $I(A)$ обозначает индикаторную функцию события A . К этой СУР (3) – (5) добавляется еще и условие нормировки

$$\sum_{(m,n) \in E} p(m,n) = 1. \quad (6)$$

Усредненные характеристики системы определяются с помощью вероятностей состояний. Действительно, средний уровень запасов системы определяется как математическое ожидание соответствующей случайной величины, т.е. имеем

$$S_{av} = \sum_{m=1}^S m \sum_{n=0}^N p(m,n). \quad (7)$$

Заказы на поставку пополнения запасов осуществляются тогда, когда уровень запасов системы опускается от значения $s+1$ к значению s , т.е. средняя интенсивность заказов определяется следующим образом:

$$RR = \mu_2 \sigma_2 \sum_{n=1}^N p(s+1, n). \quad (8)$$

Заявки первого типа теряются в следующих случаях: 1) в момент поступления заявки уровень запасов системы больше нуля, но общее число заявок в системе превышает пороговое значение r ; 2) заявка теряется из очереди из-за нетерпеливости. Отсюда находим, что вероятность потери заявок первого типа определяется так:

$$PB_1 = \sum_{m=1}^S \sum_{n=r}^N p(m, n) + \theta \sum_{n=1}^N p(0, n) \frac{n\tau}{\lambda\phi_1 + n\tau}. \quad (9)$$

Заявки второго типа теряются в следующих случаях: 1) если в момент поступления заявки общее число заявок в системе равно N ; 2) заявка теряется из очереди из-за нетерпеливости. Следовательно, вероятность потери заявок второго типа определяется так:

$$PB_2 = \sum_{m=0}^S p(m, N) + \theta_2 \sum_{n=1}^N p(0, n) \frac{n\tau}{\lambda\phi_1 + n\tau}. \quad (10)$$

В формулах (9), (10) параметры $\theta_1 = \eta_1 / (\eta_1 + \eta_2)$ и $\theta_2 = 1 - \theta_1$ оценивают вероятность того, что в состояниях типа $(m, n), n > 0$, случайно выбранная заявка является заявкой первого и второго типа соответ-

венно, где η_1 и η_2 обозначают интенсивность принятых в систему заявок первого и второго типа соответственно. В частности, величины θ_1 и θ_2 оценивают вероятность того, что покидающая очередь из-за нетерпеливости заявка является заявкой первого и второго типа соответственно. Очевидно, что интенсивность заявок второго типа равна $\eta_2 = \lambda_2$, а поскольку имеется ограничение для заявок первого типа, то величина η_1 вычисляется следующим образом:

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^r k \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} + \gamma \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} = e^{-\lambda_1} \sum_{k=1}^r \frac{\lambda_1^k}{(k-1)!} + \gamma \left(1 - e^{-\lambda_1} \sum_{k=0}^r \frac{\lambda_1^k}{k!} \right).$$

Построенная СУР (3) – (6) имеет размерность $(S+1)(N+1)$. Для моделей умеренной размерности вычисления вероятностей состояний из СУР (3) – (6) можно осуществить с помощью известных численных методов линейной алгебры. После нахождения вероятностей состояний из (7) – (10) определяются искомые характеристики системы.

Для моделей большой размерности можно использовать методы спектрального расширения [11], а также метод фазового укрупнения [12]. Разработка соответствующих алгоритмов требует выполнения специальных исследований, и они являются предметами наших дальнейших работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwarz M., Sauer C., Daduna H., Kulik R., Szekli R. M/M/1 queuing systems with inventory // *Queueing Systems*. 2006. V. 54. Iss. 1. P. 55–78.
2. Krishnamoorthy A., Lakshmy B., Manikandan R. A survey on inventory models with positive service time // *OPSEARCH*. 2011. V. 48. P. 153–169.
3. Ha A.Y. Stock rationing in an M/Ek/1 make-to-stock queue // *Management Science*. 2000. V. 46. Iss. 1. P. 77–87.
4. Dekker R., Hill R.M., Kleijn M.J. On the $(S-1, S)$ lost sales inventory model with priority demand classes // *Naval Research Logistics*. 2002. V. 49. Iss. 6. P. 593–610.
5. Kranenburg A.A., van Houtum G.J. Cost optimization in the $(S-1, S)$ lost sales inventory model with multiple demand classes // *Operations Research Letters*. 2007. V. 35. Iss. 4. P. 493–502.
6. Isotupa K.P.S. Cost analysis of an $(S-1, S)$ inventory system with two demand classes and rationing // *Annals of Operations Research*. 2015. V. 233. P. 411–421.
7. Isotupa K.P.S. An (S, Q) inventory system with two demand classes of customers // *Int. J. Operational Research*. 2011. V. 12. Iss. 1. P. 12–19.
8. Isotupa K.P.S. An (S, Q) Markovian inventory system with lost sales and two demand classes // *Mathematical and Computer Modeling*. 2006. V. 43. P. 687–694.

9. *Karthick T., Sivakumar B., Arivarignan G.* An inventory system with two types of customers and retrial demands // *Int. J. Systems Science: Operations & Logistics*. 2015. V. 2. Iss. 2. P. 90–112.
10. *Melikov A.Z., Fatalieva M.R.* Situational inventory in counter–stream serving systems // *Engineering Simulation*. 1998. V. 15. P. 839–848.
11. *Chakka R.* Spectral expansion solution for some finite capacity queues // *Annals of Operations Research*. 1998. V. 79. P. 27–44.
12. *Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Shahmaliyev M.O.* Analysis of perishable queuing-inventory systems with different types of requests // *J. Automation and Information Sciences*. 2017. V. 49. Iss. 9. P. 42–60.

Алиев Исмаил Алекпер оглы, докторант, isiko94@gmail.com

Применение метода двудольных множеств событий для кластеризации разнотипных данных

И.В. Баранова

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

Кластерный анализ является одним из наиболее актуальных и востребованных направлений современной теоретической информатики и прикладной статистики. Он представляет собой группу методов анализа данных, предназначенных для разбиения объектов или событий на сравнительно однородные группы, называемые кластерами [1]. Однородность кластеров означает, что объекты, отнесенные к одному кластеру, должны быть близки относительно выбранной метрики. Объекты из разных кластеров должны существенно отличаться. Существуют три разновидности задач кластеризации, отличающиеся представлением входных данных. В данной работе рассматривается задача типа «объект – признак», в которой каждый объект описывается набором своих характеристик, называемых признаками [2].

В современном кластерном анализе существует широкий спектр различных методов кластеризации. Наиболее популярными из них являются методы k -средних, самоорганизующихся карт Кохонена (на основе нейронных сетей), нечёткой кластеризации, FOREL, EM-алгоритм и ряд других. Однако практически все существующие методы выполняют кластеризацию числовых данных.

В работе рассматривается более сложная и актуальная задача анализа данных – кластеризация объектов, описывающихся разнотипными данными, причём часть признаков объекта являются числовыми, а часть – множественными. Подобная задача довольно часто возникает при проведении различных исследований в таких областях современной научной и практической деятельности, как здравоохранение, техника, экономика, социология, экология, страхование, педагогика и других.

Стандартным подходом к решению этой задачи является представление множественного признака в виде бинарного вектора, состоящего из нулей и единиц. Размер этого вектора равен количеству вариантов значений, которые может принимать рассматриваемый признак. Едини-

ца означает наличие данного значения у рассматриваемого объекта, а нуль – его отсутствие. Очевидно, что реализация данного подхода существенно увеличивает размерность задачи, особенно если множественных признаков несколько и каждый из них имеет значительное количество вариантов значений.

Предлагается новый подход к кластеризации разнотипных данных, позволяющий избежать подобных сложностей при решении задачи, основанный на методе двудольных множеств событий [3].

Постановка задачи

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ – множество объектов, заданных значениями в пространстве признаков $D = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$, где $D_1, \dots, D_k$ – числовые признаки, $D_{k+1}, \dots, D_n$ – множественные признаки. Т.е. любой объект представим в виде $x_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^m)$. Также задана функция расстояния (метрика) между объектами $\rho(x_i, x_j)$, $x_i, x_j \in X$. Чаще всего в качестве метрики используется евклидова метрика, расстояние Чебышева или манхэттенское расстояние.

Функцией кластеризации называется функция $f: X \rightarrow Y$, которая любому объекту $x \in X$ ставит в однозначное соответствие номер (метку класса) $y \in Y = \{1, \dots, k\}$, $k \leq m$.

Множество кластеров $C = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$, $k \leq m$, представляет собой разбиение множества объектов X , такое, что кластер $C_i = \{x \in X, f(x) = i\}$, $C_i \cap C_j = \emptyset$. Причем для множества C справедливо следующее: если $x_i, x_j \in C_i$, то $\rho(x_i, x_j) \rightarrow \min$. Если $x_i \in C_i, x_j \in C_j (i \neq j)$, то $\rho(x_i, x_j) \rightarrow \max$.

Тогда постановку задачи кластеризации данных можно сформулировать следующим образом:

Требуется найти такую функцию кластеризации $f^*: X \rightarrow Y$, чтобы

$$Q(f^*, C, \rho) = \min_f Q(f, C, \rho). \quad (1)$$

Здесь $Q(f^*, C, \rho)$ – выбранный критерий качества кластеризации.

Поскольку существует большое число различных алгоритмов, разбивающих один и тот же набор объектов на разное множество кластеров, т.е. получающих разный набор $C = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$, то возникает проблема сравнения алгоритмов и качества получаемых ими решений. Для этого используются критерии качества кластеризации. Чаще всего используются эвристические, аппроксимационные (по степени близости исходных данных и полученных кластер-структур) и статистического оценивания (например, критерий максимального правдоподобия). В данной работе для сравнения работы алгоритмов использовался критерий максимального правдоподобия и эвристический критерий отношения среднего внутрикластерного расстояния к межкластерному расстоянию:

$$Q = \frac{Q_0}{Q_1} \rightarrow \min, \quad (2)$$

где Q_0 – среднее внутрикластерное расстояние:

$$Q_0 = \frac{\sum_i \sum_{x,y \in C_i} \rho(x,y)}{k} \rightarrow \min.$$

А Q_1 – среднее межкластерное расстояние:

$$Q_1 = \frac{2 \sum_{i < j} \sum_{x \in C_i, y \in C_j} \rho(x,y)}{(k-1)k} \rightarrow \max.$$

Метод двудольных множеств событий

В работе [3] был предложен метод двудольных множеств событий, позволяющий исследовать системы и объекты, характеризующиеся числовыми и множественными данными.

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P) , где F – алгебра событий, события $x, y \in F$ – элементы алгебры событий, на которой определена вероятность P . Множество избранных событий $X \in F$.

Случайное множество событий под X определяется как измеримое отображение

$$K : (\Omega, F, P) \rightarrow (2^X, 2^{2^X}),$$

где 2^X – множество всех подмножеств множества X [4].

Множество случайных элементов $\{\xi, K\}$, представимое в виде объединения двух множеств: множества случайных величин ξ и множества K случайных событий, будем называть *двудольным множеством случайных элементов*:

$$\{\xi, K\} = \xi \cup K = \{\xi_a, a \in A, K_\beta, \beta \in B\}. \quad (3)$$

Здесь A – множество индексов случайных величин, B – множество индексов случайных множеств событий, $A+B = m$.

Двудольное множество случайных событий представляет собой объединение двух множеств – множества событий, которое определяется случайными величинами, и множества событий, которое определяется случайными множествами событий:

$$Z = \{Y, X\} = \{Y_a, X_\beta, a \in A, \beta \in B\}. \quad (4)$$

Пусть задано двудольное множество случайных событий s , являющееся подмножеством двудольного множества событий Z :

$$s = \{Y_{k_A}, X_{k_B}, k_A \subseteq A, k_B \subseteq B\} \subseteq Z, \quad (5)$$

где каждое множество событий является подмножеством соответствующего множества избранных событий $Y_{k_A} \subseteq Y_A$ или $X_{k_B} \subseteq X_B$.

В работе [5] был получен вид распределения вероятностей событий двудольного множества s :

$$p(s) = p(r, X) = P \left(\bigcap_{a \in A} \{Y_a(r_a)\} \bigcap_{x_\beta \in X} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X^c} x_\beta^c, a \in A, \beta \in B \right), \quad (6)$$

где $r = \{r_a, a \in A\}$, а $X = \{X_\beta, \beta \in B\}$.

Применение метода двудольных множеств событий для кластеризации разнотипных данных

Как уже было сказано выше, имеется множество объектов $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, где каждый объект x_i описывается набором числовых и множественных показателей ($x_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^m)$). Основная идея метода заключается в том, что каждому объекту кластеризации x_i (на-

ходящемуся в N -мерном пространстве признаков) ставится в соответствие двудольное множество событий $s_i = \{Y_a^i, X_\beta^i, a \in A, \beta \in B\}$, и выполняется кластеризация множеств событий s_i с использованием их вероятностных распределений. Таким образом, производится проектирование каждого объекта в пространство меньшей размерности.

В качестве метрики для нахождения расстояния между объектами используется вероятностная метрика – симметрическая разность по Минковскому между двудольными множествами, предложенная в работах [6, 7]. Сет-операция симметрической разности двудольных множеств событий s^1 и s^2 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} s^1(\Delta)s^2 &= \{Y_a^1(\Delta)Y_a^2, X_\beta^1(\Delta)X_\beta^2, X_\chi \subseteq X_\beta, a \in A, \beta \in B\} = \\ &= \{Y_a^1(r_a)(\Delta)Y_a^2(r_a), X_\beta^1(\Delta)X_\beta^2, r_a \in \mathfrak{R}_a, X_\chi \subseteq X_\beta, a \in A, \beta \in B\}. \end{aligned}$$

Вероятность операции определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} P(s^1(\Delta)s^2) &= \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \frac{1}{|Y_a|} \sum_{r_a \in \mathfrak{R}_a} P(Y_a^1(r_a)\Delta Y_a^2(r_a)) + \\ &+ \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in B} \frac{1}{|X_\beta|} \sum_{X_\chi \subseteq X_\beta} P(X_\beta^1\Delta X_\beta^2). \end{aligned} \quad (7)$$

В работе предлагаются вероятностные аналоги методов кластеризации (метода k -средних, нейронных сетей, генетических алгоритмов [8] и FOREL) в рамках предложенного подхода с использованием приведенных понятий двудольных множеств событий и вероятности симметрической разности между ними. Основное отличие в методике предложенных алгоритмов заключается в необходимости этапа предварительной обработки данных и вычислении распределений по формуле (6). Кроме того, стоит отметить, что из-за сложности строения метрики (7) сравнение объектов по ней является довольно трудоёмким. Однако проведенные сравнения предложенной методики и классического подхода (с помощью представления множеств бинарными векторами) показали, что с ростом количества множественных признаков и увеличением вариантов их значений предложенный алгоритм существенно превосходит существующие методы по времени решения задачи.

Заключение

В работе предлагается вероятностный подход к кластеризации разнотипных данных на основе метода двудольных множеств событий, предложенного в [3].

Разработанный алгоритм может быть эффективно применен для решения широкого круга практически важных задач анализа данных, в том числе кластерном анализе, типологизации и факторном анализе.

Самым важным достоинством метода является то, что он позволяет применить единый подход при работе с числовыми и множественными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Загоруйко Н.Г.* Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999. 270 с.
2. *Мандель И.Д.* Кластерный анализ. М.: Финансы и статистика, 1988. 176 с.
3. *Баранова И.В.* Метод двудольных множеств событий в эвентологическом анализе социально-экономических систем // Вестник Красноярского государственного университета: физико-математические науки, 2006. Вып.1. С. 142–152с.
4. *Матерон Ж.* Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир, 1978. 318 с.
5. *Baranova I.* Eventological approach to factor analysis of complex systems // Proceedings of the IASTED Int. Conf. on Automation, Control, and Information Technology (ACIT-CDA 2010). Novosibirsk, Russia, 2010. P. 341–344.
6. *Баранова И.В.* Множества двудольных множеств событий и их применение // Труды XI Международной конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности. Красноярск: НИИППБ, СФУ, 2012. С. 72–79.
7. *Baranova I.* Sets of bipartite sets of events and their application // Communications in Computer and Information Science. Switzerland, Springer International Publishing, 2014. V. 487. P. 26–33.
8. *Баранова И.В.* Кластеризация многомерных данных с помощью генетического алгоритма // Материалы III Республиканской научно-практической конференции «Статистика и её применения-2015». Узбекистан, Ташкент, Национальный университет Узбекистана, 2015. С. 99–104.

Баранова Ирина Владимировна, к.ф.-м.н., доцент; irinabar@yandex.ru

Анализ модели движения автотранспорта через регулируемый перекресток «умного города»

Е.Ю. Богданова, Н.А. Рыжов

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

Сегодня проблема автомобильных пробок на дорогах крупных городов и пригородных трасс как никогда актуальна.

Стремительное увеличение количества движущихся по дорогам автомашин, зачастую превышающее ее пропускную способность, способствует возникновению автомобильных заторов. Для многих крупных городов данная проблема является одной из центральных, поэтому требует неотложного решения. Основными причинами автомобильных заторов являются суточные и недельные перемещения населения; неправильный режим работы светофоров; ремонтные работы на важных автомобильных трассах; наличие нерегулируемых пересечений дорог или проблемных перекрестков, а также сложные погодные условия (туман, снегопад, гололед и др.).

Благодаря транспортному моделированию возможно рациональное управление городской системой, строительство новых и реконструкция уже существующих дорог.

Для построения математической модели регулируемого перекрестка применяется теория систем массового обслуживания. Уже на протяжении полувека исследуется автомобильное движение, однако эти исследования не часто применяются на практике из-за нестабильности, многообразия транспортного потока и необходимости ввода все большего количества параметров. Для получения оптимального решения транспортных задач требуется специализированное оборудование и программное обеспечение, что затрудняет оперативное внедрение таких систем в России.

Таким образом, задача актуальна в рамках известной концепции умного города. Понятие «умная» транспортная система заключается в том, что система состоит из отдельно смоделированных участков, которые затем составляются и вносятся в единую базу знаний. За счет постоянного мониторинга и поступающей информации от служб дорожного управления происходит периодическая корректировка информационно-математической модели и повышается уровень предоставления услуг в

городах. Моделирование позволяет оценить эффективность управления транспортной сетью города, выявить потенциально проблемные участки для их оперативного устранения.

Постановка задачи

Рассматривается модель, описывающая проезд транспортных средств через регулируемый перекресток как система массового обслуживания с переменной интенсивностью обслуживания и ограниченной очередью.

Считаем, что светофор имеет два состояния: горит красный сигнал, тогда проезд запрещен, и разрешающий зеленый сигнал. Число обслуживающих каналов определяется исходя из количества полос для проезда перекрестка в одну сторону и равно одному. Задача заключается в исследовании зависимости средней длины очереди от интенсивности потока.

Модель имеет ограниченную очередь в n мест, которые могут поместиться на протяжении выбранного квартала.

Значение количества мест в очереди в среднем варьируется от 10 до 30 автомобилей. При этом следует учитывать, что автомобиль, заставший весь квартал занятым, покинет систему.

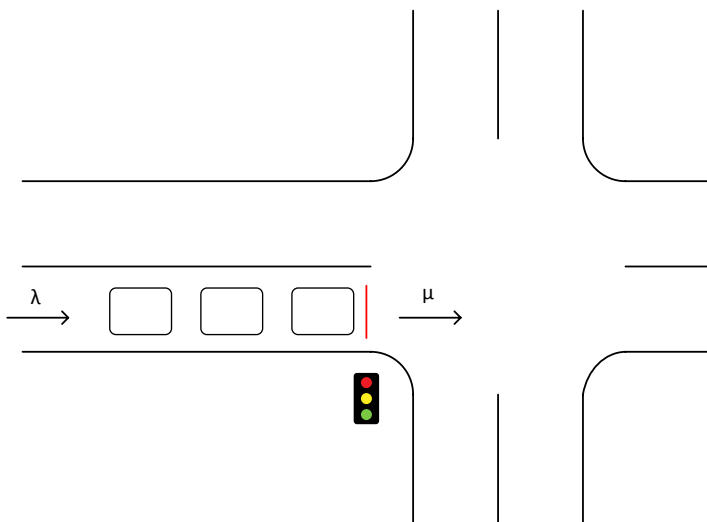


Рис. 1. Поток автомобилей на перекрестке

Параметры системы можно разделить на несколько групп:

1. Постоянные характеристики: m – количество полос движения и n – максимальная длина очереди;

2. Переменные: λ – интенсивность входного потока, μ – интенсивность обслуживания;

3. Управляемые: T – продолжительность полного цикла светофора, τ – длина зеленой фазы ($\tau = 0.5T$)

Интенсивность обслуживания $\mu(t)$ (рис. 1) задается периодической функцией с периодом T :

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0, & kT \leq t < kT + \tau, \\ 0, & kT + \tau \leq t < kT + T, \end{cases}$$

где $k = k(t) = [t/T]$ – количество циклов светофора, $[x]$ – целая часть числа x , μ_0 – интенсивность проезда перекрестка на зеленый сигнал светофора.

Заключение

Таким образом, необходимо ещё раз подчеркнуть актуальность транспортного моделирования в рамках концепции умного города для совершенствования городской инфраструктуры и повышения транспортной системы города. Для этого нами была исследована задача движения через контролируемый перекресток с помощью программных средств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Славин О.А., Соловьев А.В., Соловьев Ан.В. Разработка методологии создания логико-математической модели движения транспорта на этапе создания концепции умного города // Труды ИСА РАН. 2013. Т. 63. С. 31–41.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1998. 479 с.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., стер. М.: Высш. шк., 2000. 383 с.
4. Голуб Д.И. Метод статистической оптимизации циклов светофорного регулирования // Сб. научн. тр. СевКавГТУ. Сер. Экономика. Ставрополь: Сев.-Кав. гос. техн. университет, 2007. № 5.
5. Ахмадинуров М.М., Завалицин Д.С., Тимофеева Г.А. Математические модели управления транспортными потоками: монография. Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2011. 120 с.
6. Саломатина Е.В. Ресурсный подход к понятию «умный город» // Доклады ТУСУРа. Томск, 2016. Т. 19. С. 137.

Рыжов Никита Александрович, студент; nikryzhoval@gmail.com

Богданова Елена Юрьевна, студентка; elenabogdanova1@gmail.com

Методы понижения дисперсии оценок некоторых характеристик процесса деградации¹

А.В. Бородина, О.В. Лукашенко, Е.В. Морозов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ "Карельский научный центр РАН", г. Петрозаводск, Россия*

Рассматривается процесс деградации системы с постепенными и внезапными отказами. Известно, что аналитические выражения для основных характеристик функционирования такого рода систем могут быть найдены в явном виде только для случая, когда времена пребывания на стадиях деградации независимы и распределены экспоненциально [1]. В общем случае для оценки требуемых характеристик можно воспользоваться имитационным моделированием. Однако при использовании стандартного метода Монте-Карло дисперсия оценок и, как следствие, относительная ошибка может оказаться неприемлемо большой. Поэтому зачастую необходимо использовать специальные методы понижения дисперсии оценок. Более того, если отказ является редким событием, то метод Монте-Карло требует больших временных затрат для оценивания с приемлемой точностью и необходимо использовать ускоренные методы имитационного моделирования. В настоящей работе для оценки так называемой вероятности внезапного отказа предлагается использовать новый алгоритм, основанный на комбинации двух методов: условного метода Монте-Карло [2–4] и метода расщепления [5–7].

Процесс деградации

Рассмотрим процесс деградации $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$ с пространством состояний $E = \{0, 1, \dots, L, M, \dots, K, F\}$, которое соответствует стадиям деградации системы (рис. 1.) Процесс стартует из состояния $X(0) = 0$ и затем последовательно переходит от одной стадии к другой (постепенные отказы). Особое состояние F соответствует внезапному отказу,

¹ Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН) и при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18- 07-00187, № 18-07-00147).

а также такие характеристики, как время до случайного отказа, среднюю длину цикла регенерации, средние длины циклов с отказом и без отказа, определить значение асимптотической функции надежности в заданной точке и т. д.

Метод расщепления для процесса деградации

Поскольку отказ является редким событием, то для ускоренного построения циклов регенерации будем использовать технику метода расщепления, как было предложено ранее в работе [1].

Расщепление траекторий процесса деградации начинается в моменты регенерации $\{\tau_i\}$ (момент перехода на стадию M). В качестве уровней для расщепления используются стадии деградации. Таким образом, уровни являются жестко заданными и не могут выбираться оптимальным образом, в отличие от стандартного алгоритма расщепления, где уровни определяются значениями функции значимости [7]. На каждом уровне траектория расщепляется на R_i копии. Тогда каждый момент регенерации дает группу из $D = R_M \cdot \dots \cdot R_{K-1}$ зависимых циклов регенерации. Общее количество отказов в i -й группе

$$A_i = \sum_{j=(i-1) \cdot D+1}^{i \cdot D} I^{(j)}, \quad i=1, \dots, R_{M-1},$$

где $I^{(j)} = 1$ для цикла с отказом ($I^{(j)} = 0$ для цикла без отказа) и группы являются н.о.р. Оценка $\hat{p}_F$ для вероятности (1) является несмещенной и состоятельной, при $R_i \rightarrow \infty$ с в. 1

$$\hat{p}_F = \frac{\sum_{j=1}^{R_{M-1}} A_j}{R_{M-1} \cdot D} \rightarrow \frac{E \sum_{j=1}^D I^{(j)}}{D} = p_F.$$

Использование техники расщепления при построении циклов регенерации дает существенный выигрыш во времени получения оценки по сравнению со стандартным методом Монте-Карло (см. [1]). Для случая экспоненциальных стадий деградации точечная оценка ускоренным методом практически совпадает с аналитическим решением. Однако, тем не менее такая оценка дает достаточно большую относительную ошибку оценивания. Для уменьшения дисперсии оценки вероятности отказа целесообразно использовать технику условного метода Монте-Карло.

Условный метод Монте-Карло для оценивания вероятности внезапного отказа

В настоящем разделе ограничимся рассмотрением однородного процесса деградации, когда случайные величины T_i , $i = 1, \dots, K-1$, одинаково распределены. Обозначим их функцию распределения через F_T . В рамках сделанных предположений для оценивания вероятности внезапного отказа можно воспользоваться так называемым условным методом Монте-Карло (conditional Monte Carlo), гарантирующим уменьшение дисперсии оценки [2, 3]. Данный метод состоит в том, что искомая вероятность записывается как условное математическое ожидание относительно некоторой вспомогательной случайной величины.

В общем случае выбор такой случайной величины является серьезной проблемой, однако в рассматриваемом случае, когда длительности стадий деградации одинаково распределены и независимы, можно, следуя подходу, предложенному в работе [1], записать искомую вероятность в виде

$$p_F = (K - M) \cdot E \left[\overline{F_T} \left(\max(V - S_{M,K-1}, R_{M,K-1}) \right) \right],$$

где $\overline{F_T} = 1 - F_T$; $R_{M,K} = \max(T_M, \dots, T_{K-1})$. На основе сгенерированных выборок $\{T^{(i)} = (T_M^{(i)}, \dots, T_{K-1}^{(i)}), i = 1, \dots, N\}$ и $\{V^{(i)}, i = 1, \dots, N\}$ вычисляется оценка искомой вероятности

$$\hat{p}_F = \frac{K - M}{N} \sum_{i=1}^N \overline{F_T} \left(\max(V^{(i)} - S_{M,K-1}^{(i)}, R_{M,K-1}^{(i)}) \right),$$

где $S_{M,K-1}^{(i)} = T_M^{(i)} + \dots + T_{K-1}^{(i)}$, а $R_{M,K}^{(i)} = \max(T_M^{(i)}, \dots, T_{K-1}^{(i)})$.

В работе [4] было показано, что данная оценка обладает ограниченной относительной ошибкой (bounded relative error estimator) при некоторых ограничениях на исходные распределения.

Отметим, что численные эксперименты показали необходимость использования условного метода Монте-Карло именно для оценивания вероятности отказа, тогда как для других характеристик процесса деградации метод расщепления обеспечивает достаточно малую относительную ошибку оценивания.

Заключение

Предлагаемый алгоритм с использованием условного метода Монте-Карло позволяет существенно улучшить качество ускоренного оценивания характеристик процесса деградации в системах с постепенными и внезапными отказами, что подтверждается численными экспериментами. Кроме того, такой подход применим также в случаях, когда времена пребывания на стадиях T_i независимы и имеют распределение с тяжелым хвостом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Borodina A.V., Efrosinin D.V., Morozov E.V. Application of splitting to failure estimation in controllable degradation system // Vishnevskiy V., Samouylov K., Kozyrev D. (eds) Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2017. Communications in Computer and Information Science. Springer, Cham, 2017. V. 700. P. 217–230. ISBN 978-3- 319-66836-9, doi: 10.1007/978-3-319-66836-9.
2. Ross S.M. Simulation. Elsevier, 2006. 314 p
3. Kroese D.P., Taimre T., Botev Z.I. Handbook of Monte Carlo Methods. John Wiley & Sons, 2011.
4. Asmussen S., Kroese D.P. Improved algorithms for rare event simulation with heavy tails // Adv. Appl. Probab. 2006. V. 38(2). P. 545–558.
5. Garvels M. PhD Thesis. The splitting method in rare event simulation. The University of Twente, The Netherlands May, 2000.
6. Glasserman P., Heidelberger P., Shahabuddin P., Zajic T. A look at multilevel splitting // H. Niederreiter, ed. Monte Carlo and Quasi Monte Carlo Methods. Lecture Notes in Statistics. Springer Verlag, 1996. V. 127. P. 99–108.
7. Rubinstein R.Y., Kroese D.P. Simulation and the Monte Carlo method. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2017. 396 p.

Бородина Александра Валентиновна, к.ф.-м.н, н.с, borodina@krc.karelia.ru;

Лукашенко Олег Викторович, к.ф.-м.н, н.с, lukashenko-oleg@mail.ru;

Морозов Евсей Викторович, д.ф.-м.н, в. н.с, профессор, emorozov@karelia.ru

Имитационное моделирование системы релейного управления запасами с кусочно-постоянными параметрами экспоненциальных распределений объемов поступления и потребления ресурса

В.И. Бронер, Р.А. Балдаев

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

При исследовании различных математических моделей систем управления запасами следует учитывать различные факторы, например стохастический характер событий, распределения объемов поступления и потребления и другие. Учитывая эти особенности, в некоторых ситуациях аналитическое исследование моделей является затруднительным и применяется метод имитационного моделирования.

Системы с релейным управлением рассматриваются в качестве математических моделей фондов социального страхования и систем релейного управления запасами различных типов. В [1–5] рассматриваются математические модели деятельности фонда социального страхования. Релейное управление применяется для регулирования уровня капитала страховой компании. В [6–8] исследуются системы релейного управления запасами. В указанных работах модели исследуются в предположении постоянных параметров распределений объемов поступления и потребления.

В данной работе рассматривается система управления запасами, в которой параметры экспоненциальных распределений объемов поступления и потребления являются кусочно-постоянными функциями.

В рамках решения задачи построения эмпирической функции плотности и эмпирической функции распределения системы управления запасами строится имитационная модель, которая позволяет генерировать хронологическую последовательность изменения уровня запасов в системе.

Постановка задачи

Система релейного управления ресурсами изображена на рис. 1.

Система пополняется ресурсом в случайные моменты времени в соответствии с пуассоновским потоком с постоянной интенсивностью ν . Объемы партий ресурса независимы, одинаково распределенные слу-

чайные величины с экспоненциальной функцией распределения

$$A(x) = 1 - e^{-\alpha(s)x}, \quad (1)$$

где параметр

$$\alpha(s) = \begin{cases} \alpha_1, & s < S, \\ \alpha_2, & s \geq S, \end{cases} \quad (2)$$

зависит от значений случайного процесса $s(t) = s$ величины накопленного к моменту времени t ресурса, S – некоторое пороговое значение.

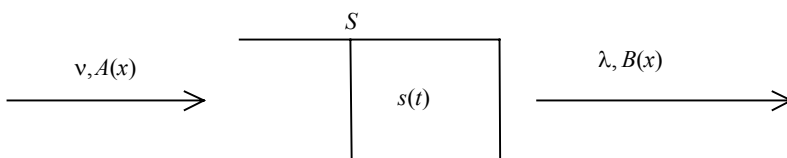


Рис. 1. Система релейного управления запасами с кусочно-постоянными параметрами распределений объемов потребления

Ресурс расходуется в соответствии с пуассоновским потоком с параметром λ , объемы потребления распределены по экспоненциальному закону $B(x)$ с кусочно-постоянным параметром $\beta(s)$

$$B(x) = 1 - e^{-\beta(s)x}, \quad (3)$$

где

$$\beta(s) = \begin{cases} \beta_1, & s < S, \\ \beta_2, & s \geq S. \end{cases} \quad (4)$$

Условие существования стационарного режима в описанной системе имеет вид

$$v/\alpha_1 > \lambda/\beta_1, \quad v/\alpha_2 < \lambda/\beta_2, \quad (5)$$

то есть до достижения порогового значения в среднем будет больше поступать ресурса, чем расходоваться, следовательно, объем будет в среднем накапливаться, а при превышении порогового значения объем ресурса будет убывать в среднем.

Из постановки задачи следует, что процесс $s(t)$ является марковским с непрерывным временем t и непрерывным множеством значений $-\infty < s < \infty$.

В данной работе ставится задача нахождения эмпирической функции распределения процесса $s(t)$.

Имитационная модель

Так как при решении данной задачи система управления запасами представляет собой один объект (например, склад), то будем считать, что другие объекты, ввиду их отсутствия, не оказывают влияния на поведение данной системы. Принимая этот факт во внимание, для моделирования был выбран дискретно-событийный подход.

Имитационная модель реализована с помощью языка Python версии 3.5 и следующих библиотек: `numpy`, `pandas`, `math`, `matplotlib`.

У построенной модели структурно можно выделить три основных модуля: генератор событий, модуль обработки данных и модуль представления результатов в удобном для исследователя виде (рис. 2).

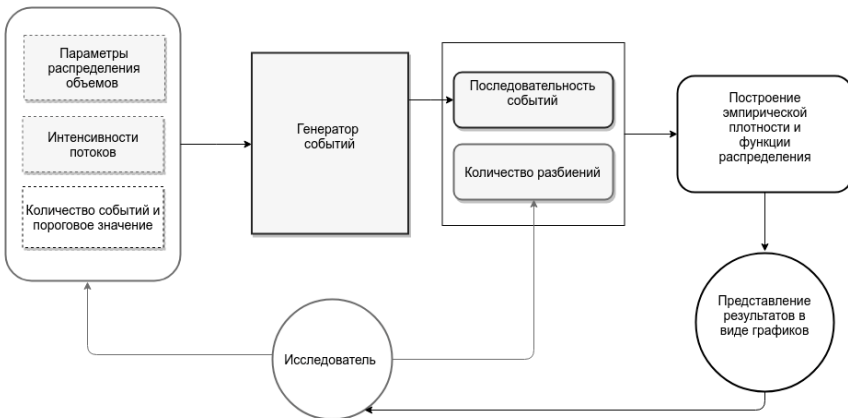


Рис. 2. Модули программы имитационного моделирования

На вход модели поступают:

- параметры случайных потоков поступления ν и потребления λ ресурса;
- значения параметров распределений объемов поступления $\alpha(s)$ и потребления $\beta(s)$ ресурсов;
- количество генерируемых событий;
- пороговое значение S .

Данные отправляются в генератор случайных событий, который на основе заданных значений выдает реализацию случайного процесса уровня запасов в системе в момент поступления заявок на поступление и потребление ресурса. Таким образом, на всем промежутке наблюде-

ния известны значения уровня запасов. Данные, характеризующие реализацию процесса поступают на вход модуля обработки данных, который строит плотность распределения вероятностей значений процесса и затем, по требованию исследователя, эмпирическую функцию распределения.

Модуль представления результатов отображает полученные результаты в виде графиков как для всей области определения данных функций, так и для определенных интервалов.

Пример

В качестве примера работы программы имитационного моделирования рассмотрим следующий набор входных параметров

- параметры случайных потоков поступления $\nu = 1$ и потребления $\lambda = 1$ ресурса;
- значения параметров распределений объемов поступления $\alpha_2 = 1$, $\alpha_2 = 0.8$ и потребления $\beta_1 = 0.3$ ресурсов;
- количество генерируемых событий $n = 2\,000\,000$;
- пороговое значение $S = 100$.

Результаты работы программы при различных значениях параметра β_2 приведены на рис. 3.

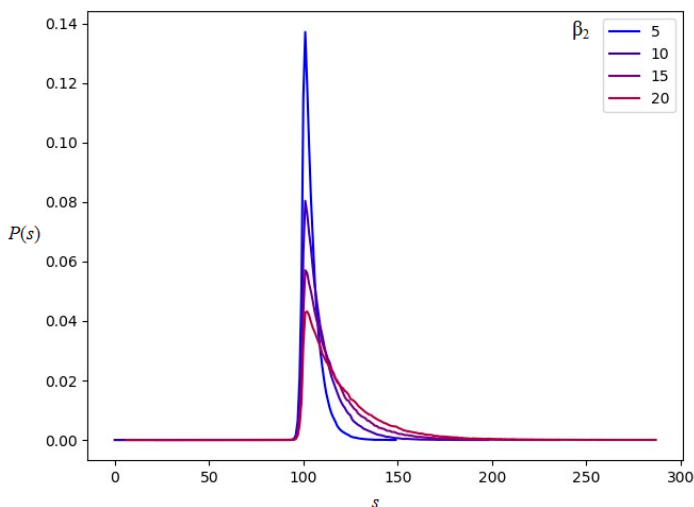


Рис. 3. Плотность распределения вероятностей

Заключение

Представлена имитационная модель системы управления запасами с кусочно-постоянными параметрами распределений объемов поступления и потребления ресурса. Предложенная модель позволяет рассчитать вероятностные характеристики исследуемого процесса, такие как вероятности опустошения, превышения порогового уровня, и провести анализ указанной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вальц О.В., Змеев О.А. Математическая модель деятельности фонда социального страхования при экспоненциальных страховых выплатах и со случайными расходами на социальные программы // Вестник ТГУ. 2004. № 284. С. 37–41.
2. Ливищ К.И., Шифердекер И.Ю. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник ТГУ. Приложение. 2006. № 18. С. 302–308.
3. Ливищ К.И., Сухотина Л.Ю., Шифердекер И.Ю. Пуассоновская модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник ТГУ. Приложение. 2006. № 19. С. 302–312.
4. Китаева А.В., Терпугов А.Ф. Модель фонда социального страхования при релейном управлении капиталом и экспоненциально распределенных страховых выплатах и выплатах по социальным программам // Вестник ТГУ. 2006. № 293. С. 35–37.
5. Ливищ К.И., Шифердекер И.Ю. Диффузионная аппроксимация математической модели деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник ТГУ. 2006. № 293. С. 38–44.
6. Назаров А.А., Бронер В.И. Исследование потоковых моделей управления запасами методом R-аппроксимации // Информационно-управляющие системы. 2016. № 5 (84). С. 91–97.
7. Назаров А.А., Бронер В.И. Система управления запасами с гиперэкспоненциальным распределением объемов потребления ресурсов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1(34). С. 43–49.
8. Назаров А.А., Бронер В.И. Модифицированная модель Крамера – Лундберга релейного управления запасами с пуассоновскими потоками моментов поступления и потребления ресурсов // Труды Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики» (9–10 октября 2016 г., Ташкент). Ташкент, НУУз им. Мирзо Улугбека, 2016. С. 213–217.
9. Глебов Н.И. Об условиях разрешимости оптимизационных задач «жадным» алгоритмом // Дискретный анализ и исследование операций. 2002. Сер. 2. Т. 9. № 2. С. 3–12.

Имитационное моделирование взаимодействия мобильного робота с возможностью вертикального перемещения с окружением¹

Н.В. Быков, М.С. Товарнов

*Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*

Проблема выбора характеристик технических устройств, эффективность которых определяется решением тех или иных задач в сложной окружающей среде, в особенности включающей противодействие противника, сводится к вопросу формирования адекватных числовых критериев оценки, что практически никогда нельзя сделать объективно. Поэтому назначение тех или иных критериев всегда отражает личную или коллективную точку зрения разработчиков или потребителей продукта. Одним из подходов, позволяющих на определенной стадии исследования избежать вопроса построения критерия эффективности, является имитационное моделирование, дающее возможность провести симуляцию реального функционирования объекта в ходе выполнения своей цели. Степень успешности выполнения этой цели и позволяет оценить эффективность заложенных параметров.

Одной из задач, относящихся к классу взаимодействия технических устройств со средой в условиях противодействия, является разработка мобильных роботов для противодействия террористическим угрозам и выполнения специальных операций.

В настоящей работе рассматривается имитационное моделирование (ИМ) малогабаритного мобильного робота, с возможностью вертикального перемещения по стенам (МРВП), предназначенного для разведки и нейтрализации террористической угрозы с помощью нелетальных средств воздействия в закрытых помещениях [1, 2].

Целью имитационного моделирования поведения МРВП при выполнении его задач является симуляция реальных условий применения.

Задачей имитационного моделирования является обоснование требований к внешним характеристикам МРВП: требуемая скорость вертикального и горизонтального передвижения, маневренность, запас

¹ Работа поддержана грантом РФФИ № 16-29-09596_офи-м.

