

Национальный исследовательский  
Томский государственный университет  
Кемеровский государственный университет  
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН  
Российский университет дружбы народов  
Филиал Кемеровского государственного университета  
в г. Анжеро-Судженске

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
(ИТММ–2016)**

**Материалы XV Международной конференции  
имени А. Ф. Терпугова  
12–16 сентября 2016 г.**

**Часть 2**

Издательство Томского университета

2016

УДК 519

ББК 22.17

И74

Редколлегия:

*С. П. Сущенко*, д-р техн. наук, профессор,

*М. П. Фархадов*, д-р техн. наук, ст. науч. сотр.,

*А. Н. Моисеев*, канд. техн. наук, доцент

Информационные технологии и математическое моделирование  
И74 (ИТММ–2016): материалы XV Международной конференции имени  
А. Ф. Терпугова (12–16 сентября 2016 г). – Томск : Изд-во Том. ун-та,  
2016. – Ч. 2. – 228 с.

ISBN 978-5-7511-2434-2

DOI: 10.17223/9785751124342

В часть 2 вошли материалы докладов, представленные на XV Международной конференции им. А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» на секциях «Экономико-математическое моделирование», «Информационные технологии и их применение», «Математическое моделирование в науке и технике».

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

**УДК 519**

**ББК 22.17**

*Конференция проводится при поддержке Российского фонда  
фундаментальных исследований (проект № 16-07-20672-г)*

ISBN 978-5-7511-2434-2

© Томский государственный университет, 2016

## PROBABILITY PROPERTIES OF THE INTEREST RATE MODELS

*G. A. Medvedev*

*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

The processes of short-term interest rates generate the changes in most market indices, as well as form the basis of determining the value of marketable assets and commercial contracts. A special role they play in calculating the term structure of the yield. Therefore, the development of mathematical models of these processes is extremely interesting for financial analysts and researcher of market issues. There are many versions of change of short-term risk-free interest rates in the framework of the theory of diffusion processes. However, there is still no such a model, which would be the basis for building a term structure of yields close to existing on a real financial market. It is interesting to analyze the existing models in order to clarify features of models in a probabilistic sense in more detail than has been done by their creators and users. Such analysis will be made here for the family of models used by the authors in the three well-known articles [1, 2, 3], where they were applied for fitting of the real time series of yield.

All considered models belong to the class of diffusion models, that generate processes  $X(t)$ , described by the equation

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t), \quad t > t_0, \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

where a specific determination of drift  $\mu(x)$  and volatility  $\sigma(x)$  defines one or another particular model.

Some models, such as models: Vasiček [4], Cox – Ingersoll – Ross (CIR) [5], geometric Brownian motion (BDT) [7], Ahn – Gao [2], are well documented in the literature, therefore are not described here. Proposed to reader the analysis is the first part of the work devoted to the explanation of the most suitable the short-term rate models to determine the term structure of zero-coupon yield that is reproducing the actually observed yield, as far as possible, the best way.

### The Duffie – Kan model

In Duffie – Kan model [6] the rate  $r(t)$  is generated by equation (1) with functions  $\mu(x) = k(\theta - x)$  and  $\sigma(x) = \sqrt{\gamma x + \delta} = \sqrt{2kD \frac{x - r_0}{\theta - r_0}}$ :

$$dr(t) = (\alpha r(t) + \beta)dt + \sqrt{\gamma r(t) + \delta}dW(t), \quad \gamma r(0) + \delta > 0,$$

where  $k = -\alpha > 0$ ,  $\theta = -\frac{\beta}{\alpha} > 0$ ,  $D = \frac{\gamma\beta - \alpha\delta}{2\alpha^2} > 0$ ,  $r_0 = \frac{\delta}{\gamma} < \theta$ .

The process  $r(t)$  has the stationary probability density  $f(x)$  that is a shifted gamma density with the shift parameter  $r_0$ , the scale parameter  $c$  and the form parameter  $q$ , i.e.

$$f(x) = \frac{c^q (x - r_0)^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{-c(x-r_0)}, \quad r_0 < x < \infty,$$

where  $q = (\theta - r_0)^2 / D$ ,  $c = (\theta - r_0) / D > 0$ ,  $r_0$  is the limit bottom value of interest rate  $r(t)$ .

The important numerical characteristics of the stationary density

$$E[X] = q / c = \theta, \quad \text{Var}[X] = D = q / c^2,$$

$$S = 2\sqrt{q}, \quad K = 3 + 6/q.$$

### The Aït-Sahalia model

Aït-Sahalia [8] has tested the based model of short interest rates (including described here) by fitting them to the actually time series of rates. It was found that an acceptable level of goodness-of-fit all these rates were rejected because the drift and volatility properties. As a result he proposed the following functions drift and diffusion

$$\mu(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_{-1} \frac{1}{r}, \quad \sigma^2(r) = \beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2.$$

In this model, the non-linear functions of drift and diffusion allow a wide variety of forms. To  $\sigma^2(x) \geq 0$  for any  $x$ , it is necessary that the diffusion function parameters ensure the fulfilment of inequalities

$$\beta_0 > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad \gamma^2 \equiv 4\beta_0\beta_2 - \beta_1^2 \geq 0.$$

Relevant in this function a probability density is given by expression

$$f(x) = N x^B (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2)^{C-1} \exp[Ax + G \arctg(E + Fx)], \quad x > 0,$$

where  $N$  is normalization constant,

$$A = 2\alpha_2/\beta_2 < 0, \quad B = 2\alpha_{-1}/\beta_0 > 0, \quad C = \alpha_1/\beta_2 - \alpha_2\beta_1/\beta_2^2 - \alpha_{-1}/\beta_0,$$

$$G = 2[2\alpha_0 + \alpha_2\beta_1^2/\beta_2^2 - \alpha_1\beta_1/\beta_2 - 2\alpha_2\beta_0/\beta_2 - \alpha_{-1}\beta_1/\beta_0]/\gamma,$$

$$E = \beta_1/\gamma, \quad F = \beta_2/\gamma.$$

Since the density  $f(x)$  at  $x \rightarrow 0$  has order  $O(x^B)$ ,  $B > 0$ , and at  $x \rightarrow \infty$  its order is  $O(x^{B+C} \exp[Ax])$ ,  $A < 0$ , then for every finite  $m$  the moments  $E[X^m]$  are exist, but their analytical expressions can not be obtained, and they can be calculated only numerically.

### The CKLS model

In Chan – Karolyi – Longstaff – Sanders (CKLS) model [1] it is assumed that  $\mu(x) = k(\theta - x)$ ,  $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^3$ . It turns out that a random process corresponding to this model has a stationary density

$$f(x) = \frac{n}{x^3} \exp \left[ -c \left( \left( \frac{\theta}{x} \right)^2 - 2 \frac{\theta}{x} \right) \right], \quad x > 0,$$

where  $c = k/\theta\sigma^2$ ,  $n$  is normalization constant. Note that such random process has only the first stationary moment  $E[X] = \theta$ .

## The unrestricted model I

In "unrestricted model I" [2]

$$dr = (\alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 r^2)dt + \sqrt{\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3} dw$$

are embedded all preceding models, that is, at a certain setting parameters  $\{\alpha\}$  can get any of the previous models.

Stationary probability density "unrestricted I" process has the form

$$f(x) = \frac{c(\omega)}{\sigma^2(x)} \exp\left(\int_{\omega}^x \frac{2\mu(u)}{\sigma^2(u)} du\right) = \frac{c(\omega)}{\alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 x^3} \exp\left(\int_{\omega}^x \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 u + \alpha_3 u^2)}{\alpha_4 + \alpha_5 u + \alpha_6 u^3} du\right),$$

where  $c(\omega)$  is normalization constant,  $\omega$  is a fixed number from the set of possible values of a random process, the specific value of which does not play some role.

To get the explicit form of expression for  $f(x)$  is possible, but it will be in general case quite cumbersome, and we restrict ourselves to the case when the values of the parameters  $\{\alpha\}$  provide performance properties of the probability density  $f(x)$ . First, we note that the volatility of the real process needs to be a real function, so  $\sigma^2(r) = \alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3 \geq 0$  for all values of  $r$ . At the same analytic properties of the probability density depends on the type of the roots of equation  $\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3 = 0$ ,  $\alpha_6 > 0$ . The sign of the discriminant  $\Delta = (\alpha_5/3\alpha_6)^3 + (\alpha_4/2\alpha_6)^2$  specifies the number of real and complex roots of the equation. When  $\Delta > 0$ , there is one real and two complex conjugate roots. When  $\Delta < 0$ , there are three different real roots. When  $\Delta = 0$  real roots are multiples.

Let  $\Delta > 0$  and the real root is  $r = r_0$ , then we can write  $\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3 = \alpha_6 \times (r - r_0)(r^2 + pr + q)$ , where  $r_0$ ,  $p$  and  $q$  are relatively sophisticated analytical expression and because of that are not listed here. However, if  $\alpha_4 = 0$ , then  $r_0 = 0$ ,  $p = 0$ ,  $q = \alpha_5 / \alpha_6$ . In this case, the probability density is given by

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{c(\omega)}{\alpha_6 x (x^2 + \alpha_5 / \alpha_6)} \exp\left(\int_{\omega}^x \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 u + \alpha_3 u^2)}{\alpha_6 u (u^2 + \alpha_5 / \alpha_6)} du\right) = \\ &= n x^{\frac{2\alpha_1}{\alpha_5} - 1} (\alpha_6 x^2 + \alpha_5)^{\frac{\alpha_3}{\alpha_6} - \frac{\alpha_1}{\alpha_5} - 1} \exp\left(\frac{2\alpha_2}{\sqrt{\alpha_5 \alpha_6}} \operatorname{arctg}\left[x \sqrt{\frac{\alpha_6}{\alpha_5}}\right]\right), \end{aligned}$$

where  $n$  is the normalization constant. For the existence of the probability density its parameters must satisfy the inequalities:  $\alpha_1/\alpha_5 > 1$ ,  $\alpha_3/\alpha_6 < 1$ . In order to at the same time there exist stationary moments it is necessary for the expectation  $\alpha_3/\alpha_6 < < 0,5$ , for variance  $\alpha_3/\alpha_6 < 0$ , for the third moment  $\alpha_3/\alpha_6 < -0,5$  and for the fourth moment  $\alpha_3/\alpha_6 < -1$ .

If  $\Delta < 0$  denote the roots of the equation  $r_0 > r_1 > r_2$  so

$$\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3 = \alpha_6 (r - r_0) (r - r_1) (r - r_2).$$

Then the probability density is expressed in the form

$$f(x) = n (x - r_0)^{\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 r_0 + \alpha_3 r_0^2)}{\alpha_6 (r_0 - r_1)(r_0 - r_2)} - 1} (x - r_1)^{-\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 r_1 + \alpha_3 r_1^2)}{\alpha_6 (r_0 - r_1)(r_1 - r_2)} - 1} (x - r_2)^{\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_2^2)}{\alpha_6 (r_0 - r_2)(r_1 - r_2)} - 1}.$$

In this case must be performed the inequalities

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 r_0 + \alpha_3 r_0^2) > \alpha_6 (r_0 - r_1)(r_0 - r_2), \alpha_3/\alpha_6 < 1.$$

For the existence of the  $m$ -th moment other than that necessary to perform the conditions  $m/2 + \alpha_3/\alpha_6 < 1$ . Unfortunately, the analytical expression of the normalization constant  $n$  and moments  $E[r^m]$  very cumbersome, they include hypergeometric functions. Under these assumptions the process with such density has a bottom line equal to the largest root, i.e.  $r(t) \geq r_0$ .

### The unrestricted model II

In the "unrestricted model II" [1] process of short rate follows the equation

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw, \gamma > 0. \quad (2)$$

Therefore  $\mu(x) = k(\theta - x)$ ,  $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^{2\gamma}$  and the stationary density  $f(x)$  has form

$$f(x) = \frac{n}{x^{2\gamma}} \exp\left[\frac{1}{x^{2\gamma}} \left(\frac{q x}{1 - 2\gamma} - \frac{c x^2}{2 - 2\gamma}\right)\right], \quad x > 0, \quad (3)$$

where  $q = 2k\theta/\sigma^2$ ,  $c = 2k/\sigma^2$ ,  $n$  is the normalization constant.

Values of parameter  $\gamma$ , allowing the convergence of the integral of  $f(x)$  on the interval  $(0, \infty)$ , determined by the inequality  $\gamma > 0,5$ . At the same time, there are two critical points:  $\gamma = 0,5$  (in this case, the model is transformed into a short-term rate model CIR) and  $\gamma = 1$ , when the probability density is reduced to form that corresponds to process of the Brennan - Schwartz model [9]

$$f(x) = \frac{q^{1+c}}{x^{2+c} \Gamma(1+c)} \exp\left(-\frac{q}{x}\right), \quad x > 0.$$

When  $\gamma = 1,5$ , model "unrestrictions II" is known as the model CKLS. Vasiček model is also a model embedded in the model "unrestrictions II» at  $\gamma = 0$ . For existence of moments of order  $m$ , it is necessary the fulfilment of inequality  $2\gamma > m + 1$ . Unfortunately, the expression for the probability density in general case does not allow to calculate moments in analytical form, although for referred particular cases they simply calculated. For the model CIR

$$E[X^m] = \frac{\Gamma(m+q)}{c^m \Gamma(q)};$$

for Brennan - Schwartz model

$$E[X^m] = q^m \frac{\Gamma(1+c-m)}{\Gamma(1+c)},$$

the moments of order  $m$  exist if the inequality  $m < 1 + c$  is fulfilled.

Even before the appearance of the model "unrestrictions II" there were used models, which then turned out to be special cases of this model. This is the model of the CIR (1980) [10], which is obtained from the equation (2), if we assume that  $\gamma = 1,5$  and  $k = 0$ . Another particular version is the CEV model, i.e. model of constant elasticity of variance that was proposed J. Cox and S. Ross (1976) [11], as in equation (2) made  $\theta = 0$ . Properties of the processes generated by these models

can be understood by considering the limiting transition  $k \rightarrow 0$  in the first model or  $\theta \rightarrow 0$  in the second. When  $k$  and  $\theta$  still finite the stationary regimes in the models exist and the probability density of processes for these models is expressed in the form (3). However, in the limiting case  $k = 0$  or  $\theta = 0$  stationary regimes of processes no longer exist, and the probability density can not be expressed in the form (3), and can be obtained as solutions of partial differential equations

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [\sigma^2 x^3 f(x,t|y,s)]}{\partial x^2} = 0$$

for model CIR (1980) and

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t} + \beta \frac{\partial [x f(x,t|y,s)]}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 [x^{2\gamma} f(x,t|y,s)]}{\partial x^2} = 0$$

for model CEV at the boundary condition for both equations

$$\lim_{t \rightarrow s} f(x,t|y,s) = \delta(x-y).$$

Unfortunately, these equations can not be solved analytically, but we can say that for  $k = 0$  or  $\theta = 0$  the process generated by the equation (2) becomes unsteady for the CIR model (1980) with the constant expectation and increasing with time variance, and for model CEV changing with time both the expectation and the variance.

In other non-stationary models are as follows: the Merton model [12], the Dothan model [13], the GBM model [14].

### Conclusion

As mentioned above, the process of short-term rates is the basis for building a term structure of the yield of zero-coupon bonds. This explains the interest to the analysis of the processes of short-term rates. In the literature there are many articles that are made empirical attempts to find a model of short-term rate, for which is obtained a term structure closest to the actual observed structure [1, 2, 3]. On the other hand there is also empirical evidence in the literature that the famous model of short-term rates do not provide this an acceptable level of goodness-of-fit [8]. Therefore there is a need for analytical studies to determine the degree of risk in the use of a particular model of short-term rates of the yield. As a necessary basis for this it is need an information about the probability properties of processes short-term rate, expressed analytically. This is the subject of this paper that shall be considered as the first stage of this work.

### References

1. Chan K. C., Karolyi G. A., Longstaff F. A., Sanders A. S. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate // *J. of Finance.* – 1992. – Vol. 47. – P. 1209–1227.
2. Ahn D.-H., Gao B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics // *The Review of Financial Studies.* – 1999. – Vol. 12, № 4. – P. 721–762.
3. Bali T. An empirical comparison of continuous time models of the short term interest rate // *J. of Futures Markets.* – 1999. – Vol. 19, No. 7. – P. 777–797.
4. Vasiček O. A. An equilibrium characterization of the term structure // *J. of Financial Economics.* – 1977. – Vol. 5. – P. 177–188.

5. Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. A theory of the term structure of interest rate // *Econometrica*. – 1985. – Vol. 53. – P. 385–467.
6. Duffie D., Kan R. A yield-factor model of interest rates // *Math. Finance*. – 1996. – Vol. 6. – P. 379–406.
7. Black F., Derman E., Toy W. A one factor model of interest rates and its application to treasury bond options // *Financial Analysts Journal*. – 1990. – P. 33–39.
8. Ait-Sahalia Y. Testing continuous-time models of the spot interest rate // *Review of Financial Studies*. – 1996. – Vol. 9, № 2. – P. 385–426.
9. Brennan M. J., Schwartz E. S. A continuous time approach to the pricing of bond // *Journal of Banking and Finance*. – 1979. – Vol. 3. – P. 135–155.
10. Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. An analysis of variable rate loan contracts // *J. of Finance*. – 1980. – Vol. 35. – P. 389–403.
11. Cox J. C., Ross S. A. The valuation of options for alternative stochastic processes // *J. of Financial Economics*. – 1976. – Vol. 3. – P. 145–166.
12. Merton R. C. Theory of Rational Option Pricing // *Bell Journal of Economics and Management Science*. – 1973. – Vol. 4 (1). – P. 141–183.
13. Dothan M. On the term structure of interest rates // *J. of Financial Economics*. – 1978. – Vol. 6. – P. 59–69.
14. Samuelson P. A. Rational Theory of Warrant Pricing // *Industrial Management Review*. – 1965. – Vol. 6. – P. 13–31.

DOI: 10.17223/9785751124335/2

## **ИССЛЕДОВАНИЕ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ЗАВИСИМОСТИ СТОИМОСТИ КВАРТИР Г. ТОМСКА ОТ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ**

***Т. В. Бушкова, Г. М. Кошкин***

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

### **Введение**

В современном обществе рынок жилой недвижимости и его участники представляют собой экономическую систему, которая занимает важное место в жизни каждого человека. В последние годы развитие рынка жилья в России и повышение деловой активности на нем обусловили востребованность осуществления оценки рыночной стоимости жилых объектов, необходимой при осуществлении с недвижимостью различных сделок (купля/продажа, ипотека, залог и т.д.), а также в целом аналитических исследований рынка жилья. В последнее время со стороны экспертов рынка недвижимости проявляется повышенный интерес к методам массовой оценки рыночной стоимости объектов жилья, актуальность развития которых подчеркивается изменением порядка начисления налога на имущество. В частности, на текущий момент при расчете данного налога в отношении жилья в качестве налогооблагаемой базы выступает инвентаризационная стоимость Бюро технической инвентаризации, которая значительно отличается от текущей рыночной цены. В настоящее время осуществляется переход к новой методике расчета налогооблагаемой базы – исходя из рыночной стоимости объекта. Данные изменения вызовут необходимость массовой переоценки стоимости жилья по всей стране, и очевидно, что традиционные методы

оценки в данном случае окажутся затратными и трудоемкими – с их помощью эксперты рынка будут не способны оперативно справиться с такими объемами работы. Регрессионный анализ можно рассматривать в качестве эффективного и удобного метода, основанного на анализе большого количества фактических данных для оценки рынка жилья, как массовой, так и индивидуальной, а также для определения основных тенденций и закономерностей при формировании рыночной цены объектов жилья в рамках различных аналитических исследований.

В настоящей работе методами факторного анализа проводится исследование зависимости стоимости квартир города Томска от различных качественных и количественных характеристик. Было исследовано 300 квартир, выставленных на продажу в агентствах недвижимости города Томска. Данные взяты с сайтов трех самых крупных агентств недвижимости города Томска по состоянию на декабрь 2015 г.

Специфика рынка недвижимости города Томска определяется рядом моментов. Томск – город на востоке Западной Сибири на берегу реки Томи, административный центр одноименной области и района (площадь 294,6 км<sup>2</sup>, население около 500 000 человек, 200 тыс. квартир общей площадью примерно в 10 млн кв. метров). Общий износ жилых помещений в Томске составляет 60 %. При этом площадь муниципального ветхого и аварийного жилищного фонда увеличивается на 4–6 тыс. кв. метров в год и достигает сейчас 360 тыс. кв. м. Рынок жилой недвижимости Томска географически структурирован.

Наиболее престижный и дорогой район – Кировский. Жилье на его улицах (например, Елизаровых и Кирова) стоит дороже всего. В бесспорных преимуществах данного района – близость автомобильного и железнодорожного вокзалов, университетов, торговых и развлекательных центров. Значительное количество квартир в районе сдается в аренду студентам, обладающим состоятельными родителями. По подсчетам местных властей жилье у частных арендуют от 10 до 15 тыс. студентов. Большая часть из них селится именно в Кировском районе. На втором месте по уровню цен и комфорта значится Советский район. В его состав входит уникальная Татарская слобода, являющаяся прекрасным образцом старинной деревянной архитектуры. В данном районе города много туристов, в том числе и иностранных. Это положительно влияет на местный рынок арендного жилья и торговой недвижимости.

Ленинский район считается одним из наиболее криминальных в городе. На его территории сосредоточены большое количество промышленных предприятий и товарная станция. Помимо этого, данный район знаменит частыми проблемами в коммунальной сфере. Автомобильные пробки на улице Ленина, связующей район с остальным городом, существенно снижают транспортную доступность микрорайонов и сокращают стоимость жилья в них. Октябрьский район является наиболее дешевым, но в то же время и самым перспективным в городе. После решения дорожных проблем в районе томской «кольцевой» на 4-й поликлинике транспортная доступность

спального района возросла, что существенно повысило стоимость жилья. Не случайно ряд застройщиков подобных ТДСК, ТПСК возводят большую часть своих новостроек именно здесь. Это создает еще одну отличительную черту района – большое количество новых и современных домов.

Построим математическую модель стоимости квартир, зависящую от следующих рыночных характеристик: общей площади, жилой площади, площади кухни, этажа, материала (типа) дома, состояния помещения, количество комнат.

Метод наименьших квадратов можно применять к нелинейным регрессионным моделям только в том случае, если они являются нелинейными по факторным переменным или нелинейными по параметрам, но внутренне линейными, т. е. возможна линеаризация этих моделей.

Рассмотрим применение метода наименьших квадратов для определения неизвестных параметров уравнения, описанного с помощью формулы Кобба–Дугласа [1, 2]:

$$Y = \beta_0 X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} X_3^{\beta_3} e^{\beta_4 R_1} e^{\beta_5 R_2} e^{\beta_6 R_3} e^{\beta_7 R_4} e^{\beta_8 R_5} e^{\beta_9 R_6} e^{\varepsilon} \quad (1)$$

где  $Y$  – экзогенная переменная (стоимость квартиры в рублях);  $\beta_i$  – коэффициент при  $i$ -й эндогенной переменной, величины  $\varepsilon_i$  – отклонения, которые не объясняются моделью, а вызваны другими факторами. Независимые переменные:  $x_1$  – общая площадь в  $m^2$ ;  $x_2$  – полезная площадь в  $m^2$ ;  $x_3$  – площадь кухни в  $m^2$ ;  $R_1$  – район (центр, окраина);  $R_2$  – наличие балкона (лоджии);  $R_3$  – этаж, на котором находится объект;  $R_4$  – однокомнатные квартиры;  $R_5$  – двухкомнатные квартиры;  $R_6$  – три и более комнат в квартире.

Прологарифмировав формулу (1)

$$\begin{aligned} \log Y = & \log \beta_0 + \log X_1^{\beta_1} + \log X_2^{\beta_2} + \log X_3^{\beta_3} + \log e^{\beta_4 R_1} + \\ & + \log e^{\beta_5 R_2} + \log e^{\beta_6 R_3} + \log e^{\beta_7 R_4} + \log e^{\beta_8 R_5} + \log e^{\beta_9 R_6} + \log e^{\varepsilon}, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \log Y = & \beta_0 + \beta_1 \log X_1 + \beta_2 \log X_2 + \beta_3 \log X_3 + \\ & + \beta_4 R_1 + \beta_5 R_2 + \beta_6 R_3 + \beta_7 R_4 + \beta_8 R_5 + \beta_9 R_6 + \varepsilon; \end{aligned}$$

после замены переменных приходим к уравнению

$$\log Y = \beta_0 + \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \beta_3 Z_3 + \beta_4 R_1 + \beta_5 R_2 + \beta_6 R_3 + \beta_7 R_4 + \beta_8 R_5 + \beta_9 R_6 + \varepsilon,$$

которое описывает линейную регрессионную модель.

Применив метод наименьших квадратов, получаем статистические характеристики модели (табл. 1).

Таблица 1. Статистические характеристики модели

Параметры	Коэффициент	Станд. ошибка	t-статистика	p-value
<b>const</b>	5,432423	0,113805	47,73464	-123,69
$Z_1$	0,631819	0,033632	18,7862	-42,214
$Z_2$	0,00001	0,00001	6,5535	0,00001
$Z_3$	-0,01315	0,020175	-0,65176	0,515066
$R_1$	0,040747	0,010408	3,914823	0,000113
$R_2$	0,00062	0,001224	0,506743	0,612718
$R_3$	-0,15434	0,034326	-4,49644	21,12845
$R_4$	-0,09793	0,025527	-3,83652	0,000153
$R_5$	-0,02786	0,02251	-1,23746	0,21691
$R_6$	5,432423	0,113805	47,73464	-123,690309

Используя оценки коэффициентов (2-й столбец таблицы), записываем линейную регрессионную модель

$$Y = 5,432423 + 0,631819Z_1 + 0Z_2 - 0,01315Z_3 + 0,040747R_1 + 0,00062R_2 - 0,15434R_3 - 0,09793R_4 - 0,02786R_5 + 5,432423R_6.$$

На основе этой модели рассчитываем прогнозы. В табл. 2 приводятся данные для 10 квартир.

Таблица 2. Прогнозы для 10 квартир

№ п/п	Наблюдаемые значения ( $Y$ )	Предсказанные значения ( $\tilde{Y}$ )	Отклонения ( $\tilde{Y} - Y$ )
1	1384000	1439400	55000
2	1384000	1439400	55000
3	1384000	1439400	55000
4	1402000	1465539	64000
5	1402000	1465539	64000
6	1402000	1465539	64000
7	1406000	1466191	60000
8	1406000	1466191	60000
9	1406000	1466191	60000
10	1406000	1466191	60000

Результаты прогнозирования представлены на рис. 1.

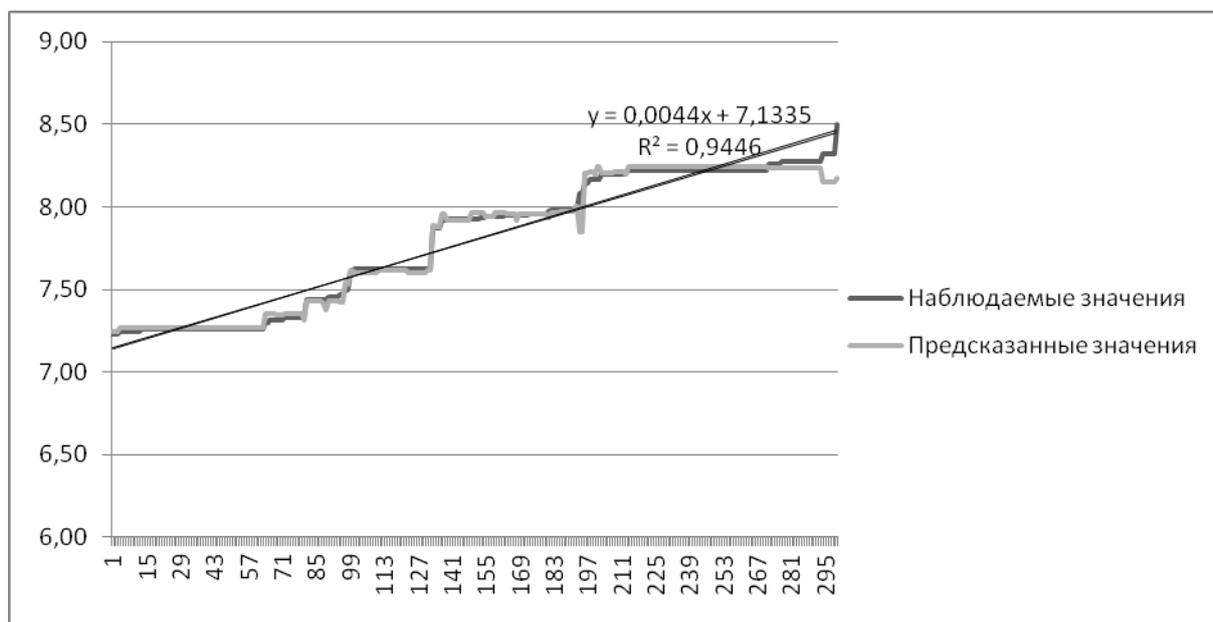


Рис. 1. Графики прогнозируемых и наблюдаемых значений

Процент ошибки прогнозов на одну квартиру равен 0,4 % и вычислялся по формуле

$$\text{Проц. ош.} = \frac{1}{300} \sum_{i=1}^n \frac{|Y_i - \tilde{Y}_i|}{Y_i} \cdot 100.$$

Коэффициент при  $Z_1$ , равный 0,632, означает, что увеличение общей площади квартиры на 1 % увеличивает ее цену на 0,632 %. Иначе говоря, эластичность цены квартиры по жилой площади равна 0,632.

Рассмотрим интерпретации фиктивных переменных: отрицательный коэффициент при переменной  $R_3$  – этаж, на котором расположена квартира, означает, что квартира на первом или последнем этаже стоит на 0,15 % дешевле аналогичной квартиры на средних этажах. Наличие балкона делает квартиру на 2,75 % дороже.

Переменные  $R_4$ ,  $R_5$  и  $R_6$  были включены в регрессию, чтобы учесть возможные различия в структуре рынка жилья для квартир с разным количеством комнат.

Проверив в пакетах STATISTICA и EXCEL регрессии на процент ошибок, приходящихся на одну квартиру, можем сделать вывод о значимости следующих параметров: общая площадь, район города и количество комнат в квартире – три и более. В результате приходим к модели

$$Y = \beta_0 + \beta_1 Z_1 + \beta_4 R_1 + \beta_8 R_6 + \varepsilon, \quad (2)$$

для которой имеем характеристики, представленные в табл. 3.

Модель принимает вид

$$Y = 5,188595 + 0,666088Z_1 + 0,06634R_6 + \varepsilon.$$

Процент ошибок прогноза на одну квартиру равен 0,31.

Таблица 3. Статистические характеристики модели (2)

	Коэффициент	Станд. ошибка	t-статистика	p-value
const	5,188595	0,027434	189,1328	0,00001
$z_1$	0,666088	0,007649	87,07863	– 208,20794
$R_1$	0,00001	0,00001	65535	0,00001
$R_6$	0,06634	0,008752	7,580194	– 0,94678

Таким образом, модель, описанная формулой Кобба–Дугласа, дает более точный прогноз, и процент ошибки в расчете на одну квартиру ниже, чем в случае линейной регрессионной модели. Можно предположить, что при прогнозировании цены квартиры достаточно использовать два показателя: общая площадь и количество комнат три и более.

Сравнивая линейную регрессионную модель и модель, построенную на основе функции Кобба–Дугласа, отметим, что последняя позволяет строить более точные прогнозы и дает меньший процент ошибки в расчете на одну квартиру.

Результаты исследования могут быть использованы при определении рыночной стоимости квартиры и для оценки правильности выставленной цены на квартиру. При наличии данных, собранных в разные моменты времени, можно выявить факторы, влияние которых на цены квартир возрастает или уменьшается.

#### Литература

1. Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А. Эконометрика. Начальный курс : учебник. – М.: Дело, 2004. – 504 с.
2. Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика и основы эконометрики: учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 2233 с.
3. Доугерти К. Введение в эконометрику. – М.: ИНФА-М, 1999. – 432 с.
4. Афанасьев В. Н., Цыпин А. П. Эконометрика в пакете STATISTICA: учеб. пособие по выполнению лабораторных работ. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2008. – 204 с.

DOI: 10.17223/9785751124335/3

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ МОДЕЛИ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКИ СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ

*Т. И. Грекова, А. В. Роцин*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Решена задача оптимального распределения национального дохода между фондами накопления и потребления для стохастической модели замкнутой односекторной экономики на ограниченном интервале времени с заданным начальным уровнем фондовооруженности и определенным горизонтом планирования. Использована неоклассическая модель экономического роста. Предполагается, что динамика изменения трудовых ресурсов является диффузионным случайным процессом.

## 1. Постановка задачи

Задача основана на неоклассической модели экономики со стохастическим изменением трудовых ресурсов, что влечет за собой случайность всех процессов во времени.

Рассматривается односекторная модель экономической системы с неоклассической производственной функцией:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)). \quad (1)$$

$K(t)$ ,  $L(t)$ ,  $Y(t)$  определяют капитал, трудовые ресурсы и национальный доход соответственно.

В функции управляющего органа экономической системы входит распределение  $Y(t)$  между фондами накопления  $I(t)$  и потребления  $C(t)$ . Таким образом, основное балансовое уравнение имеет вид

$$Y(t) = I(t) + C(t).$$

Управление осуществляется путем изменения нормы накопления  $s(t)$ , которая определяет долю национального дохода, направляемую на инвестиции.

$$I(t) = s(t)Y(t), \quad (2)$$

$$C(t) = (1 - s(t))Y(t), \quad 0 \leq s(t) \leq 1. \quad (3)$$

Изменение основных производственных фондов системы описывается дифференциальным уравнением:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \mu K(t). \quad (4)$$

Здесь  $\mu$  – коэффициент амортизации основных фондов.

Модель изменения трудовых ресурсов – стохастический диффузионный процесс:

$$dL(t) = nL(t)dt + \sigma L(t)dz(t), \quad (5)$$

где  $n$  – темп изменения трудовых ресурсов,  $\sigma$  – параметр вариации трудовых ресурсов,  $z(t)$  – винеровский процесс. Данная модель является стохастическим аналогом детерминированной модели экспоненциального роста, которая используется для моделирования изменения трудовых ресурсов [1]. Уравнение (5) получено из процесса простого Марковского ветвления, описывающего рост популяции [2].

Управление осуществляется на конечном интервале времени  $t \in [0, T]$ , где  $T$  – известная неслучайная величина. Размер капитала в начальный момент времени известен:  $K(0) = K_0$ . Предполагается, что  $K(T) = K_T$ . В силу случайности процесса изменения трудовых ресурсов величина  $K(T)$  является случайной. Следовательно, необходимо говорить об ожидаемой желаемой величине капитала в конечный момент  $E\{K(T)\} = K_T$ .

Критерием качества экономической системы является максимизация дисконтированной величины потребления, т.е. максимизация полезности.

$$J(t) = E_0 \left\{ \int_0^T C(t) e^{-\delta t} dt \right\} \xrightarrow{s(t)} \max. \quad (6)$$

Здесь  $\delta > 0$  – норма дисконтирования. Индекс оператора математического ожидания показывает его условность – процесс планирования осуществляется в начальный момент времени  $t = 0$ .

Задача заключается в определении значения нормы накопления  $s(t)$  в каждый момент времени на интервале планирования  $[0, T]$  с целью обеспечения максимального из возможных значений функционала (6) при выполнении граничных условий  $K(0) = K_0, E\{K(T)\} = K_T$ .

Задача в удельных переменных  $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}, f(k(t)) = \frac{F(K(t), L(t))}{L(t)}$  с

обозначениями  $\lambda = n + \mu - \sigma^2$  и  $b(k(t)) = s(t)f(k(t)) - \lambda k(t)$  принимает вид

модель динамики фондовооруженности

$$dk(t) = b(k(t))dt - \sigma k(t)dz(t). \quad (7)$$

критерий оптимальности

$$J(t) = E_0 \left\{ \int_0^T (1 - s(t)) f(k(t)) e^{-\delta t} dt \right\} \xrightarrow{s(t)} \max. \quad (8)$$

граничные условия  $k(0) = k_0, E\{k(T)\} = k_T$ .

Задача в наиболее схожей постановке, но на бесконечном интервале времени без граничных условий, была рассмотрена Робертом Мертоном в работе [2]. Было доказано, что стохастический процесс изменения фондовооруженности имеет стационарное распределение вероятностей, для существования которого необходимо выполнение условий:

1. В стационарном состоянии параметр  $s$  – константа.
2. Производственная функция  $f(k)$  является неоклассической.
3. Верно неравенство  $\lambda > 0$ .