вертикального хода с учетом массы ленты, запас боевых элементов, радиус поражающего действия и др.

Принцип построения имитационной модели

В основе имитационной модели лежит агентный подход при котором поведение каждого объекта описывается индивидуально, а глобальное поведение возникает в результате взаимодействия нескольких агентов, каждый из которых, действуя по своим правилам, взаимодействует с внешней средой и другими объектами.

Таким образом, имитационная модель представляет собой совокупность агентов и среды, в которой они находятся и взаимодействуют.

Среда описывается плоским векторным полем

$$E(x, y) = [h(x, y), s(x, y), \dots]^T. \quad (1)$$

Здесь $h(x, y)$ – скалярное поле высот помещения ($h = 0$ означает пол), в простейшем случае h – бинарное поле (0 – пол, 1 – стена); $s(x, y)$ – скалярное поле статических шумов.

В функцию среды могут быть включены и другие функции.

Для простоты будем считать, что помещение прямоугольное:

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b. \quad (2)$$

На рис. 1 представлены примеры полей $h(x, y)$ (слева) и $s(x, y)$ (справа).

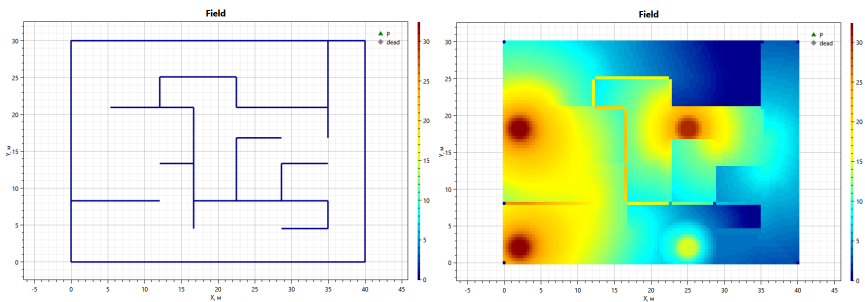


Рис. 1. Пример внешней среды: слева – геометрия помещения $h(x, y)$; справа – распределение статических шумов $s(x, y)$

Агенты могут относиться к различным типам $g \in \{1, 2, \dots\}$. Наиболее простой случай, когда агенты могут быть только двух типов – мобильный робот ($g = 1$) и противодействующий ему элемент ($g = 2$). Каждый

из агентов представляет собой конечный автомат, описываемый графом состояний, примеры которых представлены на рис. 2 и 3.

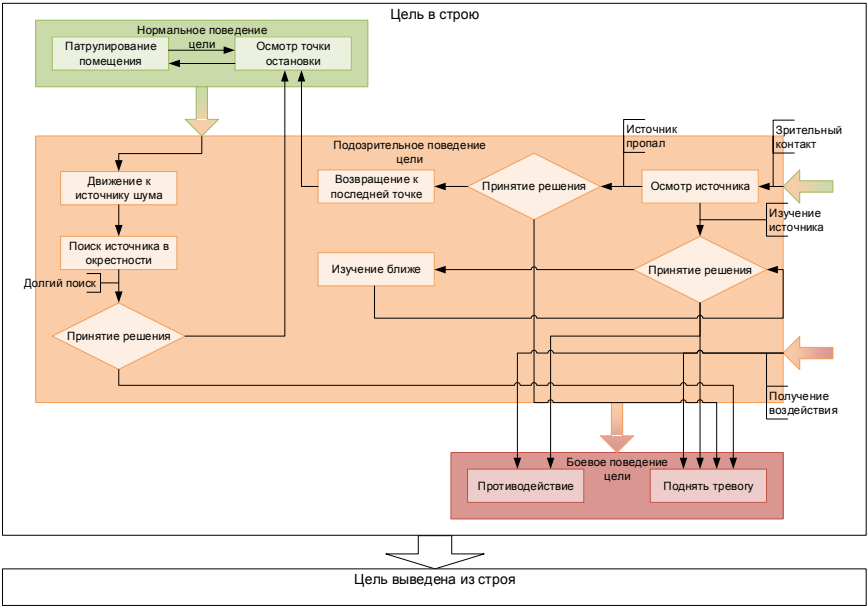


Рис. 2. Граф состояний цели (противодействующий элемент)

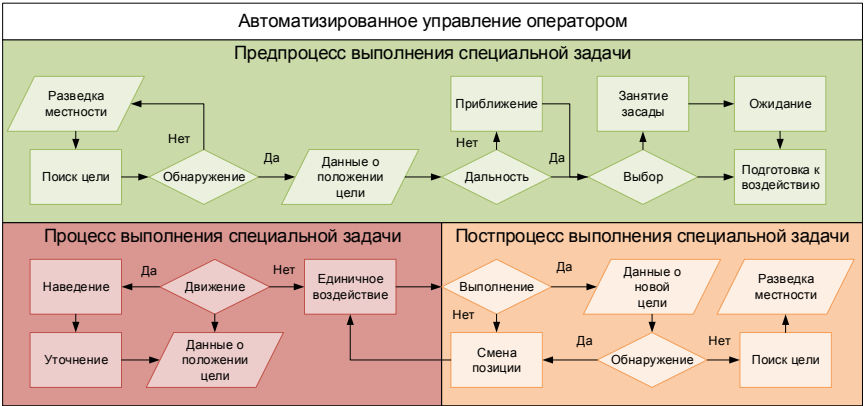


Рис. 3. Граф состояний МРВП

В момент применения МРВП специального средства, в математическую модель (ММ) оценки вероятности передаются данные о положении МРВП, цели и параметры наведения на цель. Далее многократно решается прямая задача внутренней и внешней баллистики, с разыгрыванием случайных начальных параметров в пределах отклонений. В результате решения задачи внешней баллистики в трехмерной постановке, находятся точки попадания в цель (рис. 4).

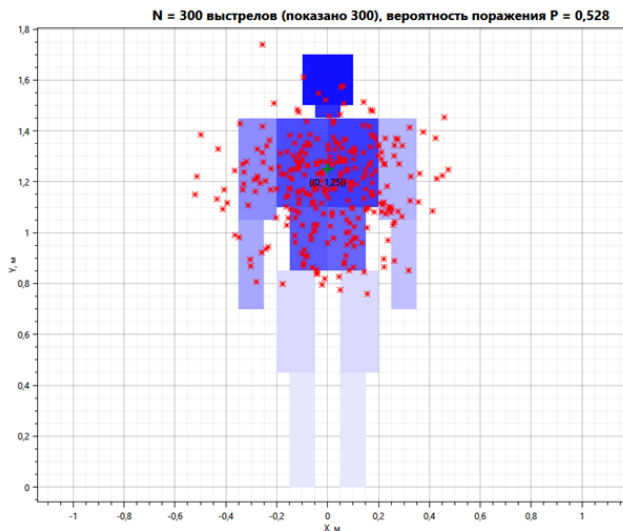


Рис. 4. Многократный розыгрыш взаимодействия МРВП и цели

Результаты моделирования

В результате сбора статистики с 10^6 прогонов ИМ на случайно сгенерированных закрытых помещениях были получены результаты эффективности применения спецсредств. На рис. 5 показаны усредненные вероятностные зоны (вид сверху).

Цветом показана вероятность поражения цели одним комплектом спецсредств, расположенным на МРВП, при условии, что МРВП находится в центре. Статистика была дополнена информацией, полученной при применении спецсредств на повышенную дальность (до 50 м), в результате чего были определены теоретические дальности применения этих средств.

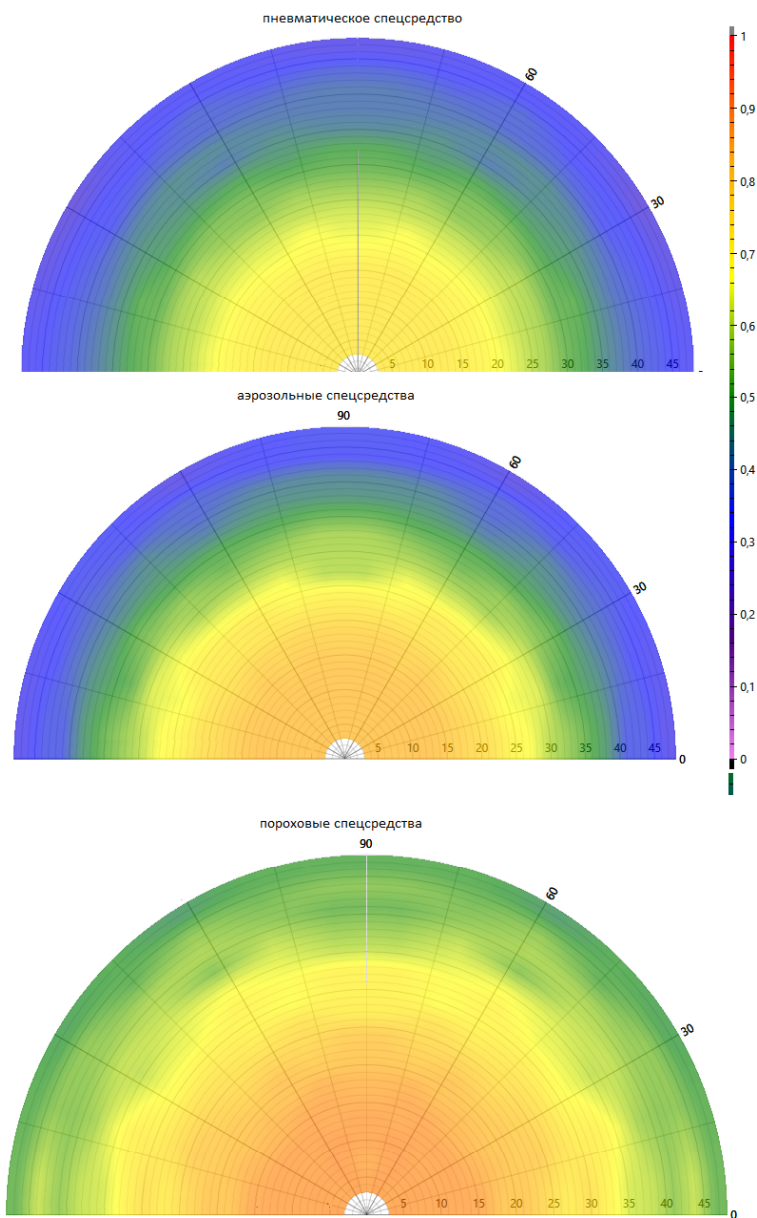


Рис. 5. Граф состояний МРВП

Относительно невысокая эффективность применения обуславливается вероятностями возникновения случаев, когда МРВП не успевал применить спецсредства первым, вероятностью не попадания в цель, вероятностью непоражения цели при попадании.

Заключение

Была разработана имитационная модель проведения специальных операций в закрытых помещениях с использованием МРВП. Модель позволяет моделировать сложное поведение как МРВП, так и его потенциальных целей. ИМ также включает в себя ММ-оценки эффективности применения различных спецсредств, расположенных на МРВП, и различных тактик применения МРВП. ММ-оценки эффективности включают в себя модель внутренней и внешней баллистики для различных спецсредств, учитывает разброс параметров и характеристик механизмов наведения, массовых, линейных и баллистических характеристик спецсредств, учитывает координатный закон поражения цели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быков Н.В., Власова Н.С., Бузлов Н.А.* Разработка механизма перемещения малогабаритного мобильного робота // Экстремальная робототехника. Тр. Междунар. науч.-технич. конф. СПб: ООО «АП4Принт», 2016. С. 346–348.
2. *Товарнов М.С., Быков Н.В., Власова Н.С.* Математическая модель мобильного робота специального назначения // Материалы XX Междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017). М.: МАИ-ПРИНТ, 2017. С. 268–271.

Быков Никита Валерьевич, к.т.н, доцент; bykov@bmstu.ru;
Товарнов Михаил Степанович, ассистент, mtovarnov@mail.ru

Об «универсальных» алгоритмах моделирования случайной величины, распределенной на конечном интервале

А.В. Войтишек

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия*

С развитием вычислительной техники возрастает интерес к численным алгоритмам решения прикладных задач, причем особую важность приобретают вычислительные схемы, реализуемые на современной многопроцессорной технике. С этой точки зрения весьма перспективными являются *алгоритмы численного статистического моделирования* (или *методы Монте-Карло*) – см., например, [1].

Одним из основных элементов алгоритмов метода Монте-Карло является *численное моделирование* (реализация выборочных значений на компьютере) *одномерных непрерывных случайных величин* ξ . В силу относительно медленной сходимости алгоритмов метода Монте-Карло особое внимание обращается на *эффективность* (экономичность) этого моделирования.

В данной работе обсуждаются возможности построения и использования «универсальных» (широко применимых) алгоритмов для моделирования случайной величины, распределенной на *конечном (ограниченном) интервале* (a, b) ; $-\infty < a < b < +\infty$ (обозначение $\xi \in (a, b)$).

1. Моделирование бета-распределения

В среде ученых, занимающихся прикладными вычислениями, бытует мнение о том, что если требуется моделировать какой-либо случайный параметр вычислительной модели ξ , принимающий значения на всей числовой прямой, т.е. $\xi \in (a, b) = (-\infty, +\infty)$, то следует выбирать случайную величину, имеющую *гауссовскую (нормальную) плотность распределения*

$$f_{\xi}^{(m, \sigma)}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}}; \quad -\infty < u < +\infty \quad (1)$$

для специально подобранных параметров m и $\sigma > 0$.

Здесь и далее подбор параметров связан, как правило, с попыткой получить плотность $f_{\xi}(u)$, близкую к заданной функции $f(u)$, полученной из эксперимента (с помощью построения гистограммы или полигона частот) или с помощью каких-либо «физических соображений».

Для параметра ξ , принимающего значения на полуоси, т.е. для $(a, b) = (0, +\infty)$, берут *плотность гамма-распределения*

$$f_{\xi}^{(\lambda, \nu)}(u) = \frac{\lambda^{\nu} u^{\nu-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(\nu)}, \quad u > 0; \quad \Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} w^{\nu-1} e^{-w} dw \quad (2)$$

для специально подобранных положительных параметров ν и λ .

Наконец, для конечного интервала (a, b) полагают $\xi = a + (b-a)\beta^{(\mu, \nu)}$, где случайная величина $\beta^{(\mu, \nu)}$ имеет *плотность бета-распределения*

$$f_{\beta}^{(\mu, \nu)}(u) = \frac{u^{\mu-1} (1-u)^{\nu-1}}{B(\mu, \nu)}, \quad 0 < u < 1; \quad B(\mu, \nu) = \int_0^1 w^{\mu-1} (1-w)^{\nu-1} dw \quad (3)$$

для специально подобранных положительных параметров μ и ν .

В свою очередь, учитывая подробный анализ алгоритмов моделирования случайной величины $\beta^{(\mu, \nu)}$ для разных параметров μ и ν , проведенный в книге [1], можно сформулировать следующий (уточненный по сравнению с работами [1, 2]) вывод из статьи [3].

Для случая $1 \leq \nu \leq \mu$ для моделирования выборочного значения $\beta_0^{(\mu, \nu)}$ случайной величины $\beta^{(\mu, \nu)}$ следует использовать *мажорантный метод исключения* (см., например, [1]) с мажорантой

$$g^{(1)}(u) = u^{\mu-1} (1-u)^{[\nu]-1} \geq u^{\mu-1} (1-u)^{\nu-1}$$

(или точную формулу для $\nu = [\nu]$; здесь $[A]$ – целая часть числа A) с учетом следующей формулы:

$$\beta_0^{(\mu, [\nu])} = \prod_{k=1}^{[\nu]} \alpha_k^{1/(\mu+k-1)} = \exp \left(\sum_{k=1}^{[\nu]} \frac{\ln \alpha_k}{\mu+k-1} \right) \quad (4)$$

(см., например, [1]).

Здесь и далее буквами α с нижними индексами обозначаются *стандартные случайные числа* (или независимые выборочные значения случайной величины $\alpha \in U(0,1)$), равномерно распределенной в интервале $(0,1)$; эти значения получаются на компьютере с помощью соответствующих *датчиков* – подпрограмм *RAND* или *RANDOM* (см., например, [1]).

Для случая $1 \leq \mu \leq v$ следует использовать метод исключения с мажорантой $g^{(1)}(u) = u^{[\mu]-1}(1-u)^{v-1} \geq u^{\mu-1}(1-u)^{v-1}$ с учетом моделирующей формулы

$$\beta_0^{([\mu],v)} = 1 - \prod_{k=1}^{[\mu]} \alpha_k^{1/(v+k-1)} = 1 - \exp\left(\sum_{k=1}^{[\mu]} \frac{\ln \alpha_k}{v+k-1}\right). \quad (5)$$

Для случая $0 < \mu, v < 1$ описанные методы исключения с формулами (4), (5) следует использовать в рамках *метода дискретной суперпозиции (рандомизации)* – см., например, [1], основанном на соотношении

$$f_{\beta}^{(\mu,v)}(u) = \frac{\mu}{\mu+v} f_{\beta}^{(\mu+1,v)}(u) + \frac{v}{\mu+v} f_{\beta}^{(\mu,v+1)}(u).$$

2. Использование «банка» элементарных (моделируемых) плотностей

Следует отметить, что «популярный» выбор функций, близких к «экспериментальной» функции $\tilde{f}(u)$, в виде (1) – (3) не конструктивен с той точки зрения, что соответствующие алгоритмы моделирования выборочных значений не являются самыми эффективными (экономичными).

Это связано с тем, что плотности (1) – (3) *не являются элементарными* [1, 4], т.е. для них не удастся применить *метод обратной функции распределения* (см., например, [1]).

Этот метод подразумевает использование формул вида $\xi_0 = F_{\xi}^{-1}(\alpha_0)$ для моделирования случайных величин $\xi \in (a,b)$, причем функция $F_{\xi}^{-1}(y)$, обратная к функции распределения $F_{\xi}(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}$, может быть представлена как композиция элементарных функций. Другими словами, уравнение

$$\int_a^{\xi_0} f_{\xi}(u) du = \alpha_0 \quad (6)$$

может быть разрешено в элементарных функциях относительно верхнего предела ξ_0 интеграла в левой части.

Для плотностей (1) – (3) интегралы в левой части уравнения (6) не берутся аналитически (кроме нескольких «вырожденных» частных случаев – см., в частности, пример 1), и поэтому вместо метода обратной функции распределения приходится строить достаточно трудоемкие *специальные методы моделирования* [1, 4] (пример такого метода – для плотности (3) – описан выше в разделе 1 данной статьи).

Следует, однако, заметить, что спектр элементарных плотностей для случайных величин $\xi \in (a, b)$ (в том числе, для случая конечного интервала (a, b)) достаточно обширен.

Пример 1. Рассмотрим *степенное распределение* с плотностью

$$f_{\xi}(u) = \mu u^{\mu-1}; \quad a = 0 < u < 1 = b, \quad \mu > 0 \quad (7)$$

(к слову, это частный случай плотности (3) для $\nu = 1$). Решая уравнение (6) для плотности (7), последовательно получаем

$$u^{\mu} \Big|_0^{\xi_0} = \alpha_0 \quad \text{или} \quad \xi_0^{\mu} = \alpha_0 \quad \text{и, наконец,} \quad \xi_0 = \alpha_0^{1/\mu}. \quad (8)$$

Описание примера 1 закончено.

В работах [1, 4] предложена следующая технология, позволяющая строить по сути неограниченное количество элементарных плотностей.

Технология 1 (Технология последовательных (вложенных) замен). Пусть $f_{\eta}(\nu)$ – плотность случайной величины $\eta \in (c, d)$, имеющей элементарное распределение в интервале (c, d) , т.е. из соотношения вида

$$(6) \quad \int_c^{\eta_0} f_{\eta}(u) du = \alpha_0 \quad \text{для соответствующего выборочного значения } \eta_0$$

случайной величины η можно получить моделирующую формулу вида $\eta_0 = \Psi_{\eta}(\alpha_0)$, где $\Psi_{\eta}(w)$ – простая композиция элементарных функций (в частности, для η можно взять плотность (7) и формулу (8)).

Рассмотрим взаимно-однозначное преобразование, задаваемое монотонно возрастающей дифференцируемой функцией $\varphi(u) \uparrow$ и переводящее интервал (a, b) в интервал (c, d) ; в частности $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$. Полагаем также, что саму функцию $\varphi(u)$, ее производную $\varphi'(u)$ и обратную функцию $\varphi^{-1}(y)$ можно представить в виде простых композиций элементарных функций. Пусть случайная величина $\xi \in (a, b)$ имеет плотность распределения

$$f_{\xi}(u) = f_{\eta}[\varphi(u)] \times \varphi'(u), \quad a < u < b. \quad (9)$$

При сделанных выше предположениях можно утверждать, что $f_{\xi}(u)$ является плотностью элементарного распределения, т.е. уравнение (6) разрешимо относительно ξ_0 в элементарных функциях и справедлива формула $\xi_0 = \varphi^{-1}[\psi_{\eta}(\alpha_0)]$.

Название технологии последовательных (вложенных) замен для технологии 1 связано с тем, что, полученную плотность (9) можно взять в качестве исходной плотности $f_{\eta}(v)$ и осуществить еще одно взаимно-однозначное преобразование типа $\varphi(u)$. С помощью таких последовательных замен можно получать неограниченное количество новых плотностей элементарных распределений (см. примеры из книги [4]).

Сформировав достаточно объемный набор («банк») элементарных распределений, можно подобрать плотность $f_{\xi}(u)$, близкую к заданной функции $\tilde{f}(u)$, и использовать в расчетах соответствующую экономичную моделирующую формулу для выборочного значения ξ_0 .

3. Моделирование случайных величин с составными плотностями

Представленные в разделах 1 и 2 данной статьи подходы могут дать плотности $f_{\xi}(u)$, имеющие довольно существенные отличия от заданной функции $\tilde{f}(u)$, что может привести к использованию неадекватных выборочных значений ξ_i случайной величины ξ в том или ином приложении.

Определенным «универсализмом» обладает *мажорантный метод исключения* (см., например, [1, 4]), позволяющий получать выборочные значения ξ_i , распределенные непосредственно по плотности $f_{\xi}(u) \equiv \tilde{f}(u)$. Однако этот метод справедливо считается трудоемким и используется только в крайнем случае.

Более перспективным видится следующий подход. Приближим (зададим) функцию $\tilde{f}(u)$, $u \in (a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, *составной плотностью*

$$\tilde{f}(u) \approx f_{\xi}(u) = \sum_{i=1}^M p_i f_{\xi^{(i)}}(u) \chi_{[a_i, b_i)}(u); \quad (10)$$

$$u \in [a = a_1, b_1) \cup [a_2 = b_1, b_2) \cup \dots \cup [a_M = b_{M-1}, b_M = b).$$

Здесь $\chi_A(u)$ – индикатор множества A ; функции $f_{\xi^{(i)}}(u)$ – это плотности случайных величин $\xi^{(i)}$, распределенных в полуинтервалах $[a_i, b_i)$, а числа $\{p_i\}$ – это вероятности: $p_i > 0; \sum_{i=1}^M p_i = 1$.

В качестве (10) проще и естественней всего брать *кусочно-постоянную плотность*, для которой $f_{\xi^{(i)}}(u) \equiv \frac{1}{(b_i - a_i)}, u \in [a_i, b_i)$ и

$$p_i = \frac{b_i - a_i}{b - a}.$$

Несложно доказать следующие утверждения (см., например, [1]).

Утверждение 1. *Составная плотность (10) является элементарной тогда и только тогда, когда плотности $\{f_{\xi^{(i)}}(u)\}$ – элементарные.*

Утверждение 2. *Метод обратной функции распределения для случайной величины ξ с составной плотностью вида (10) совпадает с модифицированным методом дискретной суперпозиции с определением номера t элементарной плотности $f_{\xi^{(m)}}(u)$ согласно вероятностям $\{p_i\}$ и стандартному алгоритму моделирования целочисленной случайной величины.*

Сделаем необходимые пояснения. Стандартный алгоритм моделирования целочисленной случайной величины состоит в вычитании из

стандартного случайного числа α_0 сумм $\sum_{i=1}^{m'} p_i$ до получения первого отрицательного значения: $m = \min \left\{ m' : \Delta_m = \alpha_0 - \sum_{i=1}^{m'} p_i < 0 \right\}$.

Модифицированный метод дискретной суперпозиции строится для моделирования одномерных случайных величин $\tilde{\xi}$, имеющих плотность распределения $f_{\tilde{\xi}}(u) = \sum_{i=1}^M \tilde{p}_i f_{\tilde{\xi}^{(i)}}(u)$; $u \in (a, b)$. Здесь $f_{\tilde{\xi}^{(i)}}(u)$ – элементарные плотности, соответствующие моделирующим формулам $\tilde{\xi}_0^{(i)} = \psi_i(\alpha_0)$ (функция (10) является частным случаем такого рода плотности).

Алгоритм 1 (Модифицированный метод дискретной суперпозиции).

1. Реализуем стандартное случайное число α_0 (с помощью подпрограммы *RAND*) и выбираем номер $m = \min \left\{ m' : \tilde{\Delta}_{m'} = \alpha_0 - \sum_{i=1}^{m'} \tilde{p}_i < 0 \right\}$.

2. Моделируем выборочное значение $\tilde{\xi}_0$ по формуле $\tilde{\xi}_0 = \psi_m(\beta_0)$. Здесь $\beta_0 = (\tilde{\Delta}_m + \tilde{p}_m) / \tilde{p}_m$.

Отличие обычного (не модифицированного) метода дискретной суперпозиции состоит в том, что вместо величины β_0 берется новое стандартное случайное число α_1 (см., например, [1, 4]).

Преимущество трактовки моделирования случайной величины ξ с составной плотностью (10) как модифицированного метода дискретной суперпозиции состоит в том, что при больших $M \gg 1$ в первом пункте Алгоритма 1 можно использовать эффективные модификации стандартного метода: *квантильный метод, метод Уолкера, бинарный поиск* и др. (см., например, [1]).

Отдельно отметим, что определенным «пределом» при увеличении M и при использовании кусочно-постоянного приближения вида (10) может стать примитивное (и по-своему «универсальное») *табулирование* (дискретизация) непрерывного распределения с плотностью $\tilde{f}(u)$ (при этом пункт 2 в соответствующем Алгоритме 1 пропадает).

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Юрайт, 2018. 371 с.
2. Войтишек А.В., Мясников А.П., Санеев Л.Э. Использование численных алгоритмов моделирования порядковых статистик // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 12. С. 2237–2246.
3. Михайлов Г.А. Замечания о практически эффективных алгоритмах численного статистического моделирования // Сибирский журнал вычислительной математики. 2014. Т. 17. № 2. С. 177–190.
4. Войтишек А.В. Основы метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2010. 116 с.

Войтишек Антон Вацлавович, д.ф.-м.н., профессор; vav@osmf.sccc.ru

Пример реализации вероятностной модели случайного блуждания беспроводных устройств на целочисленной решетке

А.Н. Жданков, М.Д. Сафир

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

Одной из традиционно применяемых для моделирования движения абонентов в сетях подвижной связи является модель случайного блуждания – случайный процесс, состояниями которого являются точки в пространстве, а переходы между состояниями осуществляются согласно заданным правилам. Модели случайных блужданий [1] строятся в дискретном времени, на каждом такте случайным образом меняются либо направление и скорость, либо направление и время движения абонента (модель Random Walk), при этом перед началом движения на следующем такте возможна остановка случайной длительности (модель Random Waypoint). Результатом моделирования является траектория движения объекта – последовательность точек, заданных своими координатами на прямой, на плоскости или в 3D-пространстве [2].

В данной работе рассмотрена версия случайного блуждания на двумерной целочисленной решетке. Направление движения на каждом такте выбирается из четырех возможных, скорость движения и длительность такта постоянны. Такие модели не сложны для реализации и широко применяются при моделировании движения молекул жидкости и газа, в финансовой сфере. Разработанная модель позволяет получить траектории движения нескольких объектов, которая позволяет легко рассчитать расстояния между объектами на каждом такте. При применении разработанной модели к анализу качества передачи данных в сетях подвижной связи движущимися точками являются беспроводные приемо-передающие устройства, при этом качество радиосигнала на приемнике существенно зависит от расстояния до передатчика, а также от расстояний до интерферирующих передатчиков, которые создают помехи.

Постановка задачи

Целью создаваемой модели было получение траектории движения точки, которая описывала бы перемещение объектов в двумерном пространстве.

Модель создана в двух вариантах. В первом варианте исходными данными являются начальная и конечная точки маршрута, которые задают направление движения объекта. Критерий остановки – количество тактов, заданное в начале моделирования. Во втором варианте задается начальная точка маршрута и область, при попадании в которую моделирование заканчивается.

Пример случайного блуждания показан на рис. 1.

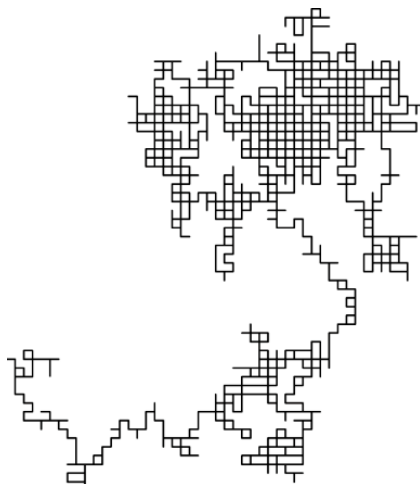


Рис. 1. Случайное блуждание на двумерной целочисленной решетке

Алгоритмы моделирования

Для двух моделей входными данными будем считать: координаты начальной точки (x_0, y_0) , координаты конечной точки (x_n, y_n) , количество итераций t , максимальная длина шага для объекта, задаваемая двумя координатами, т.е. $maxX$ по оси X и $maxY$ по оси Y .

Алгоритм моделирования выглядит следующим образом.

1. Определяем четверть координатной плоскости, в которой лежит конечная точка по отношению к начальной.
2. Для каждой координаты разыгрываем случайные величины, характеризующие шаг:

$$rX \sim \text{Random}(1 : maxX) \text{ и } rY \sim \text{Random}(1 : maxY).$$

3. В зависимости от четверти выбираем действия для изменения координаты.

3.1. Для первой четверти: $x_0 = x_0 + rX$, $y_0 = y_0 + rY$.

3.2. Для второй четверти: $x_0 = x_0 - rX$, $y_0 = y_0 + rY$.

3.3. Для третьей четверти: $x_0 = x_0 - rX$, $y_0 = y_0 - rY$.

3.4. Для четвертой четверти: $x_0 = x_0 + rX$, $y_0 = y_0 - rY$.

При входных данных $t = 100$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $x_n = 80$, $y_n = 90$ получаем результат, изображенный на рис. 2.

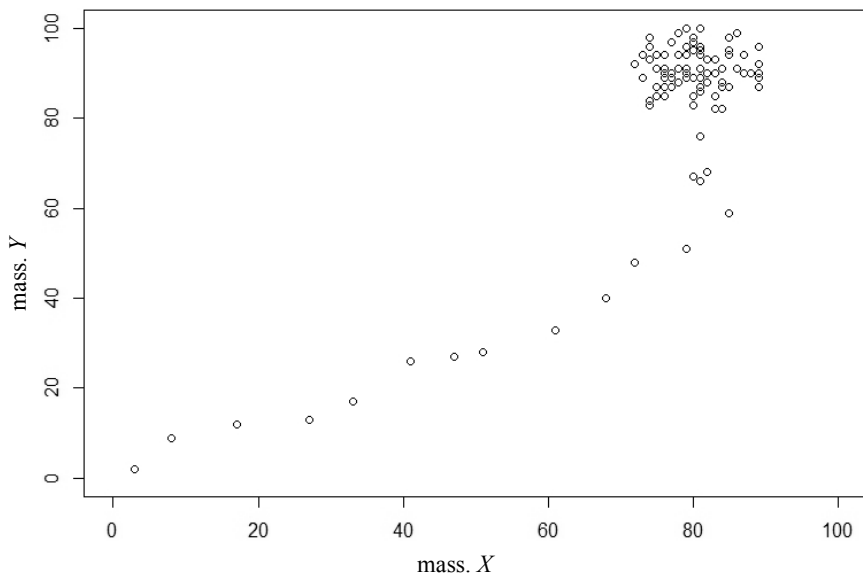


Рис. 2. Траектория для первой модели

Для второй модели уберем ограничение на t , но добавим ограничение на остановку при достижении некоторой области.

Алгоритм при данном моделировании получит новый, четвертый шаг.

4. Проверяем условие на расстоянии между разыгрываемой точкой и конечной: $\sqrt{(x_0 - x_n)^2 + (y_0 - y_n)^2} < R$. Если выполняется, заканчиваем моделирование, иначе продолжаем.

На рис. 3 и 4 показано два варианта при заданном $R = 3$ и 5. Чем уже область, тем больше тактов потребуется до окончания моделирования.

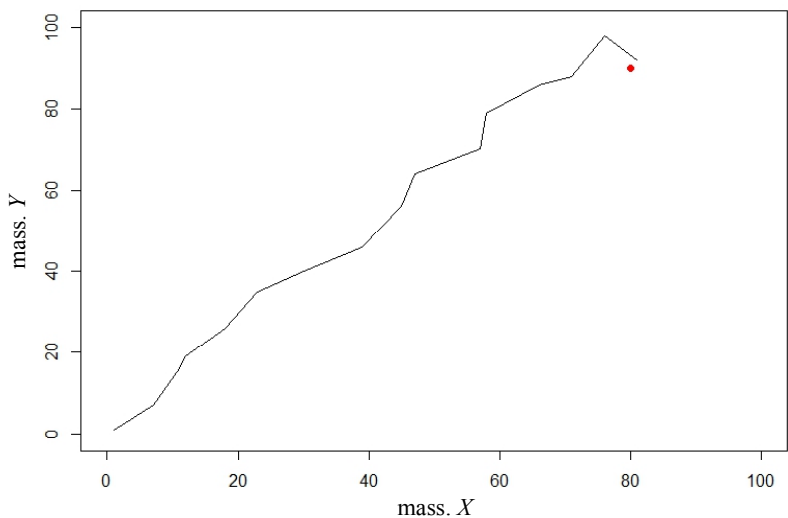


Рис. 3. Траектория для второй модели при $R = 5$

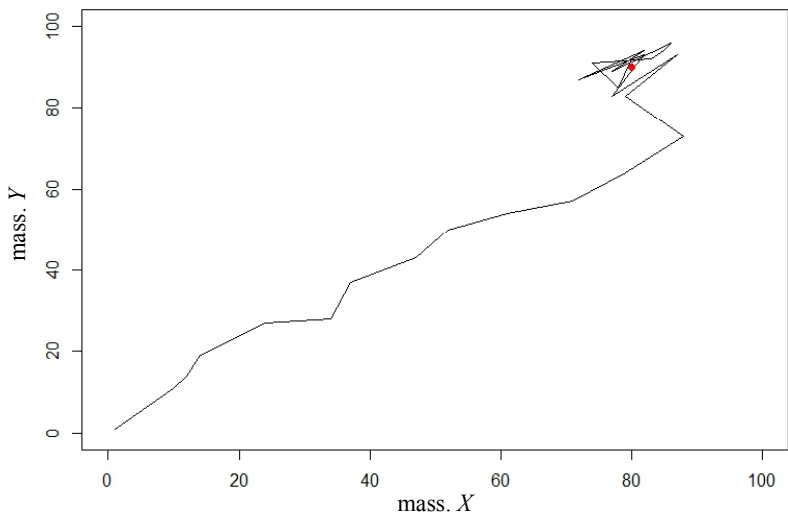


Рис. 4. Траектория для второй модели при $R = 3$

Заключение

Моделирование случайного блуждания востребовано в задачах, где необходимо проложить маршруты движения объектов в замкнутой области, включающей препятствия, расположение которых изначально неизвестно. Подобные модели с различными механизмами движения могут быть улучшены, в том числе, с помощью нейронных сетей. Задачей дальнейших исследований является реализация модели случайного блуждания с помощью нейронных сетей для нахождения динамики отношения сигнал/интерференция (SIR, Signal-to-interference ratio) [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Случайное блуждание*. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Случайное_блуждание
2. *Camp T., Boleng J., Davies V.* A survey of mobility models for ad hoc network research // *Wirel. Commun. Mob. Comput.* 2002. No. 2. P. 483–502.
3. *Гайдамака Ю.В., Самуйлов А.К., Бегишев В.О., Ковальчуков Р.Н., Молчанов Д.А.* Оценка характеристик интерференции при взаимодействии беспроводных устройств в смежных помещениях прямоугольной формы // *T-Comm – Телекоммуникации и Транспорт*. 2015. № 11. С. 41–45.

Сафир Михаил Дмитриевич, студент, ms@safir-it.ru

Жданков Александр Назифович, студент, alexandr0751@yandex.ru

Исследование графов предпочтительного связывания со степенной весовой функцией*

В.Н. Задорожный¹, Е.Б. Юдин²

¹Омский государственный технический университет, г. Омск, Россия

²Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Исследуются графы с нелинейным правилом предпочтительного связывания (НППС) и степенной весовой функцией $f(k) = k^\gamma$. Анализируется зависимость распределения степени связности (РСС) вершин в таких графах от параметра γ весовой функции. Целью анализа является определение асимптотических свойств РСС. В ходе исследования разрабатывается подход, сочетающий применение найденных авторами рекуррентных формул исследуемых РСС с приближенными явными выражениями, получаемыми решением дифференциальных уравнений.

Введение

Математической основой науки о сетях (Network Science) является теория случайных графов. Наиболее распространенными моделями растущих сетей являются графы предпочтительного связывания. Первая и наиболее популярная версия таких графов – это графы Барабаши – Альберт (графы БА), предложенные в работах [1–3], вызвавших взрывной рост числа публикаций о растущих сетях (см., например, [4–9]). В [10–12] для моделирования растущих сетей предлагаются графы с НППС и разрабатываются точные методы расчета вероятностных характеристик таких графов.

Граф с НППС выращивается из небольшого графа-затравки путем добавления к нему в моменты $t = t_1, t_2, \dots$ очередного приращения графа – новой вершины с ограниченным случайным числом x исходящих из нее дуг. В теоретической части данной статьи, учитывая цели исследования, будем считать число дуг u приращений графа фиксированным и равным m . Концы дуг приращения связываются со случайно выбираемыми вершинами графа. Вероятность p_i того, что дуга выберет для свя-

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60023 мол_а_дк.

зи вершину i , пропорциональна весу f этой вершины, определяемому через ее степень связности k_i :

$$p_i = \frac{f(k_i)}{\sum_{j=1}^N f(k_j)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где N – текущее число вершин в графе. Таким образом, случайный граф с НППС далее будет задаваться двумя параметрами – степенью m приращений графа и весовой функцией $f(k) \geq 0$.

Добавляемые вершины будем нумеровать моментами i их поступления. Число N вершин в графе перед присоединением новой вершины всегда будет равно текущему времени $t = i$ поступления этой вершины.

Одной из самых важных и распространенных характеристик растущего графа является финальное (определяемое при $N \rightarrow \infty$) РСС Q_k его вершин, $k = 1, 2, \dots$. Здесь Q_k – это вероятность того, что случайно (равновероятно) выбранная в бесконечном графе вершина будет иметь степень связности k .

Графы со степенной весовой функцией

Графы со степенной весовой функцией интересны тем, что при изменении γ вид РСС Q_k меняется у них в широком диапазоне. Поэтому имеет смысл исследовать их на предмет выявления диапазонов значений γ , обуславливающих однородные внутри диапазонов виды РСС Q_k . Это позволит правильно выбирать значения γ при моделировании реальных растущих сетей (включая телекоммуникационные), у которых виды РСС узлов также могут меняться в широких пределах.

РСС Q_k для графов с весовой функцией $f(k) = k^\gamma$ можно точно описать рекуррентными соотношениями, выведенными в [10]:

$$Q_m = \frac{\langle f \rangle}{\langle f \rangle + mf(m)} = \frac{\langle f \rangle}{\langle f \rangle + mm^\gamma}; \quad (2)$$

$$Q_k = \frac{mf(k-1)}{\langle f \rangle + mf(k)} Q_{k-1} = \frac{m(k-1)^\gamma}{\langle f \rangle + mk^\gamma} Q_{k-1}, \quad k \geq m+1, \quad (3)$$

где $\langle f \rangle$ – финальный средний вес вершин, который в общем случае легко рассчитывается описанным в [10] численным методом.

При $\gamma = 0$ имеем $f(k) = k^\gamma = 1$. Средний вес $\langle f \rangle = \langle 1 \rangle = 1$, и формулы (2), (3) принимают вид

$$Q_m = \frac{1}{1+m}, \quad Q_k = \frac{m}{1+m} Q_{k-1},$$

определяя геометрическую прогрессию с формулой общего члена

$$Q_k = \frac{1}{1+m} \left(\frac{m}{1+m} \right)^{k-m}, \quad k \geq m. \quad (4)$$

Это РСС представляет собой дискретный эквивалент экспоненциально-го распределения вероятностей.

При $\gamma = 1$ получаем $f(k) = k$, т.е. граф вырождается в граф БА. Его средний вес $\langle f \rangle = \langle k \rangle = 2m$. При этом формулы (2), (3) принимают вид

$$Q_m = \frac{2}{2+m}, \quad Q_k = \frac{(k-1)}{2+k} Q_{k-1},$$

т.е. становятся линейными. Благодаря этому легко решаем определяемое ими рекуррентное уравнение и получаем формулу РСС в явном виде:

$$Q_k = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}, \quad k \geq m. \quad (5)$$

Полученное РСС Q_k с ростом k сходится к ck^{-3} .

Вывод явной формулы РСС Q_k для произвольных γ

Явную приближенную формулу для РСС Q_k в графах со степенным правилом предпочтительного связывания выведем известным в теории сетей методом среднего поля [3, 5].

Шаг 1. Запишем дифференциальное уравнение для изменения во времени средней степени k_i вершины i :

$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{mk_i^\gamma}{at}. \quad (6)$$

Знаменатель выражения (1) записан в (6) в виде произведения среднего веса $a = \langle f \rangle$ на число $N = t$ вершин графа. Решая уравнение с уче-

том начального условия $k_i(i) = m$, находим

$$k_i = \left[\frac{m(1-\gamma)}{a} \ln \left(\frac{t}{i} \right) + m^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (7)$$

Шаг 2. Функция распределения вероятностей (ф.р.) $F(k)$ степеней наугад выбираемых вершин есть вероятность того, что степень выбранной вершины окажется меньше, чем k . Если мы найдем номер l такой вершины, степень которой равна k , то тем самым разделим множество всех t вершин графа на две части. Слева от l будут находиться l вершин со степенью не меньше чем k , а справа – $(t-l)$ вершин, степень которых меньше k . И тогда найдем $F(k)$ как отношение $(t-l)/t = 1 - l/t$:

$$F(k) = 1 - \frac{l}{t}. \quad (8)$$

Для определения номера l вершины, степень которой равна k , из (7) получаем уравнение

$$\left[\frac{m(1-\gamma)}{a} \ln \left(\frac{t}{l} \right) + m^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} = k,$$

из которого находим l в виде

$$\frac{l}{t} = e^{-\frac{a}{m} \left(\frac{k^{1-\gamma} - m^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)}. \quad (9)$$

Шаг 3. Подставляя (9) в (8), получаем

$$F(k) = 1 - e^{-\frac{a}{m} \left(\frac{k^{1-\gamma} - m^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)}. \quad (10)$$

Шаг 4. Дифференцируя ф.р. (10) по «непрерывной» переменной k , найдем искомое РСС

$$\hat{Q}_k = F'(k) = \frac{a}{m} k^{-\gamma} e^{-\frac{a}{m} \left(\frac{k^{1-\gamma} - m^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)}. \quad (11)$$

Величина $\hat{Q}_k$ является приближением для Q_k .

Анализ РСС в графах со степенной весовой функцией

Приближенные формулы РСС (10), (11) обладают необходимой наглядностью, а для оценки их точности можно эффективно использовать точные рекуррентные соотношения (2), (3). Рассмотрим, как изменяется асимптотика РСС Q_k при изменении параметра γ .

1. При $\gamma = 0$ формула (11) принимает вид

$$\hat{Q}_k = \frac{a}{m} e^{-\frac{a}{m}(k-m)},$$

РСС Q_k становится экспоненциальным.

2. При $\gamma = 1$ в (11) неопределенность типа 0/0 раскрываем по правилу Лопиталя и с учетом $\gamma = 1$ и известного $a = \langle f \rangle = \langle k \rangle = 2m$ получаем

$$\hat{Q}_k = \frac{2m^2}{k^3}.$$

Оценки $\hat{Q}_k$ правильно отражают найденную выше точными методами асимптотику РСС Q_k при $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$. Это косвенно подтверждает пригодность формул (10), (11) для анализа РСС при других γ .

3. При $0 < \gamma < 1$ вид РСС определим по хвосту $\bar{F}(k) = 1 - F(k)$ распределения, который, согласно (10), при $0 < \gamma < 1$ принимает вид

$$\bar{F}(k) = e^{-\frac{a}{m} \left(\frac{k^{1-\gamma} - m^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)} = ce^{-\frac{a}{m(1-\gamma)} k^{1-\gamma}},$$

и, так как $1 - \gamma < 1$, является тяжелым хвостом распределения Вейбулла.

4. При $\gamma > 1$ показатель экспоненты в (10), (11) принимает вид

$$-\frac{a}{m} \left(\frac{k^{-(\gamma-1)} - m^{-(\gamma-1)}}{-(\gamma-1)} \right) = -\frac{a}{m} \left(\frac{m^{-(\gamma-1)} - k^{-(\gamma-1)}}{\gamma-1} \right) = -\frac{a}{m} \left(\frac{1}{m^{\gamma-1}} - \frac{1}{k^{\gamma-1}} \right).$$

Здесь также обратимся к формуле (10). По структуре полученную ф.р. можно назвать «субвейбулловым» распределением с тяжелым хвостом.

Изучать в диапазоне $\gamma > 1$ значения $\gamma \geq 2$ не имеет смысла, потому что при таких значениях γ модели устойчиво растущих сетей не реализуются: при всех $\gamma \geq 2$ весовая функция $f(k) = k^\gamma$ индуцирует граф с вырожденным РСС, в котором $Q_m = 1$, остальные Q_k все равны нулю [5, 12].

5. Осталось проверить диапазон $\gamma < 0$. Обозначая положительную величину $(-\gamma)$ через λ , перепишем (10) в форме

$$F(k) = 1 - e^{-\frac{a}{m} \left(\frac{k^{1+\lambda} - m^{1+\lambda}}{1+\lambda} \right)},$$

из которой видно, что РСС в этом диапазоне значений γ становится распределением Вейбулла с легким хвостом.

Итоги выполненного анализа графов со степенной весовой функцией подводятся в таблице.

Асимптотики РСС Q_k , реализуемые графами с весовой функцией $f(k) = k^\gamma$

Подмножество значений γ	Асимптотика РСС Q_k при $k \rightarrow \infty$
$\gamma < 0$	Вейбуллов легкий хвост
$\gamma = 0$	Экспоненциальное (геометрическое) РСС
$0 < \gamma < 1$	Вейбуллов тяжелый хвост
$\gamma = 1$	$Q_k \sim ck^{-3}$
$\gamma > 1$	Субвейбуллов тяжелый хвост

Регулярно используемые в процессе исследования имитационное моделирование графов и точные расчеты по формулам (2), (3) подтверждают достоверность полученных результатов. Графики точно рассчитанных РСС в нелинейных шкалах, соответствующих распределению Вейбулла и одному степенному распределению, сходятся к прямым.

Заключение

В статье исследованы графы предпочтительного связывания, определяемые степенной весовой функцией $f(k) = k^\gamma$. Знание порождаемых теми или иными весовыми функциями асимптотик РСС Q_k по $k \rightarrow \infty$ позволяет обоснованно выбирать весовые функции и значения их параметров, обеспечивающие совпадение или близость асимптотик РСС вершин графов и РСС узлов моделируемых сетей.

В ходе исследования сформирован эффективный подход к анализу РСС в графах с НППС, сочетающий использование имитационного моделирования, точных рекуррентных выражений, выведенных в [10], и применение приближенных явных выражений РСС, получаемых путем решения дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barabasi A.L., Albert R.* Emergence of scaling in random networks // *Science*. 1999. V. 286. P. 509–512.
2. *Barabasi A.L., Albert R.* Statistical mechanics of complex networks // *Rev. Mod. Phys.* 2002. V. 74. P. 47–97.
3. *Barabasi A.L.* Scale-free networks: A decade and beyond // *Science*. 2009. V. 325. P. 412–413.
4. *Amaral L.A.N., Scala A.* Barthelemy M., Stanley H. E. Classes of small-world networks // *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 2000. V. 97. P. 11149.
5. *Krapivsky P.L., Redner S.* Organization of growing random networks // *Phys. Rev. E*. 2001. V. 63. P. 066123.
6. *Newman M.* The structure of scientific collaboration networks // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 2001. V. 98. P. 404–409.
7. *Clauset A., Shalizi C. R., Newman M.* Power-law distributions in empirical data // *Rev. Mod. Phys.* 2009. V. 51. P. 661–703.
8. *Cohen R., Havlin S.* Complex networks: structure, stability and function. Cambridge University Press, 2010.
9. *Krapivsky P., Krioukov D.* Scale-free networks as preasymptotic regimes of superlinear preferential attachment // *Physical Review E*. 2008. V. 78. No. 2. P. 026114.
10. *Zadorozhnyi V.N.* Random graphs with nonlinear preferential attachment rule // *Control Sciences*. 2011. No. 6. P. 2–11.
11. *Zadorozhnyi V.N., Yudin E.B.* Structural properties of the scale-free Barabasi-Albert graph // *Automation and Remote Control*. 2012. V. 73. No. 4. P. 702–716.
12. *Zadorozhnyi V.N., Yudin E.B.* Growing network: models following nonlinear preferential attachment rule // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2015. V. 428. P. 111–132.

Задорожный Владимир Николаевич, д.т.н., профессор; zwn2015@yandex.ru
Юдин Евгений Борисович, к.т.н., с.н.с.; udinev@asiu.com

Весовой алгоритм моделирования переноса излучения в стохастических рассеивающих и поглощающих средах¹

Б.А. Каргин^{1,2}, Е.Г. Каблукова¹, П. Чжэн²

¹ Институт вычислительной математики

и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия

² Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия

Постановка задачи

Рассмотрим задачу теории переноса излучения в среде со случайными оптическими параметрами. Известно, что в приближении геометрической оптики перенос излучения в поглощающих и рассеивающих средах может быть описан интегральным уравнением [1]

$$f(\vec{x}) = \int_X k(\vec{x}', \vec{x}) f(\vec{x}') d\vec{x}' + \psi(\vec{x}), \quad (1)$$

$$k(\vec{x}', \vec{x}) = \frac{\Sigma_s(\vec{r}') g(\mu, \vec{r}') \exp(-\tau(\vec{r}', \vec{r})) \Sigma(\vec{r})}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^2 \Sigma(\vec{r}')} \delta\left(\omega - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right),$$

где $f(\vec{x})$ – плотность столкновений, $\vec{x} = (\vec{r}, \vec{\omega})$ и $\vec{x}' = (\vec{r}', \vec{\omega}')$ являются точками фазового пространства $X = \{\vec{r} \in R^3, \vec{\omega} = (a, b, c) \in \Omega\}$,

$\mu = \frac{(\vec{\omega}', \vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ – косинус угла рассеяния; $g(\mu, \vec{r})$ – индикатриса рассея-

ния, нормированная на 1: $\int_{-1}^1 g(\mu, \vec{r}) d\mu = 1$; $\tau(\vec{r}', \vec{r}) = \int_0^l \Sigma(\vec{r}' + s(\vec{r} - \vec{r}')/l) ds$

– оптическая длина отрезка $[r', r]$, $l = |\vec{r} - \vec{r}'|$; коэффициент ослабления

$\Sigma(\vec{r}) = \Sigma_a(\vec{r}) + \Sigma_s(\vec{r})$ является суммой коэффициентов поглощения $\Sigma_a(\vec{r})$ и рассеяния $\Sigma_s(\vec{r})$; $\psi(\vec{x})$ – плотность распределения источников,

$\int_X \psi(\vec{x}) d\vec{x} = 1$. Уравнение (1) определяет однородную марковскую цепь

¹ Исследование выполнено в рамках государственного задания № 0315-2016-0002, при частичной поддержке гранта РФФИ N 16-01-00145.

столкновений, в которой начальное состояние определяется плотностью $\psi(\vec{x})$, а плотность перехода равна $k(\vec{x}', \vec{x})$. Задача заключается в оценке линейных функционалов от решения уравнения (1) вида

$$J_\varphi = (f, \varphi), \varphi(\vec{x}) \geq 0.$$

В случае стохастической среды ядро $k(\vec{x}', \vec{x})$ и плотность столкновений $f(\vec{x})$ зависят от случайного поля оптических параметров среды $\sigma(\vec{r})$ и решение строится как численная оценка математических ожиданий случайных величин $\xi(\omega, \sigma)$, заданных на траекториях моделируемого случайного процесса $\omega(\sigma)$, и их осреднение по набору случайных реализаций σ . Решение данной задачи методом Монте-Карло основано на принципе «двойной рандомизации» [1]:

$$I_\varphi = \langle J_\varphi(\sigma) \rangle = \langle E_{\omega(\sigma)} [\xi(\omega, \sigma) | \sigma] \rangle = E_{(\omega, \sigma)} \xi(\omega, \sigma).$$

Здесь $E_{\omega(\sigma)}$ обозначает взятие математического ожидания по распределению случайного поля $\omega(\sigma)$ при фиксированном наборе параметров σ , а $\langle \rangle$ – математическое ожидание по распределению случайного поля σ . Стандартный подход к вычислению функционала I_φ состоит из следующих этапов:

- 1) моделирование случайных реализаций поля σ ;
- 2) построение m условно независимых траекторий цепи Маркова ($m \geq 1$) для каждой реализации σ ;
- 3) вычисление соответствующих случайных величин $\xi(\omega, \sigma)$.

В реальных задачах теории переноса для уменьшения вычислительной трудоемкости алгоритма используются весовые методы [2]. Для построения весового алгоритма используется цепь Маркова с некоторой начальной плотностью распределения $r_0(\vec{x})$ и переходной плотностью

$r(\vec{x}', \vec{x} | \sigma)$, которая должна содержать множитель $\delta\left(\vec{\omega} - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right)$ из уравнения (1). В этом случае при каждом столкновении вычисляются дополнительные веса

$$Q_0(\vec{x}_0) = \frac{\psi(\vec{x}_0)}{r_0(\vec{x}_0)}, \quad Q_n(\sigma) = Q_{n-1}(\sigma) \frac{k(\vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n | \sigma)}{r(\vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n | \sigma)}. \quad (2)$$

Здесь n – номер столкновения. Для оценки функционала $J_\varphi(\sigma)$ вычисляются случайные величины $\xi(\sigma) = Q_N(\sigma)\varphi(\vec{x}_N)$, такие, что $J_\varphi(\sigma) = E_{\omega(\sigma)}\xi(\sigma)$, N – случайный номер столкновения перед вылетом из среды.

Оптимизация алгоритма метода Монте-Карло

Рассмотрим задачу вычисления функционала I_φ для случайного неоднородного слоя $(\vec{r} \in R^3 = (-\infty, +\infty)^2 \times [0, H])$, в котором $\Sigma(\vec{r})$ является случайным полем, то есть $\sigma(\vec{r}) = \Sigma(\vec{r})$ и все остальные параметры среды известны. При решении подобных задач сталкиваются с двумя трудностями: первая – построение адекватной математической модели стохастического слоя, вторая – эффективная численная реализация процесса переноса излучения в неоднородной трехмерной среде. Обе эти процедуры занимают значительное количество времени. Чтобы уменьшить трудоемкость алгоритма моделирования траекторий будем использовать алгоритм, основанный на методе «зависимых испытаний» [1]. Основной идеей этого метода является то, что значения $I_\varphi(\Sigma)$ для различных $\Sigma(\vec{r})$ могут быть оценены по одним и тем же траекториям с использованием весов (2). То есть траектории, построенные для некоторого детерминированного поля $\Sigma_0(\vec{r})$, могут быть использованы для оценки функционала в стохастической среде, если после перехода $\vec{x}' \rightarrow \vec{x}$ вес частицы дополнительно умножить на $k(\vec{x}', \vec{x}|\Sigma)/r(\vec{x}', \vec{x}|\Sigma_0)$. Пусть случайная траектория $\omega_n = \{(\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n); \vec{x}_i = (\vec{r}_i, \vec{\omega}_i), i = 0, n\}$, состоящая из n звеньев, моделируется по плотности перехода $r(\vec{x}', \vec{x}|\sigma) = k(\vec{x}', \vec{x}|\Sigma_0)$. Тогда, как легко заметить, весовой множитель $Q_n(\Sigma)$, соответствующий реализации $\Sigma(\vec{r})$, вычисляется по формуле

$$Q_n(\Sigma) = \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{\Sigma_s(\vec{r}_{i-1})\Sigma_0(\vec{r}_{i-1})}{\Sigma(\vec{r}_{i-1})\Sigma_{s,0}(\vec{r}_{i-1})} \right\} \cdot \frac{\Sigma(\vec{r}_n)}{\Sigma_0(\vec{r}_n)} e^{-\sum_{i=1}^n [\tau(\vec{r}_{i-1}, \vec{r}_i) - \tau_0(\vec{r}_{i-1}, \vec{r}_i)]}, \quad (3)$$

где

$$\tau_0(\vec{r}_{i-1}, \vec{r}_i) = \int_0^{|\vec{r}_{i-1} - \vec{r}_i|} \Sigma_0(\vec{r}_{i-1} + s\vec{\omega}_{i-1}) ds, \quad \tau(\vec{r}_{i-1}, \vec{r}_i) = \int_0^{|\vec{r}_{i-1} - \vec{r}_i|} \Sigma(\vec{r}_{i-1} + s\vec{\omega}_{i-1}) ds.$$

Численный эксперимент

Положим, что рассеивающая среда представляет собой слой ($\vec{r} \in \mathbf{R}^3 = (-\infty, +\infty)^2 \times [0, H]$) с коэффициентом ослабления, представленным в виде однородного по вертикали случайного стационарного процесса $\Sigma(\vec{r}) = \Sigma(z)$. Предполагается, что излучение падает на границу слоя $z = H$ в некотором направлении ω_0 . Необходимо определить вероятности отражения излучения от рассеивающего слоя $\langle J^{(1)}(\Sigma) \rangle$ и прохождения излучения через слой $\langle J^{(2)}(\Sigma) \rangle$:

$$\xi_{\varphi}^{(1) \vee (2)}(\Sigma) = Q_N \varphi^{(1) \vee (2)}(x_N),$$

где

$$\varphi^{(1)}(x) = \begin{cases} e^{-\left(\tau(r_N, r^*) - \tau_0(r_N, r^*)\right)}, & \text{если } z_N \leq H, z_{N+1} > H, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\varphi^{(2)}(x) = \begin{cases} e^{-\left(\tau(r_N, r^*) - \tau_0(r_N, r^*)\right)}, & \text{если } z_N \geq 0, z_{N+1} < 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь r^* – точка пересечения траектории частицы с соответствующей границей слоя. В качестве приближенного процесса рассмотрим спектральную модель гауссовского поля [3]:

$$\Sigma(z) = \bar{\Sigma}(z) + \sigma_{\Sigma} \sum_{j=1}^K a_j \sqrt{-2 \ln \alpha_j} \cos(\lambda_j z + 2\pi\beta_j), \quad (4)$$

где α_j и β_j – независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале $(0, 1)$, $a_j^2 = 1/K$, σ_{Σ} – среднеквадратическое отклонение одномерного распределения Σ , $\lambda_j \in (0, +\infty)$ распределены по спектральной плотности $S(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\lambda z) K_{\Sigma}(z) dz$, здесь $K_{\Sigma}(z)$ – корреляционная функция случайного процесса.

В численных расчетах в качестве корреляционной функции выбиралась экспоненциальная функция с радиусом корреляции ρ :

$K_{\Sigma}(z) = \frac{1}{\rho} \exp\left(-\frac{z}{\rho}\right)$. В этом случае спектральная плотность определя-

ется формулой [4] $S(\lambda) = \frac{2\sigma_{\Sigma}^2 \rho}{\pi(1 + \rho^2 \lambda^2)}$. Использовалась рандомизированная модель гауссовского случайного поля с разбиением спектра [3]. В данном случае случайные частоты гармоник λ_j моделируются согласно формулам $\lambda_j = \frac{1}{\rho} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2K} (j + \alpha_j) \right)$, $j = 0, \dots, K-1$.

При вычислении весовых множителей (2) используем следующее выражение для определения оптической длины пробега частицы в случайной среде:

$$\tau[\vec{r}_{i-1}, \vec{r}_i] = \frac{1}{|(\vec{\omega}_{i-1}, \vec{k})|} \left\{ \bar{\Sigma} |z_{i-1} - z_i| + \sigma_{\Sigma} \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{\lambda_j} \sqrt{-2 \ln \alpha_j} \times \right. \\ \left. \times [\sin(\lambda_j z_{i-1} + 2\pi\beta_j) - \sin(\lambda_j z_i + 2\pi\beta_j)] \right\}.$$

Здесь $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Для каждой реализации Σ_j плотность начального распределения фотонов $r_0(\vec{x})$ и плотность перехода $r(\vec{x}', \vec{x} | \Sigma_j)$ соответствует детерминированному горизонтально однородному слою с кусочно-постоянным коэффициентом ослабления:

$$\Sigma_0(z) = \int_{z_{m-1}}^{z_m} \Sigma(z) dz, \text{ если } z \in (z_{m-1}, z_m], m = 1, \dots, M. \text{ Как показывают ре-}$$

зультаты расчетов, существует некоторое оптимальное значение M , для которого минимальна трудоемкость алгоритма $S = t \mathbf{D}\xi(\Sigma)$, где t – время моделирования одного значения случайной оценки $\xi(\Sigma)$, $\mathbf{D}\xi(\Sigma)$ – ее дисперсия. Сравнивается трудоемкость предложенного метода с трудоемкостью метода максимального сечения (см. [1], с. 12), который широко используется при моделировании длины случайного пробега в неоднородной рассеивающей среде.

В табл. 1 и 2 приводятся оценки вероятности отражения $I^{(1)} = \langle J^{(1)}(\Sigma) \rangle$ и прохождения излучения $I^{(2)} = \langle J^{(2)}(\Sigma) \rangle$ для стохастической рассеивающей и поглощающей среды с оптическими параметрами: индикатриса рассеяния соответствует индикатрисе рассеяния видимого излучения для континентальной слоистой облачности [5],

альбе́до однократного рассеяния равно $q = 0.95$. Коэффициент ослабления описывается формулой (4) с $K = 100$, радиусом корреляции $\rho = 0.5$, набором среднеквадратических отклонений $\sigma_z = \{1, 5, 10\}$. Излучение падает под углом 30° к нормали поверхности. В таблицах представлены значения оценок, доверительный интервал ε , среднее время моделирования одной траектории и трудоемкости S весового алгоритма с $M = \{1, 50, 100\}$ и метода максимального сечения. Количество реализаций поля 10^4 , число траекторий на каждую реализацию 10^3 для случая $\sigma_z = 1$ и $2 \cdot 10^3$ в остальных расчетах.

Таблица 1

Оценка вероятности отражения излучения $I^{(I)}$ от стохастического плоского слоя, погрешность оценки ε , время моделирования одной траектории t и трудоемкость алгоритмов S

	$\sigma_z=1$		$\sigma_z=5$			$\sigma_z=10$	
	$(I^{(I)} \pm \varepsilon) \cdot 10^{-5}$	$S \cdot 10^{-5}$	$(I^{(I)} \pm \varepsilon) \cdot 10^{-5}$	$t \cdot 10^{-7}, \text{с}$	$S \cdot 10^{-5}$	$(I^{(I)} \pm \varepsilon) \cdot 10^{-5}$	$S \cdot 10^{-5}$
Макс. сечения	21988.7 ± 9.0	6.58	21917.6 ± 6.36	39912	16.22	21907.2 ± 6.4	28.39
Весовой $M=1$	21983.7 ± 9.1	8.44	21915.1 ± 10.1	20220	20.62	21888.7 ± 61.3	835.9
Весовой $M=50$	21978.6 $\pm 9.$	8.29	21927.0 ± 6.43	20336	8.46	21915.4 ± 6.6	9.66
Весовой $M=100$	21978.6 ± 9.0	8.97	21927.7 ± 6.40	20169	8.34	21913.7 ± 6.5	9.34

Таблица 2

Оценка вероятности пропуска́ния излучения $I^{(2)}$ плоским слоем со случайным коэффициентом ослабления (1) погрешность расчета ε , время моделирования одной траектории t и трудоемкость алгоритмов S

	$\sigma_z=1$			$\sigma_z=5$		$\sigma_z=10$		
	$(I^{(2)} \pm \varepsilon) \cdot 10^{-5}$	$t \cdot 10^{-7}, \text{с}$	$S \cdot 10^{-5}$	$(I^{(2)} \pm \varepsilon) \cdot 10^{-5}$	$S \cdot 10^{-5}$	$(I^{(2)} \pm \varepsilon) \cdot 10^{-5}$	$t \cdot 10^{-7}, \text{с}$	$S \cdot 10^{-5}$
Макс. сечения	4940.2 ± 3.2	8101	0.820	5813.9 ± 2.69	2.884	5294.3 ± 2.7	70700	5.03
Весовой $M=1$	4938.4 ± 3.2	10219	1.070	5807.8 ± 5.66	6.492	5326.9 ± 76.7	23290	1309
Весовой $M=50$	4938.8 ± 3.2	10214	1.036	5807.3 ± 2.76	1.548	5293.4 ± 2.9	23602	1.85
Весовой $M=100$	4940.2 ± 3.2	11046	1.12	5801.4 ± 2.7	1.501	5292.3 ± 2.8	23426	1.72

Заключение

Предложен весовой алгоритм моделирования длины случайного пробега при решении уравнения переноса методом Монте-Карло для стохастических рассеивающих сред. В случае значительной дисперсии маргинального распределения случайного поля коэффициента ослабления трудоемкость рассмотренного алгоритма в 1.5 – 3 раза ниже, чем трудоемкость метода максимального сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др.* Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976. 284 с.
2. *Михайлов Г.А.* Оптимизация весовых методов Монте-Карло. М.: Наука, 1987. 240 с.
3. *Пригарин С.М.* Методы численного моделирования случайных процессов и полей. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2005. 258 с.
4. *Шалыгин А.С., Палагин Ю.И.* Прикладные методы статистического моделирования. Л.: Машиностроение, 1986. 320 с.
5. *Hess M., Koeperke P., Schilt I.* Optical properties of aerosols and clouds: the software package OPAC // Bulletin of the American Meteorological Society. 1998. V. 79. No. 5. P. 831–844.

Каргин Борис Александрович, д.ф.-м.н., профессор; bkargin@osmf.sssc.ru

Каблукова Евгения Геннадьевна, к.ф.-м.н., н.с.; kablukovae@sscc.ru

Чжэн Пэнфуэй, магистрант

Имитационное моделирование многосвязности

Е.А. Мачнев, И.С. Ярцева

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

На сегодняшний день основной проблемой поддержки связи в сетях, использующих миллиметровый диапазон, является то, что для поддержания стабильного сигнала между устройством и точкой доступа должна быть прямая видимость. Для решения этой проблемы, консорциум 3GPP предложил использовать многосвязность. При таком решении устройство сети mmWave поддерживает сразу несколько одновременных соединений с различными точками доступа, однако обмен данными происходит только с одной из них. При этом, в случае блокировки сигнала каким-либо объектом или удалении от него, происходит переключение на одну из резервных точек доступа.

Постановка задачи

Построение имитационной модели системы связи миллиметрового диапазона для обслуживания транспортных средств на улицах мегаполиса.

Преимущества многосвязности обсуждались в [1], где авторы рассматривали потенциал и вероятность отказа при таком подходе, как основные показатели, которые могут быть улучшены. Результаты были дополнительно оценены в [2], где авторы использовали моделирование на уровне системы. В [3] рассмотрен частный случай двойного связывания. Распределение сигнал/шум в сетях mmWave с возможностью мультиподключения было получено в [4]. Сравнение стратегий переключения точек доступа для сетей mmWave было выполнено в [5].

Все вышеупомянутые исследования рассматривают открытые пространства со статичными объектами, а также само мобильное устройство не рассматривалось как подвижное. Основной причиной такого упущения является то, что математический анализ регулярных перемещений довольно накладен, по сравнению со случайными. Если учитывать и мобильность устройства и перемещения окружающих объектов, то расчеты становятся очень сложными.

Совместно с командой из технологического университета города Тампере, Финляндия, была разработана имитационная основа для ана-

лиза качества сигнала в системах mmWave при развертывании на улице с несколькими полосами движения, а также при учете поддержки нескольких соединений мобильным устройством. В частности, рассматривается случай движущегося по данной улице автомобиля, который получает обслуживание от точек доступа, установленных вдоль дороги, а также учитывается наличие блокираторов сигнала в виде автомобилей, движущихся как попутно автомобилю, так и навстречу. При некоторой математической обработке сценария компьютерное моделирование может быть сильно упрощено, что позволит моделировать такие сети и рассчитывать показатели эффективности для них. Разработанная база может быть использована для применения в более сложных сценариях для эффективного расчета показателей систем mmWave.

Возьмем улицу с n полосами движения, ширина каждой равна m метрам. Высота точек доступа равна 4 м, расстояние между ними будем варьировать: d_1 метров, d_2 метров, d_3 метров. Высота целевого автомобиля равна 2 м, высота блокирующих автомобилей является случайной величиной, которая принимает значения от 2 до 4 м. Сценарий исследования:

Движение служебного автомобиля (скорой помощи) в затрудненных условиях. Скорость целевого автомобиля равна v_2 км/ч, а скорость блокираторов – v_2 км/ч. Расстояние между автомобилями равно 2 м. Автомобиль поддерживает одновременную связь с m точками доступа, где m называется степенью многосвязности.

Скорая помощь поддерживает связь с тремя точками доступа, нужно посчитать следующие характеристики: среднее время видимости LoS (Line of Sight) и среднее время перекрытия сигнала (outage). По мере движения происходит переключение одной из трех точек доступа, от слабого сигнала к сильному. Будем считать, что сила сигнала напрямую зависит от расстояния между точкой доступа и автомобилем. Тогда в момент, когда расстояния от точек доступа до автомобиля будут равны, произойдет переключение. Выпишем уравнение, не учитывая высоту точек доступа:

$$AP_1^2 + AC^2 = q,$$

$$EP_1^2 + CE^2 = q,$$

$$AC + CE = 1,5d.$$

В системе мы считаем гипотенузы по теореме Пифагора и приравниваем их к некоторой константе q . Таким образом получается система

с тремя неизвестными при двух уравнениях. Для решения добавляем третье уравнение, содержащее в себе две стороны этих треугольников, сумма которых заранее известна исходя из того, что точки доступа расположены на одинаковом расстоянии d .

Заключение

Рассмотрена проблема обслуживания критически важного трафика в программируемых сетях 5G, использующих миллиметровый диапазон частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Michalopoulos D.S., Viering I., Du L.* User-plane multi-connectivity aspects in 5G // 23rd International Conference on Telecommunications (ICT). May 2016. P. 1–5.
2. *Tesema F.B., Awada A., Viering I., et al.* Mobility modeling and performance evaluation of multi-connectivity in 5G intra-frequency networks // IEEE Globecom Workshops (GC Wkshps). December 2015. P. 1–6.
3. *Polese M., Giordani M., Mezzavilla M., et al.* Improved handover through dual connectivity in 5G mmWave mobile networks // IEEE J. on Selected Areas in Communications. September 2017. V. 35. P. 2069–2084.
4. *Öhmann D., Awada A., Viering I., et al.* Achieving high availability in wireless networks by inter-frequency multi-connectivity // 2016 IEEE International Conference on Communications (ICC). May 2016. P. 1–7.
5. *Petrov V. et al.* Dynamic multi-connectivity performance in ultra-dense urban mmwave deployments // IEEE J. on Selected Areas in Communications. September 2017. V. 35. P. 2038–2055.

Мачнев Егор Андреевич; egork1996@yandex.ru;

Ярцева Ирина Сергеевна; ya-ippiwka@mail.ru

Об определении момента остановки моделирования некоторых распределений для достижения заданной точности оценки

А.А. Платонова

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

Одним из путей анализа характеристик случайного процесса является его имитация, когда воспроизводится модель рассчитываемого процесса. Значительным методом в данном случае интерпретируется сведение задачи к вычислению математических ожиданий [1]. Если математическое ожидание неизвестно, то возникает задача его оценки с требуемой точностью. Распространены методы получения оценок неизвестных параметров закона распределения случайной величины на основе ограниченного числа экспериментов [2]. В этом случае требуется уметь определять длительность имитационного моделирования, достаточную для оценки неизвестных параметров закона распределения при заданных относительной ошибке и уровне доверия. Метод определения момента остановки моделирования, предложенный в [3], позволяет получить оценки характеристик случайного процесса. Данный метод полезен как для случая известных значений, так и для случая неизвестных значений математического ожидания и дисперсии, оценки для которых получены на основе имеющихся экспериментов.

Метод определения момента остановки моделирования

Метод определения момента остановки моделирования описан в [1] и сжато представлен ниже. Пусть совершено n независимых опытов над неотрицательной случайной величиной X , на основании которых получены оценки $\tilde{m}$ и $\tilde{D}$ математического ожидания $m > 0$ и дисперсии D . Допустим, что величины $m > 0$ и D нам известны [3]. Найдём такое число измерений n , для которого

$$P\left\{\frac{|\tilde{m} - m|}{m} < \varepsilon\right\} \geq \beta, \quad (1)$$

где ε – требуемая относительная ошибка, а β – доверительная вероятность. Выразив вероятность в левой части неравенства через нормаль-

ную функцию распределения, получаем следующее неравенство:

$$\frac{m\varepsilon}{\sigma_{\tilde{m}}} \geq t_{\beta}, \quad (2)$$

где $t_{\beta} = \arg \Phi^* \left(\frac{1+\beta}{2} \right)$ и $\arg \Phi^*(x)$ – функция, обратная $\Phi^*(x)$.

Если математическое ожидание m и D нам в точности не известны, в качестве приблизительного значения воспользуемся их оценками $m = \tilde{m}$ и $\sigma_{\tilde{m}} = \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}$. Следовательно, требуемое число измерений будет находиться из неравенства

$$\tilde{m}\varepsilon \geq t_{\beta} \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}. \quad (3)$$

Из (3) получаем неравенство определения числа n опытов, необходимого для достижения необходимой точности.

Рассмотрим измерения $x_1, x_2, \dots, x_n$, введем обозначения $V_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ и $W_n = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Искомое число измерений можно найти из неравенства

$$\frac{W_n}{V_n} \leq V_n \left(\frac{\varepsilon^2}{t_{\beta}^2} + \frac{1}{n} \right). \quad (4)$$

Оценки математического ожидания и дисперсии для полученного значения n вычисляются по формулам

$$\tilde{m}(n) = \frac{V_n}{n}; \quad (5)$$

$$\tilde{D}(n) = \frac{W_n}{n} - \left(\frac{V_n}{n} \right)^2. \quad (6)$$

Результаты

Для имитационного моделирования выбраны два распределения неотрицательных непрерывных случайных величин – распределение Рэ-лея (однопараметрическое) и распределение Парето (двухпараметрическое) [4].

В табл. 1 представлены результаты моделирования для распределения Рэля с параметром $\sigma = 2$ для доверительной вероятности $\beta = 0.95$. Показаны несколько значений относительной ошибки ε , число n опытов, необходимое для достижения требуемой точности, оценки $\tilde{m}$ для математического ожидания и $\tilde{D}$ для дисперсии.

Т а б л и ц а 1

Число опытов и числовые характеристики для распределения Рэля

$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
$n = 73$	$n = 10334$	$n = 1050831$	$n = 110337255$
$\tilde{m} = 2.4$	$\tilde{m} = 2.49$	$\tilde{m} = 2.506$	$\tilde{m} = 2.5066$
$\tilde{D} = 1.1$	$\tilde{D} = 1.67$	$\tilde{D} = 1.713$	$\tilde{D} = 1.7168$

Графики на рис. 1 и 2 иллюстрируют сходимость оценок $\tilde{m}$ и $\tilde{D}$ к точным значениям, которые вычисляются по формулам $M\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ и $D\xi = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$. Аналитическое решение математического ожидания и дисперсии будет следующим: $m = 2.5066$ и $D = 1.7168$.

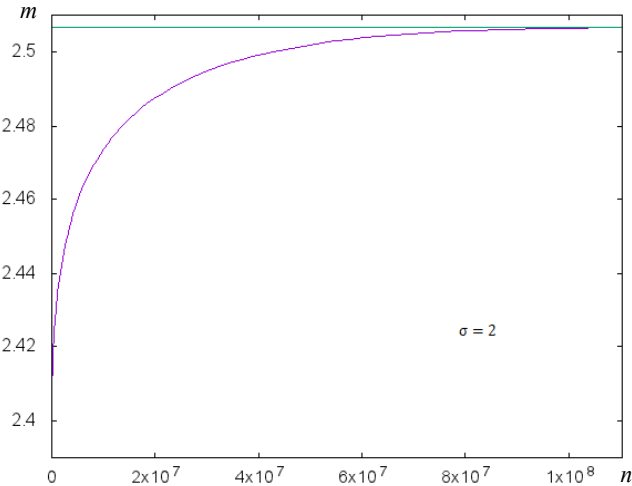


Рис. 1. Оценка математического ожидания в зависимости от числа опытов для распределения Рэля

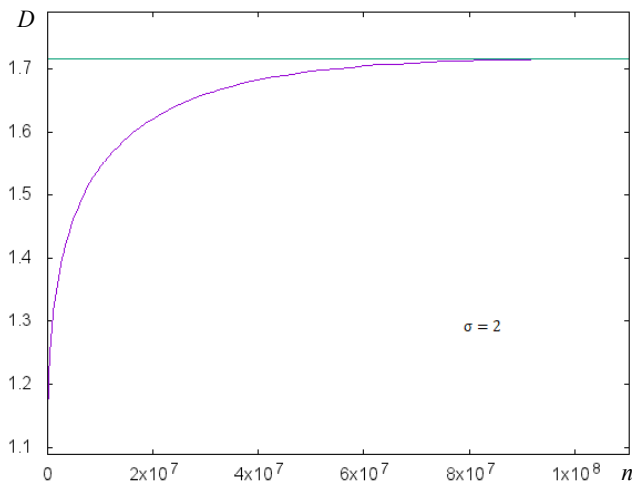


Рис. 2. Оценка дисперсии в зависимости от числа опытов для распределения Рэлея

На рис. 1 (рис. 2) кривая соответствует изменению оценки математического ожидания $\tilde{m}$ (дисперсии $\tilde{D}$), прямая – точному значению математического ожидания m (дисперсии D).

В табл. 2 приведены результаты моделирования для распределения Парето с параметрами $x_m = 1$, $k = 3$ для доверительной вероятности $\beta = 0.95$.

Таблица 2

Число опытов и числовые характеристики для распределения Парето

$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
$n = 68$	$n = 10547$	$n = 1222897$	$n = 158976610$
$\tilde{m} = 1.4$	$\tilde{m} = 1.49$	$\tilde{m} = 1.499$	$\tilde{m} = 1.5$
$\tilde{D} = 0.3$	$\tilde{D} = 0.61$	$\tilde{D} = 0.715$	$\tilde{D} = 0.75$

Рис. 3 и 4 иллюстрируют сходимость оценок $\tilde{m}$ и $\tilde{D}$ к точным значениям, которые вычисляются по формулам $M\xi = kx_m / (k - 1)$, если $k > 1$, и

$D\xi = \left(\frac{x_m}{k-1}\right)^2 \frac{k}{k-2}$ при $k > 2$. Аналитическое решение математического ожидания и дисперсии будет следующим: $m = 1.5$ и $D = 0.75$.

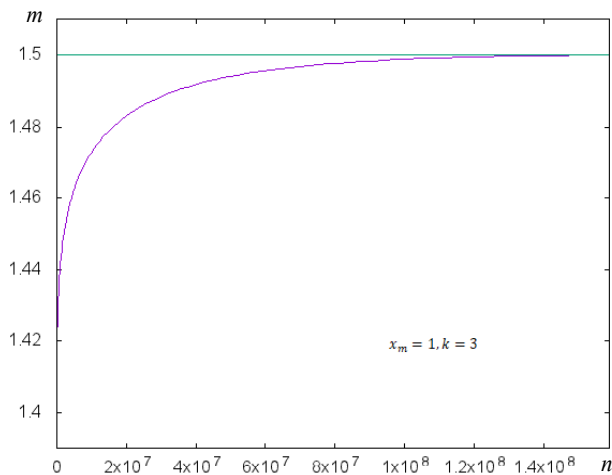


Рис. 3. Оценка математического ожидания в зависимости от числа опытов для распределения Парето

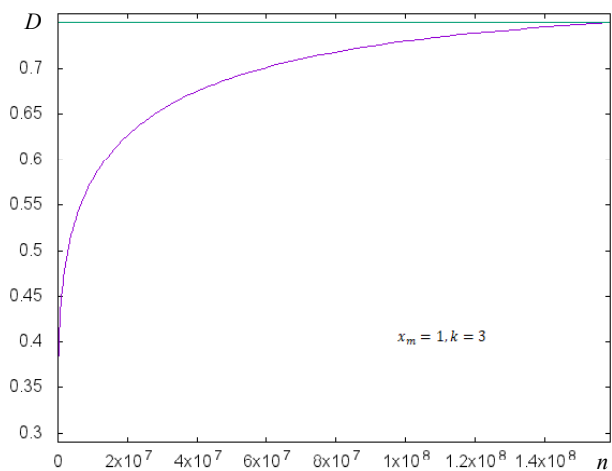


Рис. 4. Оценка дисперсии в зависимости от числа опытов для распределения Парето

На рис. 3 (рис. 4) кривая соответствует изменению оценки математического ожидания $\tilde{m}$ (дисперсии $\tilde{D}$), прямая – точному значению математического ожидания m (дисперсии D).

На рис. 5 и рис. 6 для рассмотренных распределений представлена зависимость числа опытов от относительной ошибки.