## 2. Решение задачи с применением стохастического принципа максимума

Для решения поставленной задачи используем стохастический принцип максимума [3]. Функция Гамильтона:

$$H = (1 - s(t))f(k(t))e^{-\delta t} + \mu(s(t)f(k(t)) - \lambda k(t)) + \frac{1}{2}\omega k^2(t)\sigma^2.$$

Сопряженные переменные  $\mu, \omega$  и  $\omega$  определяются решением уравнений [3]:

$$\begin{cases} \frac{d\mu}{dt} = -[1 - s(t)]f'_k(k)e^{-\delta t} - \mu[s(t)f'_k(k) - \lambda] - k(t)\sigma^2\omega; \\ \frac{d\omega}{dt} = -[1 - s(t)]f''_k(k)e^{-\delta t} - 2\omega[s(t)f'_k(k) - \lambda] - \mu s(t)f''_k(k) - \sigma^2\omega; \end{cases} \quad (9)$$

$$\forall t \in [0, T]: \mu > 0, \omega > 0.$$

Решение задачи согласно стохастическому принципу максимума:

$$s(t) = \arg \max_{s(t)} E_t \{H\}.$$

Обозначим  $q = \mu e^{\delta t}$ ,  $p = \omega e^{\delta t}$ . Исключив  $q(k(t), t) \equiv \mu(k(t), t)e^{\delta t}$  в функции Гамильтона все слагаемые, не зависящие от ставки накопления  $s(t)$ , получим решение

$$s(t) = \arg \max_{s(t)} E_t \{s(t)[q - 1]\}.$$

Отсюда оптимальная ставка накопления на интервале планирования определяется формулой

$$s(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } E_t \{q\} < 1; \\ s^*, & \text{если } E_t \{q\} = 1; \\ 1, & \text{если } E_t \{q\} > 1. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь  $0 < s^* < 1$  – оптимальное значение при условии, что  $E_t \{q\} = 1$ . Управление является трехуровневым управлением релейного типа.

### 3. Анализ системы фондовооруженность – сопряженные переменные

Проанализируем величины  $k(t)$  и  $q(k(t), t)$ . Рассмотрим систему уравнений для случайных величин  $k(t)$ ,  $q(k(t), t)$ ,  $p(k(t), t)$ . Так как функции  $q(k(t), t)$  и  $p(k(t), t)$  являются «гладким» преобразованием  $k(t)$ , для них существует стационарное распределение вероятности. Задача решена на стационарных траекториях, когда  $E\{k(t)\} = \bar{k} = \text{const}$ ,  $E\{q(k(t), t)\} = \bar{q} = \text{const}$ ,  $E\{p(k(t), t)\} = \bar{p} = \text{const}$ .

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} 0 = sf(\bar{k}) - \lambda \bar{k}; \\ 0 = \bar{q}[\delta + \lambda] - f'_k(\bar{k})[1 - s + s\bar{q}] - k\sigma^2 \bar{p}; \\ 0 = \bar{p}[\delta - 2(sf'_k(\bar{k}) - \lambda) - \sigma^2] - f''_k(\bar{k})[1 - s + s\bar{q}]. \end{cases} \quad (11)$$

Из первого уравнения системы следует

$$s = \frac{\lambda \bar{k}}{f(\bar{k})}. \quad (12)$$

Из третьего уравнения системы выразим  $\bar{p}(\bar{k})$  и подставим во второе уравнение. Из второго уравнения выразим  $\bar{q}(\bar{k})$ :

$$\bar{q}(\bar{k}) = \frac{(1 - s) \left( f'_k(\bar{k}) + \frac{\bar{k} \sigma^2 f''_k(\bar{k})}{\delta - 2(sf'_k(\bar{k}) - \lambda) - \sigma^2} \right)}{\delta + \lambda - s \left( f'_k + \frac{\bar{k} \sigma^2 f''_k(\bar{k})}{\delta - 2(sf'_k(\bar{k}) - \lambda) - \sigma^2} \right)}. \quad (13)$$

Пусть  $E\{q(\bar{k})\} = 1$ , тогда согласно (10)  $s = s^*$  и (13) имеет вид

$$1 = E \left\{ \frac{(1-s^*) \left( f'_k(\bar{k}) + \frac{\bar{k}\sigma^2 f''_k(\bar{k})}{\delta - 2(s^* f'_k(\bar{k}) - \lambda) - \sigma^2} \right)}{\delta + \lambda - s^* \left( f'_k(\bar{k}) + \frac{\bar{k}\sigma^2 f''_k(\bar{k})}{\delta - 2(s^* f'_k(\bar{k}) - \lambda) - \sigma^2} \right)} \right\}. \quad (14)$$

Отсюда следует, что

$$\delta + \lambda = f'_k(\bar{k}) + \frac{\bar{k}\sigma^2 f''_k(\bar{k})}{\delta - 2 \left( \left( \frac{\lambda \bar{k}}{f(\bar{k})} \right) f'_k(\bar{k}) - \lambda \right) - \sigma^2}. \quad (15)$$

Так как производственная функция является неоклассической, уравнение (15) имеет единственный корень  $k^*$ . Подставив в (12) значение  $k^*$ , получим уравнение для нахождения оптимальной ставки накопления на стационарной траектории:

$$s^* = \frac{\lambda k^*}{f(k^*)}. \quad (16)$$

Согласно (10) и проведенному анализу основной принцип управления в поставленной задаче осуществляется следующим образом:

1. Время планирования делится на три интервала  $[0, T] = [0, T_1] \cup [T_1, T_2] \cup [T_2, T]$ .

2. На первом интервале времени  $[0, T_1]$  система из начального состояния  $k_0$  переводится в оптимальное стационарное состояние  $k^*$ . Если  $k^* < k_0$ , то  $s(t) = 0$ , если  $k^* > k_0$ , то  $s(t) = 1$ .

3. На втором интервале времени  $[T_1, T_2]$  поддерживается функционирование системы в стационарном состоянии. Ставка накопления при этом равна  $s^*$ .

4. На третьем интервале времени  $[T_2, T]$  систему необходимо вывести из стационарного состояния с целью достижения планируемого значения фондовооруженности  $E\{k(T)\} = k_T$  в конечный момент времени  $T$ . Если  $k^* < k_T$ , то  $s(t) = 1$ , если  $k^* > k_T$ , то  $s(t) = 0$ .

Подобный принцип управления называют «магистральным» принципом управления, когда обеспечивается экономический рост с постоянным темпом.

#### Литература

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Айрис-Пресс, 2002. – 553 с.
2. Merton R. C., Samuelson P. A. Continuous-time finance-Cambridge. – MA USA: Basil Blackwell, 1990. – 700 p.

3. Zhou X. Y. Sufficient conditions of optimality for stochastic systems with controllable diffusions // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1996. – Vol. 41. – P. 1176–1179.
4. Peng, S. A general stochastic maximum principle for optimal control problems // SIAM J. Control Optim. – 1990. – Vol. 28(4). – P. 966–979.

DOI: 10.17223/9785751124335/4

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ В ВИДЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ПРИБОРОВ С УЧЕТОМ ЕДИНОВРЕМЕННЫХ СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТ**

*Д. Д. Даммер*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Математическому моделированию экономических процессов в настоящее время уделяется достаточно большое внимание. В стороне не остаются и модели актуарной математики, изучающей аспекты страхового дела. В основном во всех работах по этой тематике находятся такие характеристики работы страховой компании: вероятность разорения, математическое ожидание капитала и числа застрахованных в компании рисков. Так, в работе [1] рассматривается модель с произвольной величиной продолжительности договора страхования и простейшим потоком входящих рисков. В [2] методом асимптотического анализа получено распределение числа рисков и страховых выплат. В [3] получено совместное распределение двумерного процесса числа застрахованных рисков и числа требований на выплату страховых сумм с учетом неявной рекламы. В данной работе исследуется модель с учетом неявной рекламы и при условии выплат единовременных страховых сумм.

Рассмотрим модель страховой компании с неограниченным страховым полем [4] в виде системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов (рис. 1). Срок действия договора страхования соответствует длительности обслуживания заявки на приборе. Пусть в компанию поступают риски, образуя поток событий, с интенсивностью, зависящей от числа застрахованных рисков. Интенсивность этого потока будем определять двумя составляющими: параметром  $\lambda$ , который определяет поток рисков, приходящих независимо от застрахованных рисков, и параметром  $\alpha$ , который определяет поток рисков, находящихся под воздействием «неявной рекламы». Модели с таким потоком входящих рисков рассматриваются в работе [5], но методы исследования моделей носят иной характер, и поток требований на выплату страховых сумм никаким образом не учитывается.

Каждый риск, находящийся в компании, на протяжении длительности действия договора страхования независимо от других рисков генерирует с интенсивностью  $\gamma$  требование на выплату страховой суммы. И эти требования также образуют простейший поток событий. Естественно

считать, что требование риска на выплату определяется наступлением страхового случая. После страхового случая риск получает единовременную выплату полной страховой суммы и покидает компанию. Величину продолжительности договора страхования для каждого риска, находящегося в компании, будем считать случайной величиной, распределённой по экспоненциальному закону с параметром  $\mu$ .

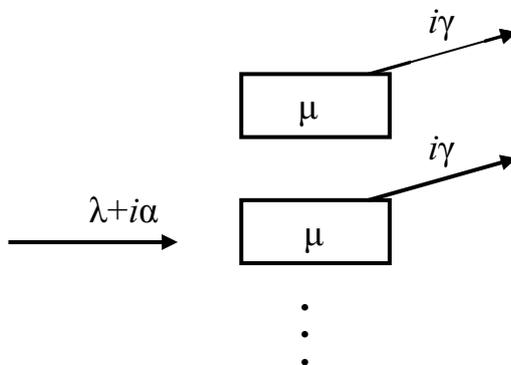


Рис. 1. Модель страховой компании с неограниченным страховым полем в виде системы массового обслуживания с учетом неявной рекламы и выплат страховых сумм

Введем следующие обозначения:  $n(t)$  – число требований на выплату за интервал времени  $[0, t]$ ,  $i(t)$  – число страховых рисков, находящихся в компании в момент времени  $t$ ,  $P(i, n, t) = \mathbf{P}\{i(t) = i, n(t) = n\}$  – вероятность того, что в момент времени  $t$  в компании находится  $i$  застрахованных рисков и число требований на выплату страховых сумм к этому же моменту составило  $n$ .

Используя  $\Delta t$  метод, составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова [6] для распределения вероятностей  $P(i, n, t)$ :

$$P(i, n, t + \Delta t) = P(i, n, t)(1 - \lambda\Delta t - i\mu\Delta t - i\gamma\Delta t - i\alpha\Delta t) + \\ + P(i - 1, n, t)(\lambda + (i - 1)\alpha)\Delta t + \\ + P(i + 1, n, t)(i + 1)\mu\Delta t + P(i + 1, n - 1, t)(i + 1)\gamma\Delta t + o(\Delta t).$$

Перейдем к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial P(i, n, t)}{\partial t} = -P(i, n, t)(\lambda + i\mu + i\gamma + i\alpha) + P(i - 1, n, t)(\lambda + (i - 1)\alpha) + \\ + P(i + 1, n, t)(i + 1)\mu + P(i + 1, n - 1, t)(i + 1)\gamma. \quad (1)$$

Для решения системы (1) определим характеристическую функцию

$$H(u, w, t) = \sum_{i, n=0}^{\infty} e^{iuj} e^{jwn} P(i, n, t),$$

где  $j$  – мнимая единица. Тогда из системы (1) с учетом свойств характеристических функций получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка относительно функции  $H(u, w, t)$ :

$$\frac{\partial H(u, w, t)}{\partial t} + j[\alpha e^{ju} + \mu e^{-ju} + \gamma e^{-ju} e^{jw} - \mu - \gamma - \alpha] \frac{\partial H(u, w, t)}{\partial u} =$$

$$= \lambda(e^{ju} - 1)H(u, w, t). \quad (2)$$

Решение этого дифференциального уравнения определяется решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристических кривых [7]:

$$\frac{dt}{1 - j(\alpha + \mu + \gamma - \alpha e^{ju} - \mu e^{-ju} - \gamma e^{-ju} e^{jw})} = \frac{dH(u, w, t)}{\lambda H(u, w, t)(e^{ju} - 1)}.$$

Найдем два первых интеграла системы. Сначала рассмотрим уравнение

$$dt = \frac{du}{j(\alpha(e^{ju} - 1) + \mu(e^{-ju} - 1) - \gamma(1 - e^{-ju} e^{jw}))}.$$

Сделаем замену переменных:  $e^{ju} - 1 = v$ . Тогда

$$dt = \frac{du}{-(\alpha v^2 + (\alpha - \mu - \gamma)v - \gamma(1 - e^{jw}))}. \quad (3)$$

Обозначим  $v_1$  и  $v_2$  – корни квадратного уравнения

$$\alpha v^2 + (\alpha - \mu - \gamma)v - \gamma(1 - e^{jw}),$$

$$\text{тогда } v_{1,2} = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\mu}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha} \right) \pm \frac{\sqrt{D}}{2}, \quad D = \left( 1 - \frac{\mu}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha} \right)^2 + 4 \frac{\gamma}{\alpha} (1 - e^{jw}) > 0, \quad (4)$$

причем  $v_1$  и  $v_2$  – различные и вещественные;  $v_1 > 0$  и  $v_2 \leq 0$  при  $\alpha < \mu$ .

Запишем решение уравнения (3) в виде

$$C_1 = e^{-\alpha(v_1 - v_2)t} \left( \frac{v - v_2}{v - v_1} \right). \quad (5)$$

Другой первый интеграл найдем из уравнения

$$\frac{dH(u, w, t)}{\lambda H(u, w, t)(e^{ju} - 1)} = \frac{du}{j(\alpha(e^{ju} - 1) + \mu(e^{-ju} - 1) - \gamma(1 - e^{-ju} e^{jw}))}. \quad (6)$$

Сделаем аналогичную замену переменных  $e^{ju} - 1 = v$ . Введем функцию  $G(v, w, t) = H(u, w, t)$ , тогда для новой функции можем записать

$$\frac{dG(v, w, t)}{G(v, w, t)} = \frac{\lambda v du}{-\alpha(v - v_1(w))(v - v_2(w))}, \quad (7)$$

где учтено, что  $v_1(w)$  и  $v_2(w)$  есть функции, зависящие от  $w$  и определяются выражениями (4).

Решение этого уравнения будет иметь вид

$$G(v, w, t) = C_2 \left[ \frac{(v - v_2(w))^{v_2(w)}}{(v - v_1(w))^{v_1(w)}} \right]^{\frac{\lambda}{\alpha(v_1(w) - v_2(w))}}. \quad (8)$$

Введем произвольную дифференцируемую функцию  $\varphi(C_1) = C_2$ . Тогда общее решение уравнения (7) с учетом (5) будет иметь вид

$$G(v, w, t) = \varphi \left[ e^{-\alpha(v_1(w) - v_2(w))t} \left( \frac{v - v_2(w)}{v - v_1(w)} \right) \right] \left[ \frac{(v - v_2(w))^{v_2(z)}}{(v - v_1(w))^{v_1(z)}} \right]^{\frac{\lambda}{\alpha(v_1(w) - v_2(w))}}. \quad (9)$$

Частное решение найдем с помощью начальных условий. Запишем значение функции  $H(u, w, t)$  при  $t = 0$ . Имеем:

$$H(u, w, 0) = \sum_{i, n=0}^{\infty} e^{iuj} e^{jwn} P(i, n, 0) = \sum_{i=0}^n e^{jui} P(i),$$

так как в начальный момент требований на выплату страховых сумм не было, значит

$$P(i, n, 0) = \begin{cases} P(i), & n = 0; \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Обозначим  $H(u) = H(u, w, 0)$ . Тогда решение дифференциального уравнения (2) относительно функции  $H(u)$  с учетом условия нормировки  $H(0) = 1$  будет иметь вид

$$H(u) = \left(1 - \frac{\alpha}{\mu + \gamma}\right)^{\frac{\lambda}{\alpha}} \left(1 - e^{ju} \frac{\alpha}{\mu + \gamma}\right)^{-\frac{\lambda}{\alpha}}. \quad (10)$$

Заметим, что (10) представляет собой дискретный аналог гамма-распределения. Теперь выражение (9) при  $t = 0$  можем записать в виде

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\mu + \gamma}\right)^{\frac{\lambda}{\alpha}} \left(1 - (v+1) \frac{\alpha}{\mu + \gamma}\right)^{-\frac{\lambda}{\alpha}} = \varphi \left[ \left( \frac{v - v_2(w)}{v - v_1(w)} \right) \right] \left[ \frac{(v - v_2(w))^{v_2(w)}}{(v - v_1(w))^{v_1(w)}} \right]^{\frac{\lambda}{\alpha(v_1(w) - v_2(w))}}.$$

Введем обозначения:  $f(w) = \frac{v - v_1(w)}{v - v_2(w)}$ , тогда

$$\varphi(f(w)) = \left[ \frac{(\mu + \gamma - \alpha)(v_2(w) - v_1(w))}{(\mu + \gamma)(1 - f(w)) - \alpha[v_2(w) + 1 - (1 + v_1(w))f(w)]} \right]^{\frac{\lambda}{\alpha}} f(w)^{\frac{\lambda v_2(w)}{\alpha(v_2(w) - v_1(w))}}.$$

Таким образом, можем записать выражение для характеристической функции  $H(u, w, t)$  двумерного процесса числа рисков и числа одновременных страховых выплат:

$$H(u, w, t) = e^{\lambda v_2(w)t} \left[ (\mu + \gamma - \alpha) \sqrt{\left(1 - \frac{\mu}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + 4 \frac{\gamma}{\alpha} (1 - e^{jw})} \right]^{\frac{\lambda}{\alpha}} \times \\ \times \left\{ (v_1(w) - e^{ju} + 1) [\mu + \gamma - \alpha(1 + v_2(w))] - \right. \\ \left. - (v_2(w) - e^{ju} + 1) e^{-\alpha(v_1(w) - v_2(w))t} [\mu + \gamma - \alpha(1 + v_1(w))] \right\}^{-\frac{\lambda}{\alpha}}, \quad (11)$$

где  $v_{1,2}(w) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha}\right) \pm \frac{\sqrt{D(w)}}{2}$  и  $D(w) = \left(1 - \frac{\mu}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + 4 \frac{\gamma}{\alpha} (1 - e^{jw})$ .

Теперь запишем маргинальную характеристическую функцию  $H_1(u, t)$  процесса  $i(t)$ , учитывая по (4), что  $v_1(0) = \frac{\mu + \gamma}{\alpha} - 1$  и  $v_2(0) = 0$ :

$$H_1(u, t) = H(u) = \left(1 - \frac{\alpha}{\mu + \gamma}\right)^{\frac{\lambda}{\alpha}} \left(1 - e^{ju} \frac{\alpha}{\mu + \gamma}\right)^{-\frac{\lambda}{\alpha}},$$

и маргинальную характеристическую функцию  $H_2(w, t)$  процесса  $n(t)$ :

$$H_2(w, t) = e^{\lambda v_2(w)t} \left[ (\mu + \gamma - \alpha) \sqrt{\left(1 - \frac{\mu}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + 4 \frac{\gamma}{\alpha} (1 - e^{jw})} \right]^{\frac{\lambda}{\alpha}} \times \\ \times \left\{ v_1(w) [\mu + \gamma - \alpha(1 + v_2(w))] - v_2(w) e^{-\alpha(v_1(w) - v_2(w))t} [\mu + \gamma - \alpha(1 + v_1(w))] \right\}^{\frac{\lambda}{\alpha}}.$$

Найдем математические ожидания и дисперсии числа рисков и числа требований на одновременные страховые выплаты. Имеем:

$$\left. \frac{1}{j} \frac{dH(u)}{du} \right|_{u=0} = M\{i(t)\} = \frac{\lambda}{\mu + \gamma - \alpha}, \quad (12)$$

$$\left. \frac{1}{j} \frac{\partial H_2(w, t)}{\partial w} \right|_{w=0} = M\{n(t)\} = \frac{\lambda \gamma}{\mu + \gamma - \alpha} t. \quad (13)$$

И для дисперсий получены следующие выражения:

$$D\{i(t)\} = \frac{\lambda(\mu + \gamma)}{(\mu + \gamma - \alpha)^2}, \quad (14)$$

$$D\{n(t)\} = \frac{2\lambda(\mu + \gamma)\gamma^2}{(\mu + \gamma - \alpha)^3} t + \frac{\lambda\gamma}{\mu + \gamma - \alpha} t - 2(1 - e^{-(\mu + \gamma - \alpha)t}) \frac{\lambda(\mu + \gamma)\gamma^2}{(\mu + \gamma - \alpha)^4}. \quad (15)$$

Заметим, что формулы (12), (14) являются обобщением частного случая модели без учета страховых выплат, рассмотренной в (5).

Таким образом, в данной работе исследована математическая модель страховой компании в виде системы массового обслуживания с неограниченным количеством обслуживающих приборов при условии одновременных страховых выплат и с учетом неявной рекламы. Найдена характеристическая функция двумерного процесса числа застрахованных в компании рисков и числа требований на выплату одновременных страховых сумм, а также характеристики исследуемых процессов. Полученные результаты могут быть использованы при анализе деятельности страховых компаний, а также других экономических систем.

#### Литература

1. Назаров А. А., Даммер Д. Д. Исследование числа требований на страховые выплаты в компании с произвольной величиной продолжительности договора // Вестник Томского государственного университета. – 2011. – №2(15). – С. 24–32.
2. Даммер Д. Д., Назаров А. А. Исследование математической модели страховой компании в виде бесконечнолинейной системы массового обслуживания методом асимптотического анализа // Материалы VII Ферганской конференции «Предельные теоремы и их приложения». – Наманган, 2015. – С. 191–196.
3. Dammer D. Research of mathematical model of insurance company in the form of queueing system with unlimited number of devices considering implicit advertising // Information Technologies and Mathematical Modeling. – 2015. – Vol. 564. – P. 163–175.

4. Гафуров Ш. Р., Гугнин В. И., Аманов С. Н. Язык бизнеса. – Ташкент: Шарк, 1995. – 738 с.
5. Глухова Е. В., Змеев О. А., Лившиц К. И. Математические модели страхования. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. – 180 с.
6. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2005. – 228 с.
7. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

DOI: 10.17223/9785751124335/5

## О КОМБИНИРОВАННЫХ ОЦЕНКАХ ДОЛИ

*Ю. Г. Дмитриев, Т. О. Кошечая*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

### Введение

С целью сокращения объема дорогостоящих экспериментальных данных или повышения точности оценивания при фиксированном объеме наблюдений исследователи часто привлекают дополнительную информацию исходя из своего опыта и знаний [1]. В данной работе, в отличие от [2–5], предлагаются комбинированные оценки доли, учитывающие совместно обычную статистическую оценку и несколько априорных догадок в форме некоторых значений искомой доли. Анализируются среднеквадратические ошибки таких оценок при конечном объеме наблюдений. Указываются условия, при которых комбинированные оценки предпочтительнее обычной оценки.

### Постановка задачи. Структура оценки

Пусть имеется конечная генеральная совокупность объема  $N$ , из которой случайным образом производится выборка без возвращения объема  $n$ . Под  $P$  будем понимать долю объектов в генеральной совокупности с заданным значением признака. Пусть  $p_i, i=1, \dots, m$  – заданные априорные догадки, которые выступают в качестве возможного значения неизвестной доли  $P$ . Требуется оценить долю  $P$  объектов в генеральной совокупности с заданным значением признака, учитывая совместно статистическую оценку доли  $\hat{P} = v_n / n$  и априорные догадки  $p_i$ .

Рассмотрим комбинированную оценку

$$\hat{P}_\lambda = \hat{P} - \sum_{i=1}^m \lambda_i (\hat{P} - p_i). \quad (1)$$

Весовые коэффициенты  $\lambda_i$  выбраны из условий минимума среднеквадратических ошибок (СКО)  $S^2(\lambda_i) = M[\hat{P}_i - P]^2$ , где

$$\hat{P}_i = \hat{P} - \lambda_i (\hat{P} - p_i), \quad (2)$$

и имеют вид

$$\lambda_i = (1 + n\Delta_i^2 / \sigma^2)^{-1}. \quad (3)$$

Здесь  $\sigma^2 = P(1-P)(N-n)/(N-1)$ ,  $\Delta_i = P - p_i$  – величина отклонения  $i$ -й априорной догадки от истинного значения искомой доли. Весовой коэффициент  $\lambda_i$  изменяется в пределах  $0 < \lambda_i \leq 1$  и показывает, какое влияние оказывает  $i$ -я априорная догадка в комбинированной оценке (2). СКО оценки (1) определяется выражением

$$S^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left( 1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i \Delta_i \right)^2. \quad (4)$$

Формула (4) характеризует потенциальную точность оценки (1) при заданных значениях  $\Delta_i$ ,  $\sigma^2$ .

### Адаптивные оценки

Поскольку весовые коэффициенты  $\lambda_i$  в (1) неизвестны, то, заменив их на статистические оценки  $\hat{\lambda}_i$ , построенные по исходной выборке, получим адаптивные комбинированные оценки доли. Однако здесь возникает вопрос, при каких условиях адаптивные комбинированные оценки являются предпочтительнее обычной оценки  $\hat{P}$  по величине СКО? Оценки для коэффициентов  $\lambda_i$  можно строить разными способами. Рассмотрим некоторые из них. Подставляя в (3) вместо неизвестного  $P$  оценку  $\hat{P}$ , в качестве первой оценки возьмем  $\hat{\lambda}_{i,1} = (1 + n\hat{\Delta}_i^2/\hat{\sigma}^2)^{-1}$ , где  $\hat{\Delta}_i = \hat{P} - p_i$  – оценка отклонения,  $\hat{\sigma}^2 = \hat{P}(1-\hat{P})(N-n)/(N-1)$  – оценка дисперсии. Подставляя  $\hat{\lambda}_{i,1}$  в (1), получаем первую адаптивную комбинированную оценку  $\hat{P}_1 = \hat{P} - \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_{i,1}(\hat{P} - p_i)$ . СКО  $S_1^2$  оценки  $\hat{P}_1$  можно вычислить, применяя гипергеометрический закон с параметрами  $(n, P, N)$ . Рассмотрим вторую оценку  $\hat{\lambda}_{i,2} = (1 + n\hat{\Delta}_i^2/\sigma_i^2)^{-1}$ , где  $\sigma_i^2 = p_i(1-p_i)(N-n)/(N-1)$ . Ей соответствуют адаптивная комбинированная оценка  $\hat{P}_2 = \hat{P} - \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_{i,2}(\hat{P} - p_i)$  и СКО  $S_2^2$ , вычисляемая по гипергеометрическому закону с параметрами  $(n, P, N)$ .

### Сравнение СКО оценок

Для сравнения СКО оценок введем отношения

$$E = D\hat{P} / D\hat{P} = 1, E_0^m = S^2(\lambda), E_1^m = S_1^2 / D\hat{P}, E_2^m = S_2^2 / D\hat{P}, \quad (5)$$

где верхний индекс  $m$  показывает количество априорных догадок. Зададим априорные догадки в виде  $p_i = (2i-1)/2m, i=1, \dots, m$  и рассмотрим эти отношения. Графики отношений СКО в зависимости от  $P$ ,  $n$ ,  $m$  и  $N$  приводятся на рис. 1–6.

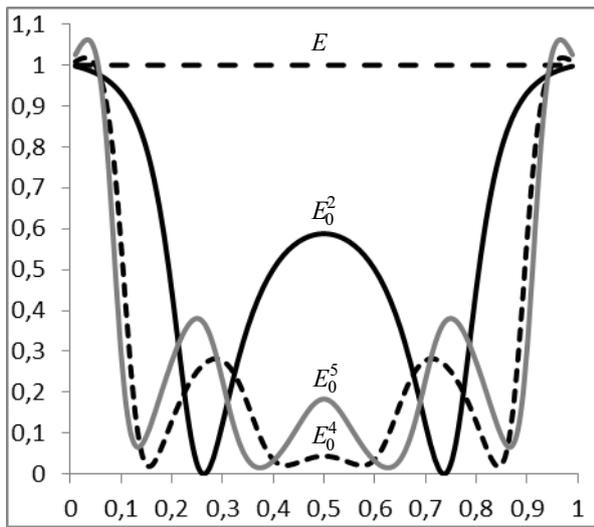


Рис. 1. Зависимость  $E_0^m$  от  $P$  и  $t$   
при  $n=30, N=100$

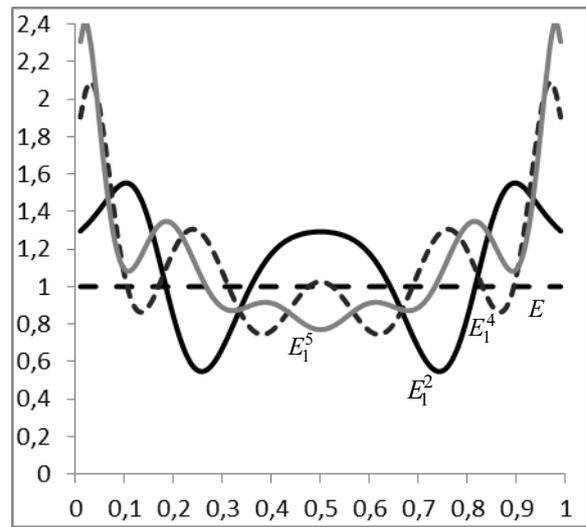


Рис. 2. Зависимость  $E_1^m$  от  $P$  и  $t$   
при  $n=30, N=100$

Рисунок 1 показывает потенциальный выигрыш (при известных коэффициентах  $\lambda_i$ ) по СКО. Как видно, с увеличением числа априорных догадок выигрыш увеличивается как по величине, так и в более широком диапазоне изменения  $P$ . Рисунок 2 показывает, на сколько переход к адаптивной оценке  $\hat{P}_1$  ухудшает выигрыш по СКО и указывает области значений  $P$  проигрыша в точности. Расчеты показали, что вторая адаптивная оценка  $\hat{P}_2$  обладает приблизительно теми же свойствами по точности, что и  $\hat{P}_1$ , однако требует меньших вычислений и не дает нулевого значения при оценке  $\sigma^2$  при малых  $n$ .

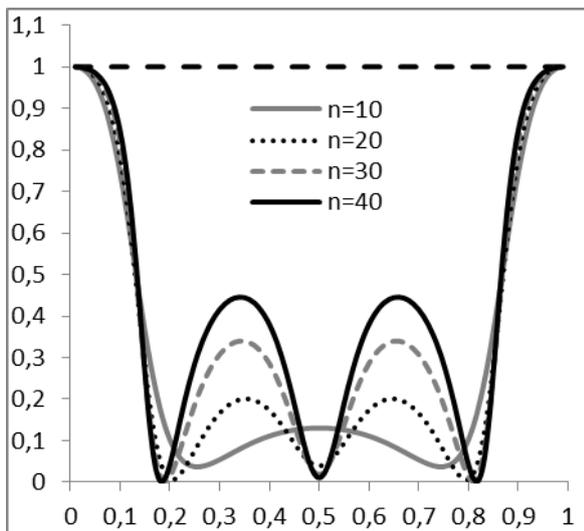


Рис. 3. Зависимость  $E_0^m$  от  $P$  и  $n$   
при  $t=3, N=100$

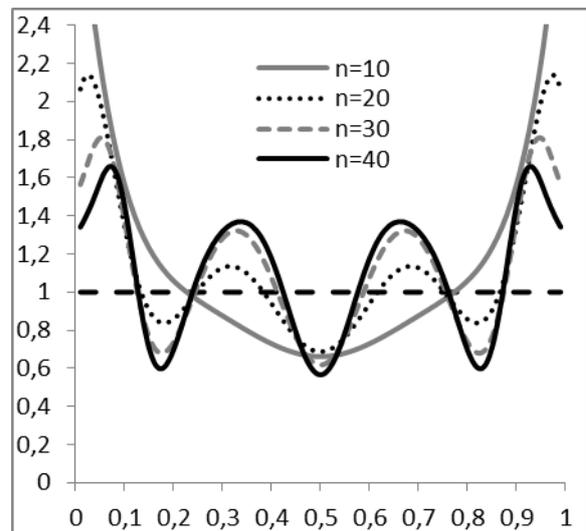


Рис. 4. Зависимость  $E_1^m$  от  $P$  и  $n$   
при  $t=3$  и  $N=100$

Рисунок 3 показывает, как изменяется потенциальная точность оценивания с увеличением объема наблюдений  $n$ . Так, для выбранных

априорных догадок при  $P=0,34$  и  $P=0,66$  величина  $S^2$  увеличивается с ростом  $n$ , но уменьшается до нуля в точках, где значение доли совпадает со значением априорной догадки. Рисунок 4 демонстрирует увеличение точности адаптивной оценки с увеличением числа наблюдений, однако при этом уменьшается интервал для  $P$ , при попадании в который наблюдается выигрыш в точности оценивания.

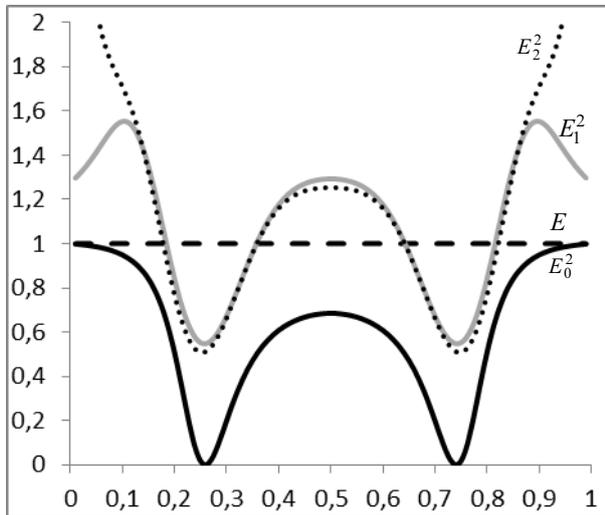


Рис. 5. Зависимость отношений СКО от  $P$ ,  $m=2, n=30, N=100$

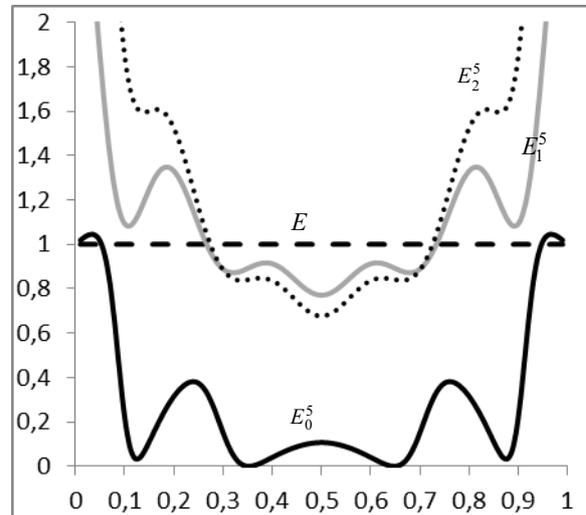


Рис. 6. Зависимость отношений СКО от  $P$ ,  $m=5, n=30, N=100$

Из рис. 5 видно, что при двух априорных догадках отношения СКО рассмотренных адаптивных оценок ведут себя примерно одинаково. Однако при увеличении числа догадок, как видно из рис. 6, вторая адаптивная оценка имеет больший выигрыш в точности оценивания для центральной части значений  $P$ .

#### Литература

1. Дмитриев Ю. Г., Тарасенко П. Ф. Использование априорной информации в статистической обработке экспериментальных данных. // Известия вузов. Физика. – 1992. – № 9. – С. 136–142.
2. Dmitriev Yu., Tarassenko P., Ustinov Yu. On Estimation of Linear Functional by Utilizing a Prior Guess / A. Dudin et al. (Eds.) // ITMM 2014, CCIS 487. – 2014. – P. 82–90.
3. Дмитриев Ю. Г., Тарасенко П. Ф. О  $k$ -адаптивных оценках вероятности // ITMM. – 2015. – Ч. 1. – С. 40–45.
4. Кошечая Т. О., Дмитриев Ю. Г. Комбинированные оценки доли // ITMM. – 2015. – Ч. 1. – С. 50–55.
5. Дмитриев Ю. Г., Кошечая Т. О. О комбинированных оценках вероятности // Известия вузов. Физика. – 2015. – Т. 58, № 11/2. – С. 242–246.
6. Dmitriev Yu., Tarassenko P. On Adaptive Estimation Using a Prior Guess // Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Approach – AMSA-2015, Novosibirsk, Russia, 14–15 September, 2015: Proceedings of the International Workshop. – 2015. – P. 49–55.

## **АДАПТИВНЫЕ СТРАТЕГИИ ПРОГНОЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ С УЧЕТОМ ТОРГОВЫХ ИЗДЕЖЕК И ОГРАНИЧЕНИЙ НА ВЛОЖЕНИЯ В ФИНАНСОВЫЕ АКТИВЫ**

***В. В. Домбровский, Т. М. Ларина***

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Проблема оптимизации и управления инвестиционным портфелем (ИП) является одной из основных в управлении финансами и представляет большой теоретический и практический интерес.

Практическая реализация большинства существующих на данный момент методов оптимизации портфеля включает два этапа:

1. Оценка параметров модели с использованием исторических данных.
2. Оптимизация портфеля с использованием вместо истинных значений параметров их оценок.

Результат оптимизации существенно зависит от точности оценок. Кроме того, в большинстве методов, представленных в литературе, отсутствуют ограничения на объемы торговых операций и не учитываются транзакционные издержки.

Данная работа посвящена построению и исследованию модели динамического управления самофинансируемым ИП с учетом транзакционных издержек и ограничений на объемы вложений. Кроме того, предполагается, что ставка по безрисковым вложениям отлична от ставки по займам.

Задача управления ИП формулируется как динамическая задача слежения за эталонным портфелем с заданной желаемой доходностью. Управление ИП осуществляется при помощи перераспределения капитала на каждом этапе управления, в зависимости от состояния рынка. Для решения задачи управления портфелем используется метод управления с прогнозирующей моделью, который позволяет эффективно учитывать ограничения [6–10].

Рассматриваемая в данной работе модель обладает следующими преимуществами:

1. Возможность учета ограничений на объемы вложений, квадратичные транзакционные издержки.
2. Не требуется каких-либо предположений относительно вероятностных свойств цен финансовых активов.
3. Алгоритм управления не использует статистических методов оценивания параметров модели.
4. Возможность адаптироваться к изменяющимся рыночным условиям путем введения новой информации в процессе управления.