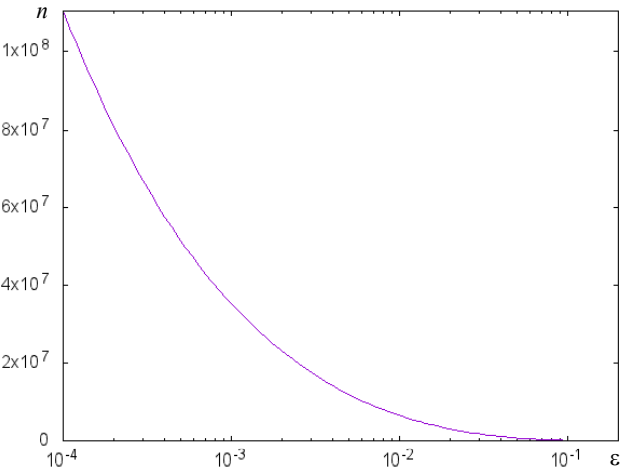


Рис. 5. Число опытов в зависимости от относительной ошибки для распределения Рэлея

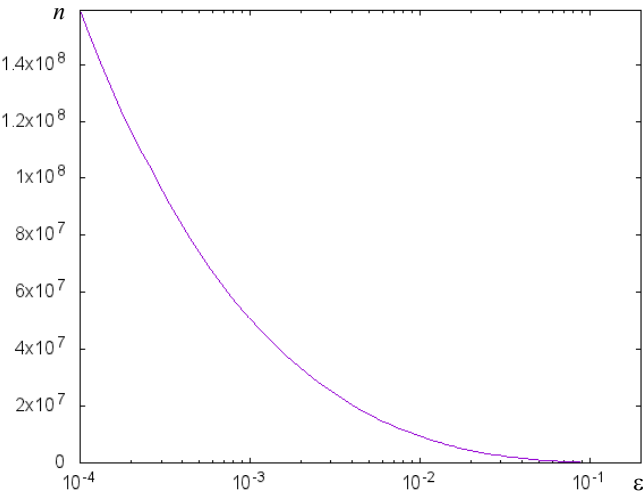


Рис. 6. Число опытов в зависимости от относительной ошибки для распределения Парето

Полученные в ходе численного эксперимента результаты доказывают вывод о том, что рост числа опытов повышает точность полученных на их основе оценок неизвестных параметров.

Заключение

Проведенный численный эксперимент является примером работы метода определения длительности моделирования, достаточной для оценки неизвестных параметров закона распределения при заданных значениях относительной ошибки и уровне доверия. Полученная на основе серии опытов оценка параметров сравнивалась с точными значениями этих параметров, аналитический вид которых для выбранных распределений известен. Отметим, что предложенный в [1] метод позволяет определять достаточную длину серии опытов для случая, когда значения параметров закона распределения неизвестны, а оценки для этих параметров получаются на основе данных моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наумов В.А., Гайдамака Ю.В.* Определение момента остановки моделирования при заданных ошибке и уровне доверия // Труды 21-й Международной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: теория и приложения» DCCN-2018, 17–21 сентября 2018 г. Москва. 2018. (В печати.)
2. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. М.: Физматлит, 1973. 312 с.
3. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей: учебник для вузов. 6-е изд. стер. М.: Высш. шк., 1999. 576 с.
4. *Вадзинский Р.Н.* Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001. 295 с..

Численный анализ вероятности блокировки установления соединения между парой устройств в беспроводной сети миллиметрового диапазона

Н.А. Поляков, Е.Д. Макеева

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

Беспроводная сеть миллиметрового диапазона (mmWave) может обеспечить высокую скорость передачи, однако имеет ограничения на дальность распространения сигнала и помехоустойчивость [1, 2]. Использование миллиметрового диапазона частот в сетях пятого поколения может стать решением для такого класса приложений, как носимые устройства, например, очки дополненной реальности.

Построение модели

Рассмотрим сценарий с пользователями в очках приемника дополненной реальности и устройствами-передатчиками. Для загрузки дополнительной информации в очки необходимо подключиться к свободному передатчику (рис. 1), при этом передатчик может находиться как у их владельца, так и у другого пользователя поблизости. Работа с дополненной реальностью подразумевает большие объемы передаваемых данных, что в условиях беспроводной связи может обеспечить

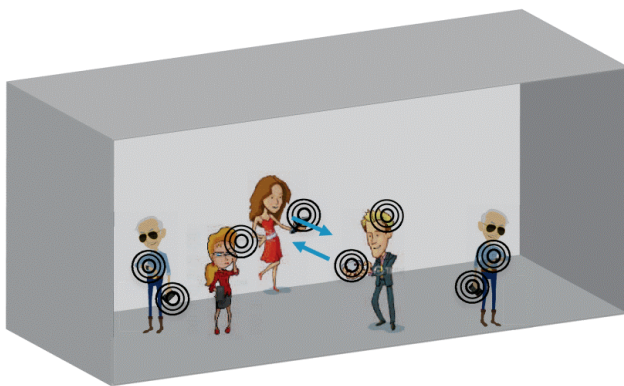


Рис. 1. Сценарий использования очков дополненной реальности

mmWave, однако обрыв соединения возможен даже от неловкого движения руки, которая может перекрыть линию передачи.

Примем следующие упрощающие предположения. Рассмотрим квадратную область на плоскости, в которой равномерно возникают пары передатчик – приемник. Модель распространения сигнала – «треугольная» как на рис. 2. Установление соединения происходит с любым свободным устройством (даже другого владельца).

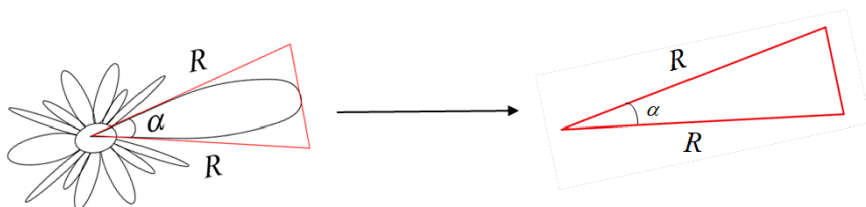


Рис. 2. Область распространения сигнала

Будем рассматривать две модели установления соединения (рис. 3).
 (а) Блокировка пары происходит в случае пересечения ее области распространения сигнала хотя бы с одной областью активной пары.
 (б) Блокировка (1) приемника и (2) передатчика.

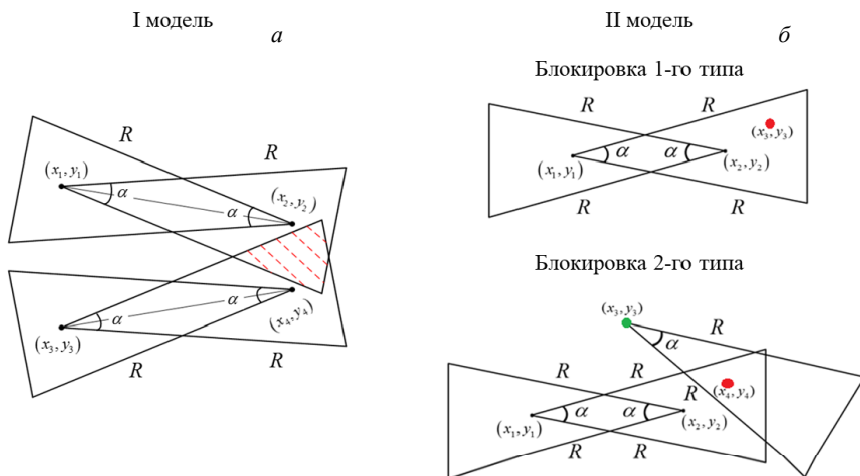


Рис. 3. Случай возникновения блокировки установления соединения

Численный анализ

Разработана имитационная модель по событиям по книге Бусленко Н.П. [3] на языке программирования Java (рис. 4). Учитываются два типа событий – возникновение и исчезновение пары. Они генерируются в виде динамически дополняемой очереди.

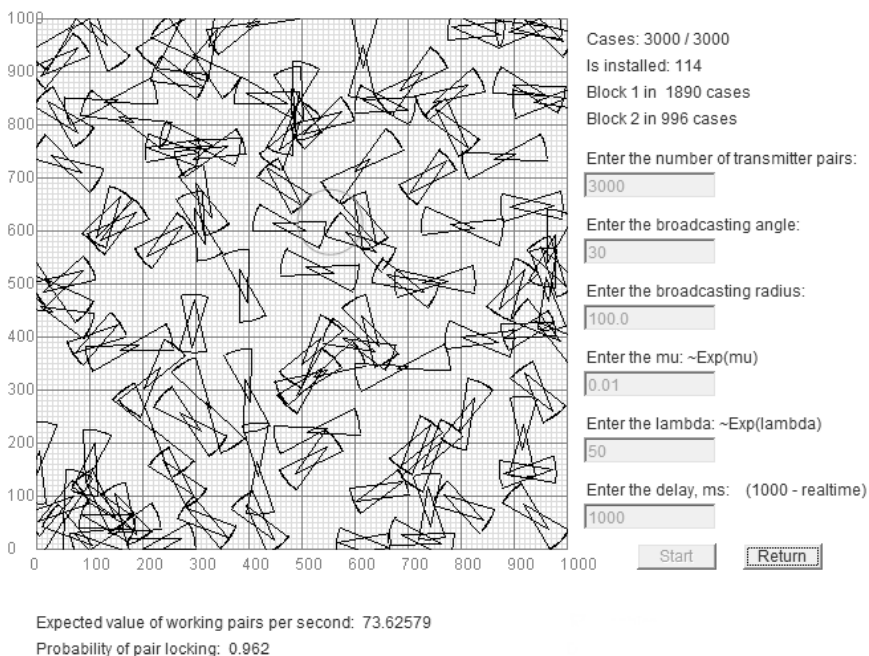


Рис. 4 Интерфейс программного средства.

Для численного анализа были взяты следующие исходные данные: область 1000 м^2 , угол распространения сигнала 60° , интенсивность возникновения пар 1 пара/с, а интенсивность сессии пары = 0.1 пара/с. На графиках на рис. 5 и 6 видно, что вероятность блокировки во втором случае меньше, а среднее число активных пар выше.

Заключение

В дальнейшем планируется разработка аналитической модели установления соединения между парами устройств.

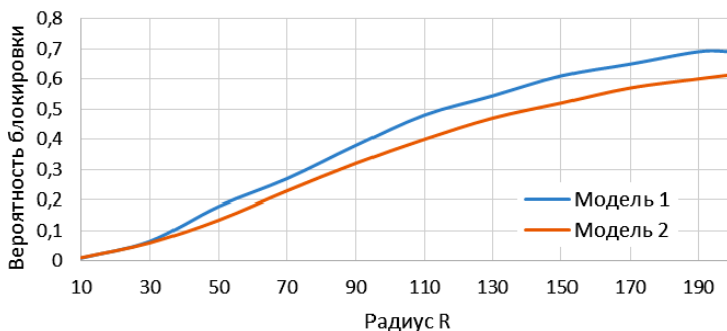


Рис. 5. Вероятность блокировки установления соединения

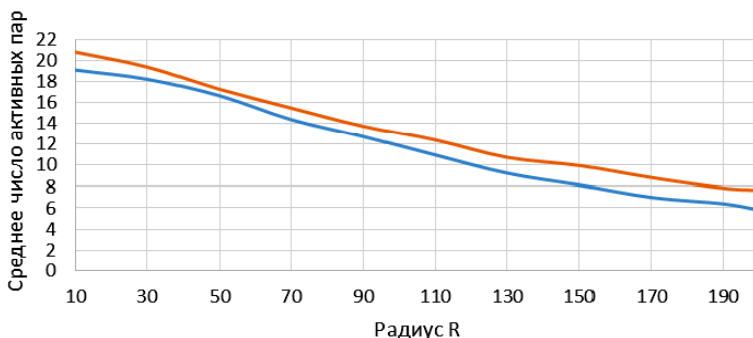


Рис. 6. Среднее число активных пар приемник – передатчик

ЛИТЕРАТУРА

1. Gapeyenko M., Samuylov A., Gerasimenko M., et al. On the temporal effects of mobile blockers in urban millimeter-wave cellular scenarios // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 19 September 2017 . P. 10124–10138.
2. Petrov V., Solomitckii D., Samuylov A., et al. 2017 Dynamic Multi-Connectivity Performance in Ultra-Dense Urban mmWave Deployments // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 2017. V. 35. Iss. 9. P. 2038–2055
3. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем М.: Наука, 1968.

Макеева Елена Дмитриевна, студентка; len16730637@yandex.ru;
Поляков Никита Алексеевич, студент; goto97@mail.ru

Модифицированный метод рекуррентного построения распределений вероятностей конечных случайных множеств на основе полностью вложенных иерархических копул

Д.В. Семенова^{1,2}, Н.А. Лукьянова^{1,2}, Е.Е. Голденок²

¹Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

*²Красноярский государственный медицинский университет
имени профессора В.Ф. Войно-Ясенецкого, г. Красноярск, Россия*

В настоящее время на первый план выходит фундаментальная проблема создания новых методов аналитического и экспериментального моделирования процессов обнаружения скрытых закономерностей и структур в данных, которые могут быть неполными, неточными, неструктурированными, многомерными и разнотипными. Подобные задачи, как правило, имеют комбинаторный характер и заключаются в поиске зависимостей между данными в виде, доступном для интерпретации человеком. Как следствие, во многих практических областях, например в медицине, социологии, экономике и компьютерной лингвистике, актуальны задачи моделирования и исследования случайных объектов произвольной природы, представляемых случайными элементами. В качестве случайных элементов рассматриваются случайные величины, векторы, функции, процессы, множества. В данной работе основными объектами исследования являются конечные случайные множества [1].

Под конечным случайным множеством понимается случайный элемент со значениями из совокупности всех подмножеств некоторого конечного множества U . При этом множество U называется базовым множеством, а значения конечного случайного множества образуют полную решетку относительно теоретико-множественного включения и теоретико-множественных операций объединения и пересечения. Базовым множеством может быть конечное множество объектов числовой или нечисловой природы [1]. Для конечных случайных множеств наиболее актуальна задача построения их законов распределений в аналитическом виде, поскольку это позволяет снизить число параметров, необходимых для описания распределения, и исследовать эти распределения аналитическими методами. В настоящее время универсальных ме-

тодов решения данной задачи нет. Конкретные методы решения во многом зависят от выбранных законов распределения и целей их исследования.

Одним из возможных методов построения новых классов распределений вероятностей конечных случайных множеств является рекуррентный метод на основе ассоциативных функций [2, 3]. В [2] ассоциативные функции в виде ассоциативных и коммутативных копул были впервые применены для построения многомерных распределений вероятностей в рамках случайно-множественного подхода. Предложенный в [2] рекуррентный метод позволяет сократить число параметров распределений и получить новые классы распределений вероятностей конечных случайных множеств [2–4]. В статье предлагается совершенствование рекуррентного метода построения распределений вероятностей конечных случайных множеств на основе иерархических копул [5, 6].

Пусть $(\Omega, F, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство, U – конечное множество. Конечное случайное множество (к.с.м.) определяется как отображение $K: \Omega \rightarrow 2^U$, измеримое относительно пары алгебр $(F, 2^U)$, такое, что для любого $X \subseteq U$ справедливо $K^{-1}(X) = \{\omega \in \Omega: K(\omega) = X\} \in F$. Отображение K порождает новое вероятностное пространство $(K(\Omega), K(F), \mathbf{P}_K) = (2^U, 2^{2^U}, \mathbf{P}(K^{-1}(\bullet)))$. Распределение вероятностей

(РВ) к.с.м. определяется вероятностной мерой $\mathbf{P}_K$. РВ конечного случайного множества есть набор из 2^N ($N=|U|$) значений вероятностной меры $\mathbf{P}$ на системе событий, порожденной множеством U .

Распределения вероятностей к.с.м. моделируют всевозможные способы теоретико-множественных отношений подмножеств конечного множества событий и являются функциями множества, которые заданы на различных системах случайных событий, порожденных множеством U . Таким образом, для того чтобы построить распределение, необходимо задать вероятностную меру на различных системах событий, порожденных этим множеством. В работе рассмотрены две системы событий из возможных шести, задающих распределения I, II рода соответственно. На языке к.с.м. эти системы событий представлены в первой строке таблицы. Вторая строка содержит их эквивалентное теоретико-множественное описание.

Для распределений вероятностей I, II рода справедливы необходимые условия существования распределений. Они представлены в третьей строке таблицы. Заметим, что только распределение вероятностей I рода удовлетворяет вероятностной нормировке, поскольку оно опре-

делено на полной группе несовместных событий $\{K_U = X\}$. Вероятностная нормировка для распределений вероятностей II рода, заданного на системе совместных событий $\{K_U \supseteq X\}$ не выполняется. При построении распределений требуются достаточные условия. Достаточные условия для распределений вероятностей I и II рода были получены в [7] и представлены в последней строке таблицы. Для полного определения распределения вероятностей к.с.м. достаточно любого одного из этих двух типов распределений, связанных формулами обращения Мёбиуса.

Распределения вероятностей к.с.м. и их характеристики

Системы событий	$\{K_U = X\}$	$\{K_U \supseteq X\}$
Теоретико-множественное описание	$\left(\bigcap_{x \in X} x \right) \cap \left(\bigcap_{x \in X^c} x^c \right)$	$\left(\bigcap_{x \in X} x \right)$
Вероятности	$p(X) = \mathbf{P}\{K_U = X\}$	$p_X = \mathbf{P}\{K_U \supseteq X\}$
Тип РВ к.с.м.	I рода	II рода
Необходимые условия существования РВ	$\sum_{X \subseteq U} p(X) = 1$	границы Фреше: $p^- \leq p_X \leq p^+$ $p^- = \max \left\{ 0, 1 - X + \sum_{x \in X} p_x \right\}$ $p^+ = \min_{x \in X} p_x$, где $p_x = \mathbf{P}(x)$
Достаточные условия существования РВ	Функция множества $f: 2^U \rightarrow [0, 1]$, заданная на системе событий $\{K_U = X\}$, является распределением вероятностей I-го рода конечного случайного множества K_U , если функция множества удовлетворяет условию $\sum_{X \subseteq U} f(X) = 1$	Функция множества $f: 2^U \rightarrow [0, 1]$, заданная на системе событий $\{K_U \supseteq X\}$, является распределением вероятностей II рода к.с.м. K_U , если одновременно выполнены следующие условия: $f(\emptyset) = \mathbf{P}(K_U \supseteq \emptyset) = 1$; $f(x) = \mathbf{P}(x \in K_U)$ – значения функции множества на событиях $x \in U$ совпадают с вероятностью этих событий; значения функции множества удовлетворяют системе неравенств Фреше для вероятностей пересечений событий при всех $X \in 2^U$, $ X \geq 2$; значения функции множества $p(X)$, полученной из $f(X)$ по формуле обращения Мёбиуса, неотрицательны

Сформулируем метод рекуррентного построения применительно к распределениям вероятностей Π рода [2]. Пусть заданы N маргинальных вероятностей событий $P(x)=p_x, x \in U, |U|=N$, и ассоциативная функция $AF(a, b)$. Требуется найти распределение вероятностей к.с.м. Π рода на основе $AF(a, b)$. Суть рекуррентного метода – это двухэтапное решение данной задачи. На первом этапе осуществляется построение функции множества $\{f(X), X \subseteq U\}$, определенной на системе событий Π рода $\{K_U \supseteq X\}$. Функция множества определяется как набор $|X|$ -местных функций со следующими значениями: $f(\emptyset) = 1; f(\{x\}) = p_x; f(\{x, y\}) = g(p_x, p_y); \dots f(X) = g(p_x, x \in X)$. Рекуррентное соотношение, определяющее процесс построения функции множества на системе событий Π рода, основанное на свойствах ассоциативных функций [6, 8, 9], имеет вид

$$P\left(\bigcap_{x \in X} x\right) = g(p_x, x \in X) = AF(p_x, g(p_t, t \in X \setminus \{x\})). \quad (1)$$

На втором этапе выполняется проверка достаточных условий [7] и построение аналитического вида распределения вероятностей [3, 4].

Рекуррентный метод построения распределений к.с.м. на основе пяти ассоциативных функций (независимая копула, копула верхней и нижней границ Фреше – Хёвдинга, копула Франка, копула Али-Михазля – Хака) представлен в работах [3, 4]. В них доказаны теоремы, устанавливающие аналитический вид и условия существования результирующих распределений вероятностей к.с.м. Количество параметров для задания этих распределений снижено с 2^N до $N + 1, N=|U|$.

Использование однопараметрических семейств ассоциативных функций (например, семейство Франка) позволяет получать спектр распределений, описывающих к.с.м., структура зависимостей которых регулируется только параметром используемой ассоциативной функции [4]. Наличие единственного регулятора структуры зависимостей событий обеспечивает, с одной стороны, простоту интерпретации. С другой стороны, параметр ассоциативной функции как единственный регулятор одновременно является и недостатком метода, поскольку неявно предполагает идентичную структуру зависимости между случайными событиями и является ограничивающим фактором в описании поведения реальных систем.

Для обеспечения большей гибкости модели в работе предлагается модифицировать рекуррентный метод. Суть модификации – определение иерархической структуры зависимости событий на основе полно-

стью вложенной архимедовой копула-функции [5, 6]. Описание и исследования такого типа копул для моделирования совместного распределения случайных величин можно найти в работах [10–12]. В указанных работах многомерное распределение случайных величин представлено в виде иерархической структуры, которая группирует случайные величины в однородные с точки зрения тесноты связи подгруппы. Таким образом, иерархическая копула представляет собой иерархию копул, на каждом уровне которой происходит агрегация посредством копулы копул или частных функций распределения с предыдущего уровня иерархии, в результате подобной агрегации на верхнем уровне иерархии остается лишь одна копула [5]. Полностью вложенными иерархическими копулами называются иерархические копулы, на каждом уровне иерархии которых агрегируется один новый элемент. При этом на каждом уровне иерархии возникает только одна новая копула. Вложенные иерархические копулы моделируются с использованием парных копул [6].

Модифицируем первый этап рекуррентного метода следующим образом: $f(\emptyset) = 1$; $f(\{x\}) = p_x$; $f(\{x, y\}) = AF_1(p_x, p_y; \alpha_1)$; $f(\{x, y, z\}) = AF_2(p_z, f(\{x, y\}); \alpha_2) \dots$, $f(X) = AF_{|X|-1}(p_x, f(X \setminus x); \alpha_{|X|-1})$. Рекуррентное соотношение, определяющее процесс построения функции множества на системе событий Π рода, примет вид

$$P\left(\bigcap_{x \in X} x\right) = AF_{|X|-1}\left(p_x, f(t, t \in X \setminus \{x\}); \alpha_{|X|-1}\right). \quad (2)$$

Процедура построения полностью аналогична процедуре, предложенной в [6, 10–12]: события x и y связываются при помощи однопараметрической ассоциативной функции AF_1 ; событие z связывается с событием $x \cap y$ при помощи однопараметрической ассоциативной функции AF_2 и т.д. Агрегирование событий в иерархическую структуру осуществляется по принципу группировки событий с наиболее тесной связью, определяемой через параметр ассоциативной функции [5]. Второй этап (проверка достаточных условий и построение аналитического вида распределения вероятностей) остается без изменений.

На рис. 1 представлен результаты, полученные рекуррентным методом с функцией Франка (а) и модифицированным рекуррентным методом (б) с иерархической структурой для к.с.м., заданного на триплете событий $U = \{x, y, z\}$. На рис. 1, а представлена зависимость арной корреляции Фреше семейства распределений вероятностей к.с.м. Франка

при $p_x=3/8$, $p_y=1/8$, $p_z=5/8$. На втором этапе рекуррентного метода для данного примера было получено, что распределение вероятностей к.с.м. существует, если параметр ассоциативной функции Франка $\alpha \in [-6; \infty]$. Здесь хорошо видна идентичная структура зависимости между событиями, которая регулируется только одним параметром α . На рис. 1, б представлена зависимость арной корреляции Фреше семейства распределений вероятностей к.с.м. Франка для полностью вложенной иерархической структуры с параметрами $\alpha_0=15$, $\beta \in [-\infty; \alpha_0]$. При фиксированном $\alpha_0=15$ структура зависимости между событиями x и y является вложенной [2, 3]: $x \subset y$. Проверка достаточных условий существования распределения вероятностей к.с.м. показала, что распределение к.с.м. существует, если $\beta \leq \alpha_0$, что согласуется с результатами, полученными в [6, 10–12].

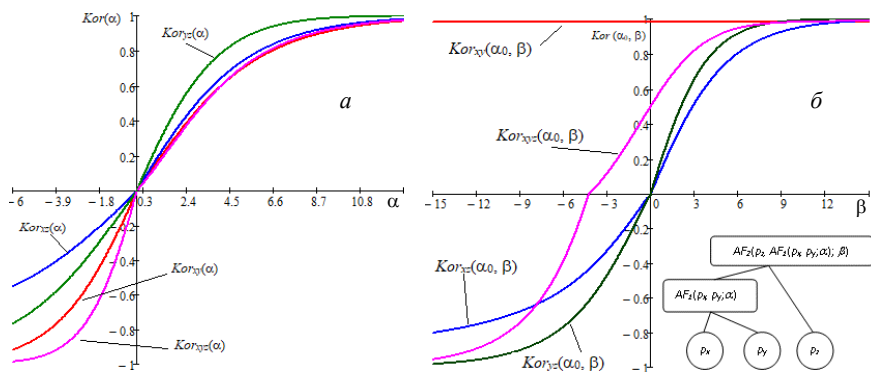


Рис. 1. Зависимость арной корреляции Фреше семейства распределений вероятностей к.с.м. Франка при $p_x=3/8$, $p_y=1/8$, $p_z=5/8$: а) от параметра $\alpha \in [-6; \infty]$; б) $\alpha_0=15$, $\beta \in [-\infty; \alpha_0]$: а – рекуррентный метод; б – модифицированный рекуррентный метод

Данная модификация для построения распределения вероятностей к.с.м. требует $2N-1$ параметров вместо 2^N . Здесь $N-1$ – количество параметров ассоциативной функции, используемых для регулирования структуры зависимостей между событиями. Исследования показали, что предложенная модификация рекуррентного метода аналитического построения распределений вероятностей к.с.м. позволяет более гибко регулировать структуру зависимостей событий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лукьянова Н.А., Семенова Д.В. Краткий обзор по теории случайных множеств // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2016): материалы XV Международной конференции им. А.Ф. Терпугова. Катунь, 12–16 сентября 2016 г. Томск, 2016. Ч. 1. С. 172–178.
2. Lukyanova N.A., Semenova D.V. The study of discrete probabilistic distributions of random sets of events using associative function // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2014. No. 7 (4). P. 500–514.
3. Семенова Д.В., Лукьянова Н.А. Рекуррентное построение дискретных вероятностных распределений случайных множеств событий // Прикладная дискретная математика. 2014. № 4(26). С. 47–58.
4. Лукьянова Н.А., Семенова Д.В. Ассоциативные функции Франка в построении семейств дискретных вероятностных распределений случайных множеств событий // Прикладная дискретная математика. 2016. № 2 (32). С. 5–19.
5. Пеникас Г.И. Иерархические копулы в моделировании рисков инвестиционного портфеля // Прикладная эконометрика. 2014. № 35(3). С. 18–38.
6. Фантаццини Д. Моделирование многомерных распределений с использованием копула функций. I. // Прикладная эконометрика. 2011. № 2(22). С. 98–134.
7. Lukyanova N.A., Semenova D.V., Goldenok E.E. Set Functions and Probability Distributions of a Finite Random Sets // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2017. Т. 10. № 3. С. 1–10.
8. Alsina S., Frank M., Schweizer B. Associative functions: Triangular Norms and Copulas. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006. 237 p.
9. Благовещенский Ю.Н. Основные элементы теории копул // Прикладная эконометрика. 2012. № 2(26). С. 113–130.
10. Savu C., Trede M. Hierarchies of Archimedean copulas // Quantitative Finance. 2010. V. 10(3). P. 295–304.
11. Okhrin O., Okhrin Y., Schmid W. On the Structure and Estimation of Hierarchical Archimedean Copulas // J. Econometrics. 2013. V. 173(2). P. 189–204.
12. Okhrin O., Okhrin Y., Schmid W. Properties of Hierarchical Archimedean Copulas // Statistics & Risk Modeling. 2013. V. 30(1). P. 21–54.

Семенова Дарья Владиславовна, к.ф.-м.н., доцент; dariasdv@gmail.com;

Лукьянова Наталья Александровна, к.ф.-м.н., доцент; nata00sfu@gmail.com;

Голденок Елена Евгеньевна, к.ф.-м.н., доцент; egoldenok@gmail.com

Численный анализ скорости передачи данных в беспроводной сети с разделением пользователей на подгруппы мультивещания¹

В.С. Скрипкин, В.А. Бесчастный, Д.Ю. Острикова

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

В связи с увеличением потребностей пользователей, а также количества подключенных к сети устройств наблюдается рост трафика в беспроводных сетях. По прогнозам Cisco, ожидается, что мировой трафик вырастет в три раза к 2021 году и достигнет 3,3 зеттабайт [1]. Одним из доступных решений является многоадресный режим передачи данных, – или технология мультивещания [2]. В группе мультивещания скорость передачи данных на один выделенный ресурсный блок определяется устройством с худшим соотношением сигнал/шум при взаимодействии с базовой станцией. Этот принцип ограничивает устройства, которые имеют лучшее соотношение сигнал/шум (например, находятся ближе к базовой станции) и могут развивать более высокие скорости передачи данных. Проблема может быть решена путем разделения одной группы мультивещания на несколько подгрупп в соответствии с поддерживаемыми устройствами схемами модуляции и кодирования. Базовая станция в таком случае может производить оптимальное распределение ресурсных блоков по подгруппам в соответствии с передаваемыми устройствами значениями CQI (Channel Quality Indicator) [3, 4]. Каждый CQI-индекс определяет минимальную гарантированную скорость передачи данных на один ресурсный блок для устройств, находящихся в подгруппе мультивещания [5].

В работе рассмотрен алгоритм решения задачи нахождения оптимального числа подгрупп и оптимального распределения ресурсных блоков между ними. В качестве целевой функции задачи оптимизации выбрана суммарная скорость передачи данных всеми пользователями соты.

¹ Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100».

Алгоритм нахождения оптимального значения суммарной скорости передачи данных всеми пользователями группы мультивещания

Рассмотрим соту беспроводной сети с количеством пользователей, равным N . Положим, что все пользователи соты всегда находятся в активном режиме передачи данных [6, 7]. У базовой станции соты в течение одного временного слота есть в распоряжении K ресурсных блоков.

На первом шаге из множества уровней CQI $\mathbf{M}$ удаляются те, на которых нет ни одного пользователя, и затем из оставшихся в качестве начального уровня для первой подгруппы $m_1(n)$ берется наименьший, т.е.:

$$m_1(n) := \min \{m \in \mathbf{M}(n)\}. \quad (1)$$

Затем методом простого перебора находится максимальная суммарная скорость передачи данных (Aggregate Data Rate, ADR) для второй подгруппы. Перебор производится для всех возможных диапазонов CQI-уровней: со второго по последний, с третьего по последний и т.д. Из всех полученных значений ADR для второй подгруппы выбирается максимальное, а в качестве начального уровня для второй группы $m_2(n)$ берется наименьший CQI-уровень из соответствующего диапазона:

$$m_2(n) := \arg \max \left\{ m \in \mathbf{M}(n) \setminus \{m_1(n)\} : b_m \sum_{i \geq m} n_i \right\}, \quad (2)$$

где b_m – скорость передачи данных, соответствующая m -му уровню CQI для одного ресурсного блока. Таким образом формируются две потенциальные подгруппы мультивещания:

$$\mathbf{M}_1(n) := \{m \in \mathbf{M}(n) : m < m_2(n)\}; \quad (3)$$

$$\mathbf{M}_2(n) := \{m \in \mathbf{M}(n) : m \geq m_2(n)\}, \quad (4)$$

где $\mathbf{M}_1(n) \cup \mathbf{M}_2(n) = \mathbf{M}(n)$.

На заключительном шаге сравниваются ADR для первой и второй подгруппы и принимается решение о целесообразности разбиения группы мультивещания на две подгруппы:

$$B_l(n) := b_{m_l(n)} \sum_{m \in \mathbf{M}_l(n)} n_m, \quad l = 1, 2. \quad (5)$$

Условия формирования одной или двух подгрупп мультивещания, а также расчет максимальной суммарной скорости передачи данных можно представить в виде (6) и (7) соответственно:

$$\text{Если } B_1(n) > B_2(n) \text{ тогда } \begin{cases} b(n, L, \sigma, k) = K \cdot b_{m_1(n)} \cdot N, \\ L = 1, \\ \sigma = \{\mathbf{M}(n)\}, \\ k_1 = K, \\ B_1 = b_{m_1(n)}. \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{Если } B_1(n) \leq B_2(n) \text{ тогда } \begin{cases} b(n, L, \sigma, k) = 1 \cdot B_1(n) + (K - 1) \cdot B_2(n), \\ L = 2, \\ \sigma = \{\mathbf{M}_1(n), \mathbf{M}_2(n)\}, \\ k_1 = 1, k_2 = K - 1, \\ B_1 = b_{m_1(n)}, B_2 = b_{m_2(n)}. \end{cases} \quad (7)$$

Алгоритм был представлен в [6], где также приведено обоснование того факта, что оптимальное число подгрупп мультивещания не может превышать двух. Данное утверждение позволяет алгоритму быть достаточно эффективным при работе с реальными данными, даже несмотря на то, что в алгоритме используется простой перебор. Помимо этого, показано, что максимальная ADR достигается при выделении максимального числа ресурсных блоков $(K-1)$ второй подгруппе, что отражено в расчете этой характеристики в (7).

На основе рассмотренного алгоритма проведен анализ зависимости ADR от количества пользователей соты и количества ресурсных блоков, находящихся в распоряжении у базовой станции соты. Для нахождения среднего значения ADR проводилось по $t = 100$ испытаний для выбранных значений параметра распределения количества устройств p и для фиксированного числа ресурсных блоков K .

Для численного эксперимента было использовано случайное распределение устройств на плоскости в соответствии с пуассоновским точечным процессом.

Результаты численного анализа представлены в таблице. На рис. 1 представлена зависимость суммарной скорости передачи данных для случая с применением вышеизложенного алгоритма (сплошная линия), и для случая без выделения подгрупп мультивещания (прерывистая линия).

Зависимость ADR от ρ при $K=100$

Количество устройств (ρ)	Ср. значение ADR без выделения подгрупп, Мбит/с	Ср. значение ADR по алгоритму разбиения на подгруппы, Мбит/с
10	0.64874612	3.6957983557
15	0.94653768	5.3749862837
20	1.25094508	6.9878575876
25	1.53589876	8.7155659833
30	1.83621064	10.3916093368

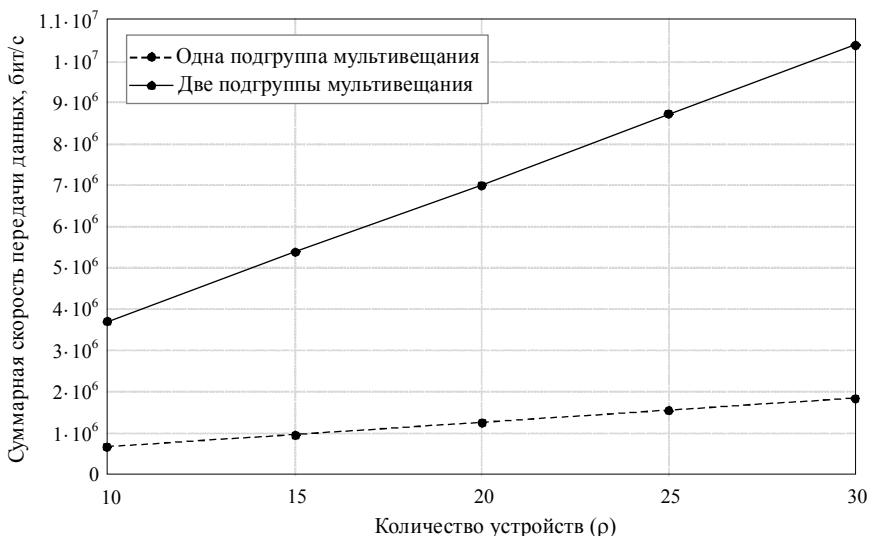


Рис. 1. График зависимости суммарной скорости передачи данных

Как видно из рис. 1, применение алгоритма позволяеткратно увеличить суммарную скорость передачи данных всеми пользователями соты, иными словами, пропускную способность сети.

Заключение

Рассмотрен алгоритм нахождения оптимального значения суммарной скорости передачи данных всеми пользователями соты в случае применения сценария выделения подгрупп мультивещания. Проведен сравнительный анализ данного подхода со стандартным сценарием применения технологии мультивещания.

В качестве дальнейших исследований планируется рассмотреть сценарии, в которых пользователи соты меняют свое местоположение и могут быть, как активны, так и пассивны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cisco. VNI Global Fixed and Mobile Internet Traffic Forecasts. 2017.
2. 3GPP TS 23.246: Multimedia Broadcast/Multicast Service (MBMS); Architecture and functional description: Release 12. 3GPP. 2014.
3. Darya Ostrikova, Federica Rinaldi, Vitalii Beschastnyi, Irina Gudkova, Leonardo Militano, Giuseppe Araniti, Antonio Iera, Konstantin Samouylov Analytical Model for Multicast Subgrouping in 5G-Mobile eMBMS Environment // 9th Int. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), November 2017. P. 13–19.
4. Samouylov K.E., Gudkova I.A., and Ostrikova D.Yu. On capturing and modelling stochastic nature in the multicast subgroup formation problem in 3GPP LTE network // Материалы XV Международной конференции имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» ИТММ–2016 (12–16 сентября 2016 г., Алтайский край, пос. Катунь). Ч. 1. 2016. С. 54–56.
5. Бородакий В.Ю., Гудкова И.А., Острикова Д.Ю. Анализ предоставления услуг мультимедиа в сетях LTE в виде системы с групповым обслуживанием // T-Comm – Телекоммуникации и Транспорт. 2013. № 11. С. 50–53.
6. Giuseppe Araniti, Massimo Condoluci, Mariantonia Cotronei, Antonio Iera, and Antonella Molinaro. A Solution to the Multicast Subgroup Formation Problem in LTE Systems // IEEE Wireless Communications Letters. 2015. V. 4. No. 2. P. 658–664.
7. Giuseppe Araniti, Massimo Condoluci, Leonardo Militano, and Antonio Iera. Adaptive Resource Allocation to Multicast Services in LTE Systems // IEEE Transactions on Broadcasting. 2013. V. 59. No. 4. P. 1–4.

Скрипкин Владислав Сергеевич; vsskriplin@gmail.com;

Бесчастный Виталий Александрович; beschastnyy_va@rudn.university;

Острикова Дарья Юрьевна, к.ф.-м.н.; d.ostrikova@gmail.com

К разработке имитационной модели установления соединения между парой устройств в беспроводной сети миллиметрового диапазона

П.А. Харин, Н.А. Поляков

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

Рассмотрим модель установления соединения между парой устройств в беспроводной сети миллиметрового диапазона [1]. На плоскости возникают пары точек передатчик – приемник с областью распространения сигнала, которая характеризуется следующими параметрами: дальность R и угол α . При пересечении зон областей сигналов нескольких пар точек возникает блокировка, а именно если зона области сигнала возникшей пары точек пересекается с зоной уже существующей пары точек, то она будет заблокирована. В данной работе мы рассмотрим иную политику блокировки.

Построение имитационной модели

Рассмотрим модель установления соединения между парой передатчик – приемник в беспроводной сети миллиметрового диапазона, которая отличается от предыдущей модели [1] моделью блокировки.

Пусть на плоскости в произвольной области равномерно генерируется точка A с координатами (x_i, y_i) , где $i = \overline{1, N}$. Данная точка является передатчиком с углом распространения сигнала α и дальностью R . В случае если передатчик возникает в области зоны сигнала уже существующей пары точек, то происходит блокировка передатчика и генерация нового. Данное правило описывает блокировку первого типа. Иллюстрация блокировки первого типа представлена на рис. 1.

При успешной генерации передатчика происходит генерация приемника B с координатами (x_i, y_i) , где $i = \overline{1, N}$ в радиусе R от передатчика A . В случае если приемник возникает в области зоны сигнала уже существующей пары точек, то происходит блокировка возникшей новой пары точек передатчик – приемник. Данное правило описывает блокировку второго типа. Иллюстрация блокировки второго типа представлена на рис. 2.

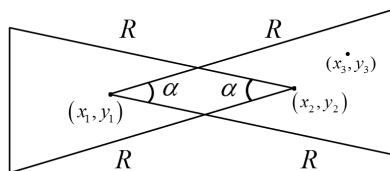


Рис. 1. Условие для блокировки первого типа

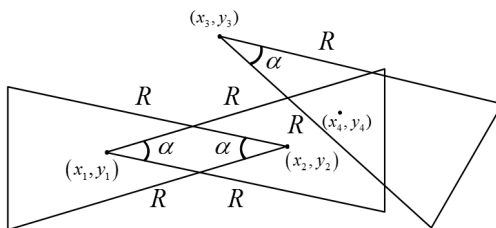


Рис. 2. Условие для блокировки второго типа

При успешной генерации новой пары точек передатчик – приемник происходит установление соединения между ними. В отличие от предыдущей работы [1], блокировки пар точек не будет при возникновении случая, когда области сигналов успешно сгенерированных пар точек передатчик – приемник пересекаются.

Численный анализ

Для получения численных результатов было разработано программное средство на языке программирования Java. Пусть в системе равномерно с интенсивностью λ по закону Пуассона генерируется N пар передатчик-приемник. Время передачи данных является экспоненциально распределенным и равно μ^{-1} . Исходные данные приведены в табл. 1.

Таблица 1

Начальные данные для реализации программы

N	50 000
α	5/20/60
R	100/120/140/160/180/200
λ	1.0
μ	0.1

Результаты выполнения программы представлены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты при различных параметрах радиуса и угла

$\alpha \mid R$	100	120	140	160	180	200
5	0.14	0.171	0.1621	0.171	0.25	0.233
20	0.35	0.399	0.43	0.48	0.52	0.53
60	0.37	0.433	0.44	0.49	0.53	0.58

Заключение

Данная работа является продолжением предыдущей [1] и рассмотрена иная политика блокировок. Результатом данной работы является расчетная вероятность блокировки с учетом новой политики блокировок. В ходе работы был выявлен факт явного разброса результатов расчетов. Дальнейшая задача – провести имитационное моделирование с использованием доверительных интервалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Макеева Е.Д., Харин П.А., Поляков Н.А. и др.* Анализ установления соединения пар передатчик – приемник на mmWave // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Москва, РУДН, 16–20 апреля 2018. С. 134–136.
2. *Gapeyenko M., Samuylov A., Gerasimenko M., et al.* On the temporal effects of mobile blockers in urban millimeter-wave cellular scenarios // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2017. V. 66 (11). Art. no. 8047278. P. 10124–10138.
3. *Petrov V., Solomitskii D., Samuylov A., et al.* Dynamic multi-connectivity performance in ultra-dense urban mmWave Deployments // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 2017. V. 35 (9). Art. no. 7959173. P. 2038–2055.

Поляков Никита Алексеевич; goto97@mail.ru;

Харин Петр Александрович; gruzavjeg@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Nonaffine models of yield term structure

G. Medvedev

Belarusian State University, Minsk, Belarus

The equation of term structure for the price of a zero-coupon bond is considered, the solution of which in analytical form is known, basically, for the simplest models and has an affine structure with respect to the short-term rate. The paper constructs solutions of this equation for a family of term structure models that are based on short-term rate processes in which the square of volatility is proportional to the third power of the short-term rate in stochastic differential equations. The solution of the equation is sought in the form of a definite functional series and, as a result, is reduced to a confluent hypergeometric function. Three versions of the underlying stochastic differential equations for short-term rate processes are considered: with zero drift, linear drift, and quadratic drift. Numerical examples are given for the yield curve and the forward rate curve for these versions. Some conditions for the existence of nontrivial solutions of the equation of time structure in the family of processes under consideration are formulated.

Suppose that the state of the financial market is described by the interest rate $r(t)$, which follows a Markov process homogeneous in time, generated by the stochastic differential equation

$$dr(t) = \mu(r(t)) dt + \sigma(r(t)) dw(t)$$

with the drift function $\mu(x)$, the volatility function $\sigma(x)$, and the standard Wiener process $w(t)$. For convenience of reasoning, we denote the drift function $\tau(r) = \mu(r) - \lambda(r)\sigma(r)$ and the diffusion function $s(r) = 0,5\sigma^2(r)$. Here $\lambda(r)$ is the so-called market risk price. Previously [1], the problem of determining the time structure of the yield of a zero-coupon bond, when the functions $\tau(r)$ and $s(r)$ are polynomials was considered. It turned out, in this case, whether the yield curves can be polynomials or power series in the variable r . It turned out that this happens if only $\tau(r)$ and $s(r)$ are polynomials of not more than first degree. In this case, the models of the yield term structure are affine.

In this paper, we consider a similar problem, but the term structure of the price of a zero-coupon bond is sought in the form of a functional series that differs from the power series. It is found out that for some cases such solutions exist. The resulting term structure turns out to be non-affine and is described by confluent hypergeometric functions. This family includes such known models of interest rates as the model CIR(1980) [2] and the model Ahn – Gao [3].

The general equation for the price of a bond and its components

Consider the equation of term structure for the price of the zero-coupon bond $P(r, \tau)$ [4]

$$-\frac{\partial P(r, \tau)}{\partial \tau} + m(r) \frac{\partial P(r, \tau)}{\partial r} + s(r) \frac{\partial^2 P(r, \tau)}{\partial r^2} - r P(r, \tau) = 0, P(r, 0) = 1. \quad (1)$$

Here $m(r)$ is the function of the short-term interest rate drift, and $s(r)$ is the square of its volatility. We seek a solution of this equation in the form

$$P(r, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n} c_n, \quad (2)$$

where $a(\tau)$, α and c_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, are the function and coefficients to be determined.

The corresponding derivatives used in equation (1) have the form

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(r, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{a'(\tau)}{a(\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) \left(\frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n} c_n, \\ \frac{\partial P(r, \tau)}{\partial r} &= \frac{1}{a(\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) \left(\frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n+1} c_n, \\ \frac{\partial^2 P(r, \tau)}{\partial r^2} &= \frac{1}{a(\tau)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n + 1) \left(\frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n+2} c_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Suppose that the drift and volatility of the short-term interest rate are such that the functions $\tau(r)$ and $s(r)$ are polynomials of order p and q , respectively:

$$m(r) = \sum_{k=0}^p m_k r^k, \quad s(r) = \sum_{k=0}^q s_k r^k. \quad (4)$$

Now substituting expressions (2) – (4) in equation (1), we obtain

$$\begin{aligned}
& \sum_j \left(-I(j|0)(\alpha+j) a'(\tau) a(\tau)^{\alpha+j-1} c_j - I(j|-1) a(\tau)^{\alpha+j+1} c_{j+1} - \right. \\
& \quad \left. - I(j|1-p) \sum_{k=\text{Max}\{0,1-j\}}^p (\alpha+j+k-1) m_k a(\tau)^{\alpha+j+k-1} c_{j+k-1} + \right. \\
& \quad \left. + I(j|2-q) \sum_{k=\text{Max}\{0,2-j\}}^q (\alpha+j+k-2)(\alpha+j+k-1) s_k a(\tau)^{\alpha+j+k-2} c_{j+k-2} \right) \left(\frac{1}{r} \right)^{\alpha+j} = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

A certain complexity in the expression (5) is caused by the fact that the summation over the index j for each term starts in different ways: for the first term $j \geq 0$, for the second term $j \geq -1$, for the third term $j \geq 1 - p$, for the fourth summand $j \geq 2 - q$. Therefore, in expressions of the terms, the factors $I(j | k)$ appeared, representing indicator functions equal to one if $j \geq k$, and zero otherwise.

Equality (5) must be satisfied uniformly with respect to the variable r . In this case, since the functions $r - j$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) are linearly independent, the coefficients in front of these functions in expression (5) must be zero. This leads to a system of equations for the unknown parameters α , $a(\tau)$ and c_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, in the representation (2) of the solution of equation (1), if it exists in this form. Note that each term in each element of the sum (5) has a nonzero factor $a(\tau)\alpha$, therefore, for simplicity, it can be reduced in all elements of the sum.

The CIR(1980) model

Among the models of short-term rate $r(t)$ processes with zero drift, the CIR(1980) model [2] is widely known, in which the rate is generated in the general case by the diffusion process

$$dr = \sigma r^\gamma dw. \tag{6}$$

Despite the fact that the model is known for a long time, the time structure of its zero-coupon yield has not been described so far. It turns out that the proposed method for finding the time structure allows this. In equation (6) we take $\gamma = 1,5$ and $s \equiv 0,5 \sigma^2$. Equation (1) for the price of the zero-coupon bond $P(r, \tau)$ takes the form

$$-\frac{\partial P(r, \tau)}{\partial \tau} + s r^3 \frac{\partial^2 P(r, \tau)}{\partial r^2} - r P(r, \tau) = 0, \quad P(r, 0) = 1. \tag{7}$$

We seek a solution of this equation in the form (2). The corresponding derivatives have the form (3). After substituting these expressions into equation (7), we obtain the following equality

$$-\frac{a'(\tau)}{a(\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) \left(\frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n} c_n - a(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n-1} c_n + \\ + s a(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n + 1) \left(\frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n-1} c_n = 0.$$

This equality can be rewritten in a more convenient form:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(\alpha + n) \frac{a'(\tau)}{a(\tau)} c_n + a(\tau) c_{n+1} - s a(\tau) (\alpha + n + 1)(\alpha + n + 2) c_{n+1} \right] \left(\frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n} + \\ + a(\tau) (1 - s \alpha (\alpha + 1)) c_0 \left(\frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha-1} = 0$$

Since the expressions $(a(\tau)/r)^k$ as functions of the variable r for different values of k are linearly independent, and the equality must be satisfied uniformly with respect to r , then the coefficients before these expressions for different k must be zero. And we get a system of equations for the unknowns α , $a(\tau)$ and c_n , $n = 0, 1, 2, \dots$.

$$s \alpha (\alpha + 1) = 1, \quad (8)$$

$$(\alpha + n) \frac{a'(\tau)}{a(\tau)^2} c_n + c_{n+1} - s (\alpha + n + 1)(\alpha + n + 2) c_{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

From the equation (8) the parameter α is determined by

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{s}} - 1 \right) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{8 + \sigma^2}}{\sigma} - 1 \right) > 0. \quad (10)$$

Generally speaking, equation (8) has two roots: positive and negative. However, with a negative solution, as will be shown below, the price function acquires properties that the price of the zero-coupon bond does not possess. Therefore, we take the root (10). Consider the equation (9) for $n = 0$.

$$a'(\tau) \alpha c_0 + a(\tau)^2 c_1 [1 - s (\alpha + 1)(\alpha + 2)] = 0.$$

Taking into account equality (8), it can be rewritten as

$$a'(\tau) = a(\tau)^2 2 \omega / \alpha^2, \quad (11)$$

where for brevity we denote $\omega = c_1/c_0$. Equation (11) is a differential equation with respect to the function $a(\tau)$. The solution of the equation has the form

$$a(\tau) = - \frac{\alpha^2}{2\omega \tau + \eta}, \quad (12)$$

up to a constant η , which, if necessary, is determined from the properties of the bond price. We note that it follows from (15) that

$$\frac{a'(\tau)}{a(\tau)^2} = \frac{2\omega}{\alpha^2}.$$

Now consider equation (9) for an arbitrary $n \geq 1$. It can be written as a recurrence relation that determines the coefficient c_{n+1} in terms of the coefficient c_n :

$$c_{n+1} = \frac{2(\alpha + n)\omega}{[s(\alpha + n + 1)(\alpha + n + 2) - 1]\alpha^2} c_n, \quad (13)$$

Note that

$$\frac{2(\alpha + n)}{[s(\alpha + n + 1)(\alpha + n + 2) - 1]\alpha^2} = \frac{\theta}{n + 1} \left(\frac{n + \alpha}{n + \xi} \right),$$

where for brevity is denoted $\xi = 2(\alpha + 1)$, $\theta = \xi/\alpha$. Thus, the sequence of coefficients $\{c_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ is as follows

$$c_0, \quad c_1 = c_0 \omega = c_0 \omega \theta \frac{\alpha}{\xi}, \quad c_2 = c_0 \frac{\omega \theta}{2} \frac{(1 + \alpha)}{(1 + \xi)},$$

$$c_3 = c_0 \frac{(\omega \theta)^2}{1 \times 2 \times 3} \frac{(1 + \alpha)}{(1 + \xi)} \frac{(2 + \alpha)}{(2 + \xi)}, \quad \dots, \quad c_n = c_0 \frac{(\omega \theta)^{n-1}}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k + \alpha)}{(k + \xi)}, \quad \dots$$

Then the solution (2) of equation (7) can be represented in the form

$$P(r, \tau) = c_0 \left(\frac{a(\tau)}{r} \right)^\alpha \left[1 + \left(\frac{\omega \theta a(\tau)}{r} \right) \frac{\alpha}{\xi} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\omega \theta a(\tau)}{r} \right)^n \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k + \alpha)}{(k + \xi)} \right].$$

We note that among the special functions there is a so-called confluent hypergeometric function (Kummer function) ${}_1F_1(x, y, z)$ (in the notation of the Wolfram Mathematica system), which is defined by

$${}_1F_1(x, y, z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \prod_{k=1}^n \frac{(x + k - 1)}{(y + k - 1)} = 1 + \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{\Gamma(x + n)}{\Gamma(y + n)}.$$

Using these notations, the price $P(r, \tau)$ can be written in the form

$$\begin{aligned} P(r, \tau) &= c_0 \left(\frac{a(\tau)}{r} \right)^\alpha \left(1 + \frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\omega \theta \frac{a(\tau)}{r} \right)^n \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\xi + n)} \right) = \\ &= c_0 \left(\frac{a(\tau)}{r} \right)^\alpha F_1 \left(\alpha, \xi, \omega \theta \frac{a(\tau)}{r} \right). \end{aligned}$$

In terms of its economic properties, the bond price as a function of the maturity term τ is a continuous monotonically decreasing function that for any $r > 0$ has limits [9]

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} P(r, \tau) = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} P(r, \tau) = 0.$$

These requirements can be satisfied by determining the so far undetermined constants c_0 and η by appropriate way. The final expression for the price of the zero-coupon bond becomes

$$P(r, \tau) = \frac{(1 + \alpha) \sqrt{\pi}}{2^{1+2\alpha} \Gamma(\alpha + 1, 5)} \left(\frac{1}{s r \tau} \right)^\alpha F_1 \left(\alpha, 2(1 + \alpha), -\frac{1}{s r \tau} \right), \quad (14)$$

where $s \equiv 0,5\sigma^2$, $\alpha = 0,5(\sqrt{1 + 4/s} - 1) > 0$, and $\Gamma(x)$ is gamma function. Here it is assumed that $\alpha > 0$. When $\alpha < 0$, the gamma function $\Gamma(x)$ used in formula (14) can have undesirable properties. For example, for integer negative values of an argument, it has unbounded discontinuities, on intervals $(2\kappa, 2\kappa + 1)$, $\kappa = 0, 1, 2, \dots$, it is negative, etc., which is not corresponds to the properties of the bond price. Therefore, negative values of the parameter α are undesirable.

Typically, the term structure is in practice not represented through the bond price, but through yield. By definition, the yield to maturity of the zero-coupon bond (yield curve) $y(r, \tau)$ and the yield of the forward rates (forward curve) $f(r, \tau)$ are determined by the expressions [5]:

$$y(r, \tau) = -\frac{\ln P(r, \tau)}{\tau}, \quad f(r, \tau) = -\frac{\partial \ln P(r, \tau)}{\partial \tau} \quad (15)$$

and, unfortunately, are not presented in a compact analytical form and can only be investigated numerically.

The Ahn – Gao model

Now let the polynomials $m(r)$ and $s(r)$ be such that $p = 2$, $q = 3$, that is $1 - p = 2 - q = -1$. Then the components of the sum (9) differ from zero only for $j \geq -1$, where the first term differs from zero only for $j \geq 0$. In this case we obtain the following system of equations:

for $j = -1$

$$-c_0 - \alpha m_2 c_0 + \alpha(\alpha + 1) s_3 c_0 = 0 ; \quad (16)$$

for $j = 0$

$$\begin{aligned} & -\alpha a'(\tau) a(\tau)^{-1} c_0 - a(\tau) c_1 - \sum_{k=1}^2 (\alpha + k - 1) m_k a(\tau)^{k-1} c_{k-1} + \\ & + \sum_{k=2}^3 (\alpha + k - 2)(\alpha + k - 1) s_k a(\tau)^{k-2} c_{k-2} = 0 ; \end{aligned} \quad (17)$$

for $j = 1$

$$\begin{aligned} & -(\alpha + 1) a'(\tau) c_1 - a(\tau)^2 c_2 - \sum_{k=0}^2 (\alpha + k) m_k a(\tau)^k c_k + \\ & + \sum_{k=1}^3 (\alpha + k - 1)(\alpha + k) s_k a(\tau)^{k-1} c_{k-1} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

for $j > 1$

$$\begin{aligned} & -(\alpha + j) a'(\tau) a(\tau)^{j-1} c_j - a(\tau)^{j+1} c_{j+1} - \sum_{k=0}^2 (\alpha + j + k - 1) m_k a(\tau)^{j+k-1} c_{j+k-1} + \\ & + \sum_{k=0}^3 (\alpha + j + k - 2)(\alpha + j + k - 1) s_k a(\tau)^{j+k-2} c_{j+k-2} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

From the equation (16), which under the assumption that $c_0 \neq 0$ has the form $\alpha(\alpha + 1) s_3 = \alpha m_2 + 1$, the parameter α is determined.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2s_3} (m_2 - s_3 - \sqrt{4s_3 + (m_2 - s_3)^2}), \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2s_3} (m_2 - s_3 + \sqrt{4s_3 + (m_2 - s_3)^2}). \end{aligned} \quad (20)$$

Since equation (16) is quadratic, it has two roots, which means that the solution of equation (1) can have two components of the form (2), a

compromise between them, and also the initial condition $P(r, \tau) = 1$ can affect on the choice of the coefficient c_0 .

Equation (17) is an ordinary differential equation with respect to the function $a(\tau)$. Its solution has the form

$$a(\tau) = \frac{\lambda}{\mu + \exp[(\tau + \alpha \xi c_0)(m_1 - (\alpha + 1) s_2)]}, \quad (21)$$

where for compactness we denote by

$$\lambda = \alpha c_0 ((1 + \alpha) s_2 \alpha - m_1), \mu = c_1 (1 + (\alpha + 1) m_2 - (\alpha + 1) (\alpha + 2) s_3),$$

and ξ is a constant integration of the differential equation, whose choice is made depending on the properties of the solution of equation (1).

Equation (18) determines the coefficient c_2 , and equation (19) can be considered as the basis for constructing a recurrence formula for calculating the coefficients c_{n+1} in terms of the previous coefficients c_j , $j \leq n$. Consider first the equation (19). It allows us to express the coefficient c_{j+1} in terms of the previous coefficients c_j , c_{j-1} , c_{j-2} by the formula

$$c_{j+1} = \frac{\left[a(\tau)(\alpha + j)(a'(\tau) + a(\tau)(m_1 - (1 + \alpha + j)s_2)c_j - [a(\tau)(-m_0 + (\alpha + j)s_1)c_{j-1} + (\alpha + j - 2)s_0c_{j-2}])(\alpha + j - 1) \right]}{a(\tau)^3[(1 + \alpha + j)(2 + \alpha + j)s_3 - (1 + \alpha + j)m_2 - 1]}. \quad (22)$$

However, by the definition of the coefficients c_n in the expression (2), they must be constant coefficients independent of the variable τ . This means that in the formula (22) the right-hand side of the equality must not depend on τ . This is only if $m_0 = 0$, $s_0 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$. This requirement is a necessary condition for the existence of a non-trivial solution (2), which says that a non-trivial solution does not hold for any polynomials $m(r)$ and $s(r)$ are of order 2 and 3, respectively, but only for

$$m(r) = m_1 r + m_2 r^2, \quad s(r) = s_3 r^3. \quad (23)$$

Substitution of the required necessary conditions into the formula (22) for the coefficient c_{n+1} leads to the recurrence relation

$$c_{n+1} = \frac{\alpha + n}{(1 + \alpha + n)(2 + \alpha + n)s_3 - (1 + \alpha + n)m_2 - 1} \frac{a'(\tau) + a(\tau)m_1}{a(\tau)^2} c_n. \quad (24)$$

We note that the denominator of the first factor of the right-hand side of (24) can be represented in the form

$$(1 + \alpha + n)(2 + \alpha + n)s_3 - (1 + \alpha + n)m_2 - 1 = s_3(1 + n)(\beta + n),$$

where

$$\beta = \begin{cases} \beta_1 \equiv \frac{1}{s_3} (s_3 - \sqrt{4s_3 + (m_2 - s_3)^2}) & \text{for } \alpha = \alpha_1, \\ \beta_2 \equiv \frac{1}{s_3} (s_3 + \sqrt{4s_3 + (m_2 - s_3)^2}) & \text{for } \alpha = \alpha_2. \end{cases} \quad (25)$$

When the necessary conditions are fulfilled, the function $a(\tau)$, determined by the formula (21), is somewhat simplified

$$a(\tau) = \frac{\lambda}{\mu + \exp[(\tau + \alpha \xi c_0) m_1]}, \quad (26)$$

where $\lambda = -m_1 \alpha c_0$, $\mu = (1 + (\alpha+1) m_2 - (\alpha+1) (\alpha+2) s_3) c_1$. Substituting into the right-hand side of (24) an explicit expression for the function $a(\tau)$, determined by formula (15), we obtain

$$\frac{a'(\tau) + a(\tau) m_1}{a(\tau)^2} = \frac{\mu m_1}{\lambda} = \frac{s_3 \beta \omega}{\alpha},$$

where $\omega \equiv c_1 / c_0$. In this case, the dependence on the variable τ on the right-hand side of formula (24) vanishes. Thus, the recurrence formula (24) for the coefficient c_{n+1} is transformed to the final form

$$c_{n+1} = \frac{\beta (\alpha + n) \omega c_n}{\alpha (1 + n) (\beta + n)}. \quad (27)$$

Now we turn to the solution of the last equation (18), from which it is necessary to determine c_2 . Since there are $s_0 = 0$ among the necessary conditions, equation (18) will coincide with equation (15) for $n = 1$ and therefore the coefficient c_2 is calculated from formula (26) for $n = 1$.

It turns out that if the polynomials $m(r)$ and $s(r)$ of the order 2 and 3, respectively, are determined by the expressions (23), the solution of equation (1) can be represented as the sum of two series of the type (2), each of which has the following structure

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a(\tau)}{r} \right)^\alpha c_0 \left(1 + \left(\frac{a(\tau)}{r} \frac{\omega \beta}{\alpha} \right) \frac{\alpha}{\beta} + \left(\frac{a(\tau)}{r} \frac{\omega \beta}{\alpha} \right)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha (\alpha + 1)}{\beta (\beta + 1)} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{a(\tau)}{r} \frac{\omega \beta}{\alpha} \right)^3 \frac{1}{3!} \left(\frac{\alpha (\alpha + 1) (\alpha + 2)}{\beta (\beta + 1) (\beta + 2)} \right) + \dots + \left(\frac{a(\tau)}{r} \frac{\omega \beta}{\alpha} \right)^n \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha + k}{\beta + k} + \dots \right). \end{aligned}$$

Using again the confluent hypergeometric function, the result can be compactly written in the analytical form

$$c_0 \left(\frac{a(\tau)}{r} \right)^\alpha {}_1F_1 \left(\alpha, \beta, \frac{a(\tau)}{r} \frac{\omega\beta}{\alpha} \right). \quad (28)$$

As already mentioned, since equation (16) has two solutions (20), the solution of equation (1) can consist of two components of the form (2) with different sets of parameters (α, β) , whose values are determined by formulas (20) and (25):

$$P(r, \tau) = c_{01} \left(\frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha_1} {}_1F_1 \left(\alpha_1, \beta_1, \frac{a(\tau)}{r} \frac{\omega\beta_1}{\alpha_1} \right) + \\ + c_{02} \left(\frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha_2} {}_1F_1 \left(\alpha_2, \beta_2, \frac{a(\tau)}{r} \frac{\omega\beta_2}{\alpha_2} \right).$$

Before concretizing the solution, we will make some preliminary analysis. First, we consider the properties of the diffusion process, given by drift and volatility, determined by the functions (4) and (23). According to the assumptions made, the process of short-term interest rate $r(t)$, corresponding to these functions, is described by equation

$$dr(t) = (m_1 r(t) + m_2 r(t)^2) dt + \sqrt{2s_3} r(t)^{3/2} dt.$$

The marginal probability density of this process has the form

$$f(r) = \frac{\delta^{2-\gamma} e^{-\delta/r}}{r^{3-\gamma} \Gamma(2-\gamma)}, \quad \delta = \frac{m_1}{s_3} > 0, \quad \gamma = \frac{m_2}{s_3} < 2, \quad s_3 > 0, \quad r \geq 0,$$

where $\Gamma(x)$ is the gamma function. Taking into account these inequalities, we note that the parameters of expression (28), according to formulas (20) and (25), take the values $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta_2 > 0$, and β_1 can take positive values only when the volatility parameter is $s_3 > 4$, which practically does not occur in real cases.

As is well known, the bond price for $r > 0$ is a monotonically decreasing function with respect to the variable $\tau \in (0, \infty)$ from $P(r, 0) = 1$ to $P(r, \infty) = 0$. Therefore, expression (28) must have the same properties. The function ${}_1F_1(x, y, z)$ has suitable properties only for $x > 0$, $y > 0$, $z \in (-\infty, 0)$. Therefore, the first term in the representation (29) must be absent. In addition, for the argument z to ${}_1F_1$ to take values in the interval $(-\infty, 0)$ as τ changes in the

interval $(0, \infty)$, it is necessary to define the integration constant ξ in expression (15) by the equality $\xi = \ln(\beta \omega s_3) / \alpha c_0 m_1$. Then

$$a(\tau) = \frac{\lambda}{\mu + \exp[(\tau + \alpha \xi c_0) m_1]} = \frac{-m_1}{(e^{m_1 \tau} - 1) s_3}.$$

Finally, in order for the requirement $P(r, 0) = 1$, to be satisfied, it is necessary that the uncertain so far parameter c_0 be defined by the equality $c_0 = \Gamma(\beta - \alpha) / \Gamma(\beta)$. Thus, the final form of the solution (2) of equation (1) in the case under consideration has a final form

$$P(r, \tau) = \frac{\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)} \left(\frac{m_1}{r s_3 (e^{m_1 \tau} - 1)} \right)^\alpha {}_1F_1 \left(\alpha, \beta, \frac{-m_1}{r s_3 (e^{m_1 \tau} - 1)} \right),$$

where the parameters α and β are determined by means of formulas (20) and (25):

$$\alpha = \frac{1}{2s_3} (m_2 - s_3 + \sqrt{4s_3 + (m_2 - s_3)^2}) > 0,$$

$$\beta = \frac{1}{s_3} (s_3 + \sqrt{4s_3 + (m_2 - s_3)^2}) > 0.$$

We note that this solution completely coincides with the solution obtained in another way by D. Ahn and B. Gao [3], where in the notation of these authors $m_1 = \kappa\theta - \lambda_1 > 0$, $m_2 = -\kappa - \lambda_2 < 0$, $s_3 = \sigma^2/2$. In principle, using expression (18), we can find, by formulas (15), analytical expressions for the yield curve $y(r, \tau)$ and the forward curve $f(r, \tau)$. However, these expressions are very cumbersome and more practical to use numerical methods for expressing these functions for the necessary numerical parameters.

The functions $y(r, \tau)$ and $f(r, \tau)$, defined by formulas (15) in terms of the representation $P(r, \tau)$, can be investigated only by numerical methods. True, the limiting values of these functions can be found in an analytical form:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y(r, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} f(r, \tau) = r, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} y(r, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(r, \tau) = \alpha m.$$

As you can see, the left limit is determined only by the state of the market and does not depend on the model parameters, and the right limit is determined only by the structure of the model and does not depend on the state of the market at a certain moment in time.

Conclusions

The article presents models for which yield curves of zero-coupon bonds and corresponding forward curves can be found that are not related to the class of affine models. Unfortunately, models that admit such solutions are few and, in particular, include some well-known models: the CIR(1980) model [2] and the Ahn-Gao model [3]. Let us formulate the requirements for the structure of the short-term interest rate model, which would allow obtaining the term structure of the bond price in the form (2).

The parameters of the series (2) are determined by the equation (9), in fact, from which we obtain a system of equations with respect to the unknowns α , $a(\tau)$ and c_n , $n = 0, 1, 2, \dots$

1. To obtain a non-trivial solution (that is, for the presence of $c_n \neq 0$), it is necessary that the degrees p and q of the polynomials $m(r)$ and $s(r)$, determining the drift and volatility of the short-term interest rate, satisfy one of the following conditions: $\{p \leq 2, q = 3\}$, $\{p = 2, q \leq 3\}$, $\{p > 2, q = p + 1\}$. In these cases, the equations are found from which the positive parameter is determined.

2. Another necessary condition is related to the existence of $a(\tau)$, which does not depend on the summation index of the series (2).

3. In addition, it is necessary that the coefficients $\{c_n\}$ do not depend on the variable τ .

Simultaneous fulfillment of these necessary conditions significantly narrows the family of models for which the solution of the term structure equation (1) has the form (2).

REFERENCES

1. Medvedev G.A. Polynomial models of yield term structure // Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. 2017. No. 2(39). P. 39–48.
2. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. An analysis of variable rate loan contracts // J. Finance. 1980. V. 35. P. 389–403.
3. Ahn D.-H., Gao B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics // The Review of Financial Studies. 1999. V. 12(4). P. 721–762.
4. Vasiček O.A. An equilibrium characterization of the term structure // J. Financial Economics. 1977. No. 5. P. 177–188.
5. Keller-Ressel M., Steiner T. Yield curve shapes and the asymptotic short rate distribution in affine one-factor models // Finance and Stochastics. 2008. V. 12(2). P. 149–172.

Исследование устойчивости равновесия в экономико-математических моделях рынка телекоммуникаций

С.А. Васильев, Д.А. Урсова, Харун Хассан Салех

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

В связи с необходимостью анализа тех процессов, которые протекают в телекоммуникационной отрасли, стали активно развиваться методы математического моделирования в экономике телекоммуникаций [1–5]. Особенно важно это направление исследований в связи с развитием Интернета вещей (IoT) и внедрением мобильных сетей 5G. В данном докладе приводятся результаты исследования устойчивости равновесия в экономико-математической модели рынка телекоммуникаций в случае олигополии. Данная модель была построена авторами ранее в [6, 7]. В этой модели предполагается, что телекоммуникационные компании попарно договариваются о правилах тарификации доступа в сети друг друга, причём эта тарификация строится как функция от тарифов, которые компании предлагают своим абонентам за обслуживание. Таким образом, эти компании ограничиваются на первом шаге договорённостями по обоюдным правилам пропорциональной тарификации за доступ (ОППТД), которые впоследствии позволяют определить абонентские тарифы. Обоюдность правил означает, что компании подчиняются одним и тем же правилам на всем интервале времени, в течение которого действует договорённость. Если телекоммуникационные сервисы, предоставляемые различными компаниями, являются близкими субститутами, то использование ОППТД приводит к конкурентным ценам в отрасли.

Модель телекоммуникационной отрасли в случае олигополии и проблема существования, единственности и устойчивости равновесия модели

Рассмотрим случай, когда на рынке телекоммуникаций присутствуют M компаний $TELC_i (i \in \{1, \dots, M\})$, которые предоставляют телекоммуникационные сервисы $TELS_g (g \in \{1, \dots, G\})$. Каждая из этих компаний владеет своей телекоммуникационной сетью $Net_i (i \in \{1, \dots, M\})$, а

сети различных компаний попарно соединены. Будем предполагать, что предельная стоимость телекоммуникационных сервисов, предоставляемых компаниями, равна нулю.

Существующие фиксированные издержки компаний связаны с построением сети и её эксплуатацией, причём затраты на эксплуатацию сетей предполагаются независимыми от объёма услуг. Для каждой компании $TELC_i (i \in \{1, \dots, M\})$ имеются функции спроса на ее телекоммуникационные сервисы: функция спроса D_{gi} на сервисы $TELS_g (g \in \{1, \dots, G\})$, предоставляемые в пределах ее сети Net_i , и функция спроса $D_{gij} (i, j \in \{1, \dots, M\}, i \neq j)$ на сервисы, предоставляемые совместно как сетью Net_i , так в сетью $Net_j (i, j \in \{1, \dots, M\}, i \neq j)$. Таким образом, возникает вопрос о доступе одной компании к ресурсам сети другой компании.

Пусть компании $TELC_i$ и $TELC_j (i, j \in \{1, \dots, M\}, i \neq j)$ договариваются о тарифах $\hat{a}_{gij}$ и $\hat{a}_{gji}$, где $\hat{a}_{gij}$ – тариф, по которому компания $TELC_i$ платит компании $TELC_j (i, j \in \{1, \dots, M\}, i \neq j)$ за использование ее сетевых ресурсов в связи с сервисом $g \in \{1, \dots, G\}$, а $\hat{a}_{gji}$ – соответствующий тариф, по которому компания $TELC_j$ платит компании $TELC_i (i, j \in \{1, \dots, M\}, i \neq j)$ за использование сетевых ресурсов в связи с оказанием аналогичного сервиса $g \in \{1, \dots, G\}$. Через $p_{gi} (i \in \{1, \dots, M\})$ обозначим тариф, который компания $TELC_i$ взимает за единицу сервиса $g \in \{1, \dots, G\}$ с каждого из своих абонентов.

Далее предположим, что у любых двух компаний $TELC_i$ и $TELC_j (i, j \in \{1, \dots, M\}, i \neq j)$ тарифы $\hat{a}_{gij}$ и $\hat{a}_{gji}$ зависят от тарифов p_{gi} и p_{gj} , таким образом, что имеет место $\hat{a}_{gij} = a_{gi}(p_{gi}, p_{gj})$ для любых $i, j \in \{1, \dots, M\}, i \neq j$ и $g \in \{1, \dots, G\}$. В рамках рассматриваемой модели ограничимся случаем пропорциональной зависимости между $\hat{a}_{gij}$ и p_{gi} , что $\hat{a}_{gij} = a_{gi}p_{gi}$, где коэффициент пропорциональности $0 \leq a_{gi} \leq 1$ для $i \in \{1, \dots, M\}$ и $g \in \{1, \dots, G\}$.

Пусть далее $a_{gi} = a_{gj} = a$ ($i, j \in \{1, \dots, M\}, i \neq j, g \in \{1, \dots, G\}$), тогда будем считать, что компании $TELC_i$ и $TELC_j$ ($i, j \in \{1, \dots, M\}, i \neq j$) применяют обоюдное правило пропорциональной тарификации за доступ (ОППТД).

Функции прибыли компаний ($i, j \in \{1, \dots, M\}, i \neq j$) будет тогда иметь следующий вид:

$$\Pi_i = \sum_{g=1}^G [p_{gi} D_{gii}(p_{gi}) + \sum_{j=1}^M \{(p_{gi} - ap_{gj}) D_{gij}(p_{gi}, p_{gj}) + ap_{gi} D_{gji}(p_{gj}, p_{gi})\} - F_i(D_{gii}, D_{gij}, D_{gji})],$$

$$\Pi_j = \sum_{g=1}^G [p_{gj} D_{gjj}(p_{gj}) + \sum_{i=1}^M \{(p_{gj} - ap_{gi}) D_{gji}(p_{gj}, p_{gi}) + ap_{gj} D_{gij}(p_{gi}, p_{gj})\} - F_j(D_{gjj}, D_{gji}, D_{gij})],$$

где функции издержек каждой из компаний $F_i(D_{gii}, D_{gij}, D_{gji}) > 0$ и $F_j(D_{gjj}, D_{gji}, D_{gij}) > 0$ ($i, j \in \{1, \dots, M\}, i \neq j, g \in \{1, \dots, G\}$).

Пусть каждая компания максимизирует свою прибыль по цене, тогда можно рассмотреть следующую задачу оптимизации:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial p_{gi}} = 0, \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial p_{gi}^2} < 0, i \in \{1, \dots, M\}, g \in \{1, \dots, G\}. \quad (1)$$

Для анализа этой задачи рассмотрим задачу Коши для следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_i}{\partial p_{gi}} = H_i(D_{gii}, D_{gij}, D_{gji}), \\ \Pi_i(\bar{p}_{gi}) = \bar{\Pi}_i, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} H(D_{gii}, D_{gij}, D_{gji}) = & \sum_{g=1}^G [D_{gii}(p_{gi}) + p_{gi} \frac{\partial}{\partial p_{gi}} D_{gii}(p_{gi}) + \\ & + \sum_{j=1}^M \{D_{gij}(p_{gi}, p_{gj}) + (p_{gi} - ap_{gj}) \frac{\partial}{\partial p_{gi}} D_{gij}(p_{gi}, p_{gj}) + a(D_{gji}(p_{gj}, p_{gi}) + \\ & + ap_{gi} \frac{\partial}{\partial p_{gi}} D_{gji}(p_{gj}, p_{gi}))\} - \frac{\partial}{\partial p_{gi}} F_i(D_{gii}, D_{gij}, D_{gji})], \end{aligned}$$

где $\bar{p}_{gi}$ – начальная цена и $\bar{\Pi}_i$ – начальная прибыль.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть функции $H_i(D_{gii}, D_{gij}, D_{gji}) \in C^2$ непрерывны вместе со своими производными до второго порядка и при этом $0 \leq a_{gi} \leq 1$ для всех $i \in \{1, \dots, M\}$ и $g \in \{1, \dots, G\}$, тогда решение задачи Коши (2) существует и имеет единственное решение, непрерывно зависит от начальной цены $\bar{p}_{gi}$ и начальной прибыли $\bar{\Pi}_i$, при этом решение задачи максимизации (1) существует, единственно и устойчиво.

Заключение

Таким образом, если телекоммуникационные сервисы, предоставляемые различными компаниями, являются близкими субститутами, то использование ОППТД приводит к равновесным ценам в отрасли и это равновесие единственно и устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Armstrong M.* Competition in Telecommunications // Oxford Review of Economic Policy. 1997.
2. *Armstrong M.* Network Interconnection in Telecommunications // Economic Journal. 1998. V. 108. P. 545–564.
3. *Laffont J.-J., Tirole J.* Ceating Competition Through Interconnection: Theory and Practice. Institut d'Economie Industrielle, 1996.
4. *Laffont J.-J., Tirole J.* Access Pricing and Competition // European Economic Review. 1994.
5. *Laffont J.-J., Tirole J.* Network Competition: I. Overview and Nondiscriminatory Pricing // RAND Journal of Economics. 1997.
6. *Васильев С.А., Севастьянов Л.А., Урусова Д.А.* Построение экономико-математической модели рынка телекоммуникаций в случае олигополии // Вестник российского университета дружбы народов. Серия: математика, информатика, физика. 2011. № 2. С. 59–70.
7. *Vasilyev S.A., Salih H.H.* Analysis of dynamic pricing methods for telecommunication services in conditions of limited competition // 2017 CEUR Workshop Proceedings. 2017. V. 2064. P. 10–18.

Васильев Сергей Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент; svasilyev@sci.pfu.edu.ru;
Урусова Дина Александровна, аспирант; urusovada@str.mos.ru;
Харун Хасан Салех (Республика Чад), аспирант; harounhassan198@yahoo.fr

Исследование прикладного применения формальных математических моделей в генерации программного обеспечения

В.О. Георгиев¹, Н.А. Прокопьев²

¹ *Российская академия наук, г. Москва, Россия*

² *Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия*

Одной из наиболее важных задач в общем векторе дальнейшего развития предмета «Программная инженерия» (ПИ) является исследование прикладного применения формальных математических моделей для генерации программного обеспечения (ПО) сложных дискретных систем.

Математические модели могут быть использованы для них как для описания предметных областей сложных систем, так и для задания самого процесса создания ПО.

Представляемые тезисы раскрывают основные результаты такого исследования применительно к макетно-модельному подходу в области создания учебных макетов генераторов ПО.

В тезисах представлена систематизация формальных моделей и некоторые из кодово-реализованных макетов.

Систематизация моделей, их достоинств и особенностей рассмотрена в [1].

Среди основных моделей, которые нашли свое кодовое выражение в виде действующих макетных моделей генераторов ПО, выделяются: графовая (автоматная) модель, модель на основе функциональных сетей Петри, модель на основе семантических сетей, модель на основе реляционных данных, модель на основе теории формальных языков, вероятностная модель, модель на основе теории игр, тензорная модель, модель на основе генетических алгоритмов.

Основные концепции учебно-макетной реализации генератора ПО сложных систем представлены в [2].

Прикладная реализация модели на основе теории игр и на основе графовой модели – в [3].

Макет на основе модели, использующей сетевое представление в виде тензорной сети, – в [4].

Рассматриваются обновленные версии этих реализаций и макетные системы представления на основе семантических сетей и моделей, основанных на использование генетических алгоритмов [5, 6].

Модель на основе использования генетических алгоритмов представлена в виде системы формирования учебных тестов, учебного процесса тестирования знаний обучающихся по предмету.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prokopiev N.A., Georgiev V.O.* Comparative overview and interactive systems formal models analysis // Int. J. Pharmacy&Technology (IJPT). Sept. 2016. V. 8. Iss. 4.
2. *Георгиев В.О.* Концепции учебно-макетной реализации генератора ПО сложных систем // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017): Материалы XVI Международной конференции имени А.Ф. Терпугова (29 сентября – 3 октября 2017 г.). Томск: Изд-во НТЛ, 2017. Ч. 2. 356 с.
3. *Бурнашев Р.А., Аль-Саеди М.А.А., Галанин Д.Н., Георгиев В.О.* Концепции учебно-макетной реализации сборочного генератора ПО сложных систем // Научно-технический вестник Поволжья. 2017. № 3. DOI: 10.24153/2079-5920-2017-7-3.
4. *Бурнашев Р.А., Аль-Саеди М.А.А., Галанин Д.Н., Георгиев В.О.* Концептуальные основы и варианты макетной реализации сборочного генератора программного обеспечения сложных систем // Научно-методический журнал «XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс».
5. *Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы = Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte. 2-е изд. М: Горячая линия-Телеком, 2008. 452 с. ISBN 5-93517-103-1.
6. *Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М.* Генетические алгоритмы: учеб. пособие. 2-е изд. М: Физматлит, 2006. 320 с. ISBN 5-9221-0510-8.