## 1. Динамическая модель управления инвестиционным портфелем с учетом ограничений

Рассмотрим ИП, состоящий из  $n$  видов рисковых финансовых активов и одного вида безрискового актива. Капитал, помещенный в рисковый актив  $i$ -го вида в момент времени  $k$ , равен  $u_i(k)$ , ( $i = \overline{1, n}$ ), в безрисковый –  $u_0(k) \geq 0$ .

Рассматриваемый ИП является самофинансируемым, т.е. деньги извне на банковский счет не поступают, а снимаются только с целью вложения в ценные бумаги, входящие в данный ИП, но предполагается, что в случае необходимости инвестор может заимствовать капитал. Объем займа равен  $u_{n+1}(k) \geq 0$ .

Динамика изменения ИП имеет следующий вид [6, 7]:

$$V(k+1) = [1 + r_1]V(k) + \sum_{i=1}^n [\eta_i(k+1) - r_1]u_i(k) - [r_2 - r_1]u_{n+1}(k), \quad (1)$$

где  $r_1$  – ставка доходности безрискового актива,  $r_2$  – ставка заимствования, причем  $r_1 < r_2$ ,  $\eta_i(k+1)$  – доходность рискового актива за период  $[k, k+1]$ .

Используя векторно-матричные обозначения, получим:

$$V(k+1) = [1 + r_1]V(k) + b[\eta(k+1), k+1]u(k), \quad (2)$$

где  $b[\eta(k+1), k+1] = [\eta_1(k) - r_1 \quad \dots \quad \eta_n(k) - r_1 \quad r_1 - r_2]$  – вектор доходностей рисковых активов,  $u(k) = [u_1(k) \quad u_2(k) \quad \dots \quad u_{n+1}(k)]^T$  – вектор управлений.

На практике необходимо учитывать ограничения на объемы вложений и займов [6, 7]:

$$u_i^{\min}(k) \leq u_i(k) \leq u_i^{\max}(k), (i = \overline{1, n}), \quad 0 \leq V(k) - \sum_{i=1}^n u_i(k) + u_{n+1}(k) \leq u_0^{\max}, \quad (3)$$

$$0 \leq u_{n+1}(k) \leq u_{n+1}^{\max}(k).$$

Стратегия управления портфелем определяется таким образом, чтобы капитал реального управляемого ИП с наименьшими отклонениями следовал траектории эталонного портфеля с желаемой доходностью  $\mu_0 > r_1$ , эволюция которого описывается уравнением

$$V^0(k+1) = [1 + \mu_0]V^0(k). \quad (4)$$

В начальный момент времени  $V^0(0) = V(0)$ . Заметим, что  $V^0(k)$  – величина детерминированная, известна для всех моментов  $k$  и ее можно рассматривать как известный параметр. Доходность  $\mu_0$  задается инвестором исходя из анализа состояния финансового рынка и склонности инвестора к риску.

Предположим, что единственным источником информации в момент времени  $k$  являются исторические значения доходностей и текущее значение портфеля  $V(k)$ . В данной работе для получения оптимальной стратегии управления используем метод управления с прогнозирующей моделью.

Основная идея управления с прогнозирующей моделью заключается в том, что решается задача оптимизации критерия со скользящим горизонтом в каждый момент времени  $k$  :

$$J(k + m/k) = E\left\{\sum_{i=1}^m [V(k + i/k) - V^0(k + i)]^2 / V(k), \eta(k), \dots, \eta(k - N)\right\} +$$

$$+ E\sum_{i=0}^{m-1} \{[u(k + i/k) - (I + Q[\eta(k + i)])u(k + i - 1/k)]^T R(k, i) \times$$

$$\times [u(k + i/k) - (I + Q[\eta(k + i)])u(k + i - 1/k)] / V(k), \eta(k), \dots, \eta(k - N + 1)\},$$

где  $m$  – горизонт прогнозирования,  $u(k + i/k) = [u_1(k + i/k), \dots, u_n(k + i/k)]^T$  – вектор прогнозных значений управлений,  $R(k, i) > 0$  – положительно определенная симметричная матрица,  $V(k + i/k)$  – предполагаемые значения портфеля,  $N$  – количество исторических данных,  $I$  – единичная матрица размерности  $(n + 1)$ ,  $Q[\eta(k + i)] = \text{diag}\{\eta_1(k + i), \eta_2(k + i), \dots, \eta_n(k + i), 0\}$  – матрица доходностей,  $E\{a/b\}$  – оператор условного математического ожидания. В качестве управления в момент времени  $k$   $u(k) = u(k/k)$ . Для получения управлений на следующем  $(k + 1)$  шаге горизонт управления сдвигается на 1 шаг и процедура повторяется.

Можно отметить, что первое слагаемое в критерии представляет собой квадратичную ошибку и отражает качество слежения, второе слагаемое накладывает штраф, если реальная траектория идет ниже заданной траектории, третье учитывает транзакционные издержки и накладывает штраф на слишком большие транзакции.

## 2. Синтез стратегий управления с прогнозирующей моделью

Критерий (5) можно представить в эквивалентной форме:

$$J(k + m/k) = E\left\{\sum_{i=1}^m V^2(k + i/k) - 2V^0(k + i)V(k + i/k)\right\} +$$

$$+ E\left\{\sum_{i=0}^{m-1} [u(k + i/k) - (I + Q[\eta(k + i)])u(k + i - 1/k)]^T R(k, i) \times$$

$$\times [u(k + i/k) - (I + Q[\eta(k + i)])u(k + i - 1/k)] / V(k), \eta(k), \dots, \eta(k - N + 1)\right\},$$

где исключены слагаемые, не зависящие от управления.

Определим прогнозные значения портфеля следующим уравнением:

$$V(k + i/k) = A^i V(k) + A^{i-1} b[\theta(k)]u(k/k) + A^{i-2} b[\theta(k)]u(k + 1/k) +$$

$$+ \dots + b[\theta(k)]u(k + i - 1/k), (i = \overline{1, m}),$$

где  $A = 1 + r_1$ ,  $b[\theta(k)] = [\theta(k) - e_n r_1 \dots \theta(k) - e_n r_1 \quad r_1 - r_2]$ ,  
 $\theta(k) = \alpha_1 \eta(k) + \alpha_2 \eta(k - 1) + \dots + \alpha_N \eta(k - N + 1)$ .

Параметры  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  являются настраиваемыми и определяются таким образом, чтобы достичь наилучших результатов при управлении. Стоит отметить, что никаких предположений относительно параметров мы не делаем.

Заметим, что (2) определяет реальные значения ИП, а уравнение (7) определяет предсказанные значения портфеля. Таким образом, в отличие от других известных моделей в данной работе не прогнозируются будущие значения доходностей, а предсказываются будущие значения портфеля в целом.

Введем следующие обозначения:

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} V(k+1/k) \\ V(k+2/k) \\ \dots \\ V(k+m/k) \end{bmatrix}, \Phi[\theta(k)] = \begin{bmatrix} b[\theta(k)] & 0_{1 \times n+1} & \dots & 0_{1 \times n+1} \\ Ab[\theta(k)] & b[\theta(k)] & \dots & 0_{1 \times n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{m-1}b[\theta(k)] & A^{m-2}b[\theta(k)] & \dots & b[\theta(k)] \end{bmatrix},$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \dots \\ A^m \end{bmatrix}, U(k) = \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \dots \\ u(k+m-1) \end{bmatrix},$$

$$\Delta_1(k+1) = 2[V^0(k+1) \quad V^0(k+2) \quad \dots \quad V^0(k+m)],$$

$$\overline{R_{t,t}}(k) = R(k,t) + R(k,t+1)(I + 2Q[\theta(k)]) + Q[\theta(k)]^T R(k,t+1)Q[\theta(k)],$$

$$(t = \overline{0, m-2}),$$

$$\overline{R_{m,m}}(k) = R(k, m-1),$$

$$\overline{R_{t+1,t}}(k) = \overline{R_{t,t+1}}(k) = -R(k,t+1)(I + Q[\theta(k)]), (t = \overline{0, m-1}).$$

Используя  $X(k+1) = \Psi V(k) + \Phi[\theta(k)]U(k)$ , представим (6) в виде

$$K(k+m/k) = [2V(k)G(k) - F(k)]U(k) + U^T(k)[H(k) + \overline{R}(k)]U(k), \quad (8)$$

где  $H(k), G(k), F(k)$  – блочные матрицы вида

$$H(k) = [H_{t,f}(k)], G(k) = [G_t(k)], F(k) = [F_t(k)], t, f = \overline{1, m},$$

$$H(k) = \Phi^T[\theta(k)]\Phi[\theta(k)], G(k) = \Psi^T\Phi[\theta(k)], \quad (9)$$

$$F(k) = \Delta_1(k+1)\Phi[\theta(k)] + L(k),$$

$$L(k) = [-2u(k-1)(I + Q[\eta(k)])^T R(k,0) \quad 0_{1 \times (n+1)} \quad \dots \quad 0_{1 \times (n+1)}].$$

Управление осуществляется при следующих ограничениях:

$$U_{\min}(k) \leq \overline{S}U(k) \leq U_{\max}(k),$$

где  $U_{\min}(k) = [u_{\min}^T(k), 0_{n+2 \times 1}, \dots, 0_{n+2 \times 1}]^T$ ,  $U_{\max}(k) = [u_{\max}^T(k), 0_{n+2 \times 1}, \dots, 0_{n+2 \times 1}]^T$ ,

$$U_{\min}(k) = \begin{bmatrix} u_1^{\min}(k) \\ u_2^{\min}(k) \\ \dots \\ u_n^{\min}(k) \\ -V(k) \\ 0 \end{bmatrix}, U_{\max}(k) = \begin{bmatrix} u_1^{\max}(k) \\ u_2^{\max}(k) \\ \dots \\ u_n^{\max}(k) \\ u_0^{\max}(k) - V(k) \\ u_{n+1}^{\max}(k) \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{S} = \text{diag}\{S, 0_{n+2 \times n+1}, \dots, 0_{n+2 \times n+1}\},$$

где  $0_{(n+2) \times (n+1)}$  – нулевая матрица размерности  $(n+2) \times (n+1)(m-1)$ .

Оптимальная стратегия прогнозирующего управления, минимизирующая критерий (8), определяется уравнением

$$u(k) = [I_{n+1} \quad 0_{n+1} \quad \dots \quad 0_{n+1}]U(k), \quad (10)$$

где  $I_{n+1}$  – единичная матрица размерности  $(n+1)$ ,  $0_{n+1}$  – нулевая матрица размерности  $(n+1)$ .

### 3. Численное моделирование с использованием реальных данных

Для подтверждения работоспособности представленной модели было проведено численное моделирование на основе реальных данных. Для моделирования использовались данные котировок 3 видов фьючерсов, в период с 30.03.2013 по 30.03.2016 г., всего 600 торговых дней, и один вид безрискового актива – банковский вклад с доходностью  $r_1 = 0,015\%$ . Также нам доступна услуга кредитования со ставкой по займу  $r_2 = 0,03\%$ .

При моделировании предполагалось, что  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = \alpha$ . Поэтому параметр  $\theta(k)$  определялся следующим образом:

$$\theta(k) = \alpha \sum_{t=1}^N \eta(k-t+1).$$

Рассматриваемый ИП состоял из 3 видов фьючерсов; период «скользящего окна»  $N = 9$ ; параметр  $\alpha = 0,35$ ; размер кредитных плеч  $\gamma_i = \beta_i = 2$ ; желаемая доходность  $\mu_0 = 0,0015$ .

Результаты моделирования представлены на рис. 1–3. На рис. 1 представлена динамика капитала управляемого ИП относительно эталонной траектории, на рис. 2 – динамика вложений во фьючерсы «mini D&J-Fut», на рис. 3 представлена доходность фьючерсов «mini D&J-Fut».

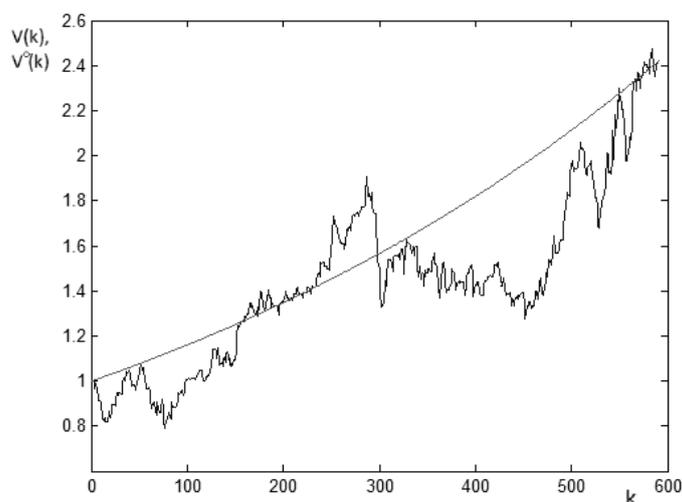


Рис. 1. Динамика капитала: 1 – эталонная траектория; 2 – динамика капитала управляемого ИП

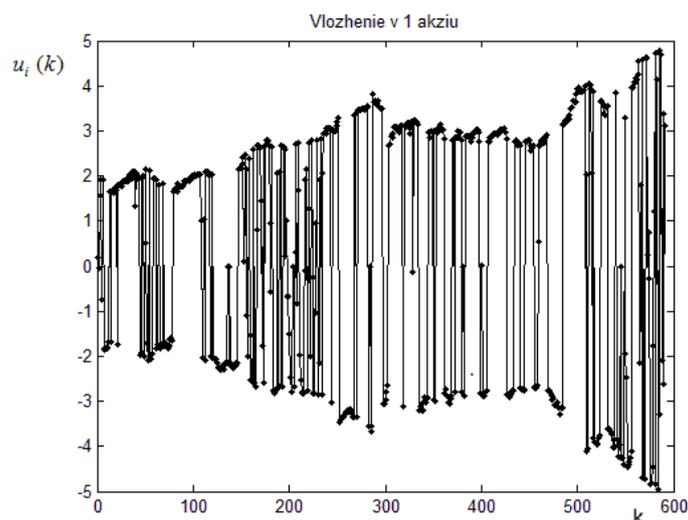


Рис. 2. Динамика вложений во фьючерсы «mini D&J-Fut»

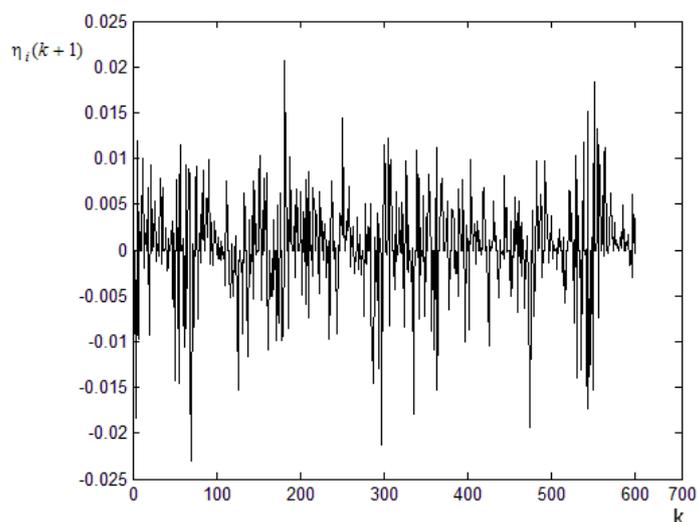


Рис. 1. Динамика доходности фьючерсов «mini D&J-Fut»

В данной работе рассмотрена задача оптимизации инвестиционного портфеля с учетом транзакционных издержек, ограничений на объемы вложений в финансовые активы и различия ставок на вложения и заем. Получена стратегия управления с обратной связью с использованием метода управления с прогнозирующей моделью. Результаты численного моделирования, проведенные на основе реальных данных, подтверждают работоспособность и эффективность предложенной модели и возможность ее реального применения.

#### Литература

1. Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бейли Д. В. Инвестиции. – М.: Инфра-М., 1997. – 1028 с.
2. Markowitz H. Portfolio Selection // Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7, № 1. – P. 77–91.
3. Tobin J. Liquidity preference as behavior towards risk // Review of Economic Studies. – 1958. – Vol. 25, № 2. – P. 65–86.

4. Tobin J. The theory of portfolio selection. – N. Y.: Macmillan, 1965.
5. Merton R. C. Continuous-time finance. – Cambridge: Blackwell, 1990.
6. Домбровский В. В., Домбровский Д. В., Ляшенко Е. А. Управление с прогнозирующей моделью системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №12. – С. 71–85.
7. Dombrovskii V. V., Obyedko T. Y. Portfolio Optimization in the Financial Market with Correlated Returns under Constraints, Transaction Costs and Different Rates for Borrowing and Lending // Electronic copy Available at SSRN. – URL: <http://ssrn.com/abstract=2516364>. – С. 8.
8. Домбровский Д. В. Динамические модели управления инвестиционным портфелем на нестационарном финансовом рынке с учетом транзакционных издержек и ограничений: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Томск, 2008. – 188 с.
9. Dombrovskii V. V. Adaptive data-driven portfolio optimization in the non stationary financial market under constraints // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 3 (24). – С. 5–13.
10. Dombrovskii V. V., Obyedko T. Y. Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization // Automatica. – 2015. – № 54. – С. 325–331.

DOI: 10.17223/9785751124335/7

## **СОБЫТИЙНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ГОСУДАРСТВЕННОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ПРИ ОКАЗАНИИ УСЛУГИ НА ОСНОВЕ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ**

***М. Ю. Катаев<sup>1,2</sup>, Н. В. Лосева<sup>3</sup>, А. А. Мицель<sup>1,2</sup>, С. В. Козлов<sup>1,2</sup>***

<sup>1</sup> *Томский государственный университет систем управления  
и радиоэлектроники,*

<sup>2</sup> *Юргинский технологический институт*

*Национальный исследовательский Томский политехнический университет,*

<sup>3</sup> *Фонд социального страхования*

В современном мире проблема качества является важнейшим фактором повышения уровня жизни, экономической, социальной и экологической безопасности. Важнейшей составляющей всей системы качества продукции или предоставляемой услуги Международная организация по стандартизации (ИСО) определяет качество как совокупность свойств и характеристик продукции (услуги), которые придают им способность удовлетворять обусловленные ими предполагаемые потребности. Стандарт ИСО (ISO) фиксирует следующее определение: «качество – степень соответствия присущих характеристик требованиям» [1–3].

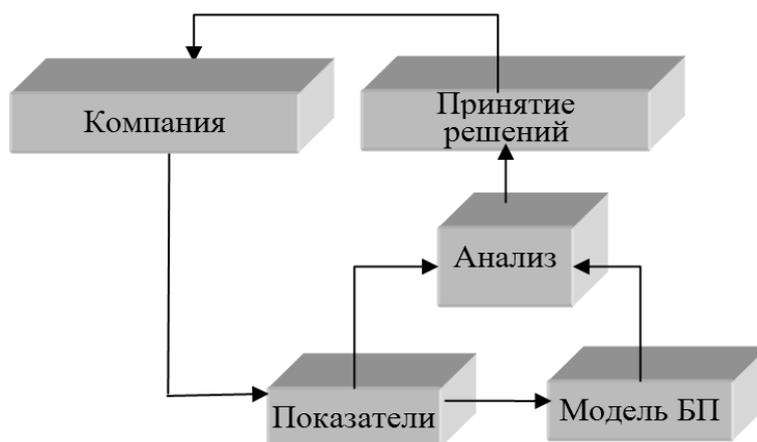
Подходы определения качества в компаниях разного уровня характеризуются ориентацией экономических и производственных показателей на уровень, достаточный для определения функций управления, которые определяются возникающими ситуациями. Отметим, что при каждом возникновении новой ситуации возникает необходимость постоянного изменения информационных потоков и показателей, что усложняет выработку правильных и своевременных управленческих решений [4–7].

Систематизация потоков информации, их логическая взаимосвязь и преобразование возможны на более высоком временном и техническом уровне при использовании такого направления, как бизнес процессы. Основной целью использования бизнес-процессов является повышение эффективности функционирования компании, управления за счет логического структурирования информационных потоков. В современных условиях необходима разработка новых подходов, позволяющих исследователям и практикам использовать необходимый теоретический и практический инструментарий. Нами [8] разрабатывается процессно-ориентированный подход к управлению предприятием, в основе которого лежат бизнес-процессы. В данной статье приводится рассмотрение приложения этого подхода к управлению процессами государственного учреждения.

### **Задача управления, основанная на бизнес-процессах**

Стандарты оказания государственных услуг формулируют системные, обобщенные требования к порядку предоставления государственных услуг государственными учреждениями и не распространяются на частные случаи, из которых состоит практика.

На рис. 1 приведена модифицированная структура управления компанией, когда производственная деятельность генерирует определенный поток показателей, которые анализируются в различных структурах компании, и на основе анализа производится то или иное решение, которое воздействует на производственный процесс. Модификация, которую выполнили авторы данной статьи, заключается во включении модели бизнес-процессов предприятия и сравнения реально поступающих показателей с рассчитанными по модели. Такое сравнение позволяет четко определить направление и величину изменения показателей и определить вид и место действия принимаемого решения.



*Рис. 1. Модернизированная структура блоков принятия решения с учетом бизнес-процессов*

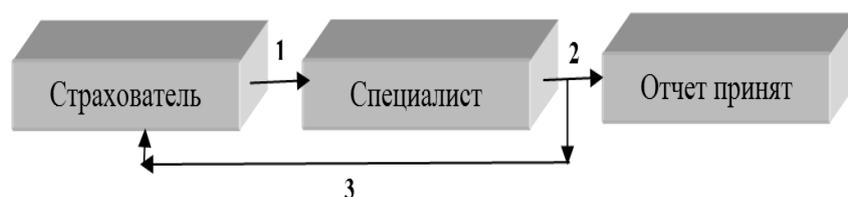
Невысокая эффективность управленческих решений, принятых на основе интуиции, объясняется тем, что причины и следствия в сложных системах разнесены во времени и пространстве, поэтому человеку трудно

предсказать, какие последствия вызовет то или иное решение. Оценка последствий принимаемых решений при работе с реальными системами обходится слишком дорого, поэтому для этих целей используется моделирование.

### **Объект исследования и бизнес-процессы его деятельности**

Фонд социального страхования является независимой финансово-кредитной организацией. Его бюджет утверждается каждый год отдельным законодательным актом. Деятельность фонда направлена на реализацию государственной политики в области страхования граждан как составной части государственного социального страхования. Федеральный фонд создается Правительством РФ, а его отделения образуются субъектами Российской Федерации. Основными источниками образования федерального фонда являются страховые взносы хозяйствующих субъектов на обязательное социальное страхование, бюджетные ассигнования и иные поступления.

Среди множества бизнес-процессов, которые реализует ФСС, центральным является «Прием отчета 4ФСС». Этот бизнес-процесс представляет собой государственную услугу по приему отчета (расчета), предоставляемого предприятиями и лицами, вступившими в правоотношения по обязательному социальному страхованию на случай временной нетрудоспособности и в связи с материнством. Страхователь формирует отчет и передает его в ФСС лично в руки специалисту, почтой или по электронной почте (рис. 2, направление 1). После проверки отчета специалистом, исправления ошибок страхователем (при их наличии) отчет подписывается и отправляется другим специалистам для обработки (рис. 2, направление 2). Из описания видно, что в определенных случаях, бизнес-процесс является линейным, а при изменении условий (наличия ошибок), становится итерационным (рис. 2, направление 1–2–3–1).



*Рис. 2. Бизнес-процесс «Прием отчета 4ФСС»*

Эта особенность приводит к тому, что время на оказание государственной услуги меняется – увеличивается при ограничении, что услуга выполняется за фиксированное число дней. Эта проблема оказывает сильное влияние на работоспособность подразделения, которое оказывает данную услугу. Единичный случай, конечно же, не может вызвать опасений на массовое оказание услуги страхователям, но при определенном пороге влияние будет оказано. Решение этой задачи требует от руководителя соответствующих решений согласно схеме (см. рис. 1).

### Моделирование бизнес-процесса государственного учреждения

Для моделирования бизнес-процессов применяется множество методов и методологий, предоставляющих разработчику определенный язык описания объектов реального мира при помощи специально разработанного синтаксиса (ряд графических символов), отражающего реальные объекты и связи между ними, а также способ описания деятельности учреждения. Отметим, что известные методологии (IDEF, ARIS, UML и др.) позволяют построить визуальную (более качественную) форму бизнес-процессов, которая может быть верифицирована в различных специально разработанных приложениях. Получаемые при этом результаты не позволяют увидеть количественные показатели работы бизнес-процессов и тем более прогнозировать события.

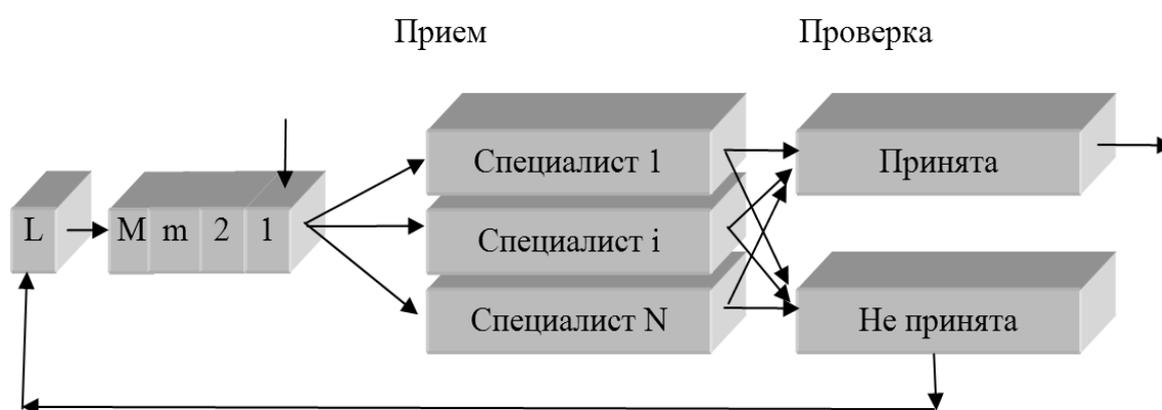


Рис. 3. Схема последовательности обработки потока заявок (отчетов)

На рис. 3 показана схема последовательности обработки потока заявок (отчетов) согласно бизнес-процессу «Прием отчета 4ФСС» (см. рис. 2). Последовательность обработки заявок состоит из формирования очереди из страхователей и последовательного приема их специалистами, в ходе которого происходит проверка отчета. Особенностью очереди является ее структура, связанная видом отношения к собственности (государственные учреждения, предприятия и индивидуальные предприниматели). Это определяет лишь только один элемент обслуживания, связанный со временем. В ходе проверки отчета (поступившей заявки) специалист за определенный промежуток времени, утвержденный регламентом, проверяет отчет на верность заполнения отчета, после чего принимает два решения: отчет принят или не принят. Всего специалистов  $i=1, \dots, N$  человек, а страхователей  $K=L+M$  человек, где  $m=1, \dots, M$  – число страхователей, впервые пришедших для проверки и принятия отчета, а  $j=1, \dots, L$  – число страхователей, повторно приходящих к специалисту для проверки отчета (заявки). Число страхователей значительно больше, чем специалистов, и очередь является случайной по своему размеру  $K$ . Для получения именно количественных результатов оценки параметров очереди нами предлагается применить математический аппарат теории систем массового обслуживания (СМО) [9–11].

При большом числе страхователей, которые обслуживаются государственным учреждением (в нашем случае ФСС РФ) с целью получения услуги, можно применить подход СМО [11], именуемый как – система массового обслуживания с ограниченной очередью. Этот подход можно использовать для оценки возможных изменений входящего и выходящего потоков и формирования такой модели очереди, при которой гарантированным будет фиксированное законодательством время выполнения услуги и заданное стандартами ISO качество.

В СМО с очередью заявка (отчет или клиент с отчетом), пришедшая в момент занятости канала (или набора каналов – сотрудников, обслуживающих страхователей), становится в очередь и ждет, пока не освободится какой-либо сотрудник (канал). Число мест в очереди  $m$  является ограниченным. Очередь имеет ограничения по количеству находящихся в ней клиентов и по времени ожидания. Возможно построение аналитических выражений, описывающих решение рассматриваемой в статье задачи (см. рис. 2), но и численное, когда строится вычислительный алгоритм.

### Заключение

В статье рассмотрен подход на основе событийного моделирования, позволяющий моделировать показатели государственного учреждения при оказании услуги. В качестве государственного учреждения выбрано учреждение Фонд социального страхования (ФСС РФ) и один бизнес-процесс «Прием отчета 4ФСС». Рассмотрены предпосылки использования событийного моделирования и модель системы массового обслуживания.

### Литература

1. Федеральный закон № 210-ФЗ «Об организации предоставления государственных и муниципальных услуг» от 27 июля 2010 года.
2. Трудовой кодекс Российской Федерации от 30.12.2001 197-ФЗ. – СПб.: ООО «Леке Стар», 2002. – 208 с.
3. Системы менеджмента качества. Рекомендации по улучшению деятельности (Quality management systems requirements). ISO/IEC 9126-1-2.
4. Бирман Л. А. Управленческие решения. – М.: Дело, 2004. – 206 с.
5. Андерсен Б. Бизнес-процессы. Инструменты совершенствования. – М.: РИА «Стандарты и качество», 2003. – 272 с.
6. Кирисов С. В. Теория и практика применения процессного подхода к управлению качеством деятельности организации. – Тамбов: Изд-во Тамбов. гос. техн. ун-та, 2009. – 80 с.
7. Теория систем и системный анализ в управлении организациями: справочник. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 455 с.
8. Катаев М. Ю., Емельяненко А. А. Модель оценки эффективности тактического планирования на предприятии с процессно-ориентированным подходом к управлению // Управление экономическими системами. – 2013. – № 58. – С. 31–42
9. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. – СПб.: Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2004. – 847 с.
10. Емельянов А. А., Власова Е. А., Дума Р. В. Имитационное моделирование экономических процессов. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 368 с.
11. Лабскер Л. Г., Бабешко Л. О. Теория массового обслуживания в экономической сфере. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998. – 319 с.

## УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМ ЭКОНОМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*С. И. Колесникова, С. А. Егоров*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

В статье поставлена и решена задача управления нелинейным экономическим объектом, выводящего его в окрестность устойчивого состояния, аналитическое описание которого задано. Применяется метод аналитического конструирования агрегированных дискретных регуляторов (АКАР) для организации нелинейной адаптации на целевом многообразии. Полученная система управления является робастной и асимптотически устойчивой. Исследуется качество полученной системы управления в расчетных и нерасчетных условиях.

### Описание экономической модели

Модель описывает изменение объема продаж двух фирм, производящих один вид товара, с преобладающим частным и государственным капиталом в условиях смешанной рыночной экономики (например, [2]).

Пусть  $Y_{i+1}$  и  $X_{i+1}$  – ожидаемые объемы очередных продаж для фирм с преобладающим государственным и частным капиталом соответственно.  $Y_i$  и  $X_i$  – объемы предыдущих продаж, измеряемых в условных единицах.  $\beta_y$  и  $\beta_x$  – цены на товары данных фирм.  $C_0$  – средний доход покупателя в рассматриваемом регионе.  $A$  – государственные нужды.

Модель имеет следующее описание:

$$\begin{cases} X_{i+1} = X_i(\alpha C_0 - \mu \beta_x X_i Y_i), \\ Y_{i+1} = A(\alpha C_0 - \mu \beta_y X_i Y_i) \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями  $X_0 = X_0$ ,  $Y_0 = Y_0$ ,  $\alpha$ ,  $\mu$  – коэффициенты пропорциональности,  $i = 1 \dots N$ .

### Постановка задачи управления 1

Пусть поставлена задача вывода объема продаж фирмы с преобладающим государственным капиталом на заданный уровень. Содержательно под управляющим воздействием будем понимать переменную, предназначенную для реализации оптимальной стратегии поведения на рынке двух конкурирующих производителей с целью достижения множества желаемых (заданных) состояний.

Поставим сначала задачу управления объектом (1) в виде

$$\begin{cases} X_{i+1} = X_i(\alpha C_0 - \mu \beta_x X_i Y_i), \\ Y_{i+1} = u_i(\alpha C_0 - \mu \beta_y X_i Y_i), i = 1 \dots N. \end{cases} \quad (2)$$

Ставится задача такого управления объектом (2) (по переменной  $Y_i$ ), чтобы была достигнута цель управления, заданная в виде

$$Y_i = \rho X_i, i = 1 \dots N,$$

интерпретируемая как баланс между объемами продаж фирм с преобладающим государственным и частным капиталом соответственно с некоторым коэффициентом пропорциональности  $\rho$ . Заметим, что в зависимости от цели управления может быть указана любая (практически допустимая) аналитически определенная желаемая целевая зависимость.

Введем макропеременную, которая будет содержать в себе информацию о цели управления, равенство нулю которой будет означать достижение поставленной задачи:

$$\psi_i = Y_i - \rho X_i, i = 1 \dots N. \quad (3)$$

Зададим критерий качества в виде дискретного оптимизирующего функционала:

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \gamma^2 (\psi_i)^2 + (\Delta \psi_i)^2 \right], \quad (4)$$

где

$$\Delta \psi_i = \psi_{i+1} - \psi_i,$$

$\gamma$  – параметр настройки регулятора. Минимизация (4) будет означать не только достижение поставленной цели  $\psi_i = 0$ , но и минимизацию скорости достижения цели управления  $(\Delta \psi_i)^2 \rightarrow 0$  на всем участке  $i = 0, 1, \dots$ . Можно показать, что критерий типа (4) [1] отражает физические свойства объекта, формирует новые свойства объекта управления с целевым заданным состоянием и является обобщением классического квадратичного критерия, общепринятого в теории оптимального управления.

В постановке (2)–(4) задача управления формулируется в виде: найти такой закон изменения  $u_i$ , под действием которого объект управления (2) достигает цели управления вида  $\psi_i = Y_i - \rho X_i = 0, i = 1 \dots N$  и доставляет глобальный минимум критерию (4).

### Решение задачи управления 1

Для решения задачи потребуется следующий результат, доказательство которого осуществляется непосредственной проверкой и опирается на результаты теоретической механики. Отметим также, что «непрерывный» результат переносится и на дискретный случай.

**Утверждение.** Если функция  $\phi(\psi)$  для всех  $\psi$  удовлетворяет условиям 1)  $\phi_l(\psi_l)$  однозначные, непрерывные, дифференцируемые функции для всех  $\psi_l$ ; 2)  $\phi_l(0) = 0$ ; 3)  $\phi_l(\psi_l)\psi_l > 0, \forall \psi_l \neq 0$ , то решения уравнения

$\omega\dot{\psi} + \phi = 0$  удовлетворяют уравнению Эйлера–Лагранжа  $2\phi \frac{\partial \phi}{\partial \psi} - 2\omega^2 \ddot{\psi} = 0$

для функционала  $\int_0^{\infty} \sum_{l=1}^m [\phi_l^2(\psi_l) + \omega_l^2 \dot{\psi}_l^2] dt$ .

Отсюда следует, что условие минимизации функционала (4) может быть выражено функциональным уравнением вида

$$\Delta F_{\Delta\psi}(i) - F_{\psi}(i+1) = 0, \quad (5)$$

где  $F(i) = \gamma^2(\psi_i)^2 + (\Delta\psi_i)^2$ ;  $\Delta F_{\Delta\psi}(i) = F_{\Delta\psi}(i+1) - F_{\Delta\psi}(i)$ ,

$$F_{\Delta\psi}(i) = \frac{\partial F}{\partial \Delta\psi} = 2\Delta\psi_i; \quad F_{\psi}(i+1) = \frac{\partial F}{\partial \psi} = 2\gamma^2\psi_{i+1}.$$

После необходимых преобразований уравнение (5) принимает вид

$$\psi_{i+2} - (2 + \gamma^2)\psi_{i+1} + \psi_i = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) определяет семейство устойчивых и неустойчивых экстремалей, которые доставляют минимум функционалу (4). Выделим из выражения (6) асимптотически устойчивое решение

$$\psi_{i+1} + \lambda\psi_i = 0, \quad |\lambda| < 1, \quad (7)$$

при этом  $\lambda$  и  $\gamma$  связаны соотношением

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( 2 + \gamma^2 - \sqrt{(2 + \gamma^2)^2 - 4} \right).$$

Выражение (7) является основным функциональным уравнением в синергетическом методе синтеза дискретных регуляторов [1].

Используем (7) для решения поставленной задачи, учитывая (3) и (2), получаем

$$(Y_{i+1} - \rho X_{i+1}) + \lambda(Y_i - \rho X_i) = 0, \quad |\lambda| < 1,$$

откуда после элементарных преобразований находится явный вид управляющего воздействия  $u_i$ :

$$u_i = \frac{\rho(X_i(\alpha C_0 - \mu\beta_x X_i Y_i)) - \lambda(Y_i - \rho X_i)}{\alpha C_0 - \mu\beta_y X_i Y_i}, \quad |\lambda| < 1, \quad (8)$$

и окончательно модель (2) с начальными условиями и ограничениями принимает вид

$$\begin{cases} X_0 = X_0, Y_0 = Y_0, u_0 = 0, |\lambda| < 1, \\ X_{i+1} = X_i(\alpha C_0 - \mu\beta_x X_i Y_i), \\ Y_{i+1} = u_i(\alpha C_0 - \mu\beta_y X_i Y_i), i = 1 \dots N, \\ u_i = \frac{\rho(X_i(\alpha C_0 - \mu\beta_x X_i Y_i)) - \lambda(Y_i - \rho X_i)}{\alpha C_0 - \mu\beta_y X_i Y_i}. \end{cases}$$

Заметим, что степени свободы модели (2) под действием управления (8) уменьшаются с двух до единицы, при этом изменяются и функциональные

связи в уравнении изменения объема продаж фирмы с частным капиталом. Это приводит к необходимости дополнительного проведения исследований системы управления (2) с регулятором (8) на предмет выяснения условий устойчивости управляемого объекта.

### Постановка задачи управления 2

Рассмотрим теперь задачу управления объемом продаж предприятия с частным капиталом (целевая переменная  $X_i$ ), при этом управляющее воздействие представлено как возможность изменения цены на товар фирмы с государственным капиталом. Необходимость и целесообразность данного управления заключаются в том, что система (1) при определенных сочетаниях начальных условий ( $X_0 = X0, Y_0 = Y0$ ) и значений параметров модели может находиться в неустойчивом режиме (явление детерминированного хаоса), нежелательном для обеих фирм. При этом чаще всего в подобных ситуациях на рынке регулятором выступает именно государство. Заметим, что цена на товар фирмы с частным капиталом  $\beta_x$  может также изменяться (далее рассмотрим вариант  $\beta_x = const$ ). Поставим задачу управления в виде

$$\begin{cases} X_{i+1} = X_i(\alpha C_0 - \mu\beta_x X_i Y_i), \\ Y_{i+1} = A(\alpha C_0 - \mu\beta_x X_i Y_i), \end{cases} \quad (9)$$

$X_0 = X0, Y_0 = Y0, i = 1 \dots N$ . Цель зададим в виде

$$X_i = \frac{1}{3} |\sin(\eta i)| + \rho i, \quad i = 1 \dots N, \quad (10)$$

где  $\eta > 0, \rho > 0$  – коэффициенты пропорциональности. Формулируя цель управления таким образом (при положительных коэффициентах), будет наблюдаться стабильный рост объема продаж у частного предприятия.

Особенность управления такой системой заключается в том, что воздействие на объект управления происходит на основе организации определенных (целесообразных) внутренних связей системы (реализации синергетического принципа [1]).

### Решение задачи управления 2

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом АКАР [1] с использованием двух последовательно вводимых многообразий ( $\psi_i^{(1)}$  и  $\psi_i^{(2)}$ ). При этом макропеременные  $\psi_i^{(1)}$  и  $\psi_i^{(2)}$  имеют вид

$$\psi_i^{(1)} = X_i - \left( \frac{1}{3} |\sin(\eta i)| + \rho i \right), \quad i = 1 \dots N, \quad (11)$$

$$\psi_i^{(2)} = Y_i - \varphi(X_i), \quad i = 1 \dots N, \quad (12)$$

где  $\varphi(X_i)$  – некоторая далее определяемая функция.

Воспользуемся выражением (7) для нахождения управления с точностью до функции  $\varphi(X_i)$ :

$$\psi_{i+1}^{(2)} + \lambda_2 \psi_i^{(2)} = 0, \quad |\lambda_2| < 1,$$

$$u_i = \frac{\alpha C_0}{\mu X_i Y_i} - \frac{\varphi(X_{i+1}) - \lambda_2 (Y_i - \varphi(X_i))}{A \mu X_i Y_i}. \quad (13)$$

Таким образом, система (9) принимает вид

$$\begin{cases} X_0 = X_0, Y_0 = Y_0, u_0 = 0, |\lambda_2| < 1, \\ X_{i+1} = X_i (\alpha C_0 - \mu \beta_x X_i Y_i), \\ Y_{i+1} = A (\alpha C_0 - \mu u_i X_i Y_i), \\ u_i = \frac{\alpha C_0}{\mu X_i Y_i} - \frac{\varphi(X_{i+1}) - \lambda_2 (Y_i - \varphi(X_i))}{A \mu X_i Y_i}, \end{cases},$$

для  $Y_{i+1}$  при  $|\lambda_2| < 1$  многообразие  $\psi_i^{(2)} = Y_i - \varphi(X_i) = 0$  будет являться притягивающим многообразием, то есть  $Y_{i+1} \equiv \varphi(X_{i+1})$ . Вид этой функции найдем из (7) с учетом (11):

$$\begin{aligned} \psi_{i+1}^{(1)} + \lambda_1 \psi_i^{(1)} &= 0, \quad |\lambda_1| < 1, \\ \alpha C_0 X_i - \mu \beta_x X_i^2 \varphi(X_i) - \left( \frac{1}{3} |\sin(\eta(i+1))| + \rho(i+1) \right) + \lambda_1 \left( X_i - \left( \frac{1}{3} |\sin(\eta i)| + \rho i \right) \right) &= 0, \\ \varphi(X_i) &= \frac{\alpha C_0 X_i - \left( \frac{1}{3} |\sin(\eta(i+1))| + \rho(i+1) \right) + \lambda_1 \left( X_i - \left( \frac{1}{3} |\sin(\eta i)| + \rho i \right) \right)}{\mu \beta_x X_i^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Система (9) окончательно примет вид

$$\begin{cases} X_{i+1} = X_i (\alpha C_0 - \mu \beta_x X_i Y_i), \\ Y_{i+1} = A (\alpha C_0 - \mu u_i X_i Y_i), \\ u_i = \frac{\alpha C_0}{\mu X_i Y_i} - \frac{\varphi(X_{i+1}) - \lambda_2 (Y_i - \varphi(X_i))}{A \mu X_i Y_i}, \\ \varphi(X_i) = \frac{\alpha C_0 X_i - \left( \frac{1}{3} |\sin(\eta(i+1))| + \rho(i+1) \right) + \lambda_1 \left( X_i - \left( \frac{1}{3} |\sin(\eta i)| + \rho i \right) \right)}{\mu \beta_x X_i^2} \end{cases}$$

при  $X_0 = X_0, Y_0 = Y_0, u_0 = 0, |\lambda_2| < 1, |\lambda_1| < 1, i = 1 \dots N$ .

### Заключение

Поставлена и решена задача управления нелинейным экономическим объектом, выводящего его на целевое многообразие. Робастность и асимптотическая устойчивость подтверждены результатами численного моделирования в расчетных и нерасчетных условиях.

### Литература

1. Колесников А. А. Синергетика и проблемы теории управления: сборник научных трудов / под ред. А.А. Колесникова. – М.: Физмалит, 2004. – 504 с.
2. Шаповалов В. И. Моделирование синергетических систем: метод пропорций и другие математические методы. – М.: Проспект, 2015. – 136 с.

## СБАЛАНСИРОВАННАЯ ЗАДАЧА К КОММИВОЯЖЕРОВ ДЛЯ НЕСИММЕТРИЧНЫХ РАССТОЯНИЙ

*Ю. Л. Костюк*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

### **Введение**

Задача коммивояжера (ЗК) имеет множество обобщений, в частности, для  $k$  коммивояжеров [1], когда на множестве из  $n + 1$  городов (пунктов обслуживания) строится  $k$  замкнутых маршрутов по следующим правилам:

- 1) один из городов, называемый депо, входит во все маршруты;
- 2) каждый из городов (кроме депо) входит ровно в один маршрут;
- 3) суммарная длина всех маршрутов минимальна.

Различные обобщения ЗК, полезные для практических применений, называются задачей маршрутизации транспорта (ЗМТ). В них может учитываться грузоподъемность транспортных средств, различные потребности в количестве груза у различных городов, время доставки, а также другие ограничения.

Если не учитывать никаких ограничений, то ЗК для  $k$  коммивояжеров можно свести к обычной ЗК следующим образом. Пусть задана матрица размером  $(n + 1) \cdot (n + 1)$  расстояний между городами (вершинами графа), где номер  $n + 1$  приписан депо. Копируя  $k - 1$  раз строку номер  $n + 1$  и столбец номер  $n + 1$ , расширим матрицу. При этом взаимные расстояния между копиями сделаем равными бесконечности. Решая ЗК по расширенной матрице, получим  $k$  замкнутых маршрутов с общим депо, при этом маршруты в общем случае будут состоять из различного числа вершин.

Минимальным ограничением, учитывающим практические потребности, является условие сбалансированности маршрутов, в частности, по числу вершин, входящих в маршруты. В статье [2] рассмотрен ряд приближенных алгоритмов, учитывающих сбалансированность, для метрического пространства расстояний. Эти алгоритмы реализуют двухэтапный метод: на первом этапе все множество вершин делится на  $k$  подмножеств, а на втором этапе вычисляется  $k$  отдельных маршрутов по каждому из подмножеств, включая депо. С помощью вычислительного эксперимента показано, что в большинстве случаев наилучшее качество на первом этапе дает метод последовательного дихотомического деления множества вершин. На каждом шаге деления на текущем множестве выбираются две наиболее удаленные друг от друга вершины, после чего остальные вершины поочередно присоединяются к первой или второй вершине. При этом для каждого подмножества строится минимальный остов графа, как в алгоритме Прима [3]. Критерием выбора вершины, присоединяемой к первому подмножеству, является минимум разности минимальных расстояний до первого и второго остова. Трудоемкость этого алгоритма –  $O(n^2)$ .

В статье [4] этот алгоритм модифицирован так, что учитываются грузоподъемность транспортных средств и различие потребностей в количестве груза у различных городов. Там показано, что этот алгоритм

почти не уступает, а при больших размерностях превосходит один из лучших алгоритмов решения ЗМТ – алгоритм Османа [5] при существенно (в сотни раз) меньшем времени работы.

В статье рассматривается первый этап – разделение множества городов на  $k$  подмножеств для несимметричной матрицы расстояний, причем наиболее важной для практики, когда для расстояний выполняется неравенство треугольника.

### **Алгоритм последовательного дихотомического разделения множества городов**

Для упрощения описания алгоритма будем считать, что  $n$  кратно  $k$ , т.е.  $n = km$ . Так же, как в статье [2], на каждом шаге разделения множество делится на две равные или почти равные части, каждая из которых содержит количество вершин, кратное  $m$ .

Вначале выбираются две наиболее удаленные друг от друга вершины, они образуют два подмножества. Так как расстояния несимметричные, то для вершин  $a$  и  $b$  удаленность вычисляется как сумма расстояний от  $a$  до  $b$  и обратно.

Далее оставшиеся вершины поочередно присоединяются к первому или второму подмножеству, при этом на подмножествах могут строиться следующие структуры:

- 1) минимальный остов, в котором ребра между вершинами  $i$  и  $j$  – минимальное из расстояний от  $i$  до  $j$  и обратно;
- 2) минимальный остов, в котором ребра между вершинами  $i$  и  $j$  – сумма расстояний от  $i$  до  $j$  и обратно;
- 3) цикл, для первого подмножества начальный цикл строится из вершины  $a$  и депо, для второго подмножества – из вершины  $b$  и депо.

Критерием близости к остову для очередной вершины является длина ребра (или сумма длин ребер) до самой ближней из вершин остова. Критерием близости к циклу для очередной вершины является минимальное удлинение цикла после включения этой вершины в цикл. Заметим, что при выполнении неравенства треугольника такое удлинение будет всегда неотрицательным.

Критерием выбора вершины для ее включения в первое множество является минимум разности между близостью к первому множеству и близостью ко второму множеству.

В свою очередь, критерием выбора вершины для ее включения во второе множество является минимум разности между близостью ко второму множеству и близостью к первому множеству.

Для всех трех вариантов структур трудоемкость первого этапа – разделения множества вершин на  $k$  подмножеств – одинакова и имеет порядок  $O(n^2)$ . Трудоемкость второго этапа – вычисление  $k$  отдельных маршрутов – зависит от применяемых алгоритмов. При относительно небольших подмножествах – до 30–40 вершин – возможно применение точного алгоритма по методу ветвей и границ, например, алгоритма Литтла

[6] или модифицированного, описанного в статьях [7, 8]. Этот алгоритм для задач такого размера получает решение в течение нескольких секунд. При большей размерности приходится применять приближенные алгоритмы. Если размеры подмножеств несколько больше, чем 40, то можно использовать алгоритм с гарантированной точностью по методу ветвей и границ, описанный в [8]. При этом основное время вычислений будет приходиться на второй этап решения задачи.

### Вычислительный эксперимент

В вычислительном эксперименте на модельных данных проверялось качество решения, получаемое алгоритмом, при использовании на первом этапе одного из трех видов структуры:

- 1) минимального остова с ребрами по минимуму длины (остов 1);
- 2) минимального остова с ребрами по сумме длин (остов 2);
- 3) цикла.

На втором этапе при размере подмножеств 25 использовался точный алгоритм [9], а при размере подмножеств 50 – приближенный алгоритм [10] с заданной гарантированной относительной погрешностью  $\varepsilon$  (средняя погрешность в 3–4 раза меньше). Для общей матрицы расстояний вычислялся также минимальный остов с ребрами по минимуму длины, как оценка снизу суммы длин всех вычисленных  $k$  маршрутов. Все алгоритмы были написаны на языке Паскаль в системе Delphi.

В табл. 1 и 2 представлено усредненное отношение суммы длин всех  $k$  маршрутов к величине минимального остова. Усреднение производилось по сгенерированным выборкам из 1000 матриц расстояний для каждого варианта.

Для табл. 1 вначале генерировалось  $n$  равномерно распределенных точек внутри квадрата на плоскости (города) и одна точка в центре квадрата (депо). Затем вычислялись элементы матриц, как евклидовы расстояния между точками. В результате получалась симметричная матрица, для которой структуры остов 1 и остов 2 дают идентичные результаты.

Таблица 1. Результаты эксперимента для симметричных матриц

Параметр	Структура остов	Структура цикл	Доля случаев, когда цикл лучше остова
$n = 50, k = 2, \varepsilon = 0$	1,287	1,266	0,71
$n = 100, k = 4, \varepsilon = 0,2$	1,307	1,293	0,61
$n = 100, k = 2, \varepsilon = 0$	1,368	1,345	0,72
$n = 200, k = 4, \varepsilon = 0,2$	1,363	1,341	0,77

Для табл. 2 также вначале генерировалось  $n$  равномерно распределенных точек внутри квадрата на плоскости и одна точка в центре квадрата. Затем вычислялись элементы матриц, как евклидовы расстояния между точками  $i$  и  $j$ , причем с вероятностью 0,5 расстояние увеличивалось вдвое, в результате получалась несимметричная матрица. После этого матрица обрабатывалась алгоритмом Флойда [3], при этом все расстояния

между точками  $i$  и  $j$  заменялись кратчайшими расстояниями. В результате для всех расстояний выполнялось неравенство треугольника.

Таблица 2. Результаты эксперимента для несимметричных матриц

Параметр	Структура остов 1	Структура остов 2	Структура цикл	Доля случаев, когда цикл лучше остова
$n = 50, k = 2, \varepsilon = 0$	1,404	1,405	1,394	0,62
$n = 100, k = 4, \varepsilon = 0,1$	1,483	1,483	1,465	0,68
$n = 100, k = 2, \varepsilon = 0$	1,372	1,373	1,366	0,78
$n = 200, k = 4, \varepsilon = 0,1$	1,426	1,426	1,401	0,64

### Заключение

Как показал вычислительный эксперимент, предложенная структура в виде циклов для разделения множества вершин на два подмножества позволяет получить в среднем лучшее качество решения сбалансированной задачи  $k$  коммивояжеров как для симметричных, так и несимметричных расстояний по сравнению со структурой в виде минимального остова.

### Литература

1. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 9. – С. 3–33.
2. Костюк Ю. Л., Пожидаев М. С. Приближенные алгоритмы решения сбалансированной задачи  $k$  коммивояжеров // Вестник Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2008. – № 1(2). – С. 106–112.
3. Рейнголд Э., Нивергельд Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика / пер. с англ. – М. : Мир. – 1980.
4. Костюк Ю. Л., Пожидаев М. С. Сбалансированная эвристика для решения задачи маршрутизации транспорта с учетом грузоподъемности // Вестник Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 3(12). – С. 65–72.
5. Osman I. H. Metastrategy Simulated Annealing and Tabu Search Algorithms for the Vehicle Routing Problem // Annals of Operations Research. – 1993. – № 41. – P. 421–451.
6. Little J. D. C., Murty K. G., Sweeney D. W., Karel C. An algorithm for the Traveling Salesman Problem // Operations Research. – 1963. – № 11. – P. 972–989.
7. Костюк Ю. Л. Эффективная реализация алгоритма решения задачи коммивояжера методом ветвей и границ // Прикладная дискретная математика. – 2013. – № 2 (20). – С. 78–90.
8. Костюк Ю. Л. Задача коммивояжера: улучшенная нижняя граница в методе ветвей и границ // Прикладная дискретная математика. – 2013. – № 4 (22). – С. 73–81.
9. Костюк Ю. Л. Модифицированный алгоритм решения задачи коммивояжера методом ветвей и границ с улучшенной нижней границей. Программа и модуль с описанием класса: язык Паскаль в системе Delphi [Электронный ресурс]. – URL: <http://inf.tsu.ru/Decanat/Staff.nsf/people/KostjukJuL>
10. Костюк Ю. Л. Модифицированный алгоритм решения задачи коммивояжера методом ветвей и границ с улучшенной нижней границей при заданной гарантированной погрешности решения. – 2014. – Июнь. Программа и модуль с описанием класса: язык Паскаль в системе Delphi [Электронный ресурс]. – URL: <http://inf.tsu.ru/Decanat/Staff.nsf/people/KostjukJuL>

## РЕЛЕЙНО-ГИСТЕРЕЗИСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ ПРОИЗВОДСТВА В ЗАДАЧЕ ПРОИЗВОДСТВА И СБЫТА СКОРОПОРТЯЩЕЙСЯ ПРОДУКЦИИ

*К. И. Лившиц, Е. С. Ульянова*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

### 1. Математическая модель задачи

Модели управления запасами с ограниченным сроком годности интенсивно изучаются в последние годы. За это время появилось несколько обзорных статей по данной теме, например, обзоры S.K. Goyal, B.C. Giri [1], M. Bakker, J. Riezebos и R. H. Teunter [2]. Укажем еще, например, работы V. K. Mishra [3], R. Begum, S. K. Sahu, R. R. Sahoo [4], V. Sharma, R. Chaudhary [5], M. Schwarz, H. Daduna [6].

В настоящей работе задача производства и сбыта скоропортящейся продукции рассматривается при следующих предположениях. Пусть  $S(t)$  – количество продукции в момент времени  $t$ . Считается, что продукция поступает со скоростью  $c(S)$ , так что за время  $\Delta t$  поступает  $c(S(t))\Delta t$  единиц продукции. При хранении продукция непрерывно портится. Будем предполагать, что за малое время  $\Delta t$  потери равны  $kS(t)\Delta t$ . Будем считать, что величины покупок – независимые случайные величины с плотностью распределения  $\varphi(x)$ , средним значением  $M\{x\} = a$  и вторым моментом  $M\{x^2\} = a_2$ . Моменты продаж образуют пуассоновский поток, интенсивность которого  $\lambda$  зависит от цены продажи  $b$ . Считается, что интенсивность потока продаж  $\lambda$  монотонно убывает с ростом цены  $b$ .

Необходимо организовать управление либо ценой продажи  $b$  (такая задача была рассмотрена в [7, 8]), либо скоростью производства продукции  $c$  в зависимости от текущего запаса продукции для того, чтобы максимизировать прибыль организации.

В настоящей работе предполагается, что управление производством продукции осуществляется следующим образом. Устанавливается два пороговых значения допустимого запаса продукции  $S_1$  и  $S_2$ , причем  $S_2 > S_1$ . В области  $S < S_1$  назначается скорость производства  $c_0$ , в области  $S > S_2$  назначается скорость  $c_1 < c_0$ . В области же  $S_1 \leq S \leq S_2$  назначается  $c = c_0$  или  $c = c_1$  в зависимости от того, как процесс  $S(t)$  вошел в эту область. Если он вошел в нее через порог  $S_1$  снизу вверх, то остается  $c = c_0$ , если же он вошел в эту область через порог  $S_2$  сверху вниз, то остается  $c = c_1$ . Таким образом, значение  $c = c_1$  устанавливается при достижении запасом  $S(t)$  значения  $S_2$  и оканчивается при уменьшении запаса до значения  $S_1$ . Область  $S_1 \leq S \leq S_2$  и представляет собой область гистерезиса в управлении запасом продукции.

Естественно считать, что  $c_0 - \lambda a > 0$ . Наконец, возможна ситуация, когда текущий спрос не может быть удовлетворен полностью. В этом случае считается, что  $S(t) < 0$ . Заказы удовлетворяются в порядке их поступления. Основная цель настоящей работы состоит в нахождении плотности распределения количества продукции для данной модели при некоторых дополнительных предположениях.

Обозначим

$$\begin{aligned} P_0(S, t)dS &= \Pr\{S \leq S(t) < S + dS, c(t) = c_0\}, \quad S < S_1, \\ P_2(S, t)dS &= \Pr\{S \leq S(t) < S + dS, c(t) = c_1\}, \quad S > S_2, \\ P_{i1}(S, t)dS &= \Pr\{S \leq S(t) < S + dS, c(t) = c_i\}, \quad i = 0, 1, \quad S_1 \leq S \leq S_2. \end{aligned} \quad (1)$$

**Теорема 1.** Если  $P_i(S, t), P_{i1}(S, t)$  дифференцируемы по  $t$ ,  $SP_i(S, t), SP_{i1}(S, t)$  дифференцируемы по  $S$ , то функции  $P_i(S, t), P_{i1}(S, t)$  удовлетворяют системе уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P_2(S, t)}{\partial t} = -\lambda P_2(S, t) - \frac{\partial}{\partial S}((c_1 - kS)P_2(S, t)) + \lambda \int_0^{\infty} P_2(S + x, t)\varphi(x)dx, \quad S > S_2, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{11}(S, t)}{\partial t} &= -\lambda P_{11}(S, t) - \frac{\partial}{\partial S}((c_1 - kS)P_{11}(S, t)) + \\ &+ \lambda \int_0^{S_2-S} P_{11}(S + x, t)\varphi(x)dx + \lambda \int_{S_2-S}^{\infty} P_2(S + x, t)\varphi(x)dx, \quad S_1 \leq S \leq S_2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial P_{01}(S, t)}{\partial t} = -\lambda P_{01}(S, t) - \frac{\partial}{\partial S}((c_0 - kS)P_{01}(S, t)) + \lambda \int_0^{S_2-S} P_{01}(S + x, t)\varphi(x)dx, \quad (4)$$

$$S_1 \leq S \leq S_2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0(S, t)}{\partial t} &= -\lambda P_0(S, t) - \frac{\partial}{\partial S}((c_0 - kSI(S))P_0(S, t)) + \\ &+ \lambda \int_0^{S_1-S} P_0(S + x, t)\varphi(x)dx + \lambda \int_{S_1-S}^{S_2-S} P_{01}(S + x, t)\varphi(x)dx + \end{aligned} \quad (5)$$

$$+ \lambda \int_{S_1-S}^{S_2-S} P_{11}(S + x, t)\varphi(x)dx + \lambda \int_{S_2-S}^{\infty} P_2(S + x, t)\varphi(x)dx, \quad S < S_1,$$

где  $I(x)$  – единичная функция.

Решение системы уравнений (2)–(5) должно, очевидно, удовлетворять условию нормировки и дополнительным условиям  $P_0(S_1) = P_{01}(S_1), P_{11}(S_1) = 0$ .

## 2. Асимптотическое выражение для плотности распределения количества продукции

Получить точное решение системы уравнений (2)–(5) удастся лишь в исключительных случаях. Поэтому представляет интерес построение приближенного решения системы (2)–(5) в стационарном режиме при

некоторых дополнительных асимптотических предположениях. Введем параметр  $\varepsilon \ll 1$  и будем считать, что выполняются следующие условия:

$$c_0 = (1 + \alpha\varepsilon)\lambda a, \quad c_1 = (1 + \beta\varepsilon)\lambda a, \quad k = k_0\varepsilon^2, \quad (6)$$

где  $\beta < \alpha$ . Первые два соотношения (6) означают, что количество продукции, производимой в единицу времени, почти совпадает со средним сбытом в единицу времени при любом  $S$ . Последнее соотношение (6) означает, что отношение  $(c_0 - \lambda a)/k \gg 1$ , т.е. при хранении продукция портится достаточно медленно. При этом естественно считать, что пороги  $S_1$  и  $S_2$ , определяющие гистерезисное управление производством, зависят от  $\varepsilon$ . Более точно будем считать, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $S_1(\varepsilon)$  и  $S_2(\varepsilon) \rightarrow \infty$ , но существуют конечные пределы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_1(\varepsilon) = z_1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_2(\varepsilon) = z_2. \quad (7)$$

Для построения решения уравнений введем функции  $f_i(S, \varepsilon)$  соотношениями  $P_i(S) = \varepsilon f_i(\varepsilon S, \varepsilon)$  и функции  $f_{i1}(S, \varepsilon)$  соотношениями  $P_{i1}(S) = \varepsilon f_{i1}(\varepsilon S, \varepsilon)$ . Пусть  $f_i(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_i(z, \varepsilon)$ ,  $f_{ij}(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{ij}(z, \varepsilon)$ .

**Теорема 2.** Если функции  $f_i(z, \varepsilon)$ ,  $f_{i1}(z, \varepsilon)$  дважды дифференцируемы по  $z$  и равномерно непрерывны по  $\varepsilon$ , то

$$f_2(z) = B \int_{z_1}^{z_2} e^{\frac{(\beta\lambda a - k_0 x)^2}{\lambda a_2 k_0}} dx e^{-\frac{(\beta\lambda a - k_0 z)^2}{\lambda a_2 k_0}}, \quad z > z_2, \quad (8)$$

$$f_{11}(z) = B \int_{z_1}^z e^{\frac{(\beta\lambda a - k_0 x)^2}{\lambda a_2 k_0}} dx e^{-\frac{(\beta\lambda a - k_0 z)^2}{\lambda a_2 k_0}}, \quad z_1 \leq z \leq z_2, \quad (9)$$

$$f_{01}(z) = B \int_z^{z_2} e^{\frac{(\alpha\lambda a - k_0 x)^2}{\lambda a_2 k_0}} dx e^{-\frac{(\alpha\lambda a - k_0 z)^2}{\lambda a_2 k_0}}, \quad z_1 \leq z \leq z_2, \quad (10)$$

$$f_0(z) = \begin{cases} B \int_{z_1}^{z_2} e^{\frac{(\alpha\lambda a - k_0 x)^2}{\lambda a_2 k_0}} dx e^{-\frac{(\alpha\lambda a - k_0 z)^2}{\lambda a_2 k_0}}, & 0 \leq z \leq z_1, \\ B \int_{z_1}^{z_2} e^{\frac{(\alpha\lambda a - k_0 x)^2}{\lambda a_2 k_0}} dx e^{-\frac{(\alpha\lambda a)^2}{\lambda a_2 k_0}} e^{\frac{2\alpha a}{a_2} z}, & z < 0, \end{cases} \quad (11)$$

где постоянная  $B$  определяется из условия нормировки.

Из доказанной теоремы следует, что при  $\varepsilon \ll 1$  плотность распределения количества продукции имеет вид

$$P(S) = \begin{cases} \varepsilon B \int_{z_1}^{z_2} e^{\frac{(\beta\lambda a - k_0 x)^2}{\lambda a_2 k_0}} dx e^{-\frac{(\beta\lambda a - k_0 \varepsilon S)^2}{\lambda a_2 k_0}} + O(\varepsilon), & S > S_2, \\ \varepsilon B \left[ \int_{z_1}^{\varepsilon S} e^{\frac{(\beta\lambda a - k_0 x)^2}{\lambda a_2 k_0}} dx e^{-\frac{(\beta\lambda a - k_0 \varepsilon S)^2}{\lambda a_2 k_0}} + \int_{\varepsilon S}^{z_2} e^{\frac{(\alpha\lambda a - k_0 x)^2}{\lambda a_2 k_0}} dx e^{-\frac{(\alpha\lambda a - k_0 \varepsilon S)^2}{\lambda a_2 k_0}} \right] + O(\varepsilon) & S_1 \leq S \leq S_2, \\ \varepsilon B \int_{z_1}^{z_2} e^{\frac{(\alpha\lambda a - k_0 x)^2}{\lambda a_2 k_0}} dx e^{-\frac{(\alpha\lambda a - k_0 \varepsilon S)^2}{\lambda a_2 k_0}} + O(\varepsilon), & 0 \leq S \leq S_1, \\ \varepsilon B \int_{z_1}^{z_2} e^{\frac{(\alpha\lambda a - k_0 x)^2}{\lambda a_2 k_0}} dx e^{-\frac{(\alpha\lambda a)^2}{\lambda a_2 k_0} - \frac{2\alpha a}{a_2} \varepsilon S} + O(\varepsilon), & S < 0. \end{cases} \quad (12)$$

### 3. Релейное управление производством при экспоненциальном распределении величин покупок

Рассмотрим теперь простейший случай релейного управления производством (порог  $S_1 = S_2$ ) при экспоненциальном распределении величин покупок, когда  $\varphi(x) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{x}{a}\right)$ . Обозначим  $P_i(S) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(S, t)$ .

Можно показать, что в стационарном случае решение уравнений (2)–(5), определяющих плотность распределения количества продукции, будет иметь вид

$$P_0(S) = \begin{cases} B e^a (c_0 - kS)^{\frac{\lambda}{k} - 1}, & 0 \leq S \leq S_1, \\ B c_0^{\frac{\lambda}{k} - 1} e^{-\frac{c_0 - \lambda a S}{c_0 a}}, & S < 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$P_2(S) = A e^a (c_1 - kS)^{\frac{\lambda}{k} - 1}, \quad S > S_1, \quad (14)$$

где связь между постоянными  $A$  и  $B$  определяется следующим образом:

$$A = B\gamma, \quad \gamma = (c_0 - kS_1)^{\frac{\lambda}{k}} (c_1 - kS_1)^{-\frac{\lambda}{k}}. \quad (15)$$

Постоянная  $B$  определяется из условия нормировки.

Рассмотрим теперь случай, когда  $c_1 = 0$ . Очевидно, что при этом  $P_2(S) = 0$ , а плотность  $P_0(S)$  определяется уравнением

$$\lambda P_0(S) + \frac{d}{dS} ((c_0 - kSI(S))P_0(S)) - \frac{\lambda}{a} e^a \int_S^{S_1} P_0(x) e^{-\frac{x}{a}} dx = 0, \quad S < S_1, \quad (16)$$

решение которого имеет вид (13).

Пусть  $c_0 = (1 + \theta)\lambda a$ , где  $\theta > 0$ . Обозначим  $\mu = \lambda / k$ . Параметр  $\mu$  показывает, насколько скорость сбыта продукции превышает скорость ее потери. Тогда

$$P_0(S) = \begin{cases} De^{\frac{S}{a}} \left(1 - \frac{S}{\mu(1+\theta)a}\right)^{\mu-1}, & 0 \leq S \leq S_1, \\ De^{\frac{\theta}{(1+\theta)a}S}, & S < 0, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$D = \left[ \frac{(1+\theta)a}{\theta} + \int_0^{S_1} e^{\frac{S}{a}} \left(1 - \frac{S}{\mu(1+\theta)a}\right)^{\mu-1} dS \right]^{-1}. \quad (18)$$

Зависимость плотности распределения  $P_0(S)$  от  $S$  приведена на рис. 1. Параметры:  $\mu = 20$ ,  $\theta = 0,5$ ,  $a = 1,5$ .

В рассматриваемом случае средняя прибыль в единицу времени  $R$  при условии, что себестоимость единицы продукции равна 1, будет равна

$$R = \lambda ab \int_0^{\infty} P_0(S) dS - c_0,$$

где  $b$  – продажная цена единицы продукции. Или

$$R = \lambda ab - \lambda a \left( 1 + \theta + b \left( 1 + \frac{\theta}{(1+\theta)a} \int_0^{S_1} e^{\frac{S}{a}} \left(1 - \frac{S}{\mu(1+\theta)a}\right)^{\mu-1} ds \right)^{-1} \right). \quad (19)$$

Из выражения (19) следует, что при любых значениях остальных параметров оптимальное значение  $S_{1opt.} = \mu(1+\theta)a$ , и для максимизации  $R$  нужно минимизировать по  $\theta$  величину

$$R_1 = 1 + \theta + b \left( 1 + \mu\theta \int_0^1 e^{\mu(1+\theta)z} (1-z)^{\mu-1} dz \right)^{-1}. \quad (20)$$

Зависимость  $R_1$  от  $\theta$  приведена на рис. 2, продажная цена  $b = 2$ .

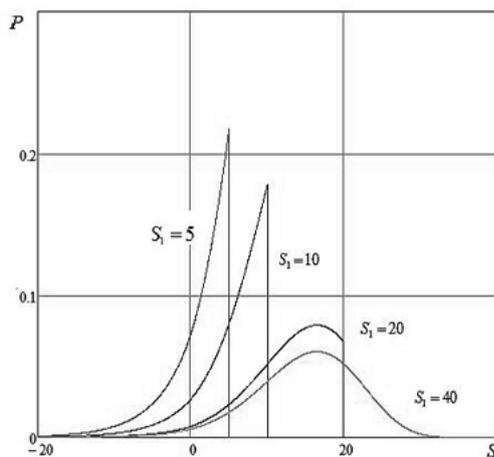


Рис. 1. Зависимость плотности распределения  $P_0(S)$  от  $S$

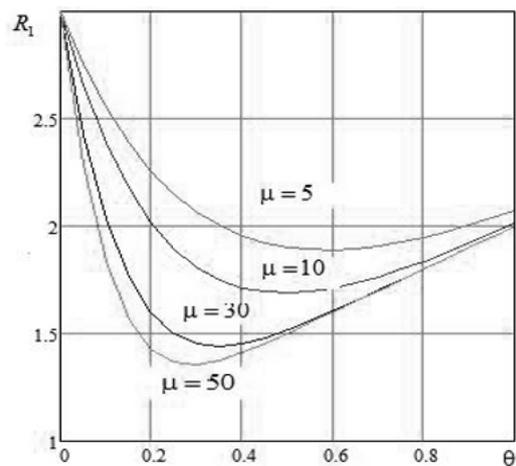


Рис. 2. Зависимость  $R_1$  от параметра  $\theta$

Таким образом, при рассматриваемых значениях параметров темп производства  $c_0$  должен быть примерно на 30 % выше величины средней продажи  $\lambda a$ .

### Заключение

В работе получены уравнения, определяющие плотность распределения количества скоропортящейся продукции при релейно-гистерезисном управлении скоростью производства. При произвольном распределении величин продаж получены приближенные решения этих уравнений в случае, когда темп производства продукции «почти совпадает» с темпом ее продажи и при хранении продукции она портится достаточно медленно. В случае экспоненциального распределения величин продаж и релейного управления скоростью производства найдено точное решение уравнений и решена задача оптимального выбора скорости производства, максимизирующей среднюю прибыль в единицу времени. Аналогично вышеизложенному могут быть исследованы и другие модели управления производством и сбытом скоропортящейся продукции, например, модель с непрерывной зависимостью скорости производства от текущего запаса продукции.

### Литература

1. Goyal S. K., Giri B. C. Recent trends in modeling of deteriorating inventory // *European Journal of Operational Research*. – 2001. – Vol. 134 (1). – P. 1–16.
2. Bakker M. J., Riezebos J., Teunter R. H. Review of inventory systems with deterioration since 2001 // *European Journal of Operational Research*. – 2012. – Vol. 221. – P. 275–284.
3. Mishra V. K. An inventory model of instantaneous deteriorating items with controllable deterioration rate for time dependent demand and holding cost // *Journal of Industrial Engineering and Management*. – 2013. – Vol. 6(2). – P. 495–506.
4. Begum R., Sahu S. K., Sahoo R. R. An Inventory Model for Deteriorating Items with Quadratic Demand and Partial Backlogging // *British Journal of Applied Science & Technology*. – 2012. – Vol. 2(2). – P. 112–131.
5. Sharma V., Chaudhary R. An Inventory Model for Deteriorating Items with Weibull Deterioration with Time Dependent Demand and Shortages // *Research Journal of Management Sciences*. – 2013. – Vol. 2(3). – P. 28–30.
6. Schwarz M., Daduna H. Queuing systems with inventory managements with random lead times and with backordering // *Mathematical methods of operation research*. – 2006. – Vol. 64, is. 3. – P. 383–414.
7. Livshits K., Ulyanova E. Switch-hysteresis control of the selling times flow in a model with perishable goods // *Communications in Computer and Information Science*. – 2015. – Vol. 564. – P. 263–274.
8. Лившиц К. И., Ульянова Е. С. Диффузионная аппроксимация процесса производства и сбыта скоропортящейся продукции // *Известия вузов. Физика*. – 2015. – Т. 58, № 11/2. – С. 281–285.

## СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЭРЛАНГА ОБЪЕМОВ ПОТРЕБЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

*А. А. Назаров, В. И. Бронер*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

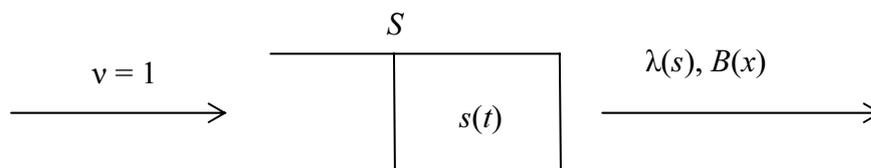
### Введение

В рамках теории управления запасами рассматриваются различные математические модели. В работах отечественных авторов, как правило, рассматриваются потоковые модели различного вида с некоторым потоком (как правило, простейшим) поступления ресурса в качестве потоков накопления и потоком потребления ресурсов. В работах [1, 2] рассматриваются модели фонда социального страхования при релейном управлении (в [2] также рассмотрено релейно-гистерезисное управление) капиталом такого фонда. В данных моделях предполагается, что выплаты по страховым случаям образуют пуассоновский поток событий с постоянной, а выплаты на финансирование социальных программ – пуассоновский поток с переменной интенсивностью. Величины выплат являются одинаково распределенными независимыми случайными величинами с экспоненциальной функцией распределения.