Георгиев Виктор Олегович, к.т.н.; VOGeorgiev@kpfu.ru;

Прокопьев Николай Аркадиевич, аспирант; nikolai.prokopyev@gmail.com

Математическая модель оценки баланса солидарно-распределительной пенсионной системы в долгосрочном периоде

П.В. Калашников

Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия

На состояние пенсионной системы в настоящее время оказывает значительное влияние неблагоприятная демографическая ситуация, которая выражается в увеличении числа людей старших возрастов и росту их относительной доли в общей численности населения. По данным Федеральной службы государственной статистики [1] в настоящее время трудовую пенсию по старости получают 35 555 тыс. человек, что составляет порядка 24 % от общей численности населения, а общая численность пенсионеров, получающих различные виды пенсий, превышает 42 млн человек. Данный факт обуславливает постоянный рост уровня демографической нагрузки на трудоспособное население со стороны пожилых людей, что, в свою очередь, приводит к увеличению объема обязательств Пенсионного фонда РФ по исполнению обязательств, связанных с выплатой трудовой пенсии по старости на общих основаниях. Основные подходы к решению задачи актуарного оценивания солидарно-распределительной пенсионной системы описаны в работах [2, 3].

Построенная в ходе проведенного исследования модель пенсионной системы РФ ориентирована на решение задачи оценивания уровня сбалансированности страховых взносов и обязательств ПФР по выплате трудовой пенсии по старости на общих основаниях в долгосрочном периоде, а также определение комплекса управляющих воздействий на параметры актуарного базиса, позволяющего минимизировать возникающий дефицит средств, связанных с исполнением рассматриваемых обязательств.

Модель оценки баланса солидарно-распределительной пенсионной системы

Базовым понятием, применяемым при анализе демографической ситуации и построении долгосрочных прогнозов, является таблица смертности [4]. Связь вероятности дожития α_x лица в возрасте x лет до воз-

раста $x+1$ лет с численностью начальной совокупности людей, доживших до возраста x и $x+1$ лет, задается соотношением

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \quad (1)$$

где l_x, l_{x+1} – численность представителей начальной совокупности, доживающих до возраста x и $x+1$ лет соответственно.

Обозначим через $inv_x^{(m)}, inv_x^{(f)}$ – вероятность события «не получить инвалидность» для лица мужского и женского пола, находящегося в возрасте x лет и продолжающего трудовую деятельность в возрасте $x+1$ лет. Указанные показатели рассчитываются на основе таблиц инвалидизации населения РФ, разработанных Независимым актуарным информационно-аналитическим центром [5].

Используя вышеприведенные обозначения, численность мужчин и женщин данного возраста, доживающих до следующего года, можно оценить, исходя из следующего рекуррентного соотношения:

$$\begin{aligned} men_{x+1}^{(s+1)} &= men_x^{(s)} p_x^{(m)} inv_x^{(m)}, \\ fem_{x+1}^{(s+1)} &= fem_x^{(s)} p_x^{(m)} inv_x^{(f)}, \end{aligned} \quad (2)$$

$men_x^{(m)}, fem_x^{(f)}$ – численность представителей начальной совокупности мужского и женского населения соответственно в возрасте $x+1$ лет в год с номером s ; $p_x^{(m)}, p_x^{(f)}$ – вероятность дожития до возраста $x+1$ лет для представителя мужского и женского населения соответственно, в возрасте x лет.

Моделирование величины миграционного прироста мужского $migrmen_{x+1}^{(s+1)}$ и женского $migrfem_{x+1}^{(s+1)}$ населения, прибывающего на постоянное место жительства, определяется из соотношения

$$\begin{aligned} migrmen_{x+1}^{(s+1)} &= (imen_x^{(s)} - emen_x^{(s)}) p_x^{(m)} inv_x^{(m)}, \\ migrfem_{x+1}^{(s+1)} &= (ifem_x^{(s)} - efem_x^{(s)}) p_x^{(f)} inv_x^{(f)}, \end{aligned} \quad (3)$$

$imen_x^{(s)}, emen_x^{(s)}, ifem_x^{(s)}, efem_x^{(s)}$ – численность иммигрантов и эмигрантов среди мужского и женского населения соответственно в возраст-

те x лет в год, предшествующий году с номером $s+1$, прибывающих или отбывающих на постоянное место жительства.

Численность временных трудовых мигрантов мужского $imenw_x^{(s)}$ и женского $ifemw_x^{(s)}$ пола в возрасте x лет в год расчетного периода с номером s описывается с помощью экзогенных переменных модели в соответствии с данными Федеральной службы государственной статистики и имеющимися прогнозами по величине рабочей силы, привлекаемой из-за рубежа. По предположению модели значения указанных переменных для возрастных групп населения, приобретающих право на получение трудовой пенсии по старости на общих основаниях, полагаются равными нулю.

Общая численность мужского и женского населения с учетом рождаемости и миграции в возрасте x лет в год с номером s рассчитывается, исходя из соотношений

$$\begin{aligned} ment_x^{(s)} &= migrmen_x^{(s)} + men_x^{(s)} + imenw_x^{(s)}, \\ femt_x^{(s)} &= migrfem_x^{(s)} + fem_x^{(s)} + ifemw_x^{(s)}, \end{aligned} \quad (4)$$

$ment_x^{(s)}$, $femt_x^{(s)}$ – общая численность мужского и женского населения соответственно в возрасте x лет в год с номером s .

Общая численность пенсионеров по старости в данный год расчетного периода с номером s $N^{(s)}$ определяется по формуле

$$N^{(s)} = \sum_{x=60}^{100} ment_x^{(s)} + \sum_{x=55}^{100} femt_x^{(s)}. \quad (5)$$

Для моделирования величины доходов бюджета Пенсионного фонда РФ введем следующие обозначения:

α_1 – ставка тарифа по страховым взносам в ПФР для граждан старше 1967 г. рождения и 1967 г. рождения и моложе, не производящих выплат на накопительную часть трудовой пенсии по старости;

α_2 – ставка тарифа по страховым взносам в ПФР для граждан 1967 г. рождения и моложе, производящих выплаты на накопительную часть трудовой пенсии по старости;

${}_m w_x^{(s)}, {}_f w_x^{(s)}$ – средний уровень номинальной заработной платы мужского и женского населения соответственно в возрасте x лет в год расчетного периода с номером s ;

$\delta_x^{(x)}, \gamma_x^{(x)}$ – уровень занятости мужского и женского населения соответственно в возрасте x лет в год расчетного периода с номером s ;

${}_m \beta_x^{(s)}, {}_m 2 \beta_x^{(s)}$ – отношение численности мужского населения 1967 г. рождения и моложе в возрасте x лет, занятого в экономике, у которого соответственно отсутствует и присутствует накопительная часть трудовой пенсии по старости, к общей численности мужского населения данной возрастной группы и социальной принадлежности в год расчетного периода с номером s ;

${}_f 1 \beta_x^{(s)}, {}_f 2 \beta_x^{(s)}$ – отношение численности женского населения 1967 г. рождения и моложе в возрасте x лет, занятого в экономике, у которого соответственно отсутствует и присутствует накопительная часть трудовой пенсии, к общей численности женского населения данной возрастной группы и социальной принадлежности в год расчетного периода с номером s ;

Если в качестве базового года расчетного периода принять 2012 г., то величина страховых взносов, поступающих в ПФР от мужского населения в год с номером $s = 0, \dots, 13$, задается в виде следующих соотношений

$$\begin{aligned} {}_1 V_m^{(s)} &= \alpha_1 \sum_{x=18}^{45+s} {}_m w_x^{(s)} {}_m 1 \beta_x^{(s)} \delta_x^{(s)} ment_x^{(s)}, \\ {}_2 V_m^{(s)} &= \alpha_2 \sum_{x=18}^{45+s} {}_m w_x^{(s)} {}_m 2 \beta_x^{(s)} \delta_x^{(s)} ment_x^{(s)}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$old V_m^{(s)} = \alpha_1 \sum_{x=46+s}^{59} {}_m w_x^{(s)} \delta_x^{(s)} ment_x^{(s)},$$

$$mon V_m^{(s)} = {}_1 V_m^{(s)} + {}_2 V_m^{(s)} + old V_m^{(s)},$$

${}_1 V_m^{(s)}, {}_2 V_m^{(s)}$ – величина страховых взносов в Пенсионный фонд РФ от мужского населения младше и 1967 г. рождения соответственно, не имеющего и имеющего накопительной части трудовой пенсии по старости; $old V_m^{(s)}$ – величина страховых взносов в Пенсионный фонд РФ

от мужского населения старше 1967 г. рождения; ${}_{mon}V_m^{(s)}$ – величина страховых взносов в Пенсионный фонд РФ от мужского населения в каждый месяц года расчетного периода.

Для каждого года расчетного периода с номером $s = 14, \dots, 39$ расчет величины взносов в ПФР от мужского населения производится по формулам

$$\begin{aligned} {}_1V_m^{(s)} &= \alpha_1 \sum_{x=18}^{59} {}_m w_x^{(s)} {}_{m1} \beta_x^{(s)} \delta_x^{(s)} {}_{ment}_x^{(s)}, \\ {}_2V_m^{(s)} &= \alpha_2 \sum_{x=18}^{59} {}_m w_x^{(s)} {}_{m2} \beta_x^{(s)} \delta_x^{(s)} {}_{ment}_x^{(s)}, \\ {}_{mon}V_m^{(s)} &= {}_1V_m^{(s)} + {}_2V_m^{(s)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Если в качестве базового года расчетного периода принять 2012 г., то величина страховых взносов, поступающих в ПФР от женского населения в год с номером $s = 0, \dots, 8$ задается в виде следующих соотношений:

$$\begin{aligned} {}_1V_f^{(s)} &= \alpha_1 \sum_{x=18}^{45+s} {}_f w_x^{(s)} {}_{f1} \beta_x^{(s)} \gamma_x^{(s)} {}_{femt}_x^{(s)} \\ {}_2V_f^{(s)} &= \alpha_2 \sum_{x=18}^{45+s} {}_f w_x^{(s)} {}_{f2} \beta_x^{(s)} \gamma_x^{(s)} {}_{femt}_x^{(s)} \\ {}_{old}V_f^{(s)} &= \alpha_1 \sum_{x=46+s}^{59} {}_f w_x^{(s)} \gamma_x^{(s)} {}_{femt}_x^{(s)} \\ {}_{mon}V_f^{(s)} &= {}_1V_f^{(s)} + {}_2V_f^{(s)} + {}_{old}V_f^{(s)} \end{aligned} \quad (8)$$

${}_1V_f^{(s)} {}_2V_f^{(s)}$ – величина страховых взносов в Пенсионный фонд РФ от женского населения младше и 1967 г. рождения соответственно, не имеющего и имеющего накопительной части трудовой пенсии по старости; ${}_{old}V_f^{(s)}$ – величина страховых взносов в Пенсионный фонд РФ от женского населения старше 1967 г. рождения; ${}_{mon}V_f^{(s)}$ – величина взносов в Пенсионный фонд РФ от женского населения за каждый месяц года расчетного периода.

Для каждого года расчетного периода с номером $s = 9, \dots, 39$ расчет величины взносов в ПФР от женского населения производится по формуле

$$\begin{aligned} {}_1V_f^{(s)} &= \alpha_1 \sum_{x=18}^{54} {}_f w_x^{(s)} {}_{m1} \beta_x^{(s)} \gamma_x^{(s)} femt_x^{(s)}, \\ {}_2V_m^{(s)} &= \alpha_2 \sum_{x=18}^{54} {}_f w_x^{(s)} {}_{f2} \beta_x^{(s)} \gamma_x^{(s)} femt_x^{(s)}, \\ {}_{mon} V_f^{(s)} &= {}_1 V_f^{(s)} + {}_2 V_f^{(s)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Общая величина взносов в Пенсионный фонд РФ на финансирование страховой части трудовой пенсии V_s определяется на основе соотношения

$$V_s = 12 \left({}_{mon} V_m^{(s)} + {}_{mon} V_f^{(s)} \right). \quad (10)$$

Величина накопленных обязательств AL_s в год с номером s , отстоящий от базового на t лет, описывается соотношением

$$AL_s = 12 P_0 \prod_{t=1}^s (1 + \theta_t) \left(\sum_{x=60}^{100} ment_x^{(s)} + \sum_{x=55}^{100} femt_x^{(s)} \right),$$

P_0 – средняя величина пенсии по старости на общих основаниях в базовый год расчетного периода; θ_t – размер индексации средней пенсии в каждый последующий год относительно базового в соответствии с уровнем инфляции предыдущего года.

Уровень баланса взносов и обязательств Пенсионного фонда РФ по выплате страховой части трудовой пенсии по старости на общих основаниях B_s рассчитывается для каждого года расчетного периода на основе соотношения

$$B_s = V_s - AL_s. \quad (12)$$

Исходя из значений величины B_s , делается вывод о дефиците ($B_s < 0$), профиците ($B_s > 0$) или сбалансированности ($B_s = 0$) средств, необходимых для выполнения обязательств ПФР по выплате страховой части трудовой пенсии по старости на общих основаниях и поступивших в пенсионную систему страховых взносов.

При анализе возможных управляющих воздействий, направленных на сокращение дефицита бюджета ПФР в долгосрочном периоде, рас-

сматриваются следующие: увеличение рождаемости на 100000 человек ежегодно, увеличение величины миграционного прироста до величины 500 тыс. человек в год и численности легально работающих на территории временных трудовых мигрантов до 2.5 млн человек ежегодно, повышение пенсионного возраста для мужского и женского населения до 63 лет, а также полную отмену накопительной части пенсии по старости для населения младше 1967 г. рождения и внесение взносов только по страховому компоненту рассматриваемого пенсионного пособия.

Расчет уровня сбалансированности бюджета ПФР для каждого из рассмотренных сценариев изменения параметров актуарного базиса представлен на рис. 1.

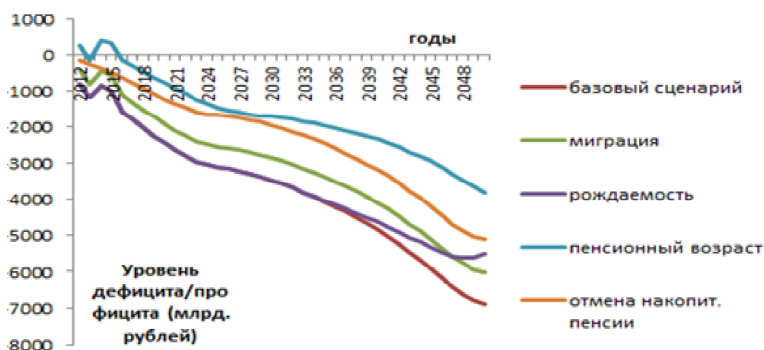


Рис. 1. Уровень сбалансированности бюджета ПФР для различных вариантов социально-экономической политики

Заключение

В ходе анализа полученных результатов был сделан вывод о значительном превышении обязательств по выплате трудовой пенсии по старости на общих основаниях над поступающими в ПФР страховыми взносами. Данная ситуация имеет место в долгосрочном периоде и свидетельствует о неэффективности действующей системы обязательного пенсионного страхования РФ.

Проведенный анализ параметров актуарного базиса позволил определить комплекс управляющих воздействий, которые минимизируют величину недостатка средств ПФР, необходимого для исполнения обязательств по выплате страховой пенсии по старости на общих основаниях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Численность* пенсионеров и средний размер назначенных пенсий по видам пенсионного обеспечения и категориям пенсионеров [Электронный ресурс]: данные Федеральной службы государственной статистики РФ. URL: http://www.gks.ru/free_doc/new_site/population/urov/urov_p2.htm (дата обращения: 1.02.2018).
2. *Смирнов И.В.* Демография: учебное пособие. Калуга: филиал СЗАГС в г. Калуга, 2004. 138 с.
3. *Симоненко В.Н.* Сценарий моделирования пенсионной системы в разрезе современного состояния экономики // Вестник ТОГУ. 2010. № 4(19). С. 145–152.
4. *Бауэрс Н., Гербер Х. и др.* Актуарная математика. М.: Янус-К, 2001. 656 с.
5. *Баскаков В.Н.* Страхование от несчастных случаев на производстве: актуарные основы. М.: Academia, 2001. 192 с.

Синтез нестационарного экстраполятора для дискретных моделей с марковскими скачкообразными параметрами¹

К.С. Ким, В.И. Смагин

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Задачи фильтрации, экстраполяции и управления и для объектов с непрерывным временем и параметрами со скачками рассматривались в работах [1–5]. Подобные задачи изучались для дискретных систем авторами [6, 7] и др. В настоящей работе рассмотрена задача синтеза оптимальных нестационарных экстраполяторов для дискретных объектов со случайными скачкообразными параметрами с двумя состояниями.

1. Постановка задачи

Пусть модель объекта описывается дискретным уравнением:

$$x(k+1) = A_\gamma x(k) + q_\gamma(k), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $\gamma(k)$ – марковская цепь с двумя состояниями γ_1, γ_2 ; x_0 – случайный вектор $\bar{x}_0 = M\{x_0\}$, предполагаются известными начальные дисперсии $N_{0,i} = M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T / \gamma = \gamma_i\}$, $i = \overline{1,2}$; A_γ – заданная матрица; $q_\gamma(k)$ – случайные ошибки наблюдений со следующими характеристиками: $M\{q_\gamma(k)\} = 0$, $M\{q_\gamma(k)q_\gamma^T(k)\} = Q_\gamma \delta_{kj}$ ($M\{\cdot\}$ – математическое ожидание).

Канал наблюдений имеет вид

$$y(k) = S_\gamma x(k) + v_\gamma(k), \quad (2)$$

где $v_\gamma(k)$ – независимые гауссовские случайные последовательности с характеристиками $M\{v_\gamma(k)\} = 0$, $M\{v_\gamma(k)v_\gamma^T(k)\} = V_\gamma \delta_{kj}$.

¹ Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ № 17-08-00920.

Вероятность $p_i(k) = P\{\gamma(k) = i\}$, $i = \overline{1, 2}$, удовлетворяет уравнению

$$p_i(k+1) = \sum_{j=1}^2 p_{ij} \cdot p_j(k), \quad p_i(0) = p_{i,0}, \quad (3)$$

где p_{ij} – вероятность перехода из состояния i в состояние j за один такт времени, $p_{i,0}$ – начальная вероятность i -го состояния.

По информации, поступившей в момент k , требуется найти оценку состояния прогноза $\hat{x}(k+1)$ на основе минимизации следующего критерия:

$$J[0; T_f] = M \left\{ \left[\sum_{k=0}^{T_f} \sum_{i=1}^2 p_i(k) e^T(k) R_i(k) e(k) + \sum_{i=1}^2 p_i(T_f) e^T(T_f) L_i(T_f) e(T_f) \right] / \gamma(0) = \gamma_0 \right\}, \quad (4)$$

где $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, $R_i(k) > 0$ и $L_i(T_f) > 0$ – весовые матрицы, γ_0 – начальное значение переменной γ .

2. Двухточечная краевая задача

Для построения оценки будем использовать экстраполятор Калмана

$$\hat{x}(k+1) = A_\gamma \hat{x}(k) + K(k)(y(k) - S_\gamma \hat{x}(k)), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \quad (5)$$

где $K(k)$ – матрица коэффициентов передачи экстраполятора, зависящая от k и не зависящая от $\gamma(k)$.

Введем обозначения для матриц $Q_\gamma, V_\gamma, R_\gamma, N_\gamma, L_\gamma, A_\gamma, S_\gamma$, при $\gamma = \gamma_i$: $Q_i, V_i, R_i, N_i, L_i, A_i, S_i$ соответственно ($i = 1, 2$).

Теорема: Если существуют положительно определенные матрицы N_i и L_i , являющиеся решением двухточечной краевой задачи:

$$N_i(k+1) = (A_i - K(k)S_i)(p_{i,1}N_1(k) + p_{i,2}N_2(k))(A_i - K(k)S_i)^T + Q_i + K(k)V_iK(k)^T, \quad N_i(0) = N_0; \quad (6)$$

$$L_i(k) = (A_i - K(k)S_i)^T (p_{i,1}L_1(k+1) + p_{i,2}L_2(k+1))(A_i - K(k)S_i) + R_i, \\ L_i(T_f) = L_{T,i}, \quad (7)$$

тогда вектор $\text{st}(K(k))$, составленный из строк матрицы $K(k)$ определит-

ся по формуле

$$\begin{aligned} \text{ct}(K(k)) = & \left(\sum_{i=1}^2 p_i(k+1)[L_i(k+1) \otimes S_i(p_{i,1}N_1(k) + p_{i,2}N_2(k))S_i^T + \right. \\ & \left. + L_i(k+1) \otimes V_i] \right)^{-1} \text{ct} \left(\sum_{i=1}^2 p_i(k+1)L_i(k+1)A_i(p_{i,1}N_1(k) + p_{i,2}N_2(k))S_i^T \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Доказательство: представим критерий (3) в виде суммы

$$J[0; T_f] = \sum_{i=1}^2 J_i[k; T_f], \quad k = \overline{0, T_f}. \quad (9)$$

$$\text{Далее } J_i[k; T_f] = \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi)N_i(\xi)R_i(\xi) + \text{tr } p_i(T_f)N_i(T_f)L_i(T_f), \quad (10)$$

где tr – след квадратичной матрицы.

Введем вспомогательную функцию следующего вида:

$$W(k, N_i(k)) = \text{tr } p_i(k)N_i(k)R_i(k) + \text{tr} \sum_{t=k}^{T_f} p_i(t)\Psi_i(t)L_i(t), \quad (11)$$

где $L_i(t)$ – удовлетворяет (7);

$$\Psi_i(t) = Q_i + K(t)V_iK(t)^T. \quad (12)$$

Просуммируем по $k = \overline{t, T_f-1}$ конечные разности функции $W(k, N_i(k))$, учитывая формулу (7):

$$\begin{aligned} \sum_{k=t}^{T_f-1} \Delta W(k, N_i(k)) &= \sum_{k=t}^{T_f-1} [W(k+1, N_i(k+1)) - W(k, N_i(k))] = \\ &= \sum_{k=t}^{T_f-1} \text{tr} [p_i(k+1)N_i(k+1)L_i(k+1) - p_i(k)N_i(k)L_i(k) - p_i(k)\Psi_i(k)L_i(k)]. \end{aligned} \quad (13)$$

С другой стороны, данное выражение можно представить как

$$\begin{aligned} \sum_{k=t}^{T_f-1} \Delta W(k, N_i(k)) &= W(t+1, N_i(t+1)) - W(t, N_i(t)) + \dots + \\ &+ W(T_f, N_i(T_f)) - W(T_f-1, N_i(T_f-1)) = \\ &= \text{tr } p_i(T_f)N_i(T_f)L_i(T_f) - \text{tr } p_i(t)N_i(t)L_i(t) - \text{tr} \sum_{\xi=t}^{T_f-1} p_i(\xi)\Psi_i(\xi)L_i(\xi). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставим в формулу (11) разность (15) и (16):

$$\begin{aligned}
 J_i[k; T_f] &= \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi) N(\xi)_i R_i(\xi) + \text{tr } p_i(T_f) N_i(T_f) L_i(T_f) + \\
 &+ \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr} [p_i(\xi+1) N_i(\xi+1) L_i(\xi+1) - p_i(\xi) N_i(\xi) L_i(\xi) - p_i(\xi) \Psi_i(\xi) L_i(\xi)] - \\
 &- [\text{tr } p_i(T_f) N_i(T_f) L_i(T_f) - \text{tr } p_i(k) N_i(k) L_i(k) - \text{tr} \sum_{\xi=k}^{T_f-1} p_i(\xi) \Psi_i(\xi) L_i(\xi)] = \quad (15) \\
 &= \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi) N_i(\xi) R_i(\xi) + \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi+1) N_i(\xi+1) L_i(\xi+1) - \\
 &\quad - \sum_{\xi=k+1}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi) N_i(\xi) L_i(\xi).
 \end{aligned}$$

Критерий (10) с учетом (15) и (6) представим в виде

$$\begin{aligned}
 J[0; T_f] &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi) N_i(\xi) R_i(\xi) - \sum_{\xi=k+1}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi) N_i(\xi) L_i(\xi) + \right. \\
 &+ \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi+1) \left[(A_i - K(\xi) S_i) (p_{i,1} N_1(\xi) + p_{i,2} N_2(\xi)) (A_i - K(\xi) S_i)^T + \right. \\
 &\quad \left. + Q_i + K(\xi) V_i K(\xi)^T \right] L_i(\xi+1) \left. \right\}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Используя правила дифференцирования функции след tr от произведения матриц:

$$\frac{\partial \text{tr} A X B}{\partial X} = A^T B^T, \quad \frac{\partial \text{tr} A X^T B}{\partial X} = B A, \quad (17)$$

вычислим производную по $K(k)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J}{\partial K(k)} &= \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \sum_{i=1}^2 \left[-L_i(\xi+1) p_i(\xi+1) A_i (p_{i,1} N_1(\xi) + p_{i,2} N_2(\xi)) S_i^T - \right. \\
 &- p_i(\xi+1) L_i(\xi+1) A_i \left(\sum_{j=1}^2 p_{ij} N_j(\xi) \right) S_i^T + p_i(\xi+1) L_i(\xi+1) K(\xi) S_i \times \\
 &\times (p_{i,1} N_1(\xi) + p_{i,2} N_2(\xi)) S_i^T + L_i(\xi+1) p_i(\xi+1) K(\xi) S_i (p_{i,1} N_1(\xi) + \\
 &+ p_{i,2} N_2(\xi)) S_i^T + p_i(\xi+1) L_i(\xi+1) K(\xi) V_i + L_i(\xi+1) p_i(\xi+1) K(\xi) V_i \left. \right]. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Приравняв эту производную нулю и полагая, что каждое слагаемое суммирования по i равно нулю, получим уравнения для определения элементов матрицы $K(k)$:

$$\begin{aligned}
 & p_i(\xi+1)L_i(\xi+1)K(\xi)S_i(p_{i,1}N_1(\xi) + p_{i,2}N_2(\xi))S_i^T + \\
 & + p_i(\xi+1)L_i(\xi+1)K(\xi)V_i + L_i(\xi+1)p_i(\xi+1)K(\xi)S_i(p_{i,1}N_1(\xi) + \\
 & + p_{i,2}N_2(\xi))S_i^T + L_i(\xi+1)p_i(\xi+1)K(\xi)V_i = \\
 & = L_i(\xi+1)p_i(\xi+1)A_i(p_{i,1}N_1(\xi) + p_{i,2}N_2(\xi))S_i^T + \\
 & + p_i(\xi+1)L_i(\xi+1)A_i(p_{i,1}N_1(\xi) + p_{i,2}N_2(\xi))S_i^T.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Запишем аналитическое решение линейного матричного уравнения (19) для вектора $\text{ct}(K(k))$ с использованием операции кронекеровского произведения [10]:

$$\begin{aligned}
 \text{ct}(K(k)) = & \left(\sum_{i=1}^2 p_i(k+1)[L_i(k+1) \otimes S_i(p_{i,1}N_1(k) + p_{i,2}N_2(k))S_i^T + \right. \\
 & \left. + L_i(k+1) \otimes V_i] \right)^{-1} \times \text{ct} \left(\sum_{i=1}^2 p_i(k+1)L_i(k+1)A_i(p_{i,1}N_1(k) + p_{i,2}N_2(k))S_i^T \right).
 \end{aligned}$$

Для нахождения матрицы $K(k)$ необходимо решить с учетом уравнения (8) двухточечную краевую задачу (6) и (7).

3. Сведение к задаче Коши

Рассмотрим сначала задачу синтеза стационарного экстраполятора. В этом случае матрица коэффициентов передачи будет постоянной, а критерий примет вид

$$J[0; \infty] = \sum_{i=1}^2 \sum_{\xi=k}^{\infty} \text{tr } \bar{p}_i N_i R_i. \tag{20}$$

Тогда двухточечная краевая задача преобразуется в следующую систему матричных уравнений:

$$N_i = (A_i - KS_i)(p_{i,1}N_1 + p_{i,2}N_2)(A_i - KS_i)^T + Q_i + KV_iK^T; \tag{21}$$

$$L_i = (A_i - KS_i)^T(p_{i,1}L_1 + p_{i,2}L_2)(A_i - KS_i) + R_i; \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \text{ct}(K) = & \left(\sum_{i=1}^2 \bar{p}_i [L_i \otimes S_i (p_{i,1} N_1 + p_{i,2} N_2) S_i^T + L_i \otimes V_i] \right)^{-1} \times \\ & \times \text{ct} \left(\sum_{i=1}^2 \bar{p}_i L_i A_i (p_{i,1} N_1 + p_{i,2} N_2) S_i^T \right), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\bar{p}_i$ – установившиеся вероятности в системе (решение системы (3) при $k \rightarrow \infty$).

Осуществим синтез нестационарного экстраполятора посредством сведения задачи синтеза с использованием двухточечной краевой задачи к решению, использующему только задачу Коши. Для этого предлагается использовать постоянные матрицы L_i , полученные из решения системы (21) – (23), для синтеза нестационарного экстраполятора посредством решения следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} N_i(k+1) = & (A_i - K(k)S_i)(p_{i,1}N_1(k) + p_{i,2}N_2(k))(A_i - K(k)S_i)^T + \\ & + Q_i + K(k)V_iK(k)^T, \quad N_i(0) = N_0, \end{aligned} \quad (24)$$

где матрица $K(k)$, зависящая от времени, вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \text{ct}(K(k)) = & \left(\sum_{i=1}^2 p_i(k+1) [L_i \otimes S_i (p_{i,1}N_1(k) + p_{i,2}N_2(k)) S_i^T + \right. \\ & \left. + L_i \otimes V_i] \right)^{-1} \times \text{ct} \left(\sum_{i=1}^2 p_i(k+1) L_i A_i (p_{i,1}N_1(k) + p_{i,2}N_2(k)) S_i^T \right), \end{aligned} \quad (25)$$

которая отличается от формулы (8) тем, что $L_i(k+1)$ заменены на L_i .

Заключение

Получено решение задачи синтеза нестационарного экстраполятора для линейной дискретной модели со случайными марковскими скачкообразными параметрами с двумя состояниями.

Переход от двухточечной краевой задачи, возникающей при синтезе нестационарного экстраполятора, к задаче Коши упрощает процедуру синтеза и позволяет осуществлять реализацию нестационарного экстраполятора для модели со скачкообразными параметрами в режиме он-лайн и может быть использован для синтеза робастных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mariton M.* Jump linear systems in automatic control. New York: Marcel Dekker, 1990.
2. *Shi P., Boukas E.K., Agarwal R.K.* Kalman filtering for continuous-time uncertain systems with Markovian jumping parameters // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1999. V. 44. Iss. 8. P. 1592–1597.
3. *Смагин В.И., Поползухина Е.В.* Синтез следящих систем управления для объектов со случайными скачкообразными параметрами и мультипликативными возмущениями // *Вестник Томского государственного университета*. 2000. № 271. С. 171–174.
4. *Ломакина С.С., Смагин В.И.* Робастная фильтрация в непрерывных системах со случайными скачкообразными параметрами // *Вестник Томского государственного университета*. 2003. № 280. С. 201–203.
5. *Ломакина С.С., Смагин В.И.* Робастная фильтрация для непрерывных систем со случайными скачкообразными параметрами и вырожденными шумами в наблюдениях // *Автометрия*. 2005. № 2. С. 36–43.
6. *Terra M.H., Ishihara J.Y., Jesus G., and Cerri J.P.* Robust Estimation for Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems // *IEEE Trans. On Automatic Control*. 2013. V. 58. No. 8. P. 2065–2071.
7. *Белявский Г.И., Мисюра И.В.* Фильтрация сигналов со скачками, возникающими в дискретном времени и с конечным горизонтом // *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки*. 2014. № 2 (194). С. 137–144.
8. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1973. 280 с.

Ким Константин Станиславович, аспирант; kks93@rambler.ru;

Смагин Валерий Иванович, д.т.н., профессор; vsm@mail.tsu.ru

Математическое моделирование деформирования тяжелой упругой пластины конечной толщины под воздействием системы нагрузок

О.В. Марченко, А.М. Сергеева

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН,
г. Комсомольск-на-Амуре, Россия*

Проблеме разработки математических моделей для анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) материалов, исследованиям поведения объектов под воздействием системы нагрузок, решениям контактных задач посвящено много работ российских и зарубежных исследователей. Применение математического моделирования при проведении теоретических исследований позволяет получать новые знания, существенно сокращая временные и сырьевые затраты. Кроме того, представляется возможным детальное изучение образования и распространения трещин в материале, прогнозирование возможных областей – концентраторов напряжений, а также предупреждение возможных нежелательных разрушений. Моделирование объектов в качестве упругой изотропной пластины конечной толщины чаще используется при исследованиях бетонных металлических конструкций, но иногда применяется к исследованиям ледяного покрова [1, 2].

Проводя исследование особенностей ледяного покрова и процессов нарушения его сплошности в результате деформирующего воздействия методами математического моделирования, необходимо учитывать, что физические и механические свойства исследуемого материала являются зависимыми от температуры, кроме того, некоторые задаваемые величины являются известными, тогда как другие могут быть случайными. Необходимо также максимально учитывать различные комбинации параметров окружающей среды, которые могут оказывать существенное влияние на протекание процессов. Исследуя ледяной покров, необходимо учитывать, что напряжения растяжения или сдвига, при которых происходит полное разрушение ледяного покрова, должны в несколько раз превышать предел прочности льда, определенный для образца в лабораторных условиях [3]. В случае, если напряжения незначительно превышают предел прочности, может образовываться трещина или

группа трещин, при этом лед переходит в новое устойчивое состояние и выдерживает внешнюю нагрузку.

Разрабатывая математическую модель, необходимо учитывать не только физические особенности моделируемого процесса, но также прорабатывать модель для решения широкого круга задач. В данной работе рассмотрено построение математической модели для проведения исследований объектов, которые можно представить в виде упругой изотропной пластины конечной толщины, находящейся под действием квазистатических и динамических нагрузок, а также инородных исследуемому объекту нагрузок, которые имеют возможность внедряться в пластину.

Постановка задачи

Применяя теорию малых упругих деформаций и эйлерову систему координат, записывается система дифференциальных уравнений:

Уравнение движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i^t = I_i^t, \quad (1)$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$; $t = 1, 2, \dots, n$, – номер нагрузки.

В случае подвижной нагрузки:

$$I_i^t = \rho_t (\dot{v}_i + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}).$$

В случае стационарного движения нагрузки:

$$I_i^t = \rho_t (v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}).$$

В случае неподвижной нагрузки:

$$I_i^t = 0.$$

Закон Гука

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G \varepsilon_{ij}, \quad (2)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}),$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Уравнение теплопроводности (только для пластины)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) = 0; i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

В уравнениях (1) – (3) используется суммирование по повторяющимся индексам; θ – температура льда; $\rho = \rho(\theta)$ – плотность льда; $G = G(\theta)$ – модуль сдвига льда; σ_{ij} – тензор напряжений; ε_{ij} – тензор деформаций; v_i, F_i – проекции скорости перемещений и удельной объемной силы по координатным осям $x_i, i = 1, 2, 3$; λ – коэффициент теплопроводности; $\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial \tau}$, τ – время деформации.

Применение модели рассматривается на примере решения задачи о деформировании упругой изотропной пластины, материал которой – пресный лед. Ледяная пластина претерпевает деформирующее воздействие со стороны ледокольного судна в виде приставки [4]. В носовой оконечности судна при помощи креплений устанавливают ледокольную приставку, перед которой в ледяном покрове создают его свободную кромку. Приставку выполняют в виде плавучей емкости, в диаметральной плоскости которой устанавливают форштень, наклонный под углом к горизонтально поверхности, а по бортам – боковые ножи с углом в плане β и наклоненные к горизонту под таким же, но отрицательным по отношению к форштенью углом. Благодаря такой геометрической форме форштеня и боковым ножам, при их контакте со свободной кромкой в ледяном покрове между ножами будут возникать сжимающие усилия. При достаточном расстоянии и усилении это приведет к потере устойчивости формы участка льда и его разрушению. Отломанный участок льда от сплошного льда притопится наклонным днищем приставки, и его обломки бортами судна раздвинутся под кромки образовавшегося канала.

В работе решается пространственная задача о внедрении в лед двух клиньев и вертикальной нагрузки, которые вызывают деформацию льда. Деформируемые среды (клин и лед) считаются упругими и изотропными. При постановке и решении задачи массовые силы не учитывались. Решение уравнения теплопроводности приведено в работах [7, 8]. Для проведения исследований применялся численный метод [9], в соответствии с которым область разбивалась на объемные ортогональные ячейки конечных размеров, для которых записывалась система

уравнений в разностном виде. Расчет деформации ледяной пластины приведен в [12].

Результаты численных исследований показали, что ледокольное устройство может быть использовано для разрушения ледяного покрова толщиной 0,5 м, причем оптимальная скорость устройства равна 8 км/ч. Предложенная модель и результаты исследования могут быть использованы для разработок инновационных способов разрушения льда и прокладывания судоходных каналов в зимние периоды на реках северных регионов.

Заключение

Представленные исследования находящегося под воздействием системы нагрузок ледяного покрова с применением разработанной математической модели однородной изотропной пластины конечной толщины, находящейся под действием нескольких нагрузок, показали пригодность разработанной модели для проведения исследований напряженно-деформированного состояния нагруженных пластин.

Предложенная математическая модель деформирования системой нагрузок однородной изотропной пластины конечной толщины и результаты исследования напряженно-деформированного состояния ледяного покрова могут быть использованы для разработок инновационных способов разрушения льда и прокладывания судоходных каналов в зимние периоды на реках северных регионов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лосет С., Шхинек К., Гудместад О., Хойланд К. Воздействие льда на морские и береговые сооружения. СПб.: Лань, 2010. 272 с.
2. Козин В.М., Онищук А.В., Марьин Б.Н. и др. Ледоразрушающая способность изгибно-гравитационных волн от движения объектов. Владивосток: Дальнаука, 2005. 191 с.
3. Сергеева А.М. Моделирование разрушения ледяного покрова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 1. С. 131–137.
4. Пат. 2229415 Российской Федерации. Устройство для разрушения ледяного покрова / Горкунов Э.С., Колмогоров В.Л., Козин В.М., Одинокое В.И. Опубл. 27.05.04.
5. Богородский В.В., Гаврило В.П. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 384 с.
6. Богородский В.В., Гаврило В.П., Недошивин О.А. Разрушение льда. Методы, технические средства. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 232 с.

7. *Сергеева А.М., Одинокое В.И., Марченко О.В.* Математическое моделирование процессов деформирования пластины конечной толщины, находящейся под действием системы нагрузок // Приоритеты и научное обеспечение технологического прогресса: сб. статей Международной научно-практической конференции. Уфа: Аэтерна, 2016. С. 100–102.
8. *Сергеева А.М., Марченко О.В.* Применение математической модели деформирования пластины конечной толщины для исследования напряженно-деформированного состояния ледяного покрова // Инновационные исследования: Проблемы и направления развития: сб. статей Международной научно-практической конференции: в 2 ч. Ч. 1. Уфа: МЦИИ ОМЕГА САЙНС, 2016. С. 8–11.
9. *Одинокое В.И.* Численное исследование процесса деформации материалов бескоординатным методом. Владивосток: Дальнаука, 1995. 168 с.
10. *Сергеева А.М., Одинокое В.И., Марченко О.В.* Определение напряженно- деформированного состояния ледяного покрова при движении под ним ледокольной приставки // Математическое моделирование. 2009. № 10. С. 47–57.
11. *Сергеева А.М., Марченко О.В.* Деформация ледяного покрова под действием атмосферного давления и собственного веса льда // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Н. Новгород : НГТУ им. Р.Е. Алексеева, 2010. № 4 (83). С. 157–165.
12. *Марченко О.В., Сергеева А.М.* Об особенностях деформирования тяжелой упругой пластины конечной толщины под действием подвижной нагрузки применительно к изучению прочности ледяного покрова // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4 (30). С. 61–72.
13. Свидетельство № 2007614584 Российская Федерация. Моделирование процесса разрушения ледяного покрова с помощью ледокольной приставки: свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ / Одинокое В.И., Сергеева А.М., Захарова Е.А. № 2007612232; зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 31.10.2007.

Марченко Олеся Владимировна; olemarchenko@yandex.ru

Сергеева Анастасия Михайловна, к.ф.-м.н.; serg-nasty@mail.ru

Анализ и применение множественных межканальных связей в ЭЭГ

М.А. Новожилов, Р.И. Ивановский

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
г. Санкт-Петербург, Россия*

Показано, что методы регрессионного анализа могут быть распространены не только на изучение нелинейных парных связей каналов ЭЭГ, но и на их множественные связи. На этой основе разработана технология выявления информативных корковых зон головного мозга для конкретных психоневрологических заболеваний. Для оценки степени связанности выделяемых при этом групп каналов используются сводные коэффициенты корреляции. На этапе выделения групп каналов вводится параметр – уровень нелинейности парной связи. Изучается влияние его значения на анализ множественных связей ЭЭГ.