В данной работе рассматривается модель, аналогичная [1, 2], с распределением Эрланга объемов потребления.

### 1. Математическая модель

Рассмотрим систему управления запасами. Пусть на вход данной системы непрерывно поступают некоторые ресурсы с фиксированной скоростью  $v = 1$ .



*Рис. 1. Система управления запасами*

Обозначим через  $s(t)$  объем накопленных ресурсов в системе к моменту времени  $t$ .

Положим, что моменты потребления образуют пуассоновский поток с кусочно-постоянной интенсивностью  $\lambda(s)$ , которая зависит от значений  $s(t) = s$ , то есть от объема накопленных запасов к моменту времени  $t$  поступления заявки на расходование ресурса, здесь

$$\lambda(s) = \begin{cases} \lambda_1, s < S, \\ \lambda_2, s \geq S, \end{cases} \quad (1)$$

где  $S$  – некоторое пороговое значение уровня запасов  $s(t)$ .

В качестве функции распределения  $B(x)$  объемов потребления ресурсов рассмотрим функцию Эрланга  $n$ -го порядка:

$$B(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^k}{k!}, k \geq 1. \quad (2)$$

Важно отметить, что возможны ситуации, при которых процесс  $s(t)$  может принимать отрицательные значения  $s(t) < 0$ , в таком случае система продолжает функционировать, а исполнение заявки на потребление ресурсов откладывается.

Условие существования стационарного режима в рассматриваемой системе имеет вид

$$\lambda_1 b < 1 < \lambda_2 b, \quad (3)$$

где  $b$  – среднее значение объема одной партии на потребление ресурсов.

Таким образом, при выполнении условий  $\lambda_1 < 1/b < \lambda_2$  и  $s(t) < S$  объем ресурса в системе будет в среднем увеличиваться, в противном случае при  $s(t) \geq S$  объем ресурса будет уменьшаться, так как интенсивность потребления возрастет.

В силу (2) величина  $b$  может быть представлена следующим образом:

$$b = \frac{n}{\mu}. \quad (4)$$

Исходя из анализа математической модели, можно сделать вывод, что случайный процесс  $s(t)$  является марковским с непрерывным временем  $t$  и непрерывным множеством значений  $-\infty < s < \infty$ .

Обозначив его стационарную плотность распределения

$$P(s, t) = \frac{\partial P\{s(t) < s\}}{\partial s},$$

можем записать следующее равенство:

$$P(s + \Delta t) = P(s)(1 - \lambda(s)\Delta t) + \Delta t \int_0^{\infty} \lambda(s+x)P(s+x)dB(x) + o(\Delta t).$$

Тогда имеем уравнение

$$P'(s) + \lambda(s)P(s) = \int_0^{\infty} \lambda(s+x)P(s+x)dB(x), \quad (5)$$

краевые условия которого имеют вид

$$P(-\infty) = P(\infty) = 0. \quad (6)$$

Найдем решение  $P(s)$  уравнения (5) в явном виде, взяв в качестве функции распределения  $B(x)$  объемов партий потребления функцию распределения Эрланга (2).

Обозначим

$$P(s) = \begin{cases} P_1(s), & s < S, \\ P_2(s), & s > S, \end{cases} \quad (7)$$

тогда уравнение (5) можем представить в виде двух уравнений:

$$P_2'(s) + \lambda_2 P_2(s) = \lambda_2 \int_0^{\infty} P_2(s+x)dB(x), \quad s > S, \quad (8)$$

$$P_1'(s) + \lambda_1 P_1(s) = \lambda_1 \int_0^{S-s} P_1(s+x) dB(x) + \lambda_2 \int_{S-s}^{\infty} P_2(s+x) dB(x), \quad s < S. \quad (9)$$

Будем искать такие решения уравнений (8) и (9), которые удовлетворяют краевым условиям

$$P_1(-\infty) = 0, \quad P_2(\infty) = 0. \quad (10)$$

## 2. Решение уравнения (8) для $P_2(s)$

Решение  $P_2(s)$ ,  $s > S$ , уравнения (8) будем искать в виде

$$P_2(s) = C e^{-\gamma(s-S)}, \quad s > S. \quad (11)$$

Осуществляя подстановку (11) в (8), получим равенство

$$\lambda_2 - \gamma = \lambda_2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} dB(x), \quad (12)$$

которое является нелинейным уравнением относительно величины  $\gamma$ .

Находя интеграл в правой части (12), имеем выражение

$$\lambda_2 - \gamma = \lambda_2 \left( \frac{\mu}{\mu + \gamma} \right)^n. \quad (13)$$

Очевидно, что нулевой корень  $\gamma = 0$  уравнения (13) существует и является посторонним в рассматриваемой задаче в силу краевого условия (10)  $P_2(\infty) = 0$ .

Нетрудно показать, что при выполнении условия (3)  $\lambda_2 b > 1$  уравнение (13) кроме нулевого решения имеет единственный положительный корень  $\gamma > 0$  для любой функции распределения  $B(x)$ , поэтому решением уравнения (8) является функция (11), определяемая с точностью до мультипликативной постоянной  $C$ , значение которой найдем ниже.

## 3. Решение уравнения для $P_1(s)$

Зная (11), можем представить уравнение (9) в виде

$$P_1'(s) + \lambda_1 P_1(s) = \lambda_1 \int_0^{S-s} P_1(s+x) dB(x) + \lambda_2 C e^{-\gamma(s-S)} \int_{S-s}^{\infty} e^{-\gamma x} dB(x). \quad (14)$$

Тогда в силу (2), выполняя преобразования, получим

$$\int_{S-s}^{\infty} e^{-\gamma x} dB(x) = \frac{1}{\left( \frac{\mu + \gamma}{\mu} \right)^n} e^{\frac{\mu + \gamma}{\mu} \mu (s-S)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[(\mu + \gamma)(S-s)]^k}{k!}.$$

Поэтому (14) можем записать следующим образом:

$$\begin{aligned} P_1'(s) + \lambda_1 P_1(s) &= \\ &= \lambda_1 \int_0^{S-s} P_1(s+x) b(x) dx + \lambda_2 e^{-\mu(S-s)} \left( \frac{\mu}{\mu + \gamma} \right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[(\mu + \gamma)(S-s)]^k}{k!}. \end{aligned} \quad (15)$$

Прежде чем сформулировать теорему о виде функции  $P_1(s)$ , рассмотрим уравнение

$$z + \lambda_1 = \lambda_1 \left( \frac{\mu}{\mu - z} \right)^n, \quad (16)$$

которое нетрудно преобразовать к алгебраическому уравнению степени  $n + 1$ , откуда следует, что уравнение (16) имеет  $n + 1$  корней. Достаточно очевидно, что  $z = 0$  является корнем этого уравнения.

Для остальных корней  $z = z_v$ ,  $v = \overline{1, n}$  уравнения (16) имеет место следующее утверждение.

**Лемма 1.** При выполнении условия (3)

$$\lambda_1 b = \lambda_1 \frac{n}{\mu} < 1$$

все  $n$  ненулевые корни  $z = z_v$ ,  $v = \overline{1, n}$  уравнения

$$(z + \lambda_1)(\mu - z)^n - \lambda_1 \mu^n = 0 \quad (17)$$

являются простыми и имеют положительные действительные части.

**Теорема 1.** Решение  $P_1(s)$  уравнения (15) имеет вид

$$P_1(s) = C \sum_{v=1}^n x_v e^{z_v(s-S)}, \quad s < S, \quad (18)$$

где  $z_v$  – ненулевые корни уравнения (17), параметры  $x_v$  распределения (18) являются компонентами вектора  $\mathbf{X}$  – решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{E}, \quad (19)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичный вектор-столбец, а элементы  $A_{kv}$  матрицы  $\mathbf{A}$  имеют вид

$$A_{kv} = \left( \frac{\mu - z_v}{\mu + \gamma} \right)^{k-n-1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad k, v = \overline{1, n}, \quad (20)$$

нормирующая константа  $C$  определяется равенством

$$C = \left( \frac{1}{\gamma} + \sum_{v=1}^n \frac{x_v}{z_v} \right)^{-1}. \quad (21)$$

**Доказательство.**

Решение  $P_1(s)$  уравнения (14) будем искать в виде (18).

Подставляя выражение (18) в (14) и выполняя несложные преобразования, получим равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{v=1}^n x_v e^{z_v(s-S)} \left\{ z_v + \lambda_1 - \lambda_1 \left( \frac{\mu}{\mu - z_v} \right)^n \right\} = \\ & = e^{\mu(s-S)} \left\{ \lambda_2 \left( \frac{\mu}{\mu + \gamma} \right)^n \sum_{m=0}^{n-1} \frac{[(\mu + \gamma)(S - s)]^m}{m!} - \right. \\ & \left. - \lambda_1 \sum_{v=1}^n x_v \left( \frac{\mu}{\mu - z_v} \right)^n \sum_{m=0}^{n-1} \frac{[(\mu - z_v)(S - s)]^m}{m!} \right\}. \end{aligned}$$

Обозначив  $y = (\mu + \gamma)(S - s), (\mu - z_v)(S - s) = \frac{\mu - z_v}{\mu + \gamma} y$ , получим

$$\begin{aligned} & \sum_{v=1}^n x_v e^{z_v(s-S)} \left\{ z_v + \lambda_1 - \lambda_1 \left( \frac{\mu}{\mu - z_v} \right)^n \right\} = \\ & = \mu^n e^{\mu(s-S)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{y^m}{m!} \left\{ \frac{\lambda_2}{(\mu + \gamma)^n} - \sum_{v=1}^n x_v \frac{\lambda_1}{(\mu - z_v)^n} \left( \frac{\mu - z_v}{\mu + \gamma} \right)^m \right\}. \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю в полученном выражении коэффициенты в линейной комбинации экспонент  $e^{z_v(s-S)}$ , получим равенства

$$z_v + \lambda_1 = \lambda_1 \left( \frac{\mu}{\mu - z_v} \right)^n, \quad v = \overline{1, n},$$

которые при всех  $v = \overline{1, n}$  совпадают с уравнением (16), следовательно,  $z_v$  являются корнями уравнения (16).

Аналогично для экспонент  $e^{\mu(s-S)} y^m$  получим равенства

$$\sum_{v=1}^n x_v \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left( \frac{\mu - z_v}{\mu + \gamma} \right)^{m-n} = 1, \quad m = \overline{0, n},$$

которые составляют неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно  $x_v$ , совпадающую с системой (18), в которой элементы  $A_{kv}$  матрицы  $\mathbf{A}$  определяются равенствами (19).

Значение константы  $C$  найдем из условия нормировки

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} P(s) ds = \int_{-\infty}^S P_1(s) ds + \int_S^{\infty} P_2(s) ds = C \sum_{v=1}^n x_v \int_{-\infty}^S e^{z_v(s-S)} ds + C \int_S^{\infty} e^{-\gamma(s-S)} ds = \\ &= C \sum_{v=1}^n x_v \int_{-\infty}^0 e^{z_v x} dx + C \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} dx = C \left\{ \sum_{v=1}^n \frac{x_v}{z_v} + \frac{1}{\gamma} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство  $C = \left( \sum_{v=1}^n \frac{x_v}{z_v} + \frac{1}{\gamma} \right)^{-1}$ ,

которое совпадает с (21).

Теорема доказана.

В силу (18) и (11) распределение  $P(s)$  из (8) имеет вид

$$P(s) = \left( \sum_{v=1}^n \frac{x_v}{z_v} + \frac{1}{\gamma} \right)^{-1} \cdot \begin{cases} \sum_{v=1}^n x_v e^{z_v(s-S)}, & s < S, \\ e^{-\gamma(s-S)}, & s > S, \end{cases} \quad (22)$$

где параметры  $z_v$  этого распределения являются ненулевыми корнями уравнения (16), а  $\gamma$  – единственный положительный корень уравнения (13), параметры  $x_v$  являются компонентами вектора  $\mathbf{X}$  – решения системы линейных алгебраических уравнений (19).

Явное выражение (22) для решения  $P(s)$  уравнения (5) полностью решает проблему исследования математической модели управления запасами при выполнении указанных ограничений: релейное управление и Эрланговское распределение объемов партий потребления ресурсов.

#### 4. Пример

Рассмотрим в качестве плотности распределения объемов потребления распределение Эрланга третьего порядка:

$$b_3(x) = \frac{\mu e^{-\mu x}}{2} (\mu x)^2,$$

где значение  $\mu$  выбирается таким образом, чтобы средняя величина объемов потребления  $b = 1$ , то есть при  $\mu=3$ .

Для заданных значений параметров  $\lambda_1 = 0,8$  и  $\lambda_2 = 1,2$  найдены положительные корни уравнений (13) и (17)

$$\gamma = 0,291; \quad z_1 = 0,311; \quad z_2 = 3,944 - 1,336i; \quad z_3 = 3,944 + 1,336i.$$

Таким образом, уравнение (13) имеет единственное положительное решение  $\gamma$ , а уравнение (16) имеет один ( $z_1$ ) действительный и два ( $z_2$  и  $z_3$ ) комплексно сопряженных корня с положительными действительными частями.

Найдем плотность распределения вероятностей значений объема запасов при заданных параметрах и  $S = 10$ .

Параметры  $x_v, v = 1,3$  распределения (18), являющиеся компонентами вектора  $C$  – решения системы (19) линейных алгебраических уравнений, имеют вид

$$x_1 = 1,077; \quad x_2 = -0,038 + 0,028i; \quad x_3 = -0,038 - 0,028i,$$

а нормирующая константа  $C = 0.146$ , тогда имеет место график, представленный на рис. 2.

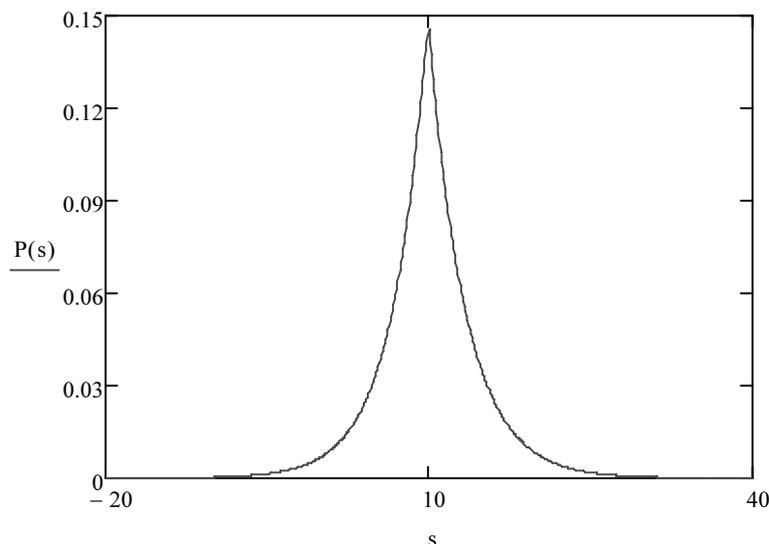


Рис. 2. Плотность распределения вероятностей значений процесса  $P(s)$

Следует отметить, что плотность распределения вероятностей  $P(s)$  значений процесса  $s(t)$  является непрерывной для всех значений  $s \neq S$ , что естественно, но также и в точке  $s = S$ , что не является очевидным.

## Заключение

В данной работе построена математическая модель системы управления запасами. Получено аналитическое выражение для стационарной плотности распределения значений объема запасов при распределении Эрланга объемов потребления и релейном управлении объемом запасов. Предложенный подход может быть применен к аналогичным задачам при различных распределениях объемов расходования ресурсов.

*Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации № 1.511.2014/К.*

## Литература

1. Вальц О. В., Змеев О. А. Математическая модель деятельности фонда социального страхования при экспоненциальных страховых выплатах и со случайными расходами на социальные программы // Вестник Том. гос. ун-та. – 2004. – № 284. – С. 37–41.

2. Китаева А. В., Терпугов А. Ф. Модель фонда социального страхования при релейном управлении капиталом и экспоненциально распределенных страховых выплатах и выплатах по социальным программам // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 293. – С. 35–37.

DOI: 10.17223/9785751124335/12

## ДВУХСЕКТОРНАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИКИ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТА В ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ СЕКТОРА

*К. О. Полуэктова, Т. И. Грекова*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

## Введение

В работе предлагается решение задачи оптимального распределения ресурсов для двухсекторной модели экономики с целью максимизации благосостояния населения с учетом распределения государственного бюджета в производственные сектора. Рассматривается модель, в которой экономика представлена двумя секторами: сектором производства средств производства и сектором производства потребительских благ. Предполагается, что каждый из секторов облагается налогом, который уплачивается в конце каждого производственного цикла. Общая сумма налогов, уплачиваемая обоими секторами, составляет государственный бюджет.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления на конечном интервале времени  $[0, T]$ . Предполагается, что общий выпуск продукта  $Y(t)$  и выпуск продукта каждым из секторов  $Y_i(t), i=1, 2$  в момент времени  $t$  определяются в соответствии со следующими выражениями:

$$Y_i(t) = F(K_i, L_i), i=1, 2, Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t), \quad (1.1)$$

где  $K_i(t)$  – основные фонды  $i$  – го сектора,  $L_i(t)$  – трудовые ресурсы  $i$  – го сектора,  $i = 1, 2$ .

Выпуск продукта первого сектора  $Y_1(t)$  распределяется между первым и вторым секторами в соответствии с нормой распределения основных фондов  $s$  в соответствии с выражением

$$Y_1(t) = sY_1(t) + (1-s)Y_1(t) = sF_1(K_1(t), L_1(t)) + (1-s)F_1(K_1(t), L_1(t)). \quad (1.2)$$

Выпуск продукта второго сектора  $Y_2(t)$  полностью направляется на непроизводственное потребление  $C(t)$ :

$$C(t) = Y_2(t) = F_2(K_2(t), L_2(t)). \quad (1.3)$$

Предполагается, что государственный бюджет формируется путем сбора налогов. Размер налога определяется в соответствии с одинаковой для обоих секторов налоговой ставкой  $\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ . Величина налога для первого и второго секторов и общая сумма, направляемая в виде налогов в государственный бюджет, определяются выражениями

$$G_i(t) = \tau \cdot Y_i(t), i = 1, 2, \quad G(t) = G_1(t) + G_2(t). \quad (1.4)$$

Таким образом, после вычета налога для дальнейшего распределения в первом секторе остается величина  $Y_1^1(t) = (1-\tau) \cdot Y_1(t)$ , во втором секторе на непроизводственное потребление направляется величина  $Y_2^1(t) = (1-\tau) \cdot Y_2(t)$ .

Средства, поступившие в виде налогов в государственный бюджет  $G(t)$ , распределяются в сектора в соответствии с нормой распределения государственного бюджета  $m_1$ . Таким образом, величина  $m_1 \cdot G(t)$  направляется в первый сектор, величина  $(1-m_1) \cdot G(t) = m_2 \cdot G(t)$  – во второй сектор.

Предполагается, что трудовые ресурсы  $L(t)$  изменяются в соответствии с экспоненциальным законом и распределяются между секторами в соответствии с нормой распределения трудовых ресурсов  $q$ :

$$L(t) = L_0 \cdot e^{\lambda t}, \quad L(t) = L_1(t) + L_2(t) = q \cdot L_0 \cdot e^{\lambda t} + (1-q) \cdot L_0 \cdot e^{\lambda t}. \quad (1.5)$$

Задача решается в удельных переменных:

$$k_i(t) = \frac{K_i(t)}{L_i(t)}, i = 1, 2, \quad c(t) = \frac{(1-\tau) \cdot F_2(K_2(t), L_2(t))}{L_2(t)} \cdot (1-q) = (1-q) \cdot f_2^1(k_2),$$

$$y_i(t) = \frac{Y_i(t)}{L_i(t)} = F_i\left(\frac{K_i(t)}{L_i(t)}, 1\right) = f_i\left(\frac{K_i(t)}{L_i(t)}\right) = f_i(k_i(t)), i = 1, 2,$$

$$y_i^1(t) = \frac{(1-\tau) \cdot Y_i(t)}{L_i(t)} = (1-\tau) F_i\left(\frac{K_i(t)}{L_i(t)}, 1\right) = f_i^1\left(\frac{K_i(t)}{L_i(t)}\right) = f_i^1(k_i(t)), i = 1, 2,$$

$$g_i(t) = \frac{m_i \cdot G(t)}{L_i(t)}, i = 1, 2.$$

Изменение во времени фондовооруженности каждого сектора можно описать дифференциальными уравнениями

$$\dot{k}_1(t) = s \cdot f_1^1(k_1) - \nu \cdot k_1 + g_1(t), \quad (1.6)$$

$$\dot{k}_2(t) = \frac{q \cdot (1-s)}{(1-q)} \cdot f_1^1(k_1(t)) - \nu \cdot k_2(t) + g_2(t), \quad (1.7)$$

где  $\nu = \mu + \lambda, \nu > 0$ ,  $\mu$  – одинаковая для обоих секторов норма амортизации основных фондов,  $\lambda$  – темп увеличения объёма трудовых ресурсов с граничными условиями

$$k_1(0) = k_1^0, k_2(0) = k_2^0, k_1(T) = k_1^T, k_2(T) = k_2^T, \quad (1.8)$$

$k_1^T \geq 0, k_2^T \geq 0$  – условие «экономического горизонта».

Общее благосостояние населения определяется функционалом

$$J = \int_0^T c(t) \cdot e^{-\delta \cdot t} dt = \int_0^T (1-q(t)) \cdot f_2^1(k_2(t)) \cdot e^{-\delta \cdot t} dt, \quad (1.9)$$

где  $\delta > 0$  – норма дисконтирования.

Таким образом, задача принимает следующий вид: требуется найти такие значения нормы распределения основных фондов  $0 < s(t) < 1$  и нормы распределения трудовых ресурсов  $0 < q(t) < 1$ , которые при ограничениях (1.6)–(1.7) доставляли бы максимум функционалу (1.9).

## 2. Применение принципа максимума Понтрягина

Задача решается на стационарных траекториях с применением принципа максимума Понтрягина.

Для управляющего параметра  $s(t)$ , который определяет распределение основных фондов между первым и вторым секторами, справедливо следующее:

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } (1-q) \cdot p_1(t) > p_2(t) \cdot q, \\ 0, & \text{если } (1-q) \cdot p_1(t) < p_2(t) \cdot q, \\ 0 < s(t) < 1, & \text{если } (1-q) \cdot p_1(t) = p_2(t) \cdot q. \end{cases} \quad (2.1)$$

Необходимым условием существования стационарного решения является условие  $\left\{ \dot{k}_1(t) = 0, \dot{k}_2(t) = 0, \dot{p}_1(t) = 0, \dot{p}_2(t) = 0 \right\}$ , т. е.

$$s \cdot f_1^1(k_1) - \nu \cdot k_1 + g_1(t) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{q \cdot (1-s)}{(1-q)} \cdot f_1^1(k_1(t)) - \nu \cdot k_2(t) + g_2(t) = 0, \quad (2.3)$$

$$-f_1^{1'} \left[ s p_1 + \frac{(1-s)q}{(1-q)} p_2 \right] + (\nu + \delta) p_1 - f_1' \left[ p_1 m_1 \tau + p_2 \frac{m_2 q \tau}{(1-q)} \right] = 0, \quad (2.4)$$

$$-(1-q) f_2^{1'} + (\nu + \delta) p_2 - f_2' \left[ p_1 \frac{m_1 (1-q) \tau}{q} + p_2 m_2 \tau \right] = 0. \quad (2.5)$$

где  $p_1(t) \geq 0, p_2(t) \geq 0$  – сопряженные переменные.

### 3. Решение задачи для случая $m_1 = 0, m_2 = 1$

Предположим, что государственный бюджет распределяется только во второй сектор. В этом случае норма распределения государственного бюджета  $m_1 = 0, m_2 = (1 - m_1) = 1$ , уравнения (2.2), (2.4) и (2.5) принимают вид

$$s \cdot f_1^1(k_1) - v \cdot k_1 = 0, \quad (3.1)$$

$$-f_1^{1'} \left[ sp_1 + \frac{(1-s)q}{(1-q)} p_2 \right] + (v + \delta) p_1 - f_1' p_2 \frac{m_2 q \tau}{(1-q)} = 0, \quad (3.2)$$

$$-(1-q)f_2^{1'} + (v + \delta) p_2 - f_2' p_2 m_2 \tau = 0. \quad (3.3)$$

Из уравнений (3.2), (3.3) получаем оптимальные значения фондовооруженностей  $k_1^*, k_2^*$ , из (3.1) и (2.3) получаем оптимальные норму распределения основных фондов  $s^*$  и норму распределения трудовых ресурсов  $q^*$ .

### 4. Решение задачи для случая $m_1 = 1, m_2 = 0$

Рассмотрим ситуацию, когда государственный бюджет направляется в первый производственный сектор, т.е. норма распределения государственного бюджета  $m_1 = 1, m_2 = (1 - m_1) = 0$ . В этом случае уравнения (2.3)–(2.5) принимают вид

$$\frac{q \cdot (1-s)}{(1-q)} \cdot f_1^1(k_1(t)) - v \cdot k_2(t) = 0, \quad (4.1)$$

$$-f_1^{1'} \left[ sp_1 + \frac{(1-s)q}{(1-q)} p_2 \right] + (v + \delta) p_1 - f_1' p_1 m_1 \tau = 0, \quad (4.2)$$

$$-(1-q)f_2^{1'} + (v + \delta) p_2 - f_2' p_1 \frac{m_1(1-q)\tau}{q} = 0. \quad (4.3)$$

Из уравнений (4.2), (4.3) получаем значения фондовооруженностей  $k_1^*, k_2^*$ , из уравнений (2.2) и (4.1) – оптимальные значения  $s^*$  и  $q^*$ .

### 5. Решение задачи для производственной функции Кобба–Дугласа

Рассмотрим полученное решение для производственной функции Кобба–Дугласа. Уравнения (2.2), (2.3) для  $f_i(k_i) = A \cdot k_i^{\alpha_i}, i = 1, 2$  принимают следующий вид:

$$s(Ak_1^{\alpha_1})^1 - vk_1 + m_1 \tau A \left( k_1^{\alpha_1} + \frac{(1-q)}{q} k_2^{\alpha_2} \right) = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{q(1-s)}{(1-q)} (Ak_1^{\alpha_1})^1 - vk_2 + m_2 \tau A \left( k_2^{\alpha_2} + \frac{q}{(1-q)} k_1^{\alpha_1} \right) = 0. \quad (5.2)$$

Из (5.1), (5.2) получим выражения для определения оптимальных значений нормы распределения основных фондов и нормы распределения трудовых ресурсов:

$$s^* = \frac{vk_1^* - m_1 \tau A \left( k_1^{*\alpha_1} + \frac{(1-q)}{q} k_2^{*\alpha_2} \right)}{(Ak_1^{*\alpha_1})^1}, \quad (5.3)$$

$$q^* = \frac{vk_2^* + m_2 \tau Ak_2^{*\alpha_2}}{(1-s^*)(Ak_1^{*\alpha_1})^1 + vk_2^* - m_2 \tau A (k_2^{*\alpha_2} + k_1^{*\alpha_1})}. \quad (5.4)$$

Проанализируем величину непроизводственного потребления на магистрали в зависимости от нормы распределения государственного бюджета. В табл. 1 приведен результат моделирования для производственной функции Кобба–Дугласа случая, когда государственный бюджет распределяется во второй производственный сектор.

*Таблица 1. Зависимость величины непроизводственного потребления от нормы распределения государственного бюджета для случая  $m_1 = 0, m_2 = 1$*

$\tau$	0,05	0,09	0,13	0,17	0,21
$J$	187,4	192,9	197,1	200,2	202,8

Из приведенных в табл. 1 данных видно, что чем выше налоговая ставка, тем больше величина непроизводственного потребления. Это объясняется тем, что государственный бюджет распределяется во второй сектор, весь продукт которого направляется на непроизводственное потребление. В то же время прирост величины непроизводственного потребления с увеличением налоговой ставки уменьшается, так как во второй сектор направляется доля  $(1-s)$  основных средств первого сектора, которая зависит от величины налога: чем выше налог, тем меньше остается основных средств для распределения в сектора и дальнейшего производства.

В табл. 2 приведен результат моделирования для случая, когда государственный бюджет распределяется во второй сектор.

*Таблица 2. Зависимость величины непроизводственного потребления от нормы распределения государственного бюджета для случая  $m_1 = 1, m_2 = 0$*

$\tau$	0,15	0,17	0,21	0,23	0,25
$J$	37,77	60,36	79,53	84,07	84,6

Из приведенных в табл. 2 данных видно, что с увеличением налоговой ставки происходит увеличение величины непроизводственного потребления. Это объясняется тем, что государственный бюджет распределяется в первый сектор, увеличивая его производственные мощности. Основные средства первого сектора распределяются между первым и вторым: чем больше основных средств произведено в первом секторе, тем больше средств распределится во второй сектор. В то же время с увеличением налоговой ставки прирост величины непроизводственного потребления уменьшается, так как все большая часть продукта второго сектора направляется в государственный бюджет, что значительно сокращает величину непроизводственного потребления.

## Заключение

В данной работе получено решение задачи оптимального распределения ресурсов для двухсекторной модели экономики с учетом распределения государственного бюджета в производственный сектор. Проанализирована зависимость величины непроизводственного потребления от нормы распределения государственного бюджета для производственной функции Кобба–Дугласа.

### Литература

1. Гайнутдинова Г. М. Оптимальное управление налоговыми отчислениями / Г. М. Гайнутдинова, Т. И. Грекова // Вестник Том. гос. ун-та. – 2008. – № 1 (2). – С. 5–12.
2. Грекова Т. И. Оптимальное распределение ресурсов для двухсекторной модели экономического роста / Т. И. Грекова, К. О. Полуэктова // Известия вузов. Физика. – 2015. – Т. 58, №11/2. – С. 14–19.

DOI: 10.17223/9785751124335/13

## ЛИКВИДНОСТЬ КАК ФАКТОР УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ

*С. А. Поттосина, И. Л. Сергеева*

*Белорусский государственный университет информатики и  
радиоэлектроники, Минск, Беларусь*

Главной целью формирования инвестиционного портфеля является подбор наиболее доходных и безопасных объектов инвестирования. Сформировав портфель ценных бумаг, инвестор не должен бездействовать и ждать, когда портфель принесет ему доходность в виде дивидендов. Портфелем необходимо управлять, т.е. время от времени перестраивать его, продавая какие-то ценные бумаги и покупая вместо них другие. Тогда под управлением портфелем понимается применение к совокупности различных видов ценных бумаг определенных методов и технологических возможностей, которые позволяют:

- сохранить первоначально инвестированные средства;
- достигнуть максимального уровня инвестиционного дохода;
- обеспечить инвестиционную направленность портфеля.

Таким образом, главными задачами управления портфелем ценных бумаг как одного из основных этапов инвестиционного процесса выступают соответствие целям и интересам инвестора, следование его характеру и выбранной стратегии, которые определяют тип фондового портфеля и приемлемое для инвестора оптимальное соотношение риска и доходности. Сохранение первоначально выбранного инвестиционного качества портфеля, его свойства быть эффективным для своего владельца требует регулярного мониторинга и контроля инвестиционного процесса, что заставляет от инвестора пересматривать структуру и состав портфеля. На основе периодичности пересмотра портфеля, его перспективы и установок инвестора относительно эффективности функционирования рынка методы

управления портфелем могут быть классифицированы на пассивный, активный и сбалансированный – синтетическое объединение первых двух методов.

При пассивном управлении инвестор достаточно редко проводит пересмотр портфеля, считая его хорошо диверсифицированным, а рынок – эффективным, а потому и не требующим затрат на мониторинг и частого внесения изменений. Изменение состава и структуры портфеля, если оно и проводится, незначительно, а стратегия инвестора основана на использовании низкорискованных, но и мало доходных ценных бумагах.

Активный метод требует постоянное отслеживание состояния рынка и регулярного пересмотра структуры, что подразумевает приобретение ценных бумаг, характеристики которых наиболее соответствуют целям инвестора, и избавление от неэффективных активов.

Важным фактором актива, применяемым для активного управления, является его ликвидность. Под ликвидностью понимают свойство актива к превращению в денежные ресурсы за максимально короткий срок при минимальной потере стоимости. Оптимальная для инвестора и задаваемая им величина ликвидности портфеля определяется уровнем ликвидности входящих в него ценных бумаг, процесс расчета которой можно формализовать и применить для нее математическую модель.

Доля высоко- и низколиквидных активов задается предпочтениями инвестора в зависимости от его характера, отношения к риску, целей инвестирования. Однако в портфеле в обязательном порядке должны присутствовать быстро реализуемые ценные бумаги, которые могут быть направлены на текущие расходы инвестора без риска оказания негативного влияния на весь сформированный портфель. Они также могут выступать в качестве резерва для непредвиденных исключительных ситуаций, требующих денежных средств, или для возможности осуществления быстрого реформирования портфеля, пользуясь благоприятным моментом на рынке. Также ликвидность служит одним из методов возмещения затрат, связанных с появляющимся при агрессивном управлении инвестиционным портфелем высоким риском, и обеспечивает возможность оперативно покрывать убытки.

При определении численных характеристик ликвидности ценных бумаг для обеспечения адекватности расчетов необходимо соблюдать принципы комплексности и индивидуализации. Под комплексностью подразумевается совместный учет не только размера потерь инвестора, связанных с продажей актива на определенный момент, но и длительность периода времени, в течение которого ценная бумага будет считаться ликвидной, а также риска того, что к какому-то моменту она окажется неликвидной. Принцип индивидуализации должен учитывать задачи и условия инвестирования, не только определяемые внешними обстоятельствами, но и задаваемые субъективно.

Методика пересмотра и реформирования портфеля, т.е. управление созданным инвестиционным портфелем, основанная на мониторинге и контроле ликвидности портфеля и входящих в него ценных бумаг, использует модель Чавкина, описание которой представлено ниже. А. М. Чавкин разработал модель  $M_1$ , расчетные значения которой могут быть применены для определения ликвидности ценной бумаги для эффективного управления портфелем. Данная методика представляет собой совокупность следующих этапов:

1. Расчет эффективности сформированного портфеля в определенные моменты времени. Для определения эффективности управления сформированным портфелем необходимо, во-первых, знать на определенный промежуток времени значения его доходности (или же доходности и иного показателя, выбранного за главный критерий пересмотра, удовлетворяющего активной стратегии управления); во-вторых, рассчитывать значение безрисковой ставки (которая служит сравнительной характеристикой на данном этапе и применяется в качестве нижней пороговой величины для определения рациональности вложения средств в ценные бумаги).

2. При условии падения доходности (эффективности) портфеля бумаги с наибольшим риском разорения и бумаги, которые потеряли свою ликвидность или потеряют ее в ближайшее время, должны быть исключены.

3. Строится и рассчитывается новый портфель с учетом ценных бумаг, которые инвестор не собирается исключать из портфеля (сохраняющие свою эффективность/ликвидность).

4. Происходит сравнение/ревизия вновь сформированного и старого портфеля на основе показателей его доходности и ликвидности, а также ликвидности входящих в него ценных бумаг.

Рассмотрим алгоритм, приводимый А. М. Чавкиным, применяемый для формирования и управления инвестиционным портфелем.

По каждому виду ценных бумаг – долевым бумагам, долговым обязательствам, производным бумагам – независимо от их назначения считаются известными параметры  $C_j^H(t)$  и  $C_j^K(t)$  – стоимость  $j$ -й ( $j = \overline{1, n}$ ) ценной бумаги на фондовом рынке соответственно в начале и в конце периода времени  $t$  ( $t = \overline{1, N}$ ) и  $d_j(t)$  – общая сумма дивидендов, получаемых от  $j$ -й бумаги в период времени  $t$ . Конкретные значения по всем указанным исходным параметрам публикуются в соответствующих изданиях по фондовому рынку.

В качестве основного показателя для каждой ценной бумаги  $j$ -го вида используется ее эффективность в период времени  $t$ :

$$\psi_j(t) = \frac{C_j^H(t) - C_j^K(t)}{C_j^H(t)}.$$

Периоды времени  $(t, t + \tau)$ ,  $t = \overline{1, N}$ ,  $\tau > 0$ , в которых определяются значения параметров  $C_j^H(t)$  и  $C_j^K(t)$ , составляют непрерывную

последовательность попарно непересекающихся, в общем случае равных по величине интервалов времени.

Для удобства обозначим  $\psi_j(t)$  через  $\psi_j^{(t)}$ , где  $j = \overline{1, n}$ ,  $t = \overline{1, N}$ .

Величина  $N$  берется такой, чтобы последовательности показателей  $\psi_j^{(t)}$  были репрезентативными для всех  $n$  видов ценных бумаг, циркулирующих на фондовом рынке.

Алгоритм модели  $M_I$  заключается в определении для каждой ценной бумаги  $j$ -го вида средней продолжительности  $u_j^{(t)}$  ( $j = \overline{1, n}$ ) сохранения ею своей доходности в перспективе, начиная с текущего момента времени  $t$ :

$$u_j^{(t)} = \frac{\psi_j^{(t)}}{(\psi_j^{(t)})'} \frac{1 - P_j}{P_j}. \quad (1)$$

Из формулы (1) следует:

1) если  $P_j^{(t)} = 0$ , то  $u_j^{(t)} = \infty$ , а если  $P_j^{(t)} = 1$ , то  $u_j^{(t)} = 0$ ;  
 2) если  $0 < P_j^{(t)} < 1$ ,  $\psi_j^{(t)} > 0$  и  $(\psi_j^{(t)})' < 0$ , то это означает, что ценная бумага  $j$ -го вида уже потеряла свою ликвидность за  $u_j^{(t)}$  единиц времени до текущего момента времени  $t$ ;

3) если  $\psi_j^{(t)} > 0$  и  $(\psi_j^{(t)})' < 0$ , то это означает, что ценная бумага  $j$ -го вида потеряет свою ликвидность через  $u_j^{(t)}$  единиц времени, начиная с текущего момента времени  $t$ ;

4) если  $0 < P_j^{(t)} < 1$ ,  $\psi_j^{(t)} < 0$  и  $(\psi_j^{(t)})' > 0$ , то это означает, что значение эффективности ценной бумаги  $j$ -го вида, начиная с момента времени  $t$ , будет возрастать в течение времени  $u_j^{(t)}$  со скоростью  $(\psi_j^{(t)})'$ ;

5) если  $0 < P_j^{(t)} < 1$ ,  $\psi_j^{(t)} < 0$  и  $(\psi_j^{(t)})' > 0$ , то в этом случае ценная бумага  $j$ -го вида сохраняет свою ликвидность в течение времени  $u_j^{(t)}$ .

Позиция пять для ценной бумаги  $j$ -го вида наиболее благоприятна для включения в сформированный инвестиционный портфель, так как только в ней она сохраняет свою ликвидность в интервале времени, равном или даже большем  $(t, t + u_j^{(t)})$ . Ввиду этого можно принимать решения о пересмотре инвестиционного портфеля, избавляясь от ненужных ценных бумаг и приобретая подходящие активы для обеспечения целей инвестирования, сохранения первоначальных средств, а также поддержания уровня доходности портфеля при изменении условий рынка.

Предположим, что для каждого вида ценных бумаг известно нижнее допустимое значение  $\hat{u}_j^{(t)}$  показателя  $u_j^{(t)}$  ( $j = \overline{1, m}$ ). Алгоритм модели  $M_I$  включает также операции по определению оптимальных значений показателей  $(\psi_j^{(t)})'$  при условии, что  $\hat{u}_j^{(t)} \leq u_j^{(t)}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , и при этом суммарная стоимость всех ценных бумаг, входящих в формируемый портфель, является

минимальной. Решение изложенной задачи выполняется с использованием метода множителей Лагранжа.

Предполагается, что средняя стоимость ценных бумаг каждого вида изменяется прямо пропорционально скорости изменения ее эффективности,

т.е.  $\bar{C}_j = h_j \bar{\Psi}_j'$ ,  $j = \overline{1, m}$ , где  $\bar{C}_j = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N C_j^{(t)}$  и  $\bar{\Psi}_j = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\Psi_j^{(t)})'$ .

Определяется значение коэффициента  $h_j = \frac{\bar{C}_j}{\bar{\Psi}_j'}$ .

Строится целевая функция Лагранжа:

$$Z = \sum_{j=1}^m h_j (\Psi_j^{(t)})' + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left( \frac{\Psi_j^{(t)}}{(\Psi_j^{(t)})'} \frac{1 - P_j^{(t)}}{P_j^{(t)}} - \hat{u}_j \right).$$

Находятся частные производные от функции  $Z$  по переменным  $(\Psi_j^{(t)})'$

и  $\lambda_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ :

$$\frac{\partial Z}{\partial (\Psi_j^{(t)})'} = h_j - \lambda_j \frac{\Psi_j^{(t)}}{((\Psi_j^{(t)})')^2} \frac{1 - P_j^{(t)}}{P_j^{(t)}}, \quad j = \overline{1, m},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda_j} = \frac{\Psi_j^{(t)}}{(\Psi_j^{(t)})'} \frac{1 - P_j^{(t)}}{P_j^{(t)}} - \hat{u}_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

Приняв частные производные от целевой функции  $Z$  по переменным  $(\Psi_j^{(t)})'$  и  $\lambda_j$ , ( $j = \overline{1, m}$ ) нулю, получают систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} h_j ((\Psi_j^{(t)})')^2 - \lambda_j \Psi_j^{(t)} \left( \frac{1 - P_j^{(t)}}{P_j^{(t)}} \right) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \\ \hat{u}_j (\Psi_j^{(t)})' - \lambda_j \Psi_j^{(t)} \left( \frac{1 - P_j^{(t)}}{P_j^{(t)}} \right) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (2)$$

Решая данную систему уравнений относительно переменных  $\Psi_j^{(t)}$ , получают их оптимальные значения при условии, что  $u_j^{(t)} \geq \hat{u}_j^{(t)}$  показателя  $u_j^{(t)}$  и суммарная стоимость всех  $m$  видов ценных бумаг из формируемого портфеля является минимальной.

Таким образом, модель  $M_I$  отвечает основным принципам комплексности и индивидуализации, обеспечивает адекватность расчетов и может быть успешно использована для оперативного управления портфелем ценных бумаг.

#### Литература

1. Брейли Р., Майерс С. Принципы корпоративных финансов. – М.: Олимп-Бизнес, 2008. – 1012 с.
2. Аксенов В. С., Зубов Я. О. Формирование и управление инвестиционным портфелем в условиях финансового кризиса // Финансы и кредит. – 2010. – № 7. – С. 22–28.

3. Чайкун А. Н. Оценка ликвидности облигаций методами многомерного статистического анализа // Вестник университета (Государственный университет управления). – 2009. – № 16. – С. 248–249.

4. Халиков М. А., Максимов Д. А. Особенности моделей управления инвестиционным портфелем неинституционального инвестора – агента российского фондового рынка // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 2. – С. 3136–3145.

5. Кох И. А. Теория и методология портфельного инвестирования на российском рынке ценных бумаг [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.dissercat.com/content/teoriya-i-metodologiya-portfel'nogo-investirovaniya-na-ros-siiskom-rynke-tsennykh-bumag> (дата обращения: 01.12.2015).

6. Чавкин А. М. Методы и модели рационального управления в рыночной экономике: разработка управленческих решений: учебн. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 320 с.

DOI: 10.17223/9785751124335/14

## УПРАВЛЕНИЕ ПОСТАВКАМИ С ПРОГНОЗИРОВАНИЕМ

*Г. Н. Решетникова, Т. Е. Малахова*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Переживаемый в настоящее время этап информатизации характеризуется расширением внедрения информационно-вычислительных систем, созданием и развитием методов автоматического управления в технике, экономике, медицине, биологии и других видах деятельности. При этом все чаще применяются следящие системы автоматического управления для совмещенного синтеза, как самые приемлемые для реализации на управляющих компьютерах. Наиболее перспективными методами, позволяющими решать задачи совмещенного синтеза, являются методы, основанные на оптимизации квадратичных функционалов.

В настоящей работе рассматривается задача управления поставками товара для торговой компании. При этом учитывается, что необоснованное увеличение объемов поставок может привести к затовариванию складов и порче товара, а рассогласование объемов поставок и реализации товаров может привести к существенным убыткам.

Пусть  $u(t)$  – объем поставляемого товара в ценах поставщика в единицу времени,  $v(t)$  – управление, задающее изменение объема поставок. Математическую модель для управления поставками зададим в виде системы обыкновенных дифференциальных стохастических уравнений вида [1, 2]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}(t)x(t) + \bar{B}(t)u(t) + \bar{F}(t)q(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ \dot{u}(t) &= v(t), \quad u(t_0) = u_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x(t) = (z(t), v(t), w(t))^T$  – вектор состояния, который характеризует объем товара на складе, у потребителя и прибыль;  $\bar{A}(t), \bar{B}(t)$  – матрицы динамических свойств и влияния управляющих воздействий, которые имеют вид

$$\bar{A}(t) = \begin{pmatrix} -k_4\varphi_s(t) - k_1 & k_4\varphi_z(t) & 0 \\ k_4\varphi_s(t) & -k_4\varphi_z(t) - k_2 & 0 \\ k_4\varphi_s(t) - k_5 & -k_4\varphi_z(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}(t) = \begin{pmatrix} k_3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Вектор  $\mathbf{q}(t)$  описывает действие случайных факторов, которые будем задавать гауссовскими случайными величинами с характеристиками

$$M\{\mathbf{q}(t)\} = \bar{\mathbf{q}}(t), \quad M\{(\mathbf{q}(t) - \bar{\mathbf{q}}(t))(\mathbf{q}(\tau) - \bar{\mathbf{q}}(\tau))^T\} = \mathbf{Q}(t)\delta(t - \tau)$$

и матрицей влияния  $\bar{F}(t)$ .

Коэффициенты  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  характеризуют порчу товара при хранении на складе, скорость потребления, торговую наценку, темп продаж, плату за хранение. Функции  $\varphi_s(t), \varphi_z(t)$  описывают расчетные значения текущего спроса и объема товара на складе.

Для формирования объема поставок используется дискретная модель, которая представляется в виде

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)u(k) + \mathbf{F}(k)\mathbf{q}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3)$$

$$u(k+1) = u(k) + \Delta t v(k), \quad u(0) = u_0,$$

где  $\mathbf{A}(k) = \mathbf{I}_3 + \Delta t \bar{A}(t_k)$ ,  $\mathbf{B}(k) = \Delta t \bar{B}(t_k)$ ,  $\mathbf{F}(k) = \sqrt{\Delta t} \bar{F}(t_k)$ ,  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$  – шаг дискретизации,  $\mathbf{I}_3$  – единичная матрица третьего порядка,  $\mathbf{q}(k)$  – последовательность гауссовских случайных величин с характеристиками

$$M\{\mathbf{q}(k)\} = \bar{\mathbf{q}}(k), \quad M\{(\mathbf{q}(k) - \bar{\mathbf{q}}(k))(\mathbf{q}(j) - \bar{\mathbf{q}}(j))^T\} = \mathbf{Q}(k)\delta_{kj},$$

$k$  соответствует моменту времени  $t_k = t_0 + k\Delta t$ ,  $k = \overline{0, N}$ .

Синтез управляющих воздействий в реальных условиях осуществляется с использованием информации, которая достаточно часто бывает неполной и имеет ошибки. Будем считать, что математическая модель информационной системы имеет вид

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + \mathbf{r}(k), \quad (4)$$

где  $\mathbf{H}$  – матрица, определяющая наличие информации о состоянии модели (1),  $\mathbf{r}(k)$  – вектор, описывающий погрешности информационной системы, которые задаются последовательностью гауссовских случайных величин с характеристиками

$$M\{\mathbf{r}(k)\} = 0, \quad M\{\mathbf{r}(k)\mathbf{r}^T(j)\} = \mathbf{R}\delta_{kj}, \quad M\{\mathbf{q}(k)\mathbf{r}^T(j)\} = 0.$$

Так как объем поставок чаще всего формируется при неполной информации о векторе состояния, то возникает необходимость в построении оценок  $\hat{\mathbf{x}}(k) = (\hat{z}(k), \hat{v}(k), \hat{w}(k))^T$ . При этом предполагается, что априорное распределение вектора  $\mathbf{x}_0$  является гауссовским:

$$M\{\mathbf{x}_0\} = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad M\{(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^T\} = \mathbf{P}_x,$$

где  $\mathbf{P}_x$  – ковариационная матрица ошибок начальных условий вектора состояния. Для построения оценок используются соотношения (3).

Формирование объема поставок в момент  $t_k$  будем осуществлять при слежении за состоянием склада на основе минимизации квадратичного функционала [4]

$$J^{(S)}(t_k) = \frac{1}{2} M \left\{ \int_{t_k}^{t_k + l_p \Delta t} [(x^{(S)}(t) - z_z(t))^T C_S (x^{(S)}(t) - z_z(t)) + u^T(t) D_2 u(t) + v^T(t) D_1 v(t) + v_{\bar{u}}^T(t) D_1 v_{\bar{u}}(t)] dt \right\}, \quad (5)$$

где  $S = (1; 0; 0)$ ,  $x^{(S)}(t) = Sx(t)$ ,  $C_S, D_1, D_2$  – положительные весовые коэффициенты,  $z_z(t)$  – желаемое состояние склада, за которым осуществляется слежение,  $v_{on}(t)$  – оптимальное управление,  $l_p \Delta t$  – время поставки товара.

Объем товара на складе на скользящем интервале оптимизации  $[t_k, t_k + l_p \Delta t]$  будем описывать прогнозирующей моделью

$$\begin{aligned} x_M^{(S)}(j+1) &= A_S(k) x_M^{(S)}(j) + B_S(k) u(k) + F_S(k) \bar{q}(k), \\ x_M^{(S)}(j=k) &= S \hat{x}(k), \end{aligned} \quad (6)$$

где « $M$ » указывает на принадлежность прогнозирующей модели,

$$A_S(k) = SA(k)S^T, \quad B_S(k) = SB(k), \quad F_S(k) = SF(k).$$

Изменение объема поставок, которое задается при оптимизации функционала (5) и при использовании прогнозирующей модели (6), находится следующим образом:

$$v_{on}(k) = v(k) = -D_1^{-1} W_2^{(S)}(k), \quad u(k+1) = u(k) + \Delta t v(k), \quad (7)$$

где  $W_2^{(S)}(k)$  определяется из решения в обратном времени системы разностных уравнений:

$$\begin{aligned} g_M^{(S)}(j-1) &= 2g_M^{(S)}(j) - A_S(k)g_M^{(S)}(j) - B_S(k)u(k) - F_S(k)\bar{q}(k), \\ g_M^{(S)}(k+l_p) &= x_M^{(S)}(k+l_p), \\ W_1^{(S)}(j-1) &= A_S^T(k)W_1^{(S)}(j) + \Delta t C_S (g_M^{(S)}(j) - z_z(t_k)), \\ W_1^{(S)}(k+l_p) &= 0, \\ W_2^{(S)}(j-1) &= W_2^{(S)}(j) + B_S^T(k)W_1^{(S)}(j) + \Delta t D_2 u(k), \\ W_2^{(S)}(k+l_p) &= 0, \\ j &= k+l_p, k+l_p-1, \dots, k+1. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как поставки осуществляются с целью сохранения желаемого объема товара на складе, то возникает необходимость в уточнении значения  $u(k)$ , полученного при использовании соотношений (6)–(8). При этом требуется избегать как излишков, так и дефицита товара на складе, что приводит к убыткам. Для учета этих требований используются условия, приведенные в [5, 6].

Будем предполагать, что товар поставляется только целыми упаковками, время поставки постоянное, равное  $l_p \Delta t$ , и плата за товар осуществляется по факту, т.е. в момент получения.

Расчетный темп продаж и оценку объема товара на складе без новой поставки определим следующим образом:

$$p(k) = k_4 \varphi_s(k) z_z(k), \quad (9)$$

$$\hat{\delta}(k) = \hat{z}(k) - l_p p(k). \quad (10)$$

Вычислим расчетное число дней и оценку числа дней работы на товарных остатках:

$$\alpha(k) = \left[ \frac{z_z(k)}{p(k)} \right], \quad \hat{\beta}(k) = \left[ \frac{\hat{z}(k)}{p(k)} \right]. \quad (11)$$

Тогда предварительный объем поставки формируется следующим образом:

$$u^{(1)}(k) = \begin{cases} 0, & \alpha(k) < \hat{\beta}(k), \\ u(k), & \alpha(k) \geq \hat{\beta}(k). \end{cases} \quad (12)$$

Если  $u^{(1)}(k) \neq 0$ , то осуществляется дальнейшее уточнение объема поставки.

Пусть  $z_{\max}(k), z_{\min}(k)$  – значения, задающие максимальный и минимальный объем товара, который может храниться на складе. Эти значения определяет предприниматель, исходя из площади складского помещения, которое отводится для хранения конкретного товара, например, объема холодильников, наличия денежных средств и ситуации на рынке. Объем поставки уточняется при использовании двух неравенств:

$$u^{(2)}(k) = \begin{cases} u^{(1)}(k), & \hat{\delta}(k) + u^{(1)}(k) \leq z_{\max}(k), \\ z_{\max}(k) - \hat{\delta}(k) - u^{(1)}(k), & \hat{\delta}(k) + u^{(1)}(k) > z_{\max}(k) \end{cases} \quad (13)$$

и

$$u^{(3)}(k) = \begin{cases} 0, & u^{(2)}(k) < z_{\min}(k), \\ u^{(2)}(k), & z_{\min}(k) \leq u^{(2)}(k) \leq z_{\max}(k), \\ z_{\max}(k), & u^{(2)}(k) > z_{\max}(k). \end{cases} \quad (14)$$

Так как товар поставляется в целых упаковках, то это также необходимо учитывать. Пусть  $s$  – стоимость упаковки товара. Тогда выражения

$$\mu(k) = \left[ \frac{u^{(3)}(k)}{s} \right], \quad s^*(k) = u^{(3)}(k) - \mu(k)s \quad (15)$$

определяют количество целых упаковок в поставке и остаток.

Объем поставки в целых упаковках задается следующим образом:

$$u^{(4)}(k) = \begin{cases} 0, & \mu(k) = 0, s^*(k) \leq 0,5s, \\ \mu(k)s, & \mu(k) \neq 0, s^*(k) \leq 0,5s, \\ (\mu(k) + 1)s, & \mu(k) \neq 0, s^*(k) > 0,5s. \end{cases} \quad (16)$$

Окончательно объем поставки определяется следующим образом:

$$u(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } u^{(1)}(k) = 0, \\ u^{(4)}(k), & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (17)$$

Для численного моделирования использовались данные работы торговой компании, которая специализируется на продаже продуктов питания. Поставка осуществлялась в течение трех дней. При этом существенное значение при определении объема поставок в данном случае имеет необходимость поставок товара только целыми упаковками.

На рис. 1 приведены графики, определяющие  $z_{\max}(k), z_{\min}(k), z_z(k)$  – максимальный, минимальный и желаемый объемы товара на складе в каждый момент  $k$  и графики динамики объемов товара на складе торговой компании и объемы поставок.

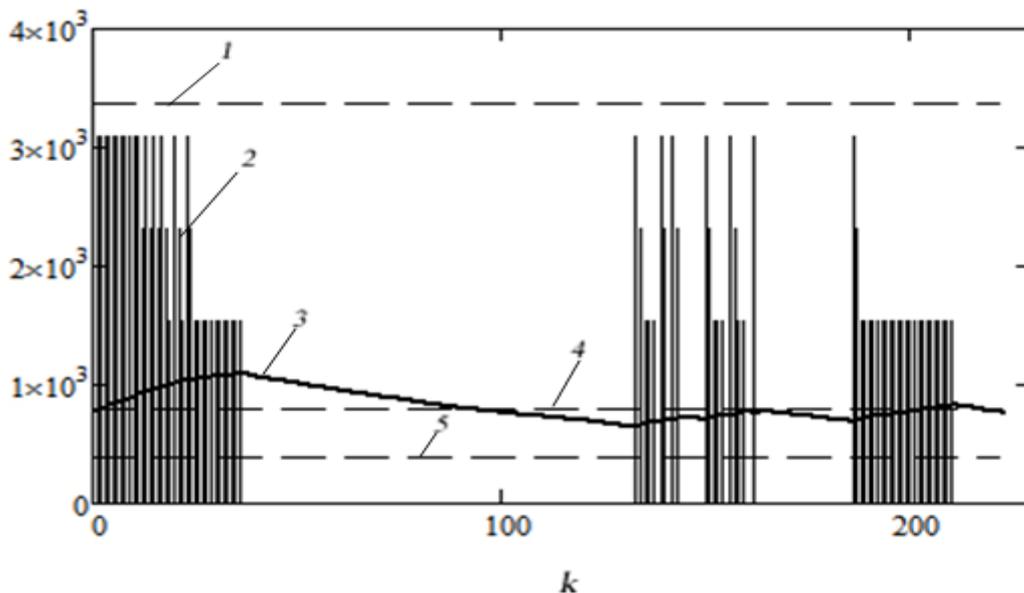


Рис. 1. Динамика объема товаров: 1 –  $z_{\max}(k)$ ; 2 –  $u(k)$ ; 3 –  $z(k)$ ; 4 –  $z_z(k)$ ; 5 –  $z_{\min}(k)$

Приведенные результаты иллюстрируют работоспособность и качество предложенных алгоритмов.

#### Литература

1. Решетникова Г. Н. Адаптивное управление поставками и рекламой. Алгоритмы. Модели. Ограничения. – Saarbrücken (Germany): LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 152 с.

2. Решетникова Г. Н. Управление поставками при наличии ограничений // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2014):

материалы XIII Международной научно-практической конференции им. А.Ф. Терпугова (20–22 ноября 2014 г.). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2014. – Ч. 1. – С. 56–61.

3. Решетникова Г. Н. Моделирование систем: учеб. пособие. – Томск: Том. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники. – 2-е изд., перераб. и доп. – Томск. 2007. – 441 с.

4. Reshetnikova G. N. , Khabibulina N. Y. , Kotsubinsky V. P. Polonskaya M. S. Servo-System Simulation [Electronic resources] // Mechanical Engineering, Automation and Control Systems (MEACS) : proceedings of the International Conference, Tomsk, 1-4 December, 2015 / National Research Tomsk Polytechnic University (TPU) ; Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE). – [S. 1.]: IEEE, 2015. – [4 p.]. – Title screen. – Режим доступа: <http://dx.doi.org/10.1109/MEACS.2015.7414890> (дата обращения: 16.03.2016).

5. Решетникова Г. Н., Ченбулашкина А. А. Адаптивное управление поставками с учетом ограничений // Известия вузов. Физика. – 2015. – Т. 58, № 11/2. – С. 291–297.

6. Решетникова Г. Н. Определение момента и объема заказа при управлении поставками // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015): материалы XIV Международной научно-практической конференции им. А.Ф. Терпугова (18–22 ноября 2015 г.). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2015. – Ч. 2. – С. 87–92.

DOI: 10.17223/9785751124335/15

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ DEEP LEARNING ДЛЯ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ ПОЛИПОВ ПРИ КОЛОНОСКОПИИ

*С. В. Аксёнов<sup>1,2,3</sup>, А. В. Замятин<sup>1</sup>, К. А. Костин<sup>1</sup>, Л. Джанминг<sup>4</sup>*

<sup>1</sup>*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

<sup>2</sup>*Национальный исследовательский Томский политехнический университет*

<sup>3</sup>*Томский государственный университет систем управления  
и радиоэлектроники*

<sup>4</sup>*Университет штата Аризона, Феникс, США*

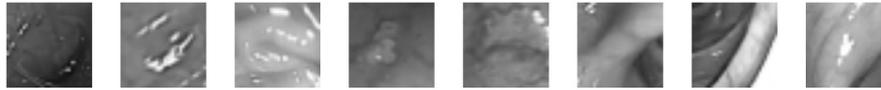
В работе представлен подход по обнаружению полипов в толстом кишечнике с помощью анализа видеопотока, полученного в результате колоноскопии и обработанного методами компьютерного зрения и глубинного обучения. В качестве наборов обучающих и тестирующих данных были использованы снимки полипов базы данных SVC-ColonDB, видеофайлы записи процесса колоноскопии Университета штата Аризона, г. Феникс, США, и клиник, ассоциированных с последним. Результаты работы показали перспективность использования предложенного подхода при решении практических задач для снижения заболеваемости и смертности от злокачественных новообразований толстого кишечника.

### Введение

Ежегодно в мире выявляется более 700 тыс. новых случаев злокачественных новообразований прямой кишки, в частности в России это число достигает 50 тыс. и далеко не все случаи колоректального рака выявляются даже на последней стадии. По причине поздней диагностики этого заболевания его летальность достигает 40% в течение года с момента выявления болезни, также почти в 50% случаев колоректального рака обнаруживаются метастазы в печени [1]. Для исследования состояния толстого кишечника на предмет выявления новообразований используется визуальный анализ внутренней поверхности органа для локализации полипов, являющихся аномальными разрастаниями тканей над слизистой оболочкой, проведения биопсии и удаления поражений. Представленная статистика и желание уменьшить вероятность меди-цинских ошибок с помощью запоминания особенностей полипов, позволяющих их детектировать, показывают важность разработки и использования новых програм-мных методов и инструментов для анализа видеопотока, классифицирующих аномальные разрастания в толстом кишечнике.

## Описание алгоритма детектирования полипов

Предлагаемый подход использует анализ формы отличительного региона и его окрестности для принятия решения о его классификации в качестве полипа. На рис. 1 показаны несколько полипов из базы CVC-ColonDB [2] и регионов, не являющихся полипами, как, например, особенности толстой кишки, световые пятна или фекальные массы.



Паттерны, не содержащие полипы



Паттерны, содержащие полипы

Рис. 1. Примеры обучающей выборки

Исходя из внешнего вида аномальных разрастаний, можно сделать вывод, что их можно локализовать с помощью обнаружения границ на кадре видеопроцесса колоноскопии. Однако использование метода Канни [3] для необработанного кадра подчеркивает при широком диапазоне порогов много незначительных деталей, усиливает регионы наибольшей освещенности – световые блики от фонаря и теряет многие области с полипами.

Опытным путем установлено, что усиление контраста позволяет подавить мелкие границы и увеличить вероятность локализации границ полипов, для этого значение интенсивности цветового оттенка модифицируется согласно

$$I_n = a * I + b,$$

где  $I$  – начальное значение цветового оттенка,  $I_n$  – обновленное значение цветового оттенка, коэффициенты, влияющие на контраст:  $a = 1,9$ ,  $b = 0$ .

Для модифицированного указанным образом кадра применяется локализация границ методом Канни, устраняющая регионы со слабым изменением градиента интенсивности и отбирающая пиксели, соответствующие наиболее существенному изменению направленного градиента, т.е. границы. Однако все обнаруженные границы содержат также крупные особенности формы толстого кишечника, его содержимого и сильные световые блики. Селекция наиболее вероятных регионов, по форме близких к области полипов, выполняется с помощью оценки фрагментов границ и определения направленности градиента интенсивности для граничных пикселей методом локализации замкнутых контуров, представленным в [4]. Метод позволяет выделить регионы, которые обладают формой, близкой к эллипсу, т.е. схожей с формой полипов небольшого размера. Последний алгоритм возвращает прямоугольный регион, содержащий объект-кандидат, который в свою очередь выравнивается до региона квадратной формы добавлением соседних пикселей.

В качестве классификатора кандидатов в полипы было предложено использовать сверточную нейронную сеть, настраиваемую с помощью технологий глубокого обучения [5]. Архитектура использованной нейронной сети представлена на рис. 2.

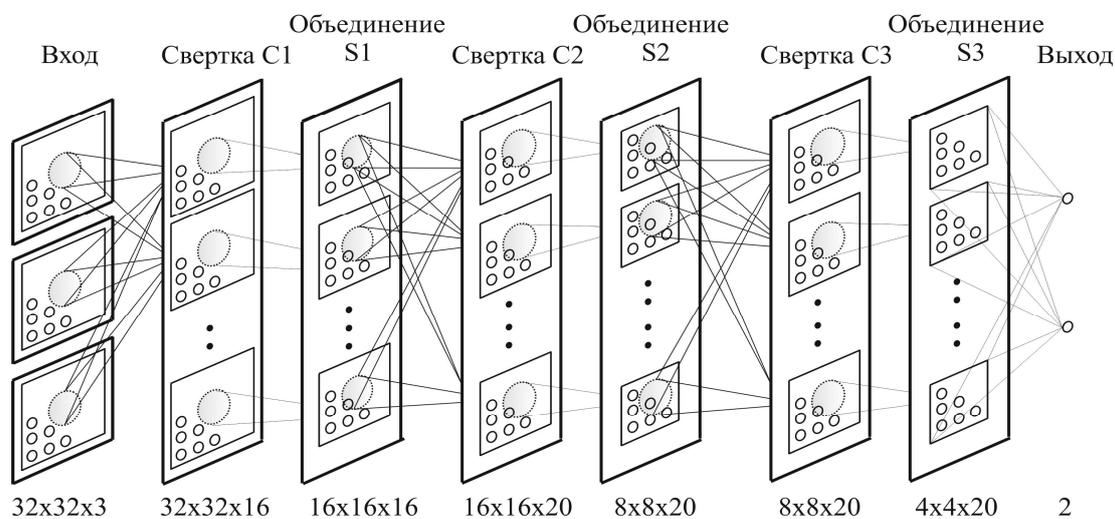


Рис. 2. Архитектура сверточной нейронной сети, использованной для классификации полипов

Сеть представляет собой чередование слоев двух типов: сверточного и субдискретизации (объединения). Слои свертки настраиваются на селекцию определенной локальной характеристики, как, например, углы или комбинации линий, при этом слои, расположенные на более высоком уровне, комбинируют более простые характеристики, запоминая уже фрагменты объектов. Слои объединения используются для группирования выходов близких нейронов в слое свертки, что позволяет создать классификатор, менее чувствительный к помехам и небольшим изменениям расположения фрагментов запоминаемого образа. В качестве входа сети используются три цветовых канала исследуемого кадра. Числовые значения на рис. 2, расположенные под слоями сети, обозначают размеры плоскости, входящей в слой, и количество плоскостей в слое. Как отмечено на рисунке, каждая из входных плоскостей цветовых оттенков имеет размерность  $32 \times 32$ , поэтому локализованный кандидат, расположенный в регионе квадратной формы, масштабируется до этих размеров и активирует сеть. Каждый нейрон сверточного слоя получает значения выходов нейронов входного слоя, расположенных в определенном регионе с заданными координатами от всех предыдущих плоскостей. При этом при настройке сети все нейроны, расположенные в пределах одной плоскости, обучаются одинаково, запоминая тем самым одну локальную характеристику, что приводит к активации (т.е. запоминанию особенности) этой плоскости вне зависимости от того, в какой области представлен запомненный стимул.

Слой объединения выполняет нахождение среднего значения активностей соседних нейронов в слое свертки. Наконец, слой классификации соединен со

всеми нейронами предыдущего слоя, выполняя агрегацию всех обнаруженных особенностей. Так как в задаче используется бинарная классификация (полип – неполип), то заключительный слой содержит два нейрона, ассоциированных с каждым из решений. После активации сети выбирается то решение, которое связано с нейроном слоя классификации, имеющего большее значение выхода.

### Эксперимент

В качестве обучающей выборки были взяты образцы из базы CVC-ColonDB в количестве 200 образцов регионов, содержащих аномальное разрастание эпителиальной ткани, и 200 образцов, не содержащих аномальные особенности, но обладающих отличительными границами, как, например, складки эпителия, фекальные массы, кровеносные сосуды, близкие к эпителию, световые блики. Предложенная сверточная нейронная сеть была обучена алгоритмом глубинного обучения Adadelta [6] в течение 25 минут. И при тестировании на образцах выборки CVC-ColonDB, отмасштабированных к размеру 32x32 пикселя, показала ошибку классификации около 95%.

На рис. 3 представлены примеры работы системы для локализации кандидатов для классификации на видео из Университета штата Аризона, г. Феникс. Слева показаны кадры обрабатываемой видеооперации, следующий столбец включает кадры с усиленным контрастом, подчеркивающим резкие перепады градиента интенсивности, третий столбец – выходы алгоритма Канны локализации границ для кадров с усиленным контрастом и заключительный столбец – регион, содержащий объекты с формой, близкой к эллипсу, полученный из входного изображения.

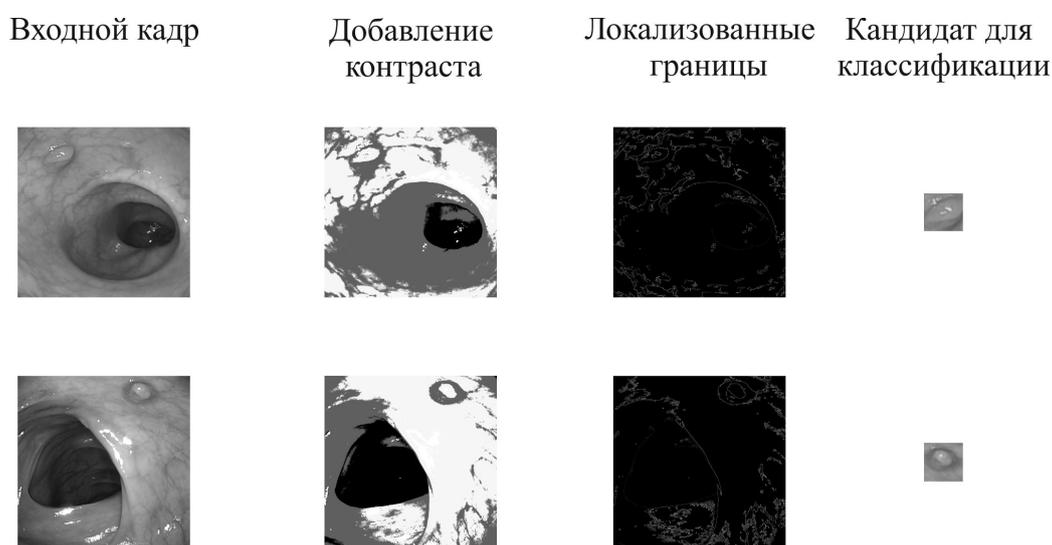


Рис. 3. Примеры локализации регионов для последующей классификации на кадрах процесса колоноскопии

При тестировании работы всей системы объект, указанный как вероятный полип, сравнивался с регионами на кадрах видео, помеченными медицинскими работниками. В результате исследования 20 фрагментов видеокколоноскопии система правильно локализовала около 78 % аномальных разрастаний, выделенных вручную.

## Обсуждение результатов и дальнейшие исследования

Полученный результат работы системы является удовлетворительным по сравнению с моделями детектирования полипов в [7–9]. Однако для использования в качестве средства поддержки принятия решения по удалению аномальных тканей необходимо усилить работу алгоритма по следующим направлениям. Во-первых, использовать анализ не одного кадра видео, содержащего фрагменты эллипсоидальной формы, а серию соседних кадров для наблюдения за изменением движения градиента освещенности в аномальных регионах, что будет подтверждать гипотезу о трехмерной структуре полипа. Во-вторых, алгоритм может учитывать особенности толстого кишечника конкретного человеческого организма: цвет, складки эпителия, что позволит регулировать контраст и с большей вероятностью детектировать потенциальные полипы.

Авторы работы благодарят коллектив медицинских работников Университета штата Аризона и ассоциированных с ним клиник, а также научный коллектив группы Colon-DB, предоставивших обучающие выборки для настройки нейронной сети, классифицирующей полипы.

*Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований № 16-47-700289, 14-07-00127 и выполнена в рамках программ повышения конкурентоспособности Национального исследовательского Томского государственного и Национального исследовательского Томского политехнического университетов.*

## Литература

1. Как происходит колоноскопия? ГНЦ колопроктологии Росздрава. Отделение эндоскопической хирургии [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.colonoscopy.ru/patient/procedure1.htm> – Режим доступа: свободный.
2. Bernal J., Snchez J., Vilario F. Towards automatic polyp detection with a polyp appearance model // Pattern Recogn. – 2012. – № 45(9). – P. 3166–3182.
3. Флах П. Машинное обучение. Наука и искусство построения алгоритмов, которые извлекают знания из данных / пер. с англ. А. А. Слинкина. – М.: ДМК Пресс, 2015. – 400 с.
4. Tajbakhsh N., Gurudu S. R., Liang J. Automatic polyp detection in colonoscopy videos using an ensemble of convolutional neural networks // Biomedical Imaging (ISBI). IEEE 12th International Symposium on. – 2015 – P. 79–83.
5. Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G. E. Imagenet classification with deep convolutional neural networks // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2012. – P. 1097–1105 [Электронный ресурс]. – URL: <https://code.google.com/p/cuda-convnet/>
6. Handbook on Neural Information Processing / ed. M. Bianchini, M. Maggini, L. C. Jain – Springer. Intelligent Systems Reference Library – 2013. – Vol. 49, № 1. – P. 61–102.
7. Alpaydin E. Introduction to Machine Learning – Cambridge: The MIT Press, 2014. – 640 p.
8. Park S. Y., Sargent D., Spofford I. et al. A colon video analysis framework for polyp detection // IEEE Trans. Biomed. Eng. – 2012. – № 59(5). – P. 1408–1418.
9. Alexandre L. A., Nobre N., Casteleiro J. Color and position versus texture features for endoscopic polyp detection // International Conference on BioMedical Engineering and Informatics, BMEI. – 2008. – Vol. 2. – P. 38–42.

## **ERM-МОДЕЛЬ ДАННЫХ И НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ В ПРОЕКТИРОВАНИИ БАЗ ДАННЫХ**

*А. М. Бабанов*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Подавляющее большинство проектировщиков баз данных (БД) действует по наитию, часто не используя никаких методик высокоуровневых моделей данных. Возможно, они о них не знают или просто не видят в этом смысла. Как результат, часто схемы БД получаются неудовлетворительными – они не соответствуют семантике предметной области (ПрО), неэффективны, неудобны при работе с ними. Предлагаются новый взгляд на задачи, стоящие перед проектировщиком БД, и способы их решения с использованием современной семантической модели «Сущность – Связь – Отображение» (ERM-модель) [1].

Очень многие при создании систем БД недооценивают важность этапа анализа требований. Повсеместно необходимые для проектирования сведения о ПрО собираются в случайном порядке, проектировщикам остается довольствоваться спонтанными рассказами-пожеланиями будущих пользователей.

При системном подходе, предлагаемом семантической методикой проектирования, работа по созданию системы баз данных начинается с анализа бизнес-процессов ПрО, для информационной поддержки которых создается БД, и используемых в них данных. Этой информацией во всей полноте, как правило, не владеет ни один эксперт по ПрО, каждый отчетливо представляет только свои задачи. Все требования, полученные от экспертов по ПрО на естественном языке, должны быть сразу же переведены в ясный, точный, формальный вид и перепроверены у экспертов.