Современное состояние проблемы анализа межканальных связей ЭЭГ

Использование электроэнцефалографии – один из способов изучения центральной нервной системы. Он связан с записью электрических потенциалов на поверхности головы [1]. Проблема анализа и обработки электроэнцефалограмм (ЭЭГ), а также использования полученных результатов остается весьма острой. Одним из распространенных путей исследования ЭЭГ служит изучение взаимосвязей между отдельными каналами, каждый из которых соответствует определенной функциональной корковой зоне головного мозга. Как показано в [2], эта проблема имеет два подхода к своему решению.

В первом (и наиболее распространенном) анализируются связи каждой пары каналов с использованием параметров линейной группы. Основным из этих параметров обычно служит коэффициент корреляции Пирсона. Несмотря на то, что эти коэффициенты алгоритмически предельно просты и широко применяются на практике, они не могут объективно характеризовать степень взаимосвязи, поскольку область применения этих параметров ограничивается использованием лишь линейных моделей связей.

Во втором подходе анализ ЭЭГ использует нелинейные модели связи. Этот подход связан с появлением так называемого нелинейного коэффициента корреляции [3]. Однако этот коэффициент обладает рядом недостатков, анализ которых представлен в [2]. Таким образом, возникает необходимость в простом и универсальном параметре, который позволял бы использовать линейные и нелинейные подходы к анализу межканальных (парных и множественных) связей. Для решения данной проблемы в [2] было предложено использовать пострегрессионный параметр – корреляционное отношение R ($1 > R \geq 0$). Ниже дается краткое описание данного параметра [2].

Анализируемые данные ЭЭГ являются набором из m реализаций случайных величин. Каждая реализация обладает объемом n , зависящим от временного промежутка, за который эти данные были получены. Таким образом, эти данные могут быть представлены в виде $(n \times m)$ -матрицы $\mathbf{F}$. Обычно исследование связей ЭЭГ ограничивается анализом взаимодействия двух каналов, т. е. для m -канальной ЭЭГ $m(m-1)$ пар. Корреляционное отношение R способно объективно характеризовать уровни парных связей для любых их моделей.

Предварительный анализ показал практическую целесообразность формирования всей совокупности параметров R в виде $(m \times m)$ -матрицы $\mathbf{R}$. Здесь m – число столбцов матрицы $\mathbf{F}$ для m -канальной ЭЭГ. Вне диагонали матрицы $\mathbf{R}$ расположены значения R_{ij} ($i \neq j$), причем в общем случае $R_{ij} \neq R_{ji}$. Индексы j этих значений являются номерами каналов-откликов, а индексы i определяют номера каналов-факторов, связанных с j -м каналом-откликом. Диагональные элементы $\mathbf{R}$ содержат единицы.

Значения элементов матрицы $\mathbf{R}$ дают полную информацию о наличии линейных ($R_{ij} = R_{ji}$) и нелинейных ($R_{ij} \neq R_{ji}$) связей в парах каналов. Сопоставлением R_{ij} и R_{ji} определяется лучший вариант нелинейной модели и распределение факторов-откликов в таких парах.

Из матрицы $\mathbf{R}$ может быть выделена матрица $\mathbf{R}_0$ превалирующих параметров R , используя величину $q = R_{ij} - R_{ji}$, при $R_{ij} > R_{ji}$. Отметим, что в этом случае q характеризует меру нелинейности или превалирования одной связи в паре над другой.

Анализ столбцов матрицы $\mathbf{R}_0$ позволяет получить сведения о множественных превалирующих нелинейных связях. Те каналы-отклики, которые находятся под влиянием не менее двух каналов-факторов, будем называть доминирующими. Группу, образованную j -м доминирующим

каналом с его каналами-факторами, будем называть j -й D -группой. Таким образом, каждый j -й столбец $\mathbf{R}_0$, имеющий не менее двух элементов, характеризует определенную D -группу. Общее число D -групп в данных ЭЭГ не превышает m .

Зависимость D -групп от уровня нелинейности связей

Характеристикой множественных связей может служить сводный коэффициент корреляции R_s ($1 > R_s \geq 0$), который определяет интегральный уровень связей в каждой D -группе между основным ее каналом (откликом) и всей совокупностью каналов-факторов, входящих в ее состав. В [4] дано определение параметра R_s через решение задачи множественной регрессии, где он представлен как коэффициент корреляции отклика и его оценки, что указывает на простой алгоритм оценки R_s . Из того, что этот параметр является пострегрессионным, следует, что R_s можно использовать при любых моделях связей в качестве критерия выбора вариантов моделей.

Отмеченные свойства R_s позволяют рекомендовать этот параметр в качестве основного при анализе множественных связей в D -группах. Таким образом, получение этой характеристики сводится к следующим действиям. На основе данных ЭЭГ, вычисляется матрица корреляционных отношений $\mathbf{R}$, она преобразуется в матрицу $\mathbf{R}_0$, далее, выделяются D -группы. Для каждой из последних решается задача множественной регрессии (для j -й D -группы j -й канал является откликом, а каналы, входящие в ее состав – факторами), вычисляются сводные коэффициенты корреляции R_s . Интерактивный ресурс с получением значений R_s размещен на портале [5] в рубрике «Математика» Математика в приложениях» под номером 4.

Отметим здесь важную особенность описанных действий. Из процедуры получения матрицы $\mathbf{R}_0$, описанной в предыдущей части, следует, что структура $\mathbf{R}_0$ зависит от параметра q . С увеличением этого параметра количество элементов $\mathbf{R}_0$ уменьшается, так как в $\mathbf{R}_0$ остаются только элементы, характеризующие наиболее сильные связи. Следовательно, состав D -групп также меняется, число факторов в задаче множественной регрессии для вычисления R_s при этом уменьшается. Это сопровождается изменением значений R_s для тех же D -групп. Анализ влияния q на значения R_s проводится ниже.

Апробация

Для эксперимента была выбрана задача сопоставления двух контрольных групп (люди с болезнью Паркинсона и здоровые). Численность каждой группы составляла 21 человек. Для каждого испытуемого была получена 16-канальная ЭЭГ. Эти данные использовались для построения матрицы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_0$, найдены значения R_s для каждого из испытуемых и его D -групп. Формирование D -групп проводилось при выборе значений параметра q от 0.002 до 0.02 с шагом 0.002. Полученные таким образом значения R_s усреднялись для одноименных D -групп отдельно для больных и здоровых людей при каждом значении q . Для каждого канала и значения q оценивалось относительное отклонение δ средних значений R_s для людей с паркинсонизмом от здоровых людей. В таблице представлены результаты для каналов с 8 по 16 для значений q , равных 0.002, 0.01, 0.02.

Зависимость относительных разностей δ от параметра q

q	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0.002	0.753	0.793	0.772	0.708	0.684	0.754	0.684	0.706	0.745
	0.750	0.743	0.736	0.756	0.600	0.742	0.743	0.741	0.743
	0.004	0.068	0.049	0.064	0.141	0.016	0.080	0.047	0.003
0.01	0.649	0.596	0.524	0.577	0.579	0.606	0.578	0.580	0.589
	0.622	0.604	0.583	0.611	0.489	0.637	0.663	0.561	0.602
	0.044	0.013	0.100	0.055	0.185	0.049	0.128	0.033	0.021
0.02	0.520	0.491	0.486	0.492	0.514	0.472	0.485	0.520	0.423
	0.491	0.445	0.429	0.474	0.424	0.549	0.532	0.374	0.474
	0.059	0.102	0.133	0.038	0.212	0.141	0.089	0.391	0.107

Из данных таблицы следует, что наибольшими относительными отклонениями отличается канал 12 при всех значениях q . Отсюда можно сделать вывод, что канал 12 наилучшим образом отражает изменения, связанные с болезнью Паркинсона, и является информативным для этого вид заболевания.

Рассмотрим влияние величины q на характеристики канала и его D -группы. На рис. 1 приведен график зависимости величины δ от значения q_i , где $q_1 = 0.002$, $q_i = iq_1$. Из рис. 1 следует, что δ при увеличении q (от ее начального значения) также растет. Это связано с исключением большого числа слабых связей, которое сопровождает начальный рост q . Однако после достижения своего максимального значения при $q = 0.014$, величина

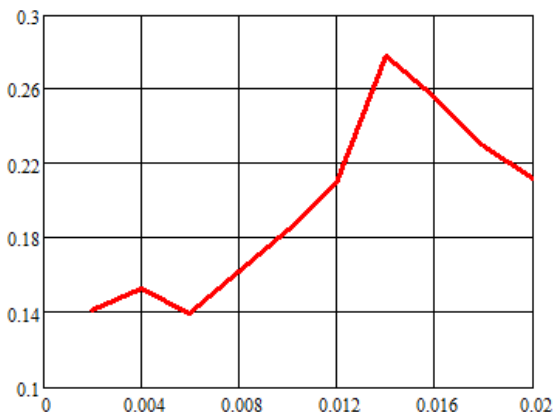


Рис. 1. Зависимость δ от величины q для 12 канала

δ начинает уменьшаться, что связано с началом исключения из состава матрицы $\mathbf{R}_0$ элементов, соответствующих более сильным связям.

Таким образом, увеличение значения q может повысить степень доверия к доминирующему каналу до определенного уровня. Дальнейший рост q может сопровождаться снижением значений δ . В рассматриваемом случае (см. таблицу), величина δ даже при минимальном значении $q=0.002$ является достаточно большой. Это позволяет сделать вывод об информативности канала 12 для паркинсонизма уже на ранних стадиях анализа. Поэтому в общем случае слишком большое увеличение параметра q может негативно сказаться на результатах исследования или диагностики заболевания.

Заключение

Описана технология оценки информативности каналов ЭЭГ, приведен пример ее использования при сопоставительном анализе двух контрольных групп. Рассмотрено влияние значения степени нелинейности на оценку значимости относительного отклонения средних сводных коэффициентов корреляции при изучении множественных межканальных связей ЭЭГ. Показано, что увеличение степени нелинейности q ведет к повышению доверия к информативному каналу, поскольку при этом исключается участие слабых связей при анализе. Однако исключение более сильных связей в процессе дальнейшего роста q может привести к вырождению матрицы $\mathbf{R}_0$ и к ошибочным выводам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусельников В.И. Электрофизиология головного мозга. М.: Высшая школа, 1976. 423 с.
2. Ивановский Р.И., Новожилов М.А. Анализ межканальных связей электроэнцефалограмм на основе корреляционных отношений // Математическая биология и биоинформатика. 2016. № 11. С. 214–224.
3. da Silva F.L., Pijn J.P., Boeijinga P. Interdependence of EEG signals: linear vs. nonlinear associations and the significance of time delays and phase shifts // Brain Topography. 1989. P. 9–18
4. Ивановский Р.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде Mathcad. СПб.: БХВ, 2008. 528 с.
5. MAS.Exponenta.ru. URL: <http://mas.exponenta.ru/> (accessed 25.04.2018).

Новожилов Марк Александрович; markhero@mail.ru;

Ивановский Ростислав Игоревич, д.т.н., профессор; iri@dcn.icc.spbstu.ru

Выбор поставщика при управлении заказами

Г.Н. Решетникова

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

В последние годы в сфере товарного обращения произошли существенные изменения в связи с тем, что начали использоваться новые методы и технологии поставки товаров, которые базируются на концепции логистики [1, 2]. Закупочная логистика является одной из основных логистических подсистем и изучает процесс движения сырья, материалов, комплектующих и запасных частей с рынка закупок до складов потребителя.

В связи с этим актуальной является задача выбора поставщика, так как закупать товар можно различными способами: напрямую у производителя или у дилеров производителя. При этом получаются различные закупочная стоимость товара, транспортные расходы и время доставки.

Постановка задачи

Будем предполагать, что торговая компания работает с L поставщиками, причём оплата за товар осуществляется по факту поставки. Каждый поставщик характеризуется закупочной стоимостью товара, транспортными расходами и временем доставки.

Пусть $U(t, j)$ – объем товара j -го поставщика в ценах поставки, коэффициенты $k_3(j)$, $k_5(j)$ и $k_6(j)$ задают наценки поставщика, торговой компании и транспортные расходы, τ_j – время доставки товара, $j = \overline{1, L}$. Заметим, что достаточно часто торговая компания делает различную наценку на товар, заказанный у разных поставщиков, для того, чтобы продавать товар потребителем по одинаковой цене.

Математическую модель для управления заказами при работе с j -м поставщиком запишем в виде [3]

$$x(k+1, j) = A(k)x(k, j) + B(k, j)u(k, j) + F(k)q(k), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(\cdot) = (z(\cdot), v(\cdot), w(\cdot))^T$ – вектор состояния, характеризующий объем товара на складе торговой компании, у потребителя и доход, $u(\cdot) = U(\cdot)$

– управление, задающее объем заказываемого товара, $q(\cdot)$ – вектор гауссовских случайных величин с заданными характеристиками, который описывает действие случайных факторов. Матрица динамических свойств $A(k)$ и вектор влияния управляющих воздействий $B(k, j)$ имеют вид

$$A(k) = \begin{pmatrix} 1 - (k_4(\varphi_y(k) - \varphi_v(k)) - k_1)\Delta t & k_4\varphi_z(k)\Delta t & 0 \\ k_4(\varphi_y(k) - \varphi_v(k))\Delta t & 1 - (k_4\varphi_z(k) - k_2)\Delta t & 0 \\ k_4(\varphi_y(k) - \varphi_v(k))\Delta t & -k_4\varphi_z(k)\Delta t & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$B(k, j) = \begin{pmatrix} k_3(j)k_5(j)\Delta t \\ 0 \\ -k_5(j)(1 + k_6(j))\Delta t \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где Δt – шаг дискретизации, дискрет k соответствует моменту времени $t_0 + k\Delta t$. Функции $\varphi_y(k)$, $\varphi_v(k)$, $\varphi_z(k)$ описывают расчетные значения потенциального спроса, объемов товара у потребителя и на складе торговой компании, коэффициенты k_1, k_2, k_4 характеризуют: порчу товара при хранении, темп потребления и темп продаж.

Объем поставок от j -го поставщика будем формировать при использовании модификации локального квадратичного функционала [4, 5] при слежении за объемом товара на складе $z_p(k)$, который необходим для стабильной работы торговой компании:

$$J^{(S)}(k, j) = M \{ (Sx(k+1, j) - z_p(k))^T C_S \times \\ \times (Sx(k+1, j) - z_p(k)) + u^2(k, j) D \}, \quad (4)$$

где $S = (1 \ 0 \ 0)$, $C_S, D > 0$ – весовые коэффициенты, M – символ математического ожидания.

В реальной ситуации информация о модели (1) чаще всего является неполной и содержит погрешности, кроме того, в модели есть неизвестные параметры. Тогда объем заказа при использовании оценок состояния и параметров $\hat{x}(\cdot), \hat{\theta}(\cdot)$, определяемых согласно [6], будет задаваться следующим образом:

$$u(k, j) = -(B^T(k, \hat{\theta}(k), j)S^T C_S S B(k, \hat{\theta}(k), j) + D)^{-1} \times \\ \times B^T(k, \hat{\theta}(k), j)S^T C_S (S A(k, \hat{\theta}(k))\hat{x}(k) + S F(k)\bar{q}(k) - z_p(k)). \quad (5)$$

Будем считать, что цель работы торговой компании – удержание желаемого объема товара $z_p(k)$ на складе для обеспечения стабильных продаж. При этом необходимо решить следующие задачи: у кого произвести заказ и когда, какой объем товара необходимо держать на складе и какой объем товара необходимо возить от конкретного поставщика, чтобы избежать как затоваривания, так и недостатка товара на складе.

Пусть $z_{\max}(k)$ – максимально допустимый объем товара на складах торговой компании, не приводящий к затовариванию, а $z_{\min}(k)$ – минимальный объем товара, который позволяет осуществлять стабильные продажи.

Определим прогноз объема товара, который будет продан за один день следующим образом:

$$p(k) = k_4(\varphi_y(k) - \varphi_v(k))z_p(k). \quad (6)$$

Исходя из прогноза ежедневного объема продаж, определим расчётное и прогнозируемое число дней работы торговой компании на товарных остатках:

$$K_p(k, j) = \left\lceil \frac{z_p(k) + \delta \tau_j}{p(k)} \right\rceil, \quad K_R(k) = \left\lceil \frac{\hat{z}(k)}{p(k)} \right\rceil,$$

где $\lceil \cdot \rceil$ – выделение целой части, $\hat{z}(k)$ – оценка объёма товара на складе, δ – величина страхового запаса, задающая объём товара, который необходим для торговли в течение одного дня и который учитывает действие случайных факторов, τ_j – определяет число дней доставки товара. Тогда объем заказа будет определяться следующим образом:

$$\tilde{u}(k, j) = \begin{cases} u(k, j), & \text{если } K_p(k, j) \geq K_R(k), \\ 0, & \text{если } K_p(k, j) < K_R(k), \end{cases} \quad (7)$$

где $u(k, j)$ – объём заказываемого товара, который определяется согласно (5), при этом, если $u(k, j) \neq 0$, то $k - \tau_j$ является моментом заказа товара.

Кроме того, необходимо учитывать ограничения на объем поставляемого товара, которые представляются в виде

$$\tilde{u}(k, j) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{u}(k, j) < U_{\min}(k); \\ \tilde{u}(k, j), & \text{если } U_{\min}(k) \leq \tilde{u}(k, j) \leq U_{\max}(k); \\ U_{\max}, & \text{если } \tilde{u}(k, j) > U_{\max}(k), \end{cases} \quad (8)$$

где, чаще всего, $U_{\min}(k)$ задает минимальный объем товара, поставка ко-

торого не является убыточной, а $U_{\max}(k)$ определяется максимальной грузоподъемностью транспортных средств, которые находятся в распоряжении торговой компании.

Численное моделирование, иллюстрирующее работоспособность предложенных алгоритмов, осуществлялось по данным поставок косметической продукции для торговой компании. Неизвестными параметрами считались темп потребления k_2 и темп продаж k_4 , кроме того, в модели отсутствовала информация о потребителе.

Пусть товар поставляется из двух городов: № 1 и № 2 ($L = 2$).

В табл. 1 приведены данные конкретных поставщиков, где коэффициенты $k_3(j), k_5(j), k_6(j), j = \overline{1, 2}$, задают наценку торговой компании, наценку поставщика, транспортные расходы, а также число дней доставки товара $\tau_j, j = \overline{1, 2}$.

Таблица 1

Данные поставщиков

j	Поставщик	τ_j	$k_3(j)$	$k_5(j)$	$k_6(j)$
1	№1	2	1.52	1.28	$0.25 \cdot 10^{-2}$
2	№2	7	2	1.0	$0.45 \cdot 10^{-2}$

На рис. 1 приведен объем товара на складе при работе с поставщиком № 1.

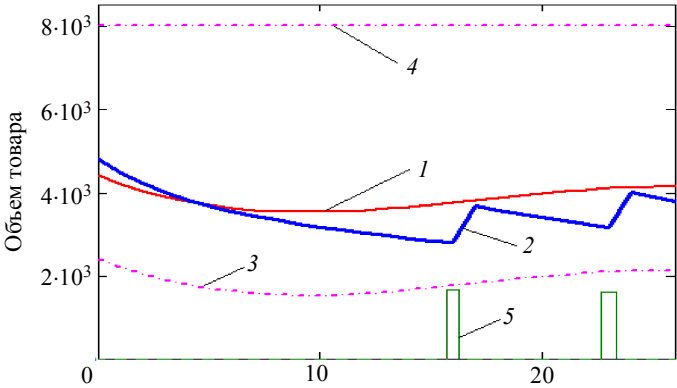


Рис. 1. Желаемый объем товара на складе $z_p(\cdot) - 1$; полученный $z(\cdot) - 2$; $z_{\min}(\cdot) - 3$; $z_{\max}(\cdot) - 4$; объем поставок $u(\cdot) - 5$

На рис. 2 приведен объем товара на складе при работе с поставщиком № 2.

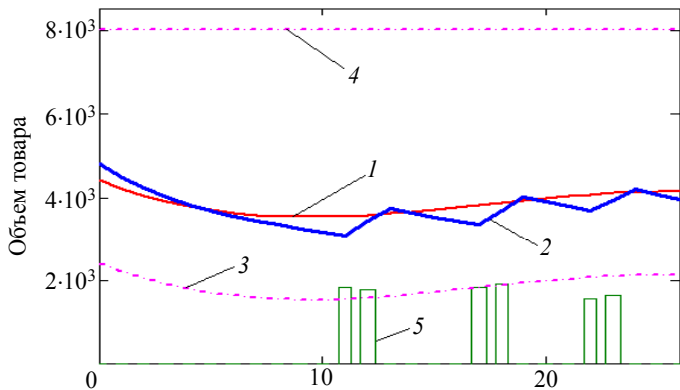


Рис. 2. Желаемый объем товара на складе $z_p(\cdot) - I$; полученный $z(\cdot) - 2$; $z_{\min}(\cdot) - 3$; $z_{\max}(\cdot) - 4$; объем поставок $u(\cdot) - 5$

Качество работы системы управления будем оценивать следующими критериями:

1. W_N – доход, полученный за время моделирования (руб.);
2. S_u – суммарный объём поставок с учетом наценки поставщика (руб.).
3. S_z – средний объём товара на складе в ценах продажи (руб.).

В табл. 2 приведены усреднённые значения критериев, полученные по 10 прогонам имитационной модели.

Т а б л и ц а 2

Значения критериев качества

Поставщик	W_N	S_u	S_z
№ 1	1240	3872	3638
№ 2	3668	8520	3905

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что наиболее выгодным является заказ товара у поставщика №2, так как в этом случае компания получит больший доход при меньших суммарных поставках. Причем компания держит практически одинаковый объем товара на складе при работе с обеими компаниями.

Заключение

Целью работы любой торговой компании является получение прибыли. Это зависит от многих факторов, таких, как наличие выгодного поставщика, достаточный объем товара на складе для беспербойной работы.

При управлении заказами необходимо учитывать тот факт, что торговая компания может заказывать товары у различных поставщиков, каждый из которых предлагает один и тот же товар на разных условиях. Можно сократить время доставки, делая заказ у регионального дилера производителя, но при этом необходимо учитывать, что дилер делает свою наценку. Если заказывать непосредственно у производителя, то можно получить самую низкую входную цену товара. При этом увеличивается чистый доход от продаж, но, чаще всего, увеличивается время и стоимость доставки.

В настоящей работе предложены алгоритмы, позволяющие принимать решения при выборе поставщика, обеспечивающие наибольшую выгоду.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Модели и методы логистики* / под. ред. В.С. Лукинского. СПб., 2003. 448 с.
2. *Неруш Ю.М.* Логистика. Учебник. М.: ЮНИТИ, 2000. 520 с.
3. *Решетникова Г.Н.* Адаптивное управление поставками и рекламой Алгоритмы. Модели. Ограничения. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. 152 с.
4. *Reshetnikova G.N., Krasnov I.U.* Unsteady object optimum control algorithm (Conference Paper) [Electronic resources] // Modern Techniques and Technologies, 2003. MTT 2003. Proc. 9th International Scientific and Practical Conference of Students, Post-graduates and Young Scientists, 2003. [5 p.]. DOI: 10.1109/SPCMTT.2003.1438195 Available at: 10.1109/SPCMTT.2003.1438195 (Accessed 10 January 2017).
5. *Reshetnikova G.N., Khabibulina N.Yu., Kotcubinskiy V.P., Polonskaya M.S.* Servo systems with incomplete information [Electronic resources] //2017 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON): Proceedings of International Siberian Conference, Astana, Kazakhstan, June 29–30, 2017. IEEE, 2017. [4 p.]. Title screen. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/document/7998569/> (Accessed 25 September 2017).
6. *Решетникова Г.Н.* Адаптивные системы: учеб. пособие. Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2016. 112 с.

Ценообразование на телекоммуникационные услуги в сетях 5G

Д.А. Урусова, Харун Хассан Салех, Г.О. Царева

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

Серьезной проблемой в сфере телекоммуникационных услуг стало наличие «нетерпеливых» пользователей, которые отказываются от передачи данных, когда время их передачи превышает некоторое значение. Такое явление отрицательно сказывается как на качестве предоставления услуг, так и для компаний, поскольку радиоресурсы сети бесполезно расходуются «нетерпеливыми» пользователями. Эта проблема станет более остро в случае внедрения сетей 5G.

Подходы к ценообразованию на услуги в мобильных сетях 5G

Специалистами были разработаны приложения моделей теории массового обслуживания, которые включают в себя концепцию с «нетерпеливыми» пользователями, и эти подходы имеют особое значение для экономического анализа, так как они оказывают очень большое влияние на понимание механизмов получения доходов телекоммуникационными компаниями. Все склонны считать, что удержание пользователей является ключевым вопросом для любых телекоммуникационных компаний, сталкивающихся с проблемой «нетерпеливых» клиентов.

Наличие «нетерпеливых» клиентов стало объектом исследования в нескольких работах, посвященных фиксированной и мобильной связи. Понятие «нетерпеливый» клиент появилось в теории массового обслуживания в работе Ф.Хэйта [1].

В работе [2] была приведена версия формулы Эрланга, которая исторически применялась в предположении, что продолжительность обслуживания не зависит от количества ресурсов, выделяемых пользователю, для случая, когда продолжительность обслуживания пропорциональна количеству ресурсов, полученных пользователем. Была построена модель [3] и проанализирован трафик для случая наличия «нетерпеливых» пользователей в случае перегрузки, когда средняя интенсивность заявок превышает среднюю скорость их обслуживания. В ра-

боте [4] рассмотрен показатель качества (QoE) для мобильных сетей связи, который менялся из-за наличия нетерпеливых пользователей.

Абонентская плата за пользование телекоммуникационной сетью изменяется в зависимости от продолжительности времени ее использования, а сам тариф – в зависимости от времени суток. В период наибольшей нагрузки в телекоммуникационной сети компанией-оператором обычно устанавливается максимальный тариф для того, чтобы избежать значительных затрат по приобретению и установке дополнительного дорогостоящего оборудования, способного обрабатывать возникающие в это время максимальные объемы информации.

Также принципы ценообразования телекоммуникационной компании связаны еще и с выбранной стратегией, которая определяется в зависимости от этапа развития компании, числа конкурентов в данном регионе, а также в зависимости от самой услуги.

Стратегии могут быть следующие:

- Стратегия снятия сливок – применяется при выходе на рынок с новыми услугами, не имеющими аналогов на данной территории. Цена в данном случае является завышенной.

- Стратегия цен проникания – применяется также для внедрения новой услуги, однако главной целью компании в данном случае является «захват» клиентской базы у конкурентов, также обладающих данной услугой.

- Стратегия дифференцированного ценообразования, которая разделяет потребителей на группы, по возможной платежеспособности. Так, например, чаще всего для телекоммуникационных компаний это физические и юридические лица.

- Стратегия ассортиментного ценообразования. В данном случае тарифы назначаются не на одну услугу, а на пакет услуг, в который может входить и интернет, и телефония, и телевидение.

- Стратегия конкурентоспособного ценообразования – подразумевает под собой корректирование стоимости предоставляемых услуг, в зависимости от ценовой политики конкурента.

В этой работе предложен метод анализа нагрузки в сетях 5G при наличии «нетерпеливых» пользователей. Исследуется система массового обслуживания с наличием «нетерпеливых» абонентов в случае мобильных сетей 5G и строится схема ценообразования на услуги с условием максимизации прибыли телекоммуникационными компаниями.

Заключение

Так как серьезной проблемой в сфере телекоммуникационных услуг стало наличие «нетерпеливых» пользователей, то можно построить экономический механизм удержания «нетерпеливых» абонентов с помощью методов ценообразования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Haight F.A.* Queueing with Reneging // *Metrika*. 1959. V. 2. P. 186–197.
2. *Baccelli F., Hebuterne G.* On queues with impatient customers // *Performance*. 1981. . V. 81 P. 159–179.
3. *Bonald J.R.T.* Congestion at flow level and the impact of user behavior // *Computer networks*. 2003. V. 42. P. 521–536.
4. *Elayoubi S.E., Fricker C., Guillemin F., Robert P., Sericola B.* Impatience in mobile networks and its application to data pricing // 2014. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1411.2102>.
5. *Kumar R., Sharma S.K.* Queueing with reneging, balking and retention of reneged customers // *Int. J. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2012. Iss. 7. V. 6. P. 819–828.

Урусова Дина Александровна, аспирант, urusovada@str.mos.ru

Харун Хасан Салех (Республика Чад), аспирант, harounhassan198@yahoo.fr

Царева Галина Олеговна, аспирант, gotsareva@gmail.com

О применении анализа социальных сетей для исследования степени согласия экспертов в процессе группового принятия решений¹

О.В. Чухно, К.Е. Самуйлов

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

В социальных сетях зарегистрированы миллионы пользователей по всему миру, а данные их взаимодействия можно использовать для конкретных целей, будь то учебные, деловые, правительственные и другие. Анализ социальной сети фокусируется на закономерностях взаимоотношений между людьми, организациями, государствами и социальными субъектами, а также обеспечивает как визуальный, так и математический анализ человеческих отношений [1, 2]. Основная цель статьи – исследовать применение анализа социальных сетей для проведения процесса группового принятия решений [3–6] и оценить эффективность достигнутого консенсуса [7, 8]. В работе проиллюстрирован пример интеллектуального анализа данных, полученных из платформы Twitter.

Введение

Анализ социальной сети (social network analysis, SNA) представляет собой группу методик, основанных на теории графов, которые можно использовать для получения информации из сетей, состоящих из большого количества различных участников. В последнее время методы SNA стремительно применяются в широком спектре систем.

Данные социальной сети состоят из различных элементов. Следуя определению Вассермана и Фауста [1], сеть можно рассматривать как социальную реляционную систему, характеризующуюся набором участников и их связями. Согласно этому определению, при анализе свойств социальной сети целесообразно моделировать ее в виде графа, узлы которого представляют участников, а ребра показывают отношения между ними.

Граф, или неориентированный граф G , – это упорядоченная пара (V, E) , где V – непустое множество вершин или узлов, а E – множест-

¹ Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-07-00766.

во пар неупорядоченных вершин, называемых ребрами. Граф G состоит из двух наборов информации: $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ и $E = \{e_1, e_2, \dots, v_L\}$. В отличие от моделирования с помощью графового подхода, например, сети телекоммуникаций, когда важной информацией является расположение узлов и длина ребер между ними, при моделировании социальной сети необходимо задать лишь набор узлов и наличие или отсутствие связей между ними.

Метрики анализа социальных сетей

Выбор метрик социальной сети зависит от характеристик сети, которые исследователям необходимо анализировать. Ниже приводятся наиболее важные метрики, основанные на теории графов [1, 2].

1. Степень узла. Степенью узла называется количество ребер, выходящих из этого узла. Из теории графов степень k_{v_i} узла v_i определяется по формуле

$$k_{v_i} = \sum_{j=1}^N a_{ij} = \sum_{j=1}^N a_{ji}, \quad (1)$$

где N – количество узлов в сети, $a_{ij} = 1$, если узлы i и j взаимосвязаны, $a_{ij} = 0$ – в противном случае.

2. Кратчайшее расстояние. Расстояние между двумя узлами сети (минимальная сумма их весов) определяется следующим образом:

$$l = \frac{1}{N * (N - 1)} * \sum_{i \neq j} d(i, j) \approx \frac{\ln N}{\bar{k}}, \quad (2)$$

где $d(i, j)$ – кратчайшее расстояние между узлами i и j , $\bar{k}$ – средняя степень узлов, рассчитанная с использованием формулы (1).

3. Геодезическое расстояние (geodesic distance). Минимальное расстояние между двумя вершинами называют геодезическим расстоянием

$$GD_{ij} = \min\{d(i, j)\}. \quad (3)$$

Параметр, который показывает, насколько велика сеть – диаметр – наибольшее геодезическое расстояние в социальной сети:

$$D = \max GD_{ij, i=1, \dots, N, j=1, \dots, N}. \quad (4)$$

4. Плотность. Плотность – отношение числа имеющихся ребер графа к максимально возможному количеству ребер данного графа:

$$\Delta = \frac{2 * L}{N * (N - 1)}, \quad (5)$$

где L – число связей.

5. Коэффициент кластеризации. Коэффициент кластеризации – это значения кластеризации для всех узлов графа:

$$CC_i = \frac{2 * \{e_{jk}\}}{k_{v_i} * (k_{v_i} - 1)}, \quad (6)$$

где $\{e_{jk}\}$ – набор ребер, соединяющих соседние вершины узла i .

Высокий коэффициент кластеризации означает, что граф чрезвычайно плотно сгруппирован вокруг нескольких узлов, низкий – связи в графе относительно равномерно распределены среди всех узлов.

Анализ социальной сети Twitter

Благодаря мощным компьютерам и таким платформам, как Facebook, Twitter и т.д., SNA стал широко используемым подходом при анализе межличностных связей. Данные об отношениях людей теперь доступны, как никогда раньше, и применение аналитических методов к ним стало источником уникальных и ценных знаний.

Был проведен эксперимент на основе данных межличностных связей, полученных из широко используемой платформы Twitter. Twitter – это социальная сеть и сервис микроблогов, пользователи которого могут обмениваться текстовыми сообщениями, называемыми «твитами». Система Twitter собирает данные не только людей, которые отправляют сообщения, но и тех, кто решил перенаправить эти сообщения другим пользователям. Более того, сообщения могут объединяться для ускорения работы с помощью хэштегов (включенное в твит слово, которому предшествует символ #). По хэштегу лица, заинтересованные в определенной теме, имеют быстрый доступ к связанной с ней информации.

На первом этапе эксперимента мы собрали твиты с хэштегами #bookaholic и #fantasybook и сформировали две группы, соответствующие этим хэштегам. Два сообщества (по одному для каждого тега) были построены с узлами, соответствующими отправителям, и ребрами, связывающими узлы. Показатели, описанные в предыдущем разделе, были рассчитаны для обеих сетей.

Показатели сети

Показатель	#bookaholic	#fantasybook
Число узлов	1241	388
Число ребер	1398	440
Средняя степень узла	1.34	1.405
Геодезическое расстояние	5.74	4.62
Диаметр	15	11
Плотность	0.00089	0.00324
Коэффициент кластеризации	0.084	0.074

Результаты демонстрируют, что пользователи, чья речь в твитах идет о книгах жанра фэнтези, образуют сообщество с более высокой плотностью и связностью. Это кажется правдоподобным, потому что сообщество #fantasybook состоит из людей, интересующихся одним жанром книг, в то время, как #bookaholic включает в себя любителей различных направлений литературы.

Поскольку сетевая модель может эффективно моделировать взаимодействие между лицами, принимающими решения, социальные сети привлекли внимание многих исследователей в области принятия решений в последние годы. В этой статье мы рассматриваем вопросы, связанные с применением анализа социальных сетей для исследования процесса группового принятия решения (group decision making, GDM).

Процесс группового принятия решений

Процесс группового принятия решений GDM описывается как выбор наилучшей альтернативы или множества альтернатив из всех возможных, учитывая мнения, выраженные группой лиц, принимающих решения [3,5].

Классический сценарий GDM определяет ситуацию, в которой есть проблема для решения, набор альтернатив $X = \{x_1, \dots, x_M\}$ и группа лиц, принимающих решения $E = \{e_1, \dots, e_K\}$, которые передают свои предпочтения или мнения о наборе альтернатив для достижения совместного решения. Цель процесса GDM состоит в том, чтобы упорядочить различные альтернативы от наилучшей к худшей с помощью ассоциации некоторых степеней предпочтения, выраженных в единичном интервале.

Каждый эксперт задает некоторое значение предпочтения p_{ij} , которое показывает, насколько альтернатива i лучше альтернативы j . Полученные значения формируют для эксперта k матрицу предпочтений $P_k = p_{ij}(k)_{i,j \in 1, \dots, M}$, где $p_{ij} = 1$ отражает максимальное предпочтение, $p_{ij} = 0$ – минимальное. При этом выражения предпочтений взаимосвязаны так, что $p_{ij} = 1 - p_{ji}$, а $p_{ii} = 0.5$.

Когда совместное решение найдено, необходимо оценить, насколько каждый из экспертов согласен с выдвинутым решением, иными словами, найти степень согласия экспертов.

Степень согласия (англ. degree of agreement, consensus level) среди участников процесса GDM – один из важнейших показателей этого процесса, измерение которого является существенно значимым перед принятием окончательного решения.

Мы используем индекс Джини для измерения степени согласия в процессах группового принятия решения. Данный индекс применяется в экономике и социальной политике, например, для дифференциации доходов населения. Он был разработан итальянским статистиком и социологом Коррадо Джини [7,8].

Измерение степени согласия заключается в определении того, насколько высока степень сходства в распределении значений предпочтения p_{ij} . Формула для расчета коэффициента Джини выглядит следующим образом [7, 8]:

$$G_{ij} = 1 - \sum_{k=1}^K [x(k) - x(k-1)] * [y_{ij}(k) + y_{ij}(k-1)], \quad (7)$$

где
$$x(k) = \sum_{l=1}^k w_l, \quad w_l = \frac{1}{K},$$

$$y_{ij}(k) = \sum_{s=1}^k q_{ij}(s), \quad q_{ij}(k) = \frac{p_{ij}^{\delta}(k)}{\sum_{k=1}^K p_{ij}(k)}, i, j = 1, \dots, M,$$

причем $x(0) = y(0) = 0$, а $\delta: \{1, \dots, K\} \rightarrow \{1, \dots, K\}$ – перестановка, такая, что $p_{ij}(k) \leq p_{ij}(k+1)$.

Значение $G = 0$ индекса Джини показывает идеальное согласие, где все оценки экспертов одинаковы, а значение $G = 1$ выражает максимальное отличие между оценками. Учитывая, что необходимо получить степень согласия экспертов по всем альтернативам, получим

$$\overline{G} = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M G_{ij}}{2 * \sum_{r=1}^M (M - r)}, i \neq j. \quad (8)$$

Численный эксперимент

На основе данных из Twitter, из двух сообществ (#bookaholic и #fantasybook) случайным образом были выбраны эксперты, которым предстояло сравнить жанры литературы и выбрать наиболее предпочтительные для них. В результате опроса пользователей платформы 10 экспертов ($K = 10$) предоставили информацию о своих предпочтениях по следующему набору альтернатив ($M = 7$):

x_1 : Приключения, x_2 : Боевики, детективы, триллеры, x_3 : Любовный роман, x_4 : Исторический роман, x_5 : Мистика и фантастика, x_6 : Биографии, мемуары, x_7 : Классическая и современная проза.

Таким образом, с учетом введенных ранее обозначений, для проведения анализа мы имеем следующие исходные данные:

$$\begin{aligned} X &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}, \\ E(I) &= \{e_1(I), e_2(I), e_3(I), e_4(I), e_5(I)\}, \\ E(II) &= \{e_1(II), e_2(II), e_3(II), e_4(II), e_5(II)\}. \end{aligned}$$

Используя традиционные методы ранжирования альтернатив в задачах GDM, получаем следующий рейтинг предпочтительных жанров книг для каждой группы экспертов:

$$I: x_4 \prec x_5 \prec x_1 \prec x_2 \prec x_6 \prec x_7 \prec x_3, \quad II: x_1 \prec x_4 \prec x_7 \prec x_3 \prec x_5 \prec x_2 \prec x_6.$$

В каждой группе был достигнут консенсус, однако, при этом ранжированные списки альтернатив различаются. Этот результат ожидаем, так как интересы групп отличаются, и выглядит достаточно правдоподобным, поскольку оценки экспертов субъективны.

Однако целью работы было исследование степени согласия экспертов с достигнутым решением. Применяя формулы (7) и (8) к матрицам предпочтений экспертов, получаем $\overline{G}_1 = 0.26$, $\overline{G}_2 = 0.18$.

Индекс Джини показывает, что эксперты группы 2 достигли консенсуса в большей степени, чем эксперты группы 1 и их оценки распределены равномернее. Это связано с тем, что группа 1 включает в себя любителей книг совершенно разных жанров, поэтому им труднее прийти к единому решению, нежели фанатам одного направления.

Заключение

SNA – это ценный инструмент для извлечения информации из социальных сетей. В работе представлен численный пример, отражающий взаимодействие анализа социальных сетей и процесса группового принятия решений. Предложен консенсусный показатель, который можно применять в задачах GDM для нечетких отношений предпочтений. Результаты эксперимента показали, что анализ социальных сетей может быть эффективно использован в процессе принятия группового решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wasserman S., Faust K. Social Network Analysis: Methods and Applications (Vol. 8). Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
2. Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F. Evolution of networks // *Advances Phys.* 2002. V. 51. No. 4. P. 1079–1187.
3. Herrera F., Mart'inez L. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words // *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 2000. V. 8. No. 6. P. 746–752.
4. Tanino T. Fuzzy preference orderings in group decision making // *Fuzzy Sets and Systems.* 1984. No. 12. P. 117–131.
5. Herrera-Viedma E., Cabrerizo F., Chiclana F., Wu J., Cobo M., Samuylov K. Consensus in group decision making and social network // *Studies in Informatics and Control.* 2017. V. 26(3). P. 259–268.
6. Herrera-Viedma E., Cabrerizo F.J., Kacprzyk J., Pedrycz W. A review of soft consensus models in a fuzzy environment // *Information Fusion.* 2014. No. 17. P. 4–13.
7. Houghton J., Khandker S.R. Handbook on Poverty and Inequality. Washington DC: World Bank, 2009.
8. Hermoso J.A., Hernandez A. Curso básico de Estadística Descriptiva y Probabilidad. Granada: Némesis, 2000.