Второй аспект, который необходимо учитывать при знакомстве проектировщиков с ПрО, связан с «человеческим фактором». Надо изначально максимально полно зафиксировать семантику ПрО, желательно в формальном виде, и на последующих этапах использовать этот артефакт, а не обращаться к экспертам повторно.

Почти все проектировщики БД осуществляют формализацию информации о ПрО на языке системы управления базами данных (СУБД), выбранной для реализации системы. Таким образом, они сразу создают БД, «слепляя на ходу из разрозненных кусочков пестрое одеяло» схемы БД. Понятно, что при таком подходе глупо ожидать высокое качество.

Семантическая методика предлагает для больших приложений выделять подпроцессы или компоненты, легче поддающиеся анализу, и сначала проектировать подсхемы для них. Впоследствии эти подсхемы интегрируются в глобальную концептуальную схему всей ПрО и, к сожалению, в большинстве случаев забываются.

При ERM-проектировании на первом этапе создаются подсхемы данных в точном соответствии с требованиями пользователей подсистем и с сохранением их представлений и терминологии. Но определяются они не отдельно друг от друга, а тесно взаимосвязаны и все вместе составляют единую ERM-схему.

Для иллюстрации предлагаемых идей воспользуемся фрагментами схемы медицинской ПрО (рис. 1).

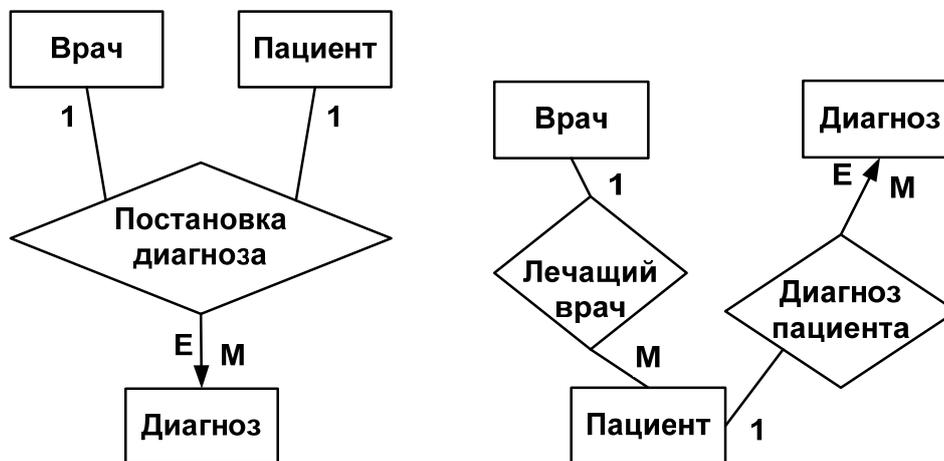


Рис. 1. Фрагменты исходной ERM-схемы медицинской ПрО

На рисунке приведены два различных представления о поставленных пациентам диагнозах: первое – для бизнес-процесса постановки диагноза (наиболее информативное), второе – для процесса лечения пациента в стационаре. Во втором случае знания о враче, который поставил диагноз, не требуется. Нетрудно заметить в связи с этим разницу во множествах связей между пациентами и диагнозами: на левой диаграмме оно тернарно, на правой – бинарно.

Проектировщики БД либо изначально сразу создают интегрированную схему БД, либо интегрируют ранее созданные подсхемы. Однако и в том и в другом случае в конечной схеме осуществляется унификация форм представления и наименований явлений ПрО. Это приводит к потере семантики, локализованной в подсхемах, и ее повторному выяснению у экспертов по ПрО в дальнейшем в ходе создания внешних схем пользователей. ERM-модель позволяет сохранить представления и наименования, сложившиеся в разных группах пользователей, и указать, как они взаимосвязаны между собой.

Во многих семантических моделях для элементов ПрО предлагается три формы данных – сущность, связь и значение характеристики (или их аналоги). Для каждого явления ПрО проектировщик должен выбрать лишь одну из них и зафиксировать ее в интегрированной схеме хранимых данных (так называемая «проблема триализма» [2]). Второй задачей структуризации данных является задача правильного определения структуры связей – важно точно определить, сколько и какие сущности их образуют [2]. Унификация форм данных и структуры связей при интеграции подсхем не только нивелирует представления пользователей, безвозвратно теряются при этом

также некоторые ограничения целостности, определяющие специфические бизнес-правила.

В ERM-моделировании предлагается на этом этапе не отказываться от подсхем данных, а наряду с изначальными формами данных и ограничениями целостности автоматически порождать их базовые формы (классы и отображения) и с помощью операций и отношений между классами и отображениями задавать взаимосвязи между элементами различных подсхем. Эта информация схемы данных позволяет в дальнейшем решать автоматически многие последующие задачи проектирования.

В нашем примере множества связей ПОСТАНОВКА ДИАГНОЗА и ДИАГНОЗ ПАЦИЕНТА явно близки по смыслу, но отличаются структурно. В ERM-схеме это можно выразить на базовом, более выразительном уровне. При переходе на этот уровень явно вводятся реляционные отображения, определяемые множествами связей (рис. 2).

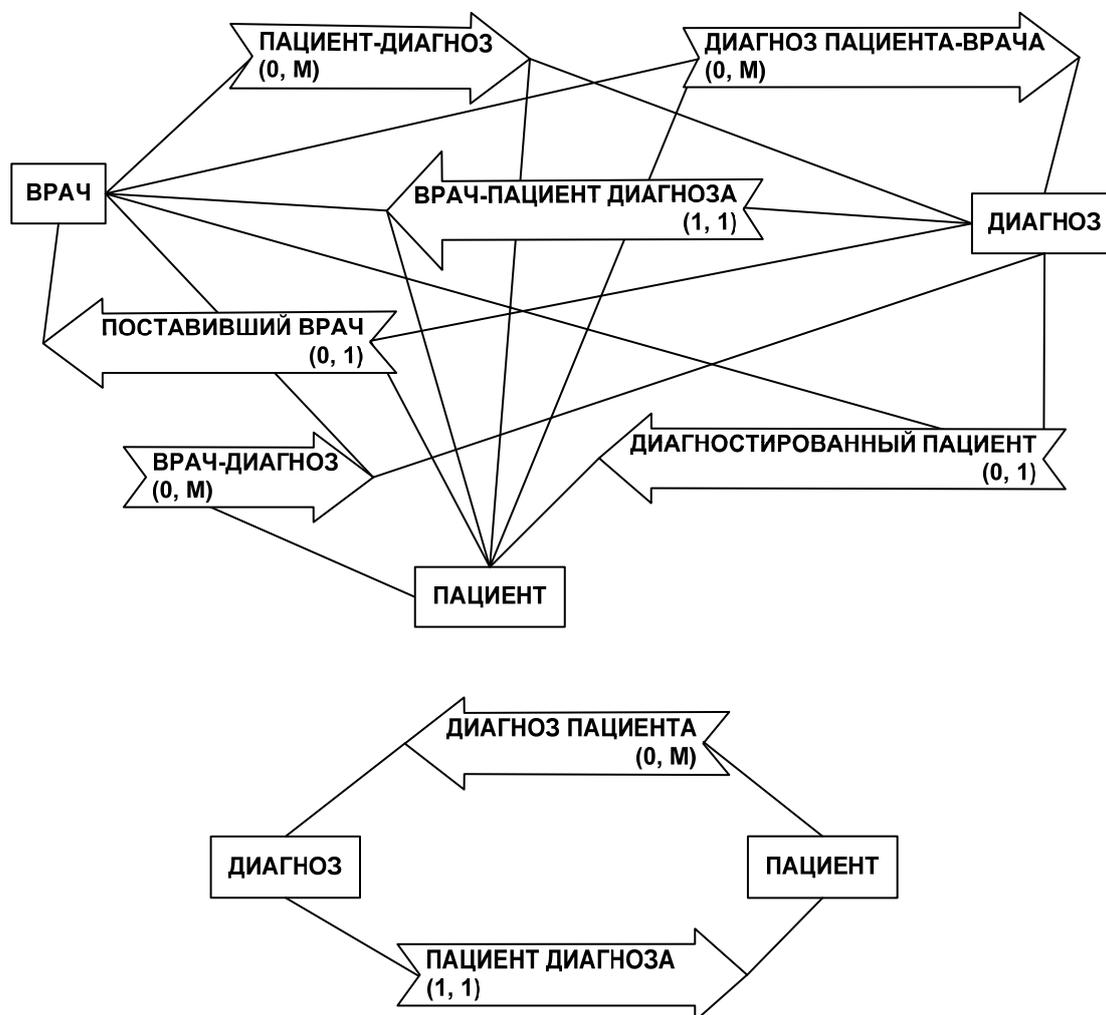


Рис. 2. Диаграммы реляционных отображений ERM-схемы медицинской Про

Далее с использованием операций над отображениями определяются взаимосвязи между ними (рис. 3).



Рис. 3. Диаграммы взаимоотношений отображений ERM-схемы медицинской Про

На рисунке указано, что производное отображение, являющееся проекцией базового отображения ВРАЧ–ПАЦИЕНТ ДИАГНОЗА на роль ПАЦИЕНТ, эквивалентно базовому отображению ПАЦИЕНТ ДИАГНОЗА. Это означает, что для каждого диагноза его связь с пациентом определяется одинаково обоими множествами связей. Второй подграф на рис. 3 говорит о том, что и множества диагнозов, полученные с помощью этих множеств связей для любого пациента, совпадают.

Целевая схема БД должна являться в достаточной мере нормализованной. Подавляющее большинство методик предлагают позаботиться об этом еще на уровне семантической модели. Поэтому проектировщик на этапе интеграции сталкивается с еще одной проблемой – какие данные хранить в БД, а какие получать из них автоматически. Халпин выделяет даже три статуса данных – хранимые, получаемые и частично получаемые.

«Получаемый (derived) факт – это факт, который выводится из других фактов математическими вычислениями или логическим выводом. Факт, который нельзя вывести из других фактов, называется хранимым или утверждаемым пользователем (asserted) фактом. Для каждого получаемого факта в схеме данных задается правило его получения» [3. С. 33]. «Частично получаемый (semiderived) тип фактов определяется в том случае, когда ряд фактов этого типа можно вывести, а другие факты будут заданы пользователем» [Там же. С. 99].

В существующих ныне методиках проектирования БД задачу определения статуса данных решает исключительно человек. Он сам делает выбор конкретной структуры хранения и сам определяет правила получения производных данных, фиксируя свое решение в схеме и программном коде. Многие методики вообще не регламентируют этот процесс, апеллируя к интуиции проектировщика. Другие, более детальные, указывают основную операцию интеграции – объединение элементов подсхем, напоминая, что «при этом необходимо разрешить возможные конфликты именования, ликвидировать избыточность и неоднозначность» [4. С. 242].

ERM-схема к этому моменту содержит все взаимосвязи элементов подсхем. Этой информации в большинстве случаев достаточно для автоматического решения задачи хранимых данных. В редких случаях система ERM-проектирования может проконсультироваться у человека. Также можно автоматизировать процесс определения правил вывода получаемых данных.

Что касается множеств связей диагнозов с пациентами из нашего примера, то очевидно, что из его тернарного варианта легко получить

бинарные связи. Обратного преобразования бинарных связей в тернарные не существует. Таким образом, тип связей ПОСТАНОВКА ДИАГНОЗА – хранимый, а ДИАГНОЗ ПАЦИЕНТА – получаемый (с помощью операции проекции).

В ERM-моделировании задача интеграции схемы на уровне базовых понятий «класс» и «отображение» решается сама собой после выделения хранимых структур и ограничений целостности. Особенностью такого моделирования является то, что наряду с этими элементами схемы (и непосредственно с ними связана) имеется информация о получаемых структурах, что является основанием для последующей автоматической генерации внешних схем бизнес-процессов.

После того, как интегрированная схема спроектирована, трансформирована на язык СУБД, БД реально создана и проверена на типичных транзакциях и запросах, приступают к созданию подсхем отдельных пользователей и групп пользователей. Каждая внешняя схема определяет информационные структуры и операции над данными, которые необходимы и доступны одной группе пользователей. Поскольку эта задача предполагает создание инструментов, обеспечивающих работу непосредственно с данными, решать ее приходится с использованием средств СУБД и в рамках ее модели данных.

Обычно в этот момент проектировщики (как правило, уже специалисты по языку СУБД) вновь обходят пользователей с вопросом, что и в каком виде они хотели бы видеть в диалоге с системой БД. Эти представления им и необходимо реализовать в СУБД. Основными инструментами разработчиков в реляционном случае являются представления (view) и триггеры (trigger). Первые обеспечивают необходимые преобразования данных из интегрированной логической модели во внешнюю схему при чтении информации, вторые реализуют проверки данных и обратное преобразование при вводе и изменении данных.

В случае ERM-моделирования внешние подсхемы фактически совпадают с аналитическими подсхемами. В ходе проектирования элементы этих подсхем ассоциированы с их базовыми эквивалентами и снабжены ссылками на хранимые структуры и ограничения целостности.

Этой информации в ERM-схеме достаточно, чтобы полностью определить внешние схемы пользователей на языке СУБД. В реляционном случае процесс генерации вышеупомянутых представлений и триггеров можно автоматизировать. Для получаемых и частично получаемых типов данных в представлениях определяются способы их вычисления из хранимых типов данных.

В статье затрагиваются проблемы, которые часто не замечают современные проектировщики БД. Но от этого их схемы данных не становятся адекватнее, эффективнее и понятнее. Использование семантической методик, подкрепленной CASE-инструментами, в которых реализованы предлагаемые в статье идеи, позволит вывести проектирование БД на качественно новый уровень.

## Литература

1. Бабанов А. М. Семантическая модель «Сущность – Связь – Отображение» // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2007. – № 1. – С. 77–91.
2. Бабанов А. М. Синонимия элементов ERM-схем и ее использование в методике ERM-моделирования для графической нотации // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 2(27). – С. 63–72.
3. Halpin T., Morgan T. Information Modeling and Relational Databases, Second Edition. – Morgan Kaufman, 2008. – 943 p.
4. Цикритзис Д., Лоховски Ф. Модели данных / пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 344 с.

DOI: 10.17223/9785751124335/17

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ DATA MINING ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СКОРОСТИ ПРОДАЖИ ПОДЕРЖАННЫХ АВТОМОБИЛЕЙ**

***О. Г. Вершинина***

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

### **Введение**

Зарубежный онлайн-сервис более 10 лет предоставляет частным продавцам и крупным дилерам возможность размещать объявления о продаже подержанных автомобилей. Пользователи могут находить объявления с помощью поисковой формы и связываться с продавцами напрямую. Сайт является связующим звеном между покупателем и продавцом, но сделки купли-продажи осуществляются без помощи сайта. Как правило, объявление активно на сайте вплоть до момента продажи автомобиля, т.е. продавцы снимают автомобиль с публикации в большинстве случаев только по причине его продажи. Таким образом, появляется возможность оценки ориентировочного срока продажи автомобиля на основании времени активности объявления.

Данные об объявлениях, их история и статистика хранятся за последние три года. База данных, сформировавшаяся за это время, является достаточно репрезентативной для попытки поиска и построения некоторой предсказательной модели, которую можно использовать в маркетинговых целях и для создания дополнительных продуктов. В частности, есть потребность в создании сервиса для дилеров, суть которого заключается в расчете скорости продажи автомобиля на основании его характеристик, предоставленных продавцом в объявлении. Предполагается, что в основе такого сервиса будет лежать предсказательная модель, процесс поиска которой описан в данной работе.

### **Постановка задачи**

Для каждого объявления нужно определить время его активности на сайте. Фактически время жизни объявления соответствует времени с момента его опубликования до момента продажи автомобиля.

Задача-минимум состоит в том, чтобы определить некоторый промежуток времени, в который объявление будет активно. Временные периоды длиной от нескольких дней до нескольких месяцев в таком случае рассматриваются как категории, по которым можно классифицировать каждое объявление. Эта задача будет решена, если удастся получить настолько оптимальное деление прогнозируемого времени на периоды, чтобы предсказание времени активности для любого произвольного объявления максимально точно попадало в один из периодов. Задача-максимум состоит в прогнозировании точного времени активности объявления, измеряемого в днях.

Формально задача сводится к поиску закономерности  $f(X) = Y$ , где  $Y$  – это категория, обозначающая диапазон количества дней активности объявления. Здесь  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  – это вектор признаков, где признаками являются характеристики объявления. Описание признакового вектора представлено в таблице.

Описание признакового вектора

Усл. обознач.	Название признака	Тип признака	Пояснения
$x_1$	<i>Manufacturer</i>	<i>Polynomial</i>	Марка Автомобиля
$x_2$	<i>Model</i>	<i>Polynomial</i>	Модель Автомобиля
$x_3$	<i>Variant</i>	<i>Full Text</i>	Спецификация Модели
$x_4$	<i>Carclass</i>	<i>Polynomial</i>	Класс Автомобиля
$x_5$	<i>Description</i>	<i>Full Text</i>	Описание
$x_6$	<i>Features</i>	<i>Full Text</i>	Спецификация
$x_7$	<i>Price</i>	<i>Float</i>	Цена
$x_8$	<i>Condition</i>	<i>Polynomial</i>	Состояние
$x_9$	<i>Year</i>	<i>Integer</i>	Год Выпуска
$x_{10}$	<i>Bodytype</i>	<i>Polynomial</i>	Тип Кузова
$x_{11}$	<i>Mileage</i>	<i>Integer</i>	Пробег В Милях
$x_{12}$	<i>Fueltype</i>	<i>Polynomial</i>	Тип Топлива
$x_{13}$	<i>Doors</i>	<i>Integer</i>	Количество Дверей
$x_{14}$	<i>Transmission</i>	<i>Polynomial</i>	Тип Коробки Передач
$x_{15}$	<i>Images</i>	<i>Integer</i>	Количество Фотографий
$x_{16}$	<i>Vatinsluded</i>	<i>Boolean</i>	Включен Налог В Стоимость
$x_{15}$	<i>Isniapprovedused</i>	<i>Boolean</i>	Наличие Подписи Ni Approved Used (Подобие Страховки)
$x_{16}$	<i>Colour</i>	<i>Polynomial</i>	Цвет

Процесс решения задачи разбивается на несколько этапов [1].

Этап 1. Отбор и предварительная обработка данных. Поскольку данные никогда ранее не обрабатывались для подобного рода задач, то процесс обработки является важнейшим. Данные являются сильно зашумленными с большим количеством пропусков и ошибок. Также для начальных экспериментов признаковый вектор сильно редуцирован по длине, много признаков сознательно не включены для упрощения задачи.

Этап 2. Обучение и тестирование нескольких методов классификации с постепенным увеличением количества классов (то есть дроблением периодов времени до минимально возможных).

Этап 3. Оценка и сравнение точности полученных моделей.

Этап 4. Интерпретация результатов.

### **Исходные данные и предварительная обработка**

Объявления на сайт поступают из разных источников: вводятся вручную, загружаются специальными скриптами с других сайтов или выгружаются из файлов, предоставляемых поставщиками. Данные для начальных экспериментов взяты от одного из таких поставщиков в формате csv файлов. Данные охватывают период с января 2013 по февраль 2016 г. и состоят из объявлений от разных дилеров, что обеспечивает разнообразие признаков.

Для того чтобы обеспечить репрезентативность данных, учитываются следующие факторы, диктуемые особенностями рынка и условиями задачи.

1. Сезонность: период времени, за который отбираются объявления, должен быть в рамках одного сезона – летнего или зимнего. Особенности автомобильного рынка таковы, что покупательная активность может значительно колебаться от сезона к сезону. Два автомобиля с практически одинаковыми характеристиками могут иметь совершенно разную скорость продажи в летний и зимний периоды, это следует учитывать при формировании тестовой и обучающей выборки.
2. Конечный период активности в рамках исследуемого диапазона. Если рассматриваются объявления за период 2 месяца, то необходимо из них отобрать только те, время активности которых полностью входит в этот диапазон. Если в выборку попадают объявления, дата публикации или удаления которых находится за пределами выбранного диапазона времени, то такие объекты являются нерепрезентативными для построения модели.

Помимо фильтрации данных по критериям, описанным выше, предварительная обработка данных [2] также включает в себя:

- 1) удаление из признакового вектора некатегориальных и нечисловых признаков, таких как описание, комментарии, дополнительная маркировка (вариант) и т.п.;
- 2) удаление признаков, значения которых у большинства объектов имеют либо одинаковые, либо очень близкие значения, например

количество фотографий (у всех объявлений в выборке от 7 до 9 фотографий), включение налога в стоимость и т.п.;

- 3) категориальные признаки, такие как марка, модель, цвет автомобиля, обрабатываются с помощью словарей – таблиц соответствия различных написаний признака какому-то одному синониму, которые позволяют свести разнообразие значений к конечному списку категорий;
- 4) по оставшимся признакам отфильтрованы объекты с пустыми значениями признаков или со значениями, представленными в выборке только один раз (например, какая-то определенная модель автомобиля или цвет).

Обучающая выборка после фильтрации состоит из 178 объектов, на которой предпринимается попытка обучить некоторые методы классификации [3].

### Методы и инструменты

Для поиска классифицирующей модели используются несколько разных методов, статистические и деревья решений и два разных инструмента.

Метод CART (Classification And Regression Tree) предназначен для построения бинарных деревьев решений, т.е. каждый узел дерева при разбиении имеет только двух потомков [4]. Он подходит для векторов, содержащих одновременно и числовые, и категориальные переменные, что делает его применимым к этой задаче. Классификация методом CART производится с использованием широко известной среды **RSudio** средствами языка R [5]. Данная среда и сам язык позволяют с помощью готовых библиотек проводить необходимые вычисления и представлять результаты графически или в виде текстового описания.

Наиболее простой и понятный метод рекурсивного построения деревьев решений (Decision Tree) применяется в данной работе в рамках другого удобного инструмента **Rapid Miner** [6]. В этой программе любой метод возможно настроить, выбрав различные критерии разбиения, а также визуально настроить процесс обработки данных и вычислений, поэтому он был выбран в качестве одного из инструментов.

### Классификация

Признак, который определяется как классифицирующий ( $Y$ ), – это время активности объявления на сайте, измеряемое в днях. Поиск оптимальной модели производится итерациями. Каждая итерация включает в себя:

- 1) определение количества классов и их границ;
- 2) обучение метода;
- 3) анализ полученной модели;
- 4) применение модели на тестовой выборке;
- 5) вычисление ошибки;
- 6) сравнение ошибки с предыдущей итерацией.

Как только качество классификации на следующей итерации становится хуже, чем в предыдущей, это означает, что достигнуто максимальное деление на периоды, которое возможно с данной выборкой.

Выбор количества классов и их границы определяются визуально. Так, для первой итерации выборка разделена на два класса, условно названных slow и fast, которые обозначают период активности объявления больше 20 дней и меньше соответственно.

На рис. 1 приведено графическое изображение дерева решений, полученного методом CART для классификации на два класса.

Классификация с помощью этого дерева на тестовой выборке дает результат с ошибкой 28%.

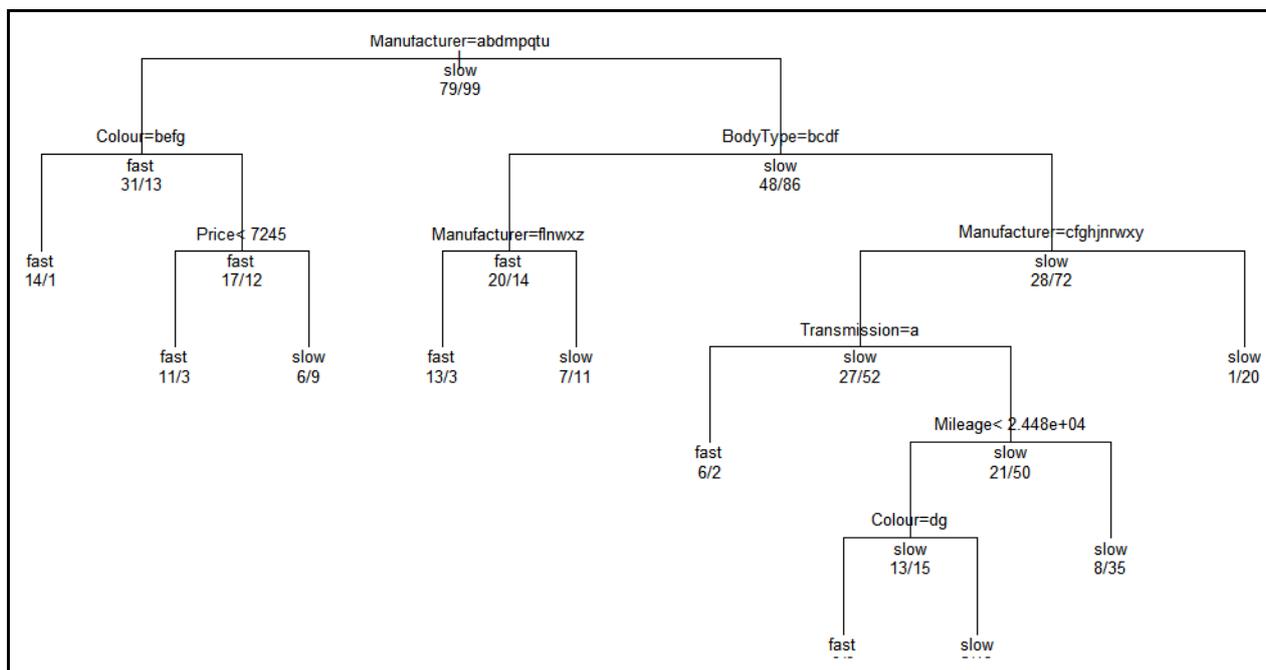


Рис. 1. Графическое представление дерева решений, полученного методом CART в RStudio

На тех же данных опробован метод Decision Tree в Rapid Miner, графическое изображение которого представлено на рис. 2. Классификация на той же тестовой выборке с помощью этой модели дает результат с ошибкой 27,3%.

Предполагается, что 72% точности классификации является удовлетворительным. Далее необходимо увеличить количество классов и обучить те же самые методы, сравнив затем их точность. Таким образом, должны быть выбраны наиболее оптимальное разбиение на классы и более эффективная модель, которую затем можно пытаться обучать на данных с более объемным признаковым вектором и более объемной обучающей выборкой.

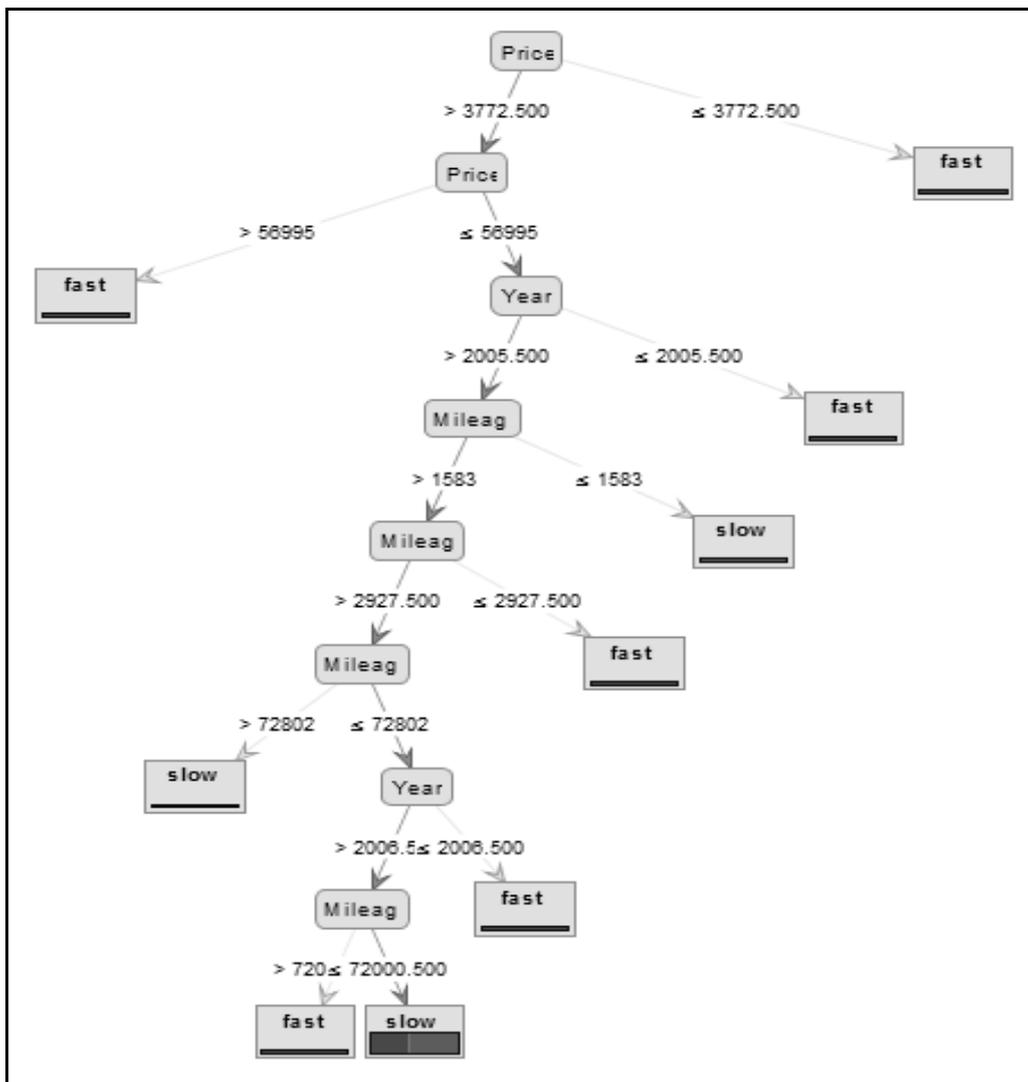


Рис. 2. Графическое представление дерева решений, полученного методом CART в RStudio

### Заключение

В данной работе предпринята попытка получить предсказательную модель для вычисления времени активности объявлений на сайте. Для решения этой задачи обрабатывается технология анализа, начиная от предварительной обработки и упрощения обучающей выборки до применения методов классификации итеративно с увеличением сложности классификации на каждом шаге.

При успешном решении данной задачи с упрощенными и редуцированными данными далее предполагается усложнение признакового вектора добавлением ранее удаленных полнотекстовых признаков и применение методов NLP к ним. Эти признаки также должны будут участвовать в классификации, и итеративная процедура поиска модели будет проводиться аналогично описанному в данной работе сценарию.

Получены первые результаты исследований, которые дают удовлетворительную точность классификации на тестовых данных, на основании чего можно утверждать о возможности успешного решения всей задачи в целом.

Кроме этого, предполагается сравнить эффективность и точность используемых методов классификации применительно к анализируемым данным.

#### Литература

1. Замятин А. В. Введение в интеллектуальный анализ данных: учеб. пособие. – Томск: Издательский Дом государственного университета, 2016. – 120 с.
2. Чубукова И. Data Mining. Лекция 18: Начальные этапы. Предварительная обработка данных [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.intuit.ru/studies/courses/6/6/lecture/192?page=3> (дата обращения: 28.02.2016).
3. Rokach L., Maimon O. Data Mining with Decision Trees: Theory and Applications. – Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2014. – 328 с.
4. Rutkowskia L., Jaworskia M., Pietruczuka L., Duda P. The CART decision tree for mining data streams // Information Sciences. – 2014. – Vol. 266. – P. 1–15.
5. Golemund G. Hands-On Programming with R: Write Your Own Functions and Simulations. – USA: O'Reilly Media, Inc., 2014. – 250 p.
6. Hofmann M., Klinkenberg R. RapidMiner: Data Mining Use Cases and Business Analytics Applications. – USA: Taylor & Francis Group, LLC, 2014. – 463 p.

DOI: 10.17223/9785751124335/18

### **REAL TIME ENTERPRISE. БИЗНЕС И ИТ В ЭПОХУ «БОЛЬШИХ ДАННЫХ»**

*Р. Д. Гимранов<sup>1</sup>, М. И. Лугачев<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> *ОАО «Сургутнефтегаз»*

<sup>2</sup> *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

В работе анализируется место больших данных (Big Data) на современном этапе проникновения информационных технологий в принятие решений в бизнесе. Показано, что большие данные, ставшие основой современных бизнес-решений для предприятий нового (цифрового) типа, демонстрируют новую ступень развития, когда ИТ становятся непосредственным инструментом добавления стоимости. Обсуждаются возможные оценки происходящих изменений с позиций прогнозов П. Друкера об информационной революции.

В конце прошлого века Питер Друкер в замечательной статье «Следующая информационная революция» [1] констатировал: «До сего дня, в течение уже пятидесяти лет, информационная революция была сосредоточена... на букве "Т" в ИТ. Следующая же информационная революция задает иной вопрос: "Каков СМЫСЛ информации, и в чем ее НАЗНАЧЕНИЕ?" Это ведет к переопределению задач, которые должны исполняться с помощью информации, а затем – и к переопределению институтов, исполняющих эти задачи». По прошествии почти двух десятков лет мы убеждаемся, сколь прозорливым было это предсказание. ИТ – гигант Google – стал мировым лидером рыночного использования информационных процессов, и накопленный им опыт уже дает основания для обобщений. Главный экономист компании Google Н. Varian в серии публикаций последних лет анализирует бизнес своей компании и отмечает, что уже

изначально с появлением компьютера в качестве средства осуществления транзакций принципиально изменились не только процессы накопления и использования данных, но и сама среда принятия решений.

Сегодня же, с приходом больших данных, эти изменения достигли фундаментальных основ мировой экономики – процессов накопления капитала. Капиталом здесь являются данные. В среде больших данных ИТ превращаются в инструмент извлечения прибыли непосредственно из информационных процессов. Бизнес этот полностью «айтишный» – автоматически осуществляет поиск, сбор и хранение данных, их обработку, поиск пользователей – возможных клиентов, доставку им информации, учет активности и расчет с заказчиками. Большие данные демонстрируют основное свойство информационных технологий – добавление стоимости данным: сведения в Интернете не стоят пользователю ничего, но, пройдя обработку средствами алгоритмов больших данных, приобретают потребительские свойства информации, возможно, интересной рекламодателям. За эту возможность рекламодатели щедро платят.

«Большие данные, это новая форма – форма информационного капитализма, который имеет целью предсказание и изменение поведения человека как средства для получения прибыли и управления рынком» [2]. Ш. Зубофф предлагает даже новый термин для характеристики информационного капитализма: «следающий капитализм», или «подглядывающий капитализм» (*surveillance capitalism*).

Бизнес при информационном капитализме по-современному криминальный: как правило, никто не спрашивает разрешения ни об извлечении данных (они в «свободном доступе»), ни о предоставлении информации потенциальному клиенту. Выясняется, что нарушаются то права интеллектуальной собственности, то право на личную жизнь. Об этом уже написаны тома судебной документации, но ни одна из глобальных интернет-компаний, практикующих бизнес на мировой сети, не пострадала от юридических претензий сколь-нибудь значимо и не прекратила свою деятельность. А когда процессы первоначального накопления капитала были идеальными?

Пользователи Интернета – граждане виртуального государства, в котором правит информационный капитализм, – тотально бесправны: их не спрашивают, когда у них забирают данные и без всякого на то согласия им присылают информацию в виде рекламы. Как немые рабы, они послушно выполняют свои обязанности: кликают на интересующие их иконки в социальных сетях и на торговых порталах. Их никто и ничто к этому не принуждает, кроме сформировавшейся потребности комфортно получать из сети необходимые сведения. Так они надеются снизить уровень неопределенности своего существования. Но свобода от неопределенности не есть свобода вообще или свобода выбора при следающем капитализме. Бенефициары невольного информационного рабства никак не заботятся о создателях своего капитала: им безразлично, кто они, каковы обстоятельства их существования. Их действия направлены прежде всего на то, чтобы

крепче привязать пользователей к сети, предлагая им новые возможности поиска или необычные источники привлекательной информации и скрыто принуждая их увеличивать число кликов и так наращивать свой капитал.

Ш. Зубофф [2] провела обзор практик компании Google, приведших к юридическим процессам. Это:

- сканирование электронной почты, в том числе и тех, кто не пользуется Gmail, студентов, которых привлекли образовательные приложения Google;
- перехват голосовых коммуникаций;
- нарушение права на неприкосновенность частной жизни;
- односторонние практики пакетирования данных через онлайн-услуги;
- длительное хранение поисковых данных;
- отслеживание данных о местоположении смартфона;
- мобильные технологии с возможностью распознавания лиц.

При этом Google сознательно игнорирует наличие согласия участников отслеживаемых сделок на этот незаметный контроль: большая часть компаний и граждан «одалживают» свои данные неосознанно. Для других же судебные процессы в компании являются планируемой частью общего бизнес-процесса и возможные издержки на супер-адвокатов заведомо перекрываются получаемой прибылью.

Так, в среде БДн появляются новые бизнес-модели, о которых предупреждает Н. Varian [3].

Важным последствием наступления эры нового капитализма может стать изменение роли неопределенности, которая всегда была обязательным компонентом любого экономического решения. Современное «компьютерное посредничество» [4] на базе технологий БДн позволяет вести всегда и везде запись информации о каждой транзакции, что делает экономику более прозрачной. Под угрозой оказывается базовая неолиберальная концепция Ф. Хайека [5] о непознаваемости пространства рыночных транзакций, лежащая в основе требований свободы от государственного регулирования экономики. В новых условиях появляется возможность восстановить детали осуществления не только отдельной транзакции, но и всех сделок в рамках действий конкретного предприятия, бизнеса, индивидуума.