Самуйлов Константин Евгеньевич, д.т.н., профессор; ksam@sci.pfu.edu.ru;

Чухно Ольга Викторовна, студентка; Bliznjashki1@yandex.ru

Численный анализ операторов агрегирования в процессе группового принятия решений¹

Н.В. Чухно, Ю.В. Гайдамака

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

Групповое принятие решений применяется во многих ситуациях в реальном мире. Справедливо считается, что по мудрости группа экспертов превосходит отдельного человека в государственной политике, политическом прогнозировании и других организационных задачах. В *процессе группового принятия решения* (group decision making, GDM) на основе оценок экспертов, каждый из которых имеет собственную точку зрения, определяется единственное решение как наилучшая из набора возможных альтернатив. В задачах GDM могут возникать разнообразные комбинации экспертных оценок, которые можно характеризовать как сотрудничество или конкуренция между людьми, совместимые или несовместимые предложения и т. д. Классически процесс GDM состоит в сборе оценок нескольких экспертов и выборе наилучшей альтернативы. Однако некоторые проблемы, затрагивающие отдельные группы или общество в целом, могут потребовать принятия решений в заданных ограничениях – в зависимости от определенных условий и ситуаций. Для учета разного рода ограничений были разработаны многочисленные методы агрегирования оценок, например агрегирующие операторы [1, 2]. Одним из таких операторов является упорядоченное взвешенное среднее (OWA), а также его различные интерпретации [3].

В работе проведен краткий обзор агрегирующих операторов и представлен численный эксперимент применения нескольких операторов агрегирования в процессе группового принятия решений.

Процесс группового принятия решений

Процесс GDM включает 2 этапа:

1) Агрегация информации, полученной от всех экспертов, а именно объединение индивидуальных предпочтений экспертов в матрицу кол-

¹ Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 17-07-00845 и № 18-07-00576.

лективных предпочтений. Выбранный оператор агрегирования суммирует предпочтения или отражает свойства, содержащиеся в предпочтениях экспертов.

2) Эксплуатация полученной на этапе 1 информации. Данный шаг формирует конечный ранжированный список альтернатив, учитывающий предпочтения экспертов.

Операторы агрегирования

Математические функции, которые используются для объединения информации, например числовых значений или лингвистических выражений, в единую матрицу коллективных предпочтений, называются операторами агрегирования. Наиболее известными из них являются среднее арифметическое и взвешенное среднее. Основное различие между ними состоит в том, что второй оператор позволяет учесть релевантность данных путём присваивания большего веса оценкам, доверия к источнику которых выше. Существуют операторы агрегирования, которые зависят от предположений о данных (типах данных) и типе информации, которую можно включить в модель. Например, нечеткие интегралы позволяют учитывать релевантность не только отдельных источников, как для взвешенного среднего, но и наборам источников информации.

Предположим, что в процессе GDM принимают участие K экспертов, которые попарно сравнивают M альтернатив. Тогда набор экспертов $\mathcal{E}$ и набор альтернатив $\mathcal{X}$ представляют собою множества $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_K\}, |\mathcal{E}| = K$, $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_M\}, |\mathcal{X}| = M$.

Каждый эксперт e_k формирует матрицу индивидуальных предпочтений $P(k) = [p_{ij}(k)]_{i,j=1,\dots,M}$, причем $p_{ij}(k) \in [0, 1]$, $p_{ij}(k) + p_{ji}(k) = 1$ и $p_{ii}(k) = 0.5$, $\forall i, j = 1, \dots, M$. Оценка $p_{ij} = 1$ показывает максимальную степень предпочтения, $p_{ij} = 0$ – минимальную [4, 5].

Оператор OWA (упорядоченное взвешенное среднее)

В прикладной математике, в частности в нечеткой логике, операторы упорядоченного взвешенного среднего (Ordered Weighted Averaging, OWA) представляют собой параметризованный класс операторов ти-

па «среднее» [3]. OWA был представлен Р.Р. Ягером в 1988 году. К операторам данного класса относятся также максимум, среднее арифметическое, медиана и минимум.

Оператор OWA имеет размерность K и является отображением $F: \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$, к которому привязан вектор весов $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_K)^T$ такой, что $w_k \in [0, 1]$, $\sum_{k=1}^K w_k = 1$. Оператор OWA определяется для агрегирования значений множества $\{p_1, \dots, p_K\}$ формулой

$$F\{p_1, \dots, p_K\} = \sum_{k=1}^K w_k \cdot p_{\delta(k)}, \quad (1)$$

где $\delta: \{1, \dots, K\} \rightarrow \{1, \dots, K\}$ – перестановки, такие, что

$$p_{\delta(k)} \geq p_{\delta(k+1)}, \forall k = 1, \dots, K-1.$$

Подходы к получению вектора весов $\mathbf{w}$ получены при попытках придать весам некоторый смысл [8].

Для вычисления вектора весов $\mathbf{w}$ воспользуемся лингвистическим квантором Q с регулярной возрастающей монотонностью (RIM)

$$Q_\alpha(r) = r^\alpha, \alpha \geq 0, \quad (2)$$

$$w_1 = Q\left(\frac{1}{K}\right), \quad w_k = Q\left(\frac{k}{K}\right) - Q\left(\frac{k-1}{K}\right), \quad k = 2, \dots, K. \quad (3)$$

Форма агрегации (1) зависит от полученного по формулам (2) и (3) вектора весов.

Для $\alpha = 1$ мы получаем $Q(r) = r$ – Unitor quantifier. Вектор $\mathbf{w}_a$ определяется как $w_k = 1/K$ для всех $k = 1, \dots, K$. Таким образом, в результате применения оператора OWA получаем простое среднее.

Для $\alpha \rightarrow \infty$ мы получаем Q_* – Universal quantifier. Вектор $\mathbf{w}_*$ определяется следующим образом: $w_1 = 1$ и $w_k = 0$ для всех $k \neq 1$. Данный вектор весов обеспечивает агрегацию по наибольшим элементам.

Для $\alpha \rightarrow 0$ мы получаем Q^* – Existential quantifier. Вектор $\mathbf{w}^*$ определяется следующим образом: $w_K = 1$ и $w_k = 0$ для всех $k \neq K$. Данный вектор весов обеспечивает агрегацию по наименьшим элементам.

Также следует упомянуть так называемый «олимпийский агрегатор» – $w_1 = 0, w_K = 0, w_k = \frac{1}{K-2}$ для всех $k \neq 1, K$. В данном случае при применении оператора OWA центральные значения оценок p_k получают равную значимость, а экстремальные значения отбрасываются.

Необходимо отметить, что вес w_k связан не с конкретным значением элемента p_k , а со степенью значимости этого элемента.

В рассмотренном примере с K экспертами и M альтернативами формула (1) применяется к каждому элементу p_{ij} матрицы индивидуальных предпочтений экспертов $P(1), \dots, P(K)$, то есть $\{p_1, \dots, p_K\} = \{p_{ij}(1), p_{ij}(2), \dots, p_{ij}(K)\}$. После применения оператора OWA получаем матрицу агрегированных значений

$$P_{OWA} = F(P(1), \dots, P(K)) = [\tilde{p}_{ij}]_{i,j=1, \dots, M}. \quad (4)$$

Оператор IOWA (упорядоченное по дополнительной переменной взвешенное среднее)

Р. Ягер и Д. Филев ввели общий тип оператора OWA, который они назвали оператором Induced Ordered Weighted Averaging (IOWA). Этот оператор следует применять, например, при решении задач GDM, в которых необходимо учитывать степени значимости экспертов. При применении оператора IOWA степени значимости используются для установления порядка значений предпочтений до их агрегации.

Оператор IOWA имеет размерность K и является отображением $F_W : (R \times R)^K \rightarrow R$, к которому привязан вектор весов $w = (w_1, \dots, w_K)^T$, такой, что $w_k \in [0, 1]$ и $\sum_{k=1}^K w_k = 1$. Оператор IOWA определяется для агрегирования по указанному дополнительному аргументу (аргументу u_k) из множества $(\langle u_1, p_1 \rangle, \dots, \langle u_K, p_K \rangle)$ следующей формулой^

$$F_W(\langle u_1, p_1 \rangle, \dots, \langle u_K, p_K \rangle) = \sum_{k=1}^K w_k \cdot p_{\delta(k)}, \quad (5)$$

где $\delta : \{1, \dots, K\} \rightarrow \{1, \dots, K\}$ – перестановки, такие, что

$$u_{\delta(k)} \geq u_{\delta(k+1)}, \forall k = 1, \dots, K-1.$$

Разница между операторами OWA и IOWA проявляется на этапе переупорядочения аргумента. В случае оператора OWA переупорядочение основывается на значениях p_k оценок экспертов, которые затем должны быть агрегированы, а в IOWA критерием переупорядочения является дополнительная переменная u_k – именно она определяет порядок в перестановке δ . Примером дополнительной переменной является степень значимости эксперта, задаваемая в исходных данных задачи. Если же в операторе IOWA переменная, определяющая порядок, является переменной основного аргумента, тогда оператор IOWA сводится к оператору OWA.

Оператор I (взвешенное среднее арифметическое)

Предположим, что задано представление о степени значимости каждого эксперта в процессе GDM, т.е. представление о наборе экспертов $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_K\}$ и векторе степеней их значимости $\mu = \{\mu(e_1), \dots, \mu(e_K)\}$,

причем $\mu(e_k) \in [0, 1]$ и $\sum_{k=1}^K \mu(e_k) = 1$. Тогда оператор I имеет вид

$$F_I\{p_1, \dots, p_K\} = \sum_{k=1}^K \mu(e_k) p_k. \quad (6)$$

Матрицу коллективных предпочтений всех экспертов можно рассчитать по формуле

$$P_I = F_I(P(1), \dots, P(K)). \quad (7)$$

Численный эксперимент

Данный эксперимент проведен с целью иллюстрации использования различных операторов агрегирования исходной информации.

В ходе эксперимента были опрошены студенты, учащиеся в одной учебной группе, перед которыми стояла задача выбрать день для проведения экзамена. В группе 15 студентов, т.е. число экспертов $K = |\mathcal{E}| = 15$. Экзамен было предложено провести в один из дней со вторника по пятницу, таким образом, число альтернатив $M = |\mathcal{X}| = 4$, $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Каждый студент e_k составил матрицу предпочтений $P(k)$, таких что $p_{ij}(k) \in [0,1]$, $k=1, \dots, K$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.9 & 0.5 & 0.1 & 0.9 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.1 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.9 & 0.8 & 0.7 \\ 0.1 & 0.5 & 0.5 & 0.6 \\ 0.2 & 0.5 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.6 & 0.5 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$P_{15} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.4 & 0.0 \\ 0.8 & 0.5 & 0.7 & 0.6 \\ 0.6 & 0.3 & 0.5 & 0.3 \\ 1.0 & 0.4 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Задача заключается в определении ранжированного списка альтернатив двумя способами.

Способ 1. Применяя оператор OWA для агрегации полученных от экспертов матриц, мы получили следующие результаты.

Из формул (2), (3) следует, что

$$w = (w_1, \dots, w_{15})^T = \{0.26, 0.11, 0.11, 0.04, 0.06, 0.05, 0.05, 0.05, 0.04, \\ = 0.05, 0.04, 0.03, 0.04, 0.04, 0.03\}$$

Далее по формуле (4) получили агрегированную матрицу

$$P_{OWA} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.597 & 0.665 & 0.462 \\ 0.68 & 0.5 & 0.758 & 0.625 \\ 0.696 & 0.696 & 0.5 & 0.56 \\ 0.798 & 0.798 & 0.704 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Для эксплуатации полученных значений провели ранжирование альтернатив, используя оператор *GDD* (англ. *Quantifier Guided Dominance Degree*) [5,6]. Данный оператор отражает доминирование одной альтернативы над другими и рассчитывается по формуле

$$GDD_i = \sum_{j=1}^M \tilde{p}_{ij}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (8)$$

Для матрицы P_{OWA} получили

$$GDD_1 = 2.224, GDD_2 = 2.563, GDD_3 = 2.452, GDD_4 = 2.8.$$

Финальный рейтинг альтернатив для 1 способа: x_4, x_2, x_3, x_1 .

Способ 2. На этапе агрегирования информации, полученной от экспертов, **назначаем каждому эксперту соответствующую степень значимости**, а именно старосте группы (эксперту e_1) присваиваем больший вес по сравнению с другими экспертами: $\mu(e_1) = 0.3$, $\mu(e_k) = 0.05$, $k = 2, \dots, 15$.

Используя формулу (7), получаем матрицу агрегированных оценок

$$P_I = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.35 & 0.485 & 0.32 \\ 0.65 & 0.5 & 0.71 & 0.57 \\ 0.515 & 0.29 & 0.5 & 0.43 \\ 0.68 & 0.43 & 0.57 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

На этапе эксплуатации получили следующие значения GDD для альтернатив, применив (8):

$$GDD_1 = 1.655, GDD_2 = 2.43, GDD_3 = 1.735, GDD_4 = 2.18.$$

Финальный рейтинг для 2 способа: x_2, x_4, x_3, x_1 .

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод о том, что если степень доверия ко всем экспертам одинакова, а финальное решение основывается на предпочтениях большинства экспертов, следует применять OWA. В таком случае в рассмотренном эксперименте при ранжировании побеждает альтернатива x_4 , и экзамен будет проведен в пятницу.

Однако, если учитывать, что мнение старосты группы имеет большую важность, следует применять IOWA. В этом случае в финальном рейтинге на первое место попадает альтернатива x_2 , т.е. экзамен будет назначен на среду. Обратившись к матрице предпочтений старосты, можно убедиться, что для него наиболее удобен именно этот день. Таким образом, оператор взвешенное среднее арифметическое позволяет придать значимость (важность) мнениям отдельных экспертов.

Заключение

В повседневной жизни мы постоянно оказываемся вовлечены в процессы принятия решений, в частности принятия групповых решений. Поэтому исследования процесса GDM важны практически во всех сферах деятельности человека, таких, как управление, исследование операций, политика, социальная психология и т.д. — в задачах, где группа

экспертов пытаются достичь общего решения проблемы, которое должно быть выбрано из множества предлагаемых альтернатив. В процессе GDM эксперты должны выразить свои предпочтения посредством оценок по набору альтернатив, однако, конечный результат зависит от способа агрегации представленной экспертами информации. Поскольку каждый из операторов агрегирования обладает своими особенностями, в процессе достижения консенсуса следует выбирать оператор в зависимости от его релевантности решаемой задаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chiclana F., Herrera-Viedma E., Herrere F., Alonso S.* Some included ordered weighted averaging operators and their use for solving group decision making problems based on fuzzy preference relations // *Eur. J. Operational Research.* 2007. V. 182. P. 383–399.
2. *Kitainick L.* Fuzzy Decision Procedures with Binary Relations, Towards an Unified Theory. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
3. *Yager R.R.* On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making // *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics.* 1988. V. 18. P. 183–190.
4. *Orlovsky S.A.* Decision-Making with a Fuzzy Preference Relation, Fuzzy Sets and Systems. 1978. No. 1. P. 155–167.
5. *Tanino T.* On Group Decision Making Under Fuzzy Preferences // J. Kacprzyk and M. Fedrizzi, eds. *Multiperson Decision Making Using Fuzzy Sets and Possibility Theory.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. P. 172–185.
6. *Chiclana F., Tapia Garc'ia J., del Moral M.J., Herrera-Viedma E.* A statistical comparative study of different similarity measures of consensus in group decision making // *Information Sciences.* 2013. V. 221. P. 110–123.
7. *Herrera F., Herrera-Viedma E.* Choice functions and mechanisms for linguistic preference relations // *Eur. J. Operational Research.* 2000. V. 120(1). P. 144–161.

Чухно Надежда Викторовна, студентка; bliznjashki2@yandex.ru;

Гайдамака Юлия Васильевна, д.ф.-м.н., доцент; ygaidamaka@mail.ru

Мультивейвлеты, ортогональные многочленам¹

Б.М. Шумилов

*Томский государственный архитектурно-
строительный университет, г. Томск, Россия*

Вейвлетами называются короткие или быстро затухающие волновые функции (всплески), порождающие пространство измеримых функций [1 – 3]. Основой для построения вейвлетов является наличие набора аппроксимирующих пространств ... $V_{L-1} \subset V_L \subset V_{L+1}$..., таких, что каждая базисная функция в V_{L-1} может быть выражена в виде линейной комбинации базисных функций в V_L . В частности, таким свойством обладают сплайны – гладкие функции, склеенные из кусков многочленов степени m , на вложенной последовательности сеток. Если порядок склейки равен $m-1$, то классические полуортогональные вейвлеты (элементы пространства V_L , ортогональные пространству V_{L-1}) имеют довольно большой носитель из $2m+1$ шагов сетки (без учета краевых эффектов). Это препятствует их широкому использованию для решения задач математического моделирования. В отличие от этого, эрмитовы сплайны нечетной степени $m=2r+1$ (соответствующие склейке порядка r) приводят к вейвлетам с носителем из трех шагов сетки, что, несомненно, предпочтительнее. Поскольку в базисе таких функций несколько, они называются мультивейвлетами [4 – 8].

В [9, 10] были предложены методы построения вейвлетов, ортогональных многочленам, с уменьшенными носителями. Идея уменьшения носителя вейвлета за счет замены свойства ортогональности пространству сплайнов на прореженной сетке ортогональностью многочленам представляется привлекательной. Действительно, с точки зрения скорости приближения гладких функций [3] данные типы вейвлетов эквивалентны, а ортогональность многочленам обеспечивает локально максимальную «похожесть» на наилучшее среднеквадратическое приближение.

¹ Исследование выполнено в рамках гранта РФФИ и Администрации Томской области № 16-41-700400 p_a.

Постановка задачи

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана вложенная последовательность равномерных сеток $\Delta^L: x_i = a + i h, i = 0, 1, \dots, 2^L, h = (b - a) / 2^L, L \geq 0$. Если базисные функции $N_{i,k}^L(x) = \varphi_k(v - i), k = 0, 1, \dots, r \forall i$, где $v = (x - a) / h$, с центрами в целых числах, порождены сжатиями и сдвигами $r + 1$ функций: $\varphi_k(t) = \{(-1)^k \omega_k(-t), -1 \leq t \leq 0; \omega_k(t), 0 \leq t \leq 1; 0, t \notin [-1, 1]\}$, где

$$[11, \text{ с. 82}] \quad \omega_k(t) = (1-t)^{r+1} \sum_{\beta=0}^{r-k} \frac{(r+\beta)!}{k! \beta! r!} t^{k+\beta}, k = 0, 1, \dots, r, \text{ то, при условии}$$

отсечения выступающих за концы отрезка половинок функций $\varphi_0(t), \dots, \varphi_r(t)$, полученное пространство V_L является пространством эрмитовых сплайнов степени $2r+1$ гладкости C^r . Если упорядочить базисные сплайн-функции в виде единой матрицы-строки, $\varphi^L = [N_{0,0}^L, N_{0,1}^L, \dots, N_{0,r}^L, N_{1,0}^L, N_{1,1}^L, \dots, N_{2^L,r}^L]$, то можно записать φ^{L-1} в виде линейных комбинаций φ^L : $\varphi^{L-1} = \varphi^L P^L$. Здесь блоки матрицы P^L составлены из коэффициентов калибровочных соотношений [12]

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_r(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^2 H_k \begin{bmatrix} \varphi_0(2t-k) \\ \varphi_1(2t-k) \\ \vdots \\ \varphi_r(2t-k) \end{bmatrix},$$

где $H_1 = \text{diag}(1, 2^{-1}, \dots, 2^{-r})$, $H_2 = U^{-1} \Lambda U$, $\Lambda = \text{diag}(2^{-r-1}, \dots, 2^{-2r-1})$, матрица U размерности $(r+1) \times (r+1)$ задана элементами

$$U_{k,j} = (-1)^{r+1+k-j} \frac{(r+1+k)!}{(r+1+k-j)!}, k, j = 0, 1, \dots, r, \quad S = \text{diag}(1, -1, \dots, (-1)^{-r}),$$

$$H_0 = S H_2 S^{-1}.$$

В [13] были найдены вейвлеты $M_{i,k}^L(x), k = 0, 1, \dots, r \forall i$, удовлетворяющие условиям ортогональности многочленам $2r+1$ -го порядка:

$$\int_a^b M_{i,k}^L(x) x^m dx = 0, k = 0, 1, \dots, r \forall i, m = 0, 1, \dots, 2r+1. \quad (1)$$

и имеющие носители из двух шагов сетки Δ^L , то есть каждый вейвлет построен из $3r+3$ базисных сплайнов на сетке Δ^{L+1} . Запишем базисные

вейвлеты в виде матрицы-строки, $\psi^L = [M_{1,0}^L, M_{1,1}^L, \dots, M_{1,r}^L, \dots, M_{2^L,r}^L]$.

Тогда можно выразить функции ψ^{L-1} в виде линейных комбинаций функций ϕ^L , то есть $\psi^{L-1} = \phi^L \underline{Q}^L$, где блоки матрицы $\underline{Q}^L$ составлены из матриц $r+1$ -го порядка [13].

С обозначениями

$$C^L = [C_0^L, C_1^L, \dots, C_{2^L}^L]^T, \quad C_i^L = [C_i^{L,0}, C_i^{L,1}, \dots, C_i^{L,r}],$$

$$D^L = [D_1^L, \dots, D_{2^L}^L]^T, \quad D_i^L = [D_i^{L,0}, D_i^{L,1}, \dots, D_i^{L,r}]$$

процесс получения C^L из C^{L-1} и D^{L-1} может быть записан как [14]

$$C^L = [P^L | \underline{Q}^L] \begin{bmatrix} C^{L-1} \\ D^{L-1} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Ниже представлен пример матриц $[P^L | \underline{Q}^L]$, соответствующий $L = 3$:

$$[P^3 | \underline{Q}^3] = \begin{bmatrix} H_1 & O & O & O & O & I & O & O & O \\ H_2^T & H_0^T & O & O & O & A_1^l & O & O & O \\ O & H_1 & O & O & O & A_2^l & A_0^i & O & O \\ O & H_2^T & H_0^T & O & O & O & I & O & O \\ O & O & H_1 & O & O & O & A_2^i & A_0^i & O \\ O & O & H_2^T & H_0^T & O & O & O & I & O \\ O & O & O & H_1 & O & O & O & A_2^i & A_0^r \\ O & O & O & H_2^T & H_0^T & O & O & O & A_1^r \\ O & O & O & O & H_1 & O & O & O & I \end{bmatrix}.$$

Здесь O обозначает матрицу $r+1$ -го порядка с нулевыми коэффициентами, I – единичная матрица $r+1$ -го порядка, $[A_1^l / A_2^l] = -[R^1 | R^2]^{-1} R^0$, $[A_0^i / A_2^i] = -[R^0 | R^2]^{-1} R^1$, $[A_0^r / A_1^r] = -[R^0 | R^1]^{-1} R^2$ и матрицы R^j , $j = 0, 1, 2$, размерности $(2r+2) \times (r+1)$ заданы элементами

$$R_{m,l}^j = \int_{j-1}^{j+1} \varphi_l(2t-j)t^m dt, \quad j = 0, 1, 2, \quad l = 0, 1, \dots, r, \quad m = 0, 1, \dots, 2r+1.$$

Обратный процесс разбиения коэффициентов C^L на более грубую версию C^{L-1} и уточняющие коэффициенты D^{L-1} состоит в решении системы линейных уравнений (4). Разрешимость данной системы гарантирована линейной независимостью базисных функций.

В [15] было предложено матрицу $[P^L | Q^L]$ сделать блочной трехдиагональной, изменив порядок неизвестных так, чтобы блоки матриц P^L и Q^L перемежались. Тогда можно применить для решения системы (4) алгоритм блочной матричной прогонки [16]. Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} T_1 &= H_1, T_2 = A_1^l - H_2^T T_1^{-1}, T_3 = H_1 - A_2^l T_2^{-1} H_0^T, \\ T_i &= I - H_2^T T_{i-1}^{-1} A_0^i, T_{i+1} = H_1 - A_2^i T_i^{-1} H_0^T \quad (i = 4, 6, \dots, 2^L - 2), \\ T_{2^L} &= A_1^r - H_2^T T_{2^L-1}^{-1} A_0^r, T_{2^L+1} = H_1 - T_{2^L}^{-1} H_0^T, \end{aligned} \quad (6)$$

то процесс решения системы (4) разбивается на два этапа:

$$\begin{aligned} z_1 &= T_1^{-1} (C_0^L)^T, z_2 = T_2^{-1} ((C_1^L)^T - H_2^T z_1), z_3 = T_3^{-1} ((C_2^L)^T - A_2^l z_2), \\ z_i &= T_i^{-1} ((C_{i-1}^L)^T - H_2^T z_{i-1}), z_{i+1} = T_{i+1}^{-1} ((C_i^L)^T - A_2^i z_i) \quad (i = 4, 6, \dots, 2^L - 2), \\ z_{2^L} &= T_{2^L}^{-1} ((C_{2^L-1}^L)^T - H_2^T z_{2^L-1}), z_{2^L+1} = T_{2^L+1}^{-1} ((C_{2^L}^L)^T - z_{2^L}); \\ (C_{2^L-1}^{L-1})^T &= z_{2^L+1}, (D_{2^L-1}^{L-1})^T = z_{2^L} - T_{2^L}^{-1} H_0^T (C_{2^L-1}^{L-1})^T, \\ (C_{2^L-1-1}^{L-1})^T &= z_{2^L-1} - T_{2^L-1}^{-1} A_0^r (D_{2^L-1}^{L-1})^T, (D_{2^L-1}^{L-1})^T = z_{2^L} - T_{2^L}^{-1} H_0^T (C_{2^L-1}^{L-1})^T, \\ (C_i^{L-1})^T &= z_{i-1} - T_{i-1}^{-1} A_0^i (D_i^{L-1})^T \quad (i = 2^{L-1} - 1, 2^{L-1} - 2, \dots, 2), \\ (D_1^{L-1})^T &= z_2 - T_2^{-1} H_0^T (C_1^{L-1})^T, (C_0^{L-1})^T = z_1 - T_1^{-1} (D_1^{L-1})^T. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь z_i – векторы порядка $r+1$.

Представление об устойчивости или неустойчивости алгоритма вычисления мультивейвлет-преобразования дает наблюдение за поведением чисел обусловленности в евклидовой норме прогоночных матриц T_i (таблица). Таким образом, можно полагать, что для любого уровня вложенности L они являются невырожденными, что на практике означает корректность представленного выше монотонного варианта алгоритма матричной прогонки (6) – (8). Однако с повышением степени вейвлета численная устойчивость будет неизбежно ухудшаться, причем наиболее быстро вблизи от концов отрезка аппроксимации.

Значения стандартной функции MathCad'a $\text{cond2}(T_i)$, $i = 1, 2, \dots, 33$, $r = 1, \dots, 5$

i	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$
1	2	4	8	16	32
2	64,759	2.695e+004	2.799e+007	2.142e+011	8.333e+014
3	2.513	157.2	5.832e+004	8.799e+007	3.717e+010
4	2.953	60.32	7805	2.468e+006	8.122e+008
5	3.493	478.7	1.817e+005	7.345e+007	7.162e+010
6	2.835	52.05	7124	1.999e+006	7.353e+008
7	3.56	492.9	1.864e+005	7.264e+007	8.126e+010
8	2.831	51.79	7102	1.991e+006	7.328e+008
9	3.563	493.4	1.865e+005	7.263e+007	8.158e+010
10	2.831	51.79	7102	1.991e+006	7.327e+008
11	3.563	493.4	1.865e+005	7.263e+007	8.159e+010
...	...	...	...	...	...
32	533.592	3.61e+005	1.379e+009	5.382e+011	3.713e+017
33	84.003	2.933e+004	1.965e+007	7.101e+009	1.308e+015

Пример для $r = 3$ (случай мультивейвлетов седьмой степени)

Мультивейвлеты седьмой степени можно применять в тех случаях, когда требуется аппроксимировать функцию или ее производные до пятого порядка с более высокой точностью по сравнению с вейвлетами степени 3, 5. Кроме того, с помощью вейвлетов седьмой степени можно аппроксимировать на промежутках между узлами $x_i \in \Delta^L$ производные шестого и седьмого порядков – для вейвлетов степени 3, 5 они равны нулю. Это может быть использовано при решении дифференциальных уравнений высокого порядка, например, методом коллокации.

Для $x \in [0, 1]$, полагая на верхнем уровне вложенности $L = 5$, находим длину шага сетки $h = 2^{-5} = 1/32$. В соотношениях уточнения (4) при выполнении вейвлет-преобразования в качестве исходных используются значения функции и трех производных, помноженные на h в соответствующей степени: $\{f^{(k)}(i \cdot h) \cdot h^k, k = 0, \dots, 3, i = 0, \dots, 32\}$, всего 132 числа. Рассматривая в качестве тестовой функции многочлен седьмой степени $f(x) = (2 - x)^3(x^2 - 1)^2$, находим на последнем этапе рекуррентного алгоритма вейвлет-разложения восемь значений сплайна $S^0(x)$ и трех его производных в концах отрезка $C^0 = [8, -12, -20, 138, 0, 0, 8, -48]^T$. При этом все вейвлет-коэффициенты пренебрежимо малы и могут быть обнулены, обеспечивая в данном случае коэффициент сжатия $K = 132/8 = 16,5$.

Заключение

В работе представлена общая схема построения и вычисления эрмитовых сплайн-вейвлетов, ортогональных многочленам. Полученные результаты предоставляют дополнительные возможности для оптимизации методов обработки численной информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 332 с.
2. Чуи Ч. Введение в вейвлеты: пер. с англ. М.: Мир, 2001. 412 с.
3. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2006. 616 с.
4. Strela V. Multiwavelets: regularity, orthogonality and symmetry via two-scale similarity transform // Stud. Appl. Math. 1997. V. 98. No. 4. P. 335–354.
5. Strela V., Heller P.N., Strang G., Topivala P., Heil C. The application of multiwavelet filterbanks to image processing // IEEE Trans. Signal Processing. 1999. V. 8. No. 4. P. 548–563.
6. Warming R., Beam R. Discrete multiresolution analysis using Hermite interpolation: Biorthogonal multiwavelets // SIAM J. Sci. Comp. 2000. V. 22. No. 1. P. 269–317.
7. Dahmen W., Han B., Jia R.-Q., Kunoth A. Biorthogonal multiwavelets on the interval: cubic Hermite splines // Constr. Approx. 2000. V. 16. P. 221–259.
8. Han B. Approximation properties and construction of Hermite interpolants and biorthogonal multiwavelets // J. Approxim. Theory. 2001. V. 110. P. 18–53.
9. Koro K., Abe K. Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2001. V. 25. P. 149–164.
10. Han B., Kwon S.-G., Park S.S. Riesz multiwavelet bases // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2006. V. 20. P. 161–183.
11. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
12. Strang G., Strela V. Short wavelets and matrix dilation equations // IEEE Trans. Signal Processing. 1995. V. 43. No. 1. P. 108–115.
13. Шумилов Б.М. Мультивейвлеты эрмитовых сплайнов третьей степени, ортогональные кубическим многочленам // Математическое моделирование. 2013. № 4. С. 17–28.
14. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике: пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 272 с.
15. Шумилов Б.М. Алгоритм матричной прогонки вычисления мультивейвлетов нечетной степени, ортогональных многочленам // Автотригрия. 2015. Т. 51. № 2. С. 83–92.
16. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.

СОДЕРЖАНИЕ

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Dimitrov M. The workload in the $M\bar{A}P/G/1$ queue with state-dependent services in heavy traffic.....	3
Kerobyan K., Kerobyan R. Analysis of an Infinite-server queue $MAP_k G_k ^\infty$ in random environment with k Markov Arrival Streams and random volume of customers.....	9
Kerobyan K., Kerobyan R., Covington R.R., Enakoutsu K. Infinite-server queueing model $M\bar{M}AP_k G_k ^\infty$ in random environment and subject to catastrophes.....	16
Konovalov M., Razumchik R. Revisiting $M/D/1/N$ FIFO queue with renovation.....	22
Mikheev P.A., Pichugina A.A., Sushchenko S.P. Analysis of transport connection by a network of queueing systems.....	26
Nosova M.G. Research of a three-phase autonomous queueing system with a Markov Modulated Poisson process.....	33
Tsareva G.O. Numerical analysis of mean-field model of queueing system with a small parameter	39
Измайлова Я.Е., Назаров А.А. Исследование RQ-системы $M/E2/1$ с вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием	45
Катаева С.С., Катаев С.Г., Долгий М.Е. Исследование структуры потока случайных природных событий аппроксимацией MC-потокм	51
Клименок В.И. Система массового обслуживания с полками и резервным обслуживающим устройством	58
Копать Д.Я., Маталыцкий М.А. Нахождение ожидаемых доходов в G-сети с ненадёжными многолинейными системами обслуживания	66
Лебедев Е.А., Ливинская А.В. Аппроксимация сетей массового обслуживания с различной стартовой загрузкой	73
Лившиц К.И., Ульянова Е.С. Вероятностные характеристики модели управления запасами с релейным управлением темпом производства и ММР-потокм моментов продаж.....	80
Лисовская Е.Ю., Галилейская А.А. Суммарный объем занятого ресурса в ресурсной системе массового обслуживания $GI^{(v)}/GI^{(n)}/\infty$ с n типами заявок	88

Назаров А.А., Даммер Д.Д. Методы предельной декомпозиции и марковского суммирования для исследования потоков в системах с неограниченным числом приборов.....	94
Назаров А.А., Капустин Е.В. Распределение вероятностей состояний RQ-системы M M 1 с конфликтами заявок	102
Назаров А.А., Худяшова Е.Е. Исследование системы MMPP GI ∞ с бесконечным значением среднего времени обслуживания.....	107
Нежелская Л.А., Сидорова Е.Ф. Оптимальное оценивание состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка	113
Нежелская Л.А., Тумашкина Д.А. Оптимальная оценка состояний полусинхронного потока событий второго порядка в условиях его полной наблюдаемости	119
Рыжиков Ю.И. Многоканальные системы обслуживания с марковским нетерпением	125
Рыжиков Ю.И. Расчет систем обслуживания с большим числом каналов.....	132
Пауль С.В., Назаров А.А. Анализ RQ-системы M/GI/GI/1/1 с вызываемыми заявками, ненадежным прибором и дообслуживанием прерванных заявок	139
Саркер М., Аду К.И. К анализу вероятности блокировки в модели беспроводной сети со случайным объемом ресурса	146
Станкевич Е.П. Использование сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований в качестве моделей транспортных систем	151
Шкленник М.А., Моисеев А.Н. Исследование потоков в неоднородной системе массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих устройств и повторными обращениями.....	156

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ДАННЫХ

Khazal G., Zamyatin A. Framework for Arabic Text Classification Based on Topic Modeling.....	163
Shumilov B.M. To the problem of three points in computer vision.....	174
Докучаев Д.А., Баранова И.В. Исследование основных методов распознавания лиц на фотографиях	181

Катаева А.В. Интеллектуальная поддержка принятия решений в диагностике и лечении наркозависимых.....	185
Костюк Ю.Л., Литовченко М.И., Смирнова А.А. Распознавание трехмерных объектов на местности по данным лазерного сканирования	193
Клюшников В.К., Герасимова Ю.А., Шумилов Б.М. Алгоритм распознавания дефектов дорожного покрытия с использованием мобильных видеоизмерений	199
Мазуренко В.А. Прогнозирование дневных изменений цен на Биткойн с помощью методов интеллектуального анализа текста	203

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Botygin I.A., Krutikov V.A., Sherstnev V.S., Sherstneva A.I. Research of correlation dependences of soil of warm-up highways	207
Huseynova G.N. Hidden information transmission via cloud computing.....	214
Бабанов А.М. Вербализация структурного компонента ERM-схем	216
Бабанов А.М., Квач Е.С. «IS-A»-отношения в моделях представления знаний и данных	223
Быкова В.В., Солдатенко А.А. Об оценке ресурсных возможностей мультисервисных сетей	230
Елесин С.С., Моисеев А.Н. Выбор технологий виртуальной реальности для применения в учебных курсах	236
Лепший М.В., Шинкевич Ю.В., Труфанов Д.С. Разработка программы для нахождения оптимальных маршрутов вывоза твердых коммунальных отходов.....	242
Любезнов И.А., Биллер М.Г. Применения 3D-моделирования в задачах разработки проектов модернизации производства ДВП	247
Манхирова В.В. Исследование испаноязычной поэзии Золотого века методами тематического моделирования	251
Монгуш Ч.М. О классификации произведений тувинского фольклора и распознавании жанра героического эпоса	257
Поттосина С.А., Сергеева И.Л. Программная поддержка управления портфелем ценных бумаг на основе ликвидности.....	264
Шинкевич О.В. Внедрение и сопровождение информационной базы «КАМИН:Кадровый учет 3.0» с добавлением новых функциональностей.....	270

ПРИКЛАДНОЙ ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ И ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Алиев И.А. Модель системы обслуживания-запасания с разнотипными заявками	274
Баранова И.В. Применение метода двудольных множеств событий для кластеризации разнотипных данных.....	281
Богданова Е.Ю., Рыжов Н.А. Анализ модели движения автотранспорта через регулируемый перекресток «умного города»	287
Бородина А.В., Лукашенко О.В., Морозов Е.В. Методы понижения дисперсии оценок некоторых характеристик процесса деградации.....	290
Бронер В.И., Балдаев Р.А. Имитационное моделирование системы релейного управления запасами с кусочно-постоянными параметрами экспоненциальных распределений объемов поступления и потребления ресурса	295
Быков Н.В., Товарнов М.С. Имитационное моделирование взаимодействия мобильного робота с возможностью вертикального перемещения с окружением	300
Войтишек А.В. Об «универсальных» алгоритмах моделирования случайной величины, распределенной на конечном интервале.....	306
Жданков А.Н., Сафир М.Д. Пример реализации вероятностной модели случайного блуждания беспроводных устройств на целочисленной решетке	314
Задорожный В.Н., Юдин Е.Б. Исследование графов предпочтительного связывания со степенной весовой функцией	319
Каргин Б.А., Каблукова Е.Г., Чжэн П. Весовой алгоритм моделирования переноса излучения в стохастических рассеивающих и поглощающих средах.....	326
Мачнев Е.А., Ярцева И.С. Имитационное моделирование многосвязности.....	333
Платонова А.А. Об определении момента остановки моделирования некоторых распределений для достижения заданной точности оценки.....	336
Поляков Н.А., Макеева Е.Д. Численный анализ вероятности блокировки установления соединения между парой устройств в беспроводной сети миллиметрового диапазона.....	343
Семенова Д.В., Лукьянова Н.А., Голденко Е.Е. Модифицированный метод рекуррентного построения распределений ве-	

роятностей конечных случайных множеств на основе полностью вложенных иерархических копул.....	347
Скрипкин В.С., Бесчастный В.А., Острикова Д.Ю. Численный анализ скорости передачи данных в беспроводной сети с разделением пользователей на подгруппы мультимедийного вещания.....	354
Харин П.А., Поляков Н.А. К разработке имитационной модели установления соединения между парой устройств в беспроводной сети миллиметрового диапазона.....	359

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Medvedev G. Nonaffine models of yield term structure.....	362
Васильев С.А., Урусова Д.А., Салех Х.Х. Исследование устойчивости равновесия в экономико-математических моделях рынка телекоммуникаций.....	374
Георгиев В.О., Прокопьев Н.А. Исследование прикладного применения формальных математических моделей в генерации программного обеспечения.....	378
Калашников П.В. Математическая модель оценки баланса солидарно-распределительной пенсионной системы в долгосрочном периоде.....	380
Ким К.С., Смагин В.И. Синтез нестационарного экстраполятора для дискретных моделей с марковскими скачкообразными параметрами.....	388
Марченко О.В., Сергеева А.М. Математическое моделирование деформирования тяжелой упругой пластины конечной толщины под воздействием системы нагрузок.....	395
Новожилов М.А., Ивановский Р.И. Анализ и применение множественных межканальных связей в ЭЭГ.....	400
Решетникова Г.Н. Выбор поставщика при управлении заказами.....	406
Урусова Д.А., Салех Х.Х., Царева Г.О. Ценообразование на телекоммуникационные услуги в сетях 5G.....	412
Чухно О.В., Самуйлов К.Е. О применении анализа социальных сетей для исследования степени согласия экспертов в процессе группового принятия решений.....	415
Чухно Н.В., Гайдамака Ю.В. Численный анализ операторов агрегирования в процессе группового принятия решений.....	422
Шумилов Б.М. Мультивейвлеты, ортогональные многочленам.....	430

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Научное издание

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
(ИТММ-2018)**

**Материалы
XVII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
10–15 сентября 2018 г.**

Редактор *Т.С. Портнова*
Дизайн, верстка *Д.В. Фортеса*

ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 22.08.2018.
Формат 60 × 84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 25,69. Уч.-изд. л. 28,77. Тираж 100 экз. Заказ № 21.