Эта фундаментальная черта информационного капитализма может создать благоприятные условия для борьбы с оппортунистическим поведением на макроуровне, но также легко порождает новую бизнес-модель в среде Интернета вещей на микроуровне: например, приобретаемые в рассрочку материальные блага сопровождаются онлайн-контролем банка, предоставившего ипотеку или кредит. При непоступлении в срок очередного платежа по команде банковского робота нарушаются функциональные свойства обретенного блага: отключается горячая вода в ипотечном доме или не заводится машина, купленная в кредит. Страховщики могут следить за активностью своих клиентов и получать дополнительные аргументы в пользу неплатежа компенсации при наступлении страхового случая. Это – «следающий капитализм».

Нельзя сказать, что пользователей не предупреждали о том, что за удовольствие «жить» в социальных сетях надо в них же оставлять плату в виде персональной информации. О «Большом Брате» (Big Brother) говорили всегда, а для советского человека термин «нетелефонный разговор» был частью повседневного общения. Еще в интервью 2009 г. председатель совета директоров компании Google Эрик Шмидт не скрыл от общественности, что Google сохраняет истории поиска, и у органов государственной безопасности и правоохранительных органов есть к ним доступ: «Если вы не хотите, чтобы кто-то что-то про вас узнал, может быть, в первую очередь не нужно этого делать, но если вам действительно нужна конфиденциальность, реальность такова, что поисковые системы, включая Google, действительно хранят эту информацию в течение некоторого времени... Вполне возможно, что эта информация может стать доступной властям» [2]. Были и академические исследования, о которых даже рассказывали СМИ [6], показывающие возможности Big Data восстанавливать социальный портрет пользователя социальных сетей: с большой вероятностью угадывать политическую и сексуальную ориентацию, уж не говоря о поле и цвете кожи. Было показано также, что эти параметры людей можно, правда, с меньшей точностью, оценить и в том случае, когда они не являются участниками электронного общения – через сведения об их друзьях, которые уже активно работают в сети [7]. Свидетельства Дж. Ассанжа и Э. Сноудена потрясли общественность, но не отвратили от активности в Интернете.

Экономическая эффективность информационного капитализма впечатляет, на это указывают многие исследователи. Яркий пример приводят авторы [8]. Три крупнейшие компании Кремниевой долины получили в 2014 г. прибыль 247 млрд долл., имея только 137 000 сотрудников и совокупную капитализацию 1,09 трлн долл. Эти результаты можно сравнить с автомобильной промышленностью Детройта, которая в конце 1990 г. имела прибыль в 250 млрд долл. и 1,2 млн сотрудников, а совокупная рыночная капитализация составляла всего 36 млрд долл. С конкурентным преимуществом компании Google из-за растущего в геометрической прогрессии сбора данных ее доходы от рекламы выросли с 21 млрд долл. США в 2008 г. до более чем 50 млрд долл. США в 2013 г. В феврале 2014 г., через 15 лет после своего основания, компания Google с рыночной стоимостью в размере 400 млрд долл. США вышла на второе место в мире по рыночной капитализации, обойдя компанию Exxon, и стала второй богатейшей компанией после Apple [2].

Как далеко пойдет развитие этого нового направления сетевого предпринимательства сказать трудно, однако его сегодняшние результаты однозначно требуют серьезного анализа специалистов по экономической теории и политической экономии для оценки возможных социальных и политических последствий и прогноза новой структуры мировой экономики.

Мы же можем вернуться к более близкой нам задаче – анализу Big Data как инструмента влияния на бизнес и прогнозу результатов этого влияния.

В проникновении информационных технологий в процессы принятия экономических решений большие данные занимают особое место. Известная

модель Нолана Нортонa [9], описывающая основные этапы этой эволюции, включает в себя пять обязательных фаз: на первом – это чистые технологии (оборудование + язык программирования), на втором – добавляются минимальные приложения (редактирование текстов, построение электронных таблиц...), затем появляются возможности создания приложений под заказ пользователя (бухгалтерия, расчет зарплаты...), на четвертом – такие приложения стандартизуются и предлагаются в виде готового продукта на рынке ИТ (1С: Предприятие...). Высшим уровнем применения ИТ в бизнесе предприятия считался пятый этап – на нем ИТ участвует в процессах добавления стоимости (ERP-системы).

Здесь принципиально важно, что большие данные добавляют в эту логику шестой этап – они сами становятся бизнесом, превратившись в инструмент получения прибыли непосредственно из анализа данных, которые свободно извлекаются из открытых источников. При этом становится понятным, что никакой исключительности технологии больших данных нет: используемые технические и математические инструменты специалистам уже известны. Гораздо важнее понять социально-экономическую и правовую суть последствий их использования.

Возвращаясь к вопросу Питера Друкера о следующей информационной революции, достаточных оснований об объявлении которой он не нашел в конце XX в.: им не было зафиксировано на тот момент таких изменений, которые по масштабу могли сравниться с имевшими место при третьей, по его счету, революции – появлении книгопечатания. Благодаря новой возможности копирования текстов и изображений мир получил новые возможности обучения – появились светские книги и возникли университеты, карты поверхности Земли раздвинули горизонты путешествий и были открыты новые земли. Ничего сравнимого с таким глобальным воздействием и изменениями в жизни мирового сообщества информационные технологии, по мнению П. Друкера, не демонстрировали. Похоже, что сегодня он изменил бы свое мнение. Четвертая информационная революция с приходом Big Data в бизнес свершилась. Появилась и сформировалась мировая информационная экономика, все свойства и последствия которой нам еще предстоит узнать. Исследователи верят, что мы на пути к информационной цивилизации.

### **Заключение**

Концепция RTE – предприятия реального времени – нашла неожиданную реализацию в деятельности мегаагрегаторов данных, каковыми являются лидеры современного информационного бизнеса – Google, Facebook, Twitter и др., демонстрирующих экономическую эффективность, недоступную компаниям традиционного материального профиля. Их деятельность происходит в институционально неопределенной среде, что обеспечивает им сверхдоходы и нарушает права пользователей. Со временем юридические нормативы изменят ситуацию и, возможно, приведут информационное предпринимательство в привычное правовое поле. Как к этому времени изменится

мировая экономика – открытый вопрос, и его обсуждение в среде экономистов и ИТ-специалистов обещает быть очень плодотворным.

#### Литература

1. Peter F. Drucker. The Next Information Revolution Forbes ASAP. – August 24, 1998.
2. Zuboff S. Big Other: Surveillance Capitalism and the Prospects of an Information Civilization // Journal of Information Technology. – 2015. – № 30. – P. 75–89.
3. Varian H. R. Computer Mediated Transactions // American Economic Review. – 2010. – Vol. 100(2).
4. Varian H. R. Beyond Big Data, Business Economics. – 2014. – Vol. 49(1).
5. Hayek F. A. The Fatal Conceit: The Error of Socialism. – Chicago, IL.: University of Chicago Press, 1998.
6. Анализ лайков на Facebook. Портрет, нарисованный лайками // Gazeta.ru. – 2013. – 12 марта
7. Kosinskia M., Stillwella D., Graepelb T. Private traits and attributes are predictable from digital records of human behavior // PNAS of USA. – 2013. – Feb.
8. Manyika J., Chui M. Digital era brings hyperscale challenges. – 2014.
9. Electronic Commerce: The Future is Here! Research Report // KPMG. – 1999.

DOI: 10.17223/9785751124335/19

### **АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ СЖАТИЯ ВИДЕОДАНЫХ ГРАФИЧЕСКОГО ИНТЕРФЕЙСА ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ**

*Д. В. Дружинин, А. В. Замятин*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

В начале XXI в. создание и применение видео различной природы стало доступно широкому кругу пользователей. Один из основных типов видео, распространённых среди пользователей персональных компьютеров (ПК), – видео графического интерфейса пользователя (Graphical User Interface видео, GUI-видео). Такое видео часто создают как необходимое дополнение к руководству пользователя информационно-программных комплексов или к описанию сценариев воспроизведения ошибок при взаимодействии команд разработчиков и инженеров по качеству программного обеспечения для повышения эффективности их коммуникации. Кроме того, GUI-видео создаётся рядовыми пользователями в режиме демонстрации собственного экрана компьютера с графическим интерфейсом собеседнику посредством широко применяемого телекоммуникационного программного обеспечения (Skype, Google Hangouts и др.).

Ввиду сравнительно значительного объёма видеоданных (данных, получаемых в ходе формирования видео) возникают сложности, связанные с необходимостью отводить большое количество дискового пространства и каналы связи высокой пропускной способности для их хранения и передачи. Как следствие, появляется задача минимизации как суммарного объёма передаваемых или хранимых видеоданных, так и *битрейта* (максимального количества передаваемых данных между узлами в сети за

единицу времени). Дополнительно эта задача осложняется тем, что GUI-видеоданные характеризуются высоким разрешением.

Кроме того, приложения, осуществляющие фиксацию GUI-видео, выполняют лишь вспомогательную функцию, работают в фоновом режиме и выполняются вместе с другими приложениями и сервисами операционной системы. Поэтому необходимо минимизировать уровень использования ими системных ресурсов компьютера, требуемых для эффективного исполнения основных задач пользователя. Как следствие, появляется нетривиальная антагонистическая задача повышения вычислительной эффективности алгоритмов фиксации и сжатия GUI-видеоданных при максимальной ресурсоэффективности. Под ресурсоэффективностью будем понимать уровень использования центрального процессора и оперативной памяти.

Существует множество алгоритмов сжатия видеоданных [1–7], подавляющее большинство которых предназначено для видео с видеоданной (традиционного видео). GUI-видео существенно отличается от традиционного видео, что в значительной мере ограничивает возможности применения к GUI-видеоданным традиционных алгоритмов сжатия. Так, в GUI-видеоданных преобладают дискретно-тоновые (резкие) цветовые переходы. Такие видеоданные, как правило, целесообразно сжимать без потерь информации специализированными алгоритмами, так как даже небольшой процент потерь может привести к неприемлемому визуальному ухудшению качества видеоданных.

Проблема создания эффективных алгоритмов сжатия GUI-видеоданных всё ещё остаётся малоизученной. Часть существующих алгоритмов, применяемых для сжатия GUI-видеоданных, не учитывает в полной мере отличия GUI-видео от традиционного видео, что приводит к низкой степени сжатия либо к плохому качеству декодированных видеоданных в случае сжатия с потерями информации. Часть алгоритмов сжатия не обладает достаточной вычислительной эффективностью и ресурсоэффективностью для сжатия GUI-видеоданных в фоновом режиме.

Одним из существующих алгоритмов сжатия видеоданных без потерь информации, обладающих высокой вычислительной и ресурсоэффективностью, является *алгоритм отсечения неизменившихся областей* кадра. Идея этого алгоритма заключается в следующем. При сравнении текущего и предыдущего кадров выявляются пиксели текущего кадра, изменившиеся по сравнению с предыдущим кадром. Выполняется поиск областей заданного типа в текущем кадре, содержащих хотя бы один изменившийся пиксель. В результирующий массив записываются идентификаторы изменившихся областей текущего кадра и пиксели этих областей.

Алгоритм отсечения неизменившихся областей устраняет временную избыточность видеоданных. Поскольку форма выявляемых областей может быть задана по-разному, можно говорить о группе алгоритмов отсечения неизменившихся областей кадра. В [8] описан входящий в эту группу

алгоритм отсечения неизменившихся блоков, предполагающий поиск в текущем кадре квадратных блоков заданного размера, содержащих пиксели, изменившие своё значение по сравнению с предыдущим кадром.

Ранее авторами предложен входящий в эту группу алгоритм отсечения неизменившихся строк и столбцов кадра [9]. В отличие от алгоритма отсечения неизменившихся блоков, кадр не делится на блоки, а рассматривается как матрица пикселей. Текущий кадр сравнивается с предыдущим кадром с целью выявления строк и столбцов, в которых есть изменившиеся пиксели. В результирующий массив записываются номера таких строк и столбцов, а также пиксели, находящиеся на их пересечении. Такие пиксели образуют изображение меньшего размера, которое затем может быть сжато теми же алгоритмами, что и ключевой кадр. Остальная часть промежуточного кадра при декодировании восстанавливается по предыдущему кадру. Принцип работы алгоритма проиллюстрирован на рис. 1.

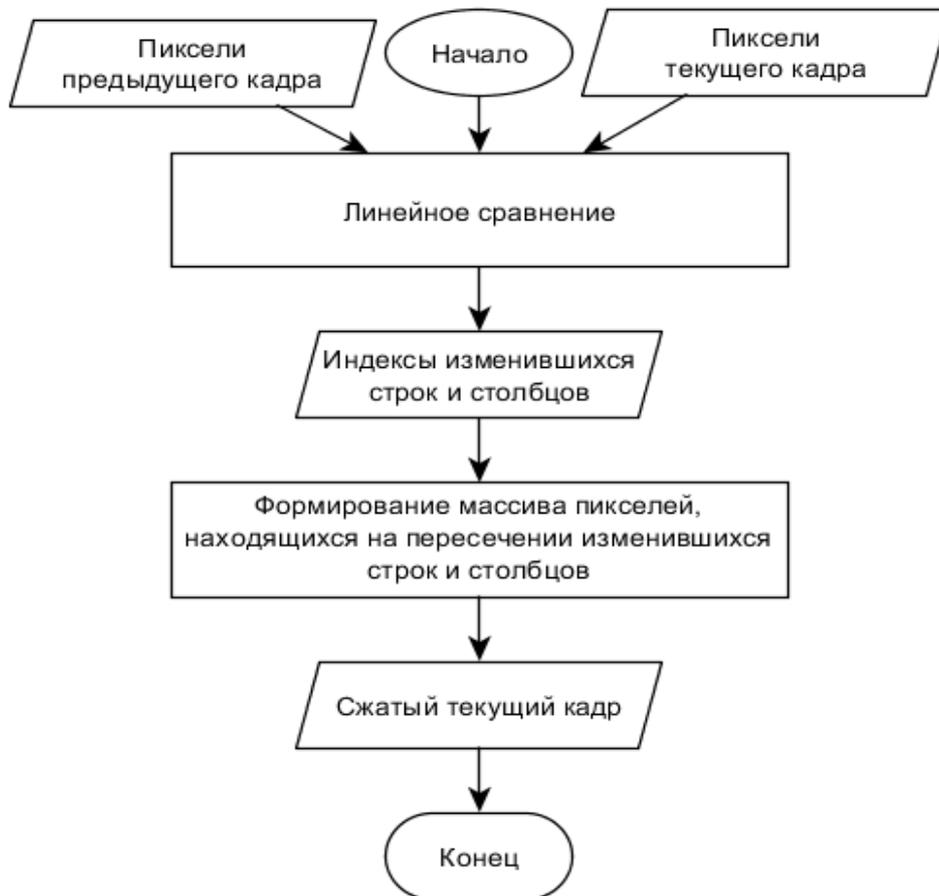


Рис. 1. Схема алгоритма отсечения неизменившихся строк и столбцов в кадре

В [9] проводится аналитическое и практическое сравнение алгоритмов выявления неизменившихся блоков и строк, столбцов. Оба алгоритма имеют трудоёмкость  $O(n)$ . Алгоритм отсечения неизменившихся строк и столбцов в кадре обеспечивает более высокую степень сжатия при точечных изменениях на экране (например, ввод пользователем текста), когда независимое кодирование целого блока является избыточным, а также в случае, когда форма

изменившейся области близка к прямоугольнику. Примером такого изменения может служить сворачивание или открытие свёрнутого окна. Минимальная степень сжатия данных у алгоритма отсечения неизменившихся строк и столбцов в кадре достигается при изменении одной из диагоналей изображения, потому что при этом выявляемая изменившаяся область охватывает всё изображение. Примером такого изменения является перемещение окна по направлению, близкому к диагональному. В этом случае более высокую степень сжатия обеспечивает алгоритм отсечения неизменившихся блоков.

Поскольку алгоритмы отсечения неизменившихся блоков и строк, столбцов в кадре обладают трудоёмкостью  $O(n)$  и не предполагают вычислительно сложных операций, возможно осуществление и линейного и блочного сравнения в ходе сжатия GUI-видеоданных. В этой работе представлен *адаптивный алгоритм*, сочетающий преимущества алгоритмов отсечения неизменившихся блоков и строк, столбцов в кадре (рис. 2). Этот алгоритм предполагает выполнение линейного и блочного сравнения кадров на первом этапе и кодирование в соответствии с типом сравнения, обеспечивающим более высокую степень сжатия, на втором этапе. Таким образом, адаптивный алгоритм на основе выполняемого на первом этапе анализа входных данных осуществляет выбор одного из алгоритмов отсечения неизменившихся блоков и строк, столбцов в кадре для сжатия данных на втором этапе.

Адаптивный алгоритм отсечения неизменившихся областей в кадре обладает трудоёмкостью  $O(n)$  и производит сжатие без потерь информации. При этом следующие неравенства верны при любых входных данных:

$$C_{\text{адапт}} \geq C_{\text{лин}},$$
$$C_{\text{адапт}} \geq C_{\text{блоч}},$$

где  $C_{\text{адапт}}$  – степень сжатия данных адаптивного алгоритма отсечения неизменившихся областей в кадре,  $C_{\text{блоч}}$ ,  $C_{\text{лин}}$ , – степени сжатия данных алгоритмов отсечения неизменившихся блоков и строк, столбцов соответственно.

Обратимся к **результатам экспериментальных исследований**. При тестировании каждый кадр имел разрешение  $1024 \times 768$  и глубину цвета в 32 бита. Тестирование проводилось на платформе со следующими характеристиками: процессор Intel Core 2 Duo E6750 2,66 ГГц, оперативная память DDR 2 2Гб, операционная система Windows XP. Каждый из тестовых наборов данных содержит 10 пар кадров, которые сравнивались для отсечения неизменившихся областей. Для тестирования были использованы следующие наборы данных:

1. Перемещение окна по направлению, близкому к диагональному. Сокращённо – Move.
2. Сворачивание и восстановление свёрнутого окна. Сокращённо – Minimize.

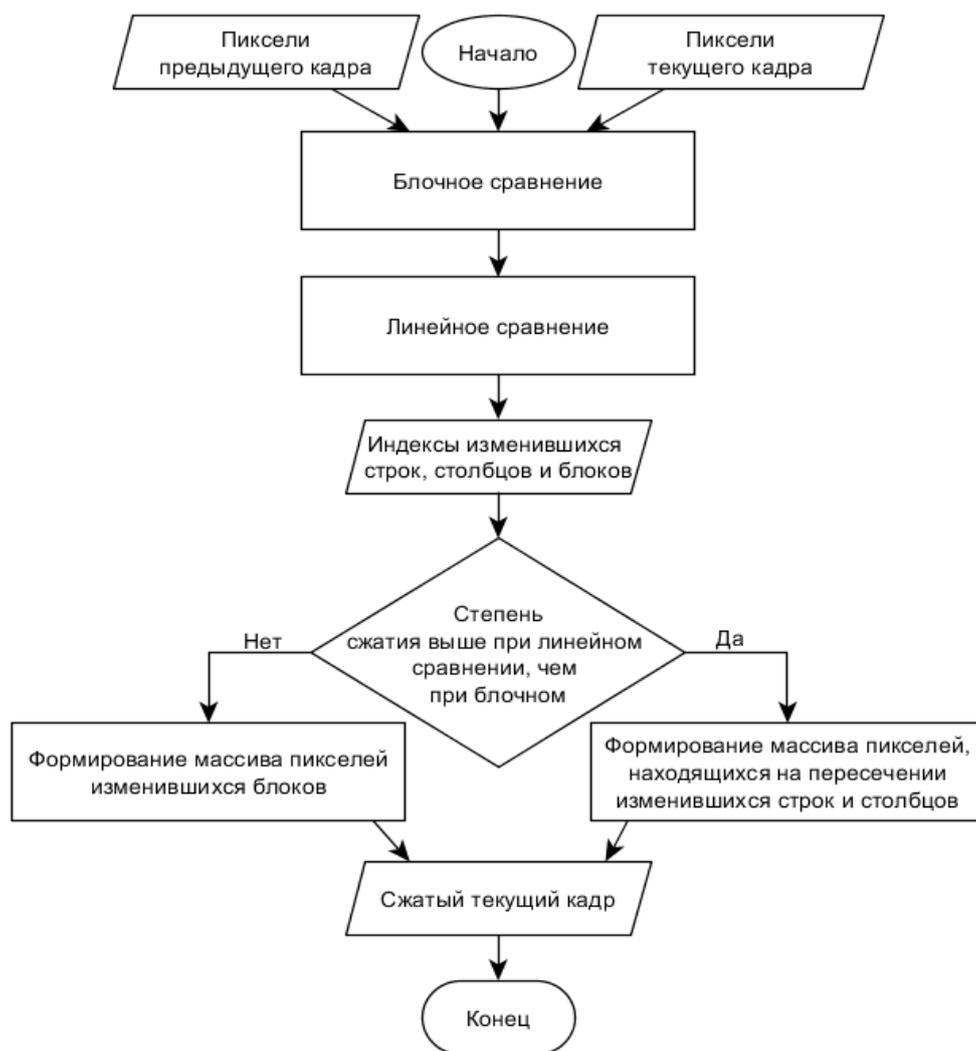


Рис. 2. Схема адаптивного алгоритма отсеечения неизменившихся областей в кадре

Эти наборы данных были получены в ОС Windows 7, Linux (графическая оболочка Ubuntu Gnome 14) и доступны по ссылке [10]. В тестировании принимали участие реализации следующих алгоритмов:

1. Алгоритм отсеечения неизменившихся строк и столбцов. Сокращённо – Lines detection.

2. Алгоритм отсеечения неизменившихся блоков. Сокращённо – Blocks detection.

3. Адаптивный алгоритм отсеечения неизменившихся областей кадра. Сокращённо – Adaptive detection.

Усреднённые результаты тестирования этих алгоритмов представлены на рис. 3. Для алгоритма, выявляющего изменившиеся блоки, был выбран размер блока  $8 \times 8$  пикселей, так как при таком размере блока на большинстве тестов достигается максимальная степень сжатия с учётом количества передаваемых номеров блоков.

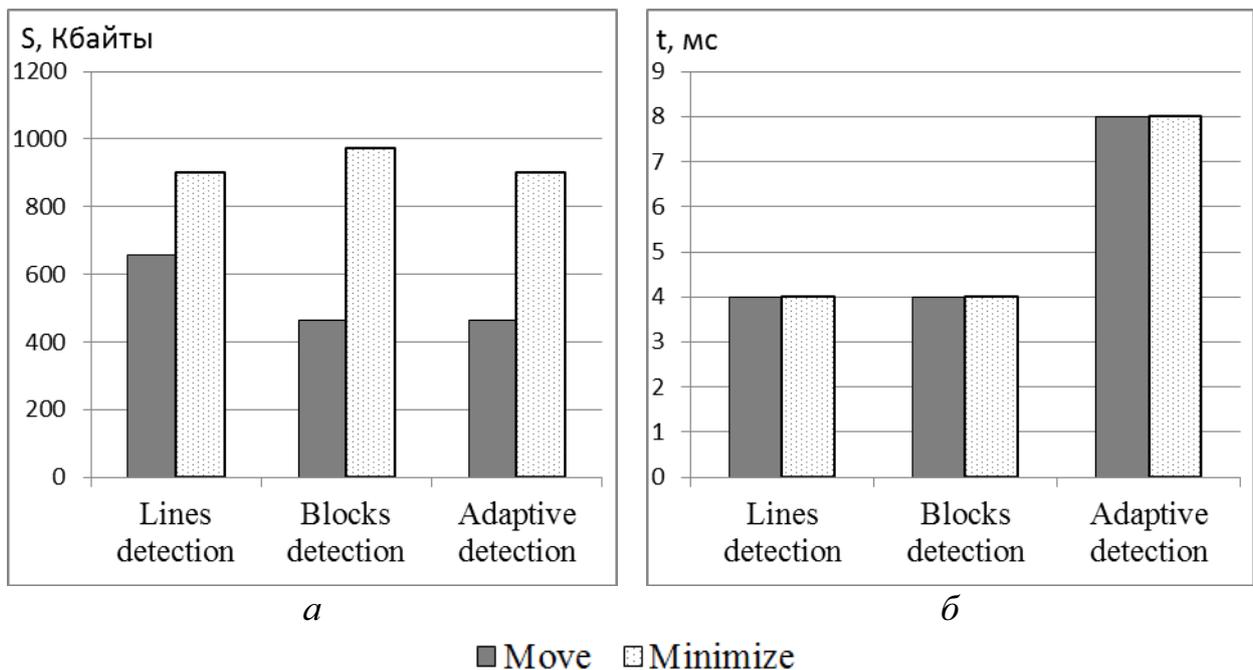


Рис. 3. Анализ эффективности алгоритмов отсеечения неизменившихся областей кадра: а – размер сжатого кадра; б – время кодирования

Адаптивный алгоритм работает несколько медленнее прочих за счёт выполнения и блочного, и линейного сравнения, но на всех тестовых наборах данных способен выбрать конкретный алгоритм отсеечения неизменившихся областей кадра, обеспечивающий более высокую степень сжатия. Высокая скорость сжатия кадра (< 10 мс) адаптивным алгоритмом позволяет обрабатывать кадры GUI-видео по мере их фиксации.

Таким образом, представленный адаптивный алгоритм позволяет повысить степень сжатия GUI-видеоданных по сравнению с другими алгоритмами отсеечения неизменившихся областей кадра при достаточно высокой вычислительной эффективности для оперативной обработки таких данных.

#### Литература

1. Ватолин Д. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео / Д. Ватолин и др. – М. : Диалог-МИФИ, 2003. – 384 с.
2. Agha S., Dwyer V. M. Algorithms and VLSI Architectures for MPEG-4 Motion Estimation [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.lboro.ac.uk/departments/el/research/esc-miniconference/papers/agma.pdf>
3. Morvan Y., Farin D., de With P. H. N. Incorporating depth-image based view-prediction into h.264 for multiview-image coding [Электронный ресурс]. – URL: <http://vca.ele.tue.nl/publications/data/Morvan2007d.pdf>
4. Movement estimation system for video signals using arecursive gradient method. [Электронный ресурс] / FreePatentsOnline.com. – URL: <http://www.freepatentsonline.com/4695882.html>
5. Pieters B., Van Rijsselbergen D., De Neve W. Motion Compensation and Reconstruction of H.264/AVC-coded Pictures using the GPU [Электронный ресурс]. – URL: [http://symposium.elis.ugent.be/archive/symp2006/papers\\_poster/paper084\\_Bart\\_Pieters.pdf](http://symposium.elis.ugent.be/archive/symp2006/papers_poster/paper084_Bart_Pieters.pdf)

6. Zamyatin A., Sarinova A., Cabral P. Lossless compression of hyperspectral images with pre-byte processing and intra-bands correlation// DYNA, Sede Medellin. – 2015. – Vol. 82, № 190. – P. 166–172.

7. Zamyatin A., Sarinova A., Cabral P. The Compression Algorithm of Hyperspectral Space Images Using Pre-byte Processing and Intra-bands Correlation // GEOProcessing 2014: The Sixth International Conference on Advanced Geographic Information Systems, Applications, and Services (IARIA). – P. 70–75.

8. Сэломон Д. Сжатие данных, изображений и звука / пер. с англ. В. В. Чепыжова. – М. : Техносфера, 2006. – 365 с.

9. Дружинин Д. В. Алгоритмы сжатия экранного видео, использующие корреляцию соседних кадров. // Известия Алтайского государственного университета: Научный журнал. – Барнаул: Изд-во Алтайского государственного университета. – 2014. – № 1/2(81). – С. 91–95.

10. Дружинин Д. В. Тестовые данные для алгоритмов отсечения неизменившихся областей [Электронный ресурс]. – URL: [https://drive.google.com/file/d/0B\\_2xi7pVvd23SE1maU5CR0d0MIU/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/0B_2xi7pVvd23SE1maU5CR0d0MIU/view?usp=sharing)

DOI: 10.17223/9785751124335/20

## **АЛГОРИТМЫ И СТРУКТУРЫ ДАННЫХ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ ПОВЕРХНОСТИ ПО ДАННЫМ ЛАЗЕРНОГО СКАНИРОВАНИЯ**

*Н. С. Мирза, А. В. Скворцов*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

В данной работе рассматриваются алгоритмы, позволяющие эффективно строить поверхности по облакам точек, полученных с помощью лазерного сканирования Земли. В основе разработанных алгоритмов построения и визуализации больших поверхностей лежит особая структура – «мультитриангуляции», которая позволяет получить поверхность с различной степенью детализации. Автором Предлагается модифицировать структуру мультитриангуляции таким образом, чтобы можно было работать со сверхбольшими моделями поверхностей, т.е. моделями данных, которые заведомо не умещаются в оперативной памяти компьютера.

### **Введение**

Традиционно для задач САПР получение исходных данных для построения цифровых моделей поверхностей осуществлялось с помощью тахеометров. На сегодняшний день всё чаще применяются более современные и эффективные методы: аэрофотосъёмка и лазерное сканирование.

Однако полученные в результате огромные массивы данных тяжелы для обработки, анализа и визуализации. В связи с этим требуется разработать новые эффективные алгоритмы и структуры данных для обработки сверхбольших моделей поверхностей.

### **Определения**

**Определение.** Поверхность  $F(X, Y) = Z$  определим как функцию высот от координат точек.

**Определение.** Если исходные данные (файлы с плановыми координатами) для построения поверхности не помещаются в оперативной памяти компьютера, то такую поверхность будем называть сверхбольшой.

Для моделирования поверхности в САПР- и ГИС-системах используется триангуляция (TIN, Height field) – планарный граф, все конечные грани которого являются треугольниками. В этом случае функция поверхности является однозначной и для каждой координаты (XY) ставит в соответствие ровно одну Z-координату.

**Определение.** Облаком точек будем называть массив данных (XYZ) для построения поверхности, полученный в результате лазерного сканирования.

В связи с тем, что точность лазерного сканирования очень высока, облака точек содержат гигабайты исходных данных, по которым нужно построить поверхность.

Если речь не идёт о суперкомпьютерах, то обычные алгоритмы построения поверхностей оказываются неприменимыми, так как для их корректной работы требуется уместить все данные в оперативной памяти.

На сегодняшний день данная проблема решается частичным прореживанием данных. К сожалению, это ведёт к существенной потере точности. А в некоторых случаях (как, например, для проектирования объектов транспортного строительства) варианты упрощения недопустимы из-за несоответствия запрашиваемой заказчиками точности.

В среде разработчиков трёхмерных игр существует подобная проблема при визуализации сверхбольших игровых рельефов. Эта проблема решается использованием пирамидальной структуры равномерных триангуляций. Вся поверхность рельефа делится на квадраты (прямоугольники), которые детализируются в зависимости от расстояния до камеры. Чем ближе участок поверхности, тем он отображается детальнее. Это позволяет существенно ускорить процесс визуализации, не теряя при этом в качестве картинки.

Та же самая идея используется в DirectX Progressive Mesh – специальной структуре данных, которая позволяет менять уровни детализации 3D-объектов (LOD) в зависимости от заданного критерия [3].

Однако данные для построения поверхности в ГИС и САПР являются особенными – неравномерными и с однозначно определённой для каждой координаты высотой (см. определение поверхности).

Чтобы использовать идею уровней детализации для такой поверхности, необходима новая модель данных.

Если бы поверхность умещалась в оперативной памяти, то для неравномерных триангуляций уже существует специальная структура данных – мультитриангуляция (MT), которая обеспечивает детализацию участков TIN по заданному критерию.

**Определение.** Мультитриангуляция – ориентированный граф фрагментов триангуляций, хранящий информацию о последовательных упрощениях исходной триангуляции.

Использование данной структуры позволяет заменять кусок поверхности на более упрощённый фрагмент, не боясь при этом повредить целостность данных TIN.

При этом в качестве корня графа выступает полная триангуляция, а стоком (последним элементом последовательности графа) является самая упрощённая. Или наоборот, в зависимости от ориентации графа (рис. 1).

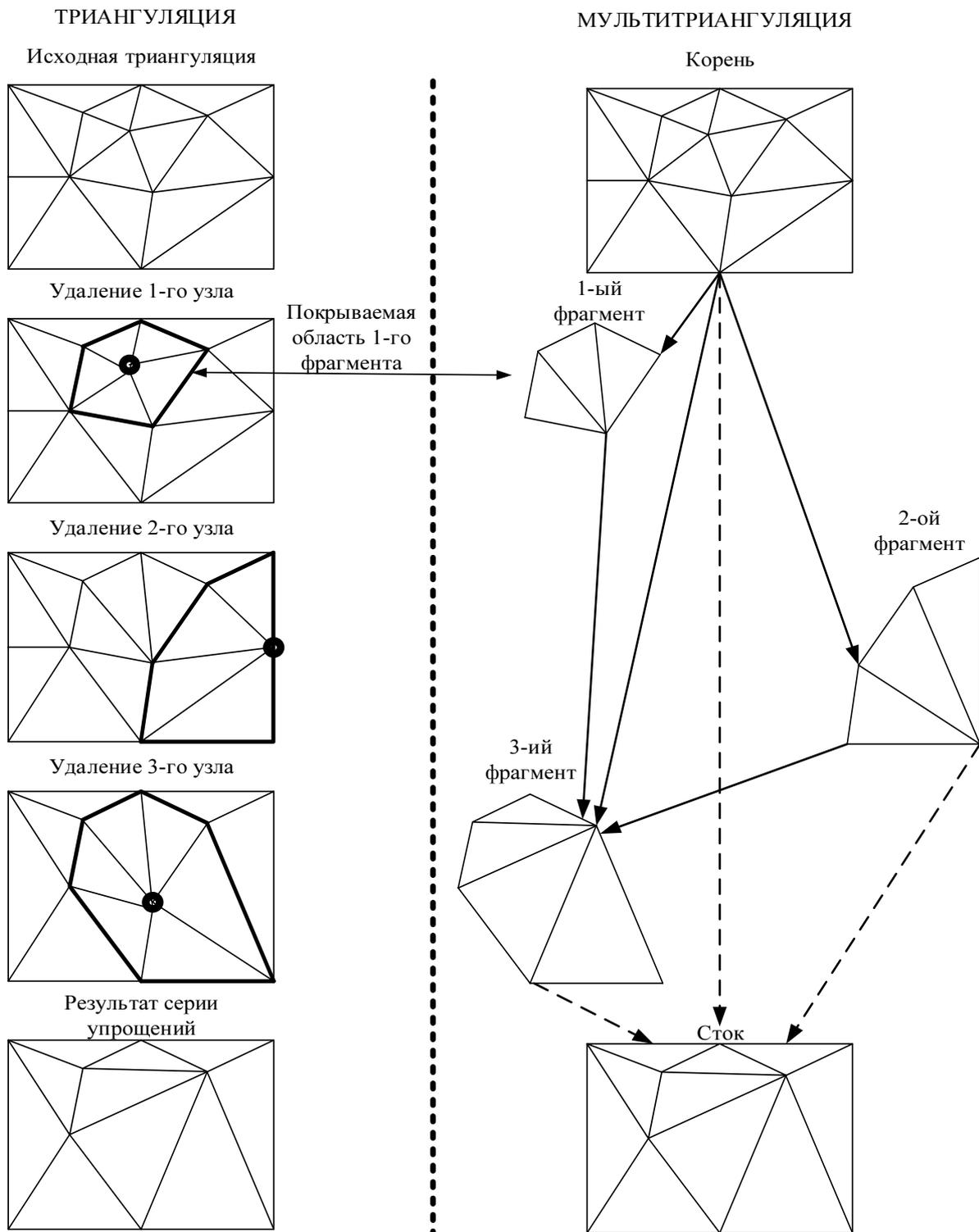


Рис. 1. Структура мультитриангуляции

Неразрешимой проблемой, в связи с которой использование данной структуры невозможно для построения поверхности по лазерному сканированию, является то, что исходными данными для её построения служит исходная TIN, которая слишком велика для того, чтобы загрузить её целиком в память.

Кроме того, даже если представить себе, что мы модифицировали алгоритм построения и создали МТ по данным лазерного сканирования, то всё равно с ней невозможно работать, так как для изменения уровней детализации участков поверхностей нам нужно загрузить в память весь граф целиком.

В связи с этим предлагается модифицировать структуру мультитриангуляции и алгоритм её построения так, чтобы обойти эти ограничения.

### **Модификация мультитриангуляции**

Для начала рассмотрим модификацию самой структуры мультитриангуляции.

Классический граф МТ легко можно представить в виде следующих структур данных:

1. Массив вершин ( $XYZ$ -координаты).
2. Список треугольников МТ.
3. Список фрагментов триангуляций (от сложного к упрощённому).

Идея модификации данной структуры заключается в упорядочивании списка фрагментов таким образом, чтобы разделить этот граф на независимые части. Это позволит привести её к виду растерной пирамиды и использовать идею загрузки в память только части огромной структуры.

Для реализации данной идеи предлагается следующий алгоритм.

#### **Модифицированный алгоритм построения МТ**

**Шаг 1.** На исходное облако точек накладывается растерная сеть из прямоугольников.

**Шаг 2.** Для каждого прямоугольника строится свой подграф МТ классическим алгоритмом [5].

**Шаг 3.** Оставшиеся части после построения упрощаются и сохраняются в стек.

#### **Конец алгоритма.**

В результате разбиения облака точек на прямоугольники получаются непересекающиеся подграфы МТ – *деревья*. Внутри деревьев хранятся обычные списки фрагментов, как и для классической мультитриангуляции.

Полученную на третьем шаге часть МТ будем называть *основной частью*, так как именно эта часть должна быть загружена в оперативную память, в то время как независимые деревья можно загружать и выгружать по требованию.

Таким образом, на выходе алгоритма получится структура МТ, схематично изображённая на рис. 2.

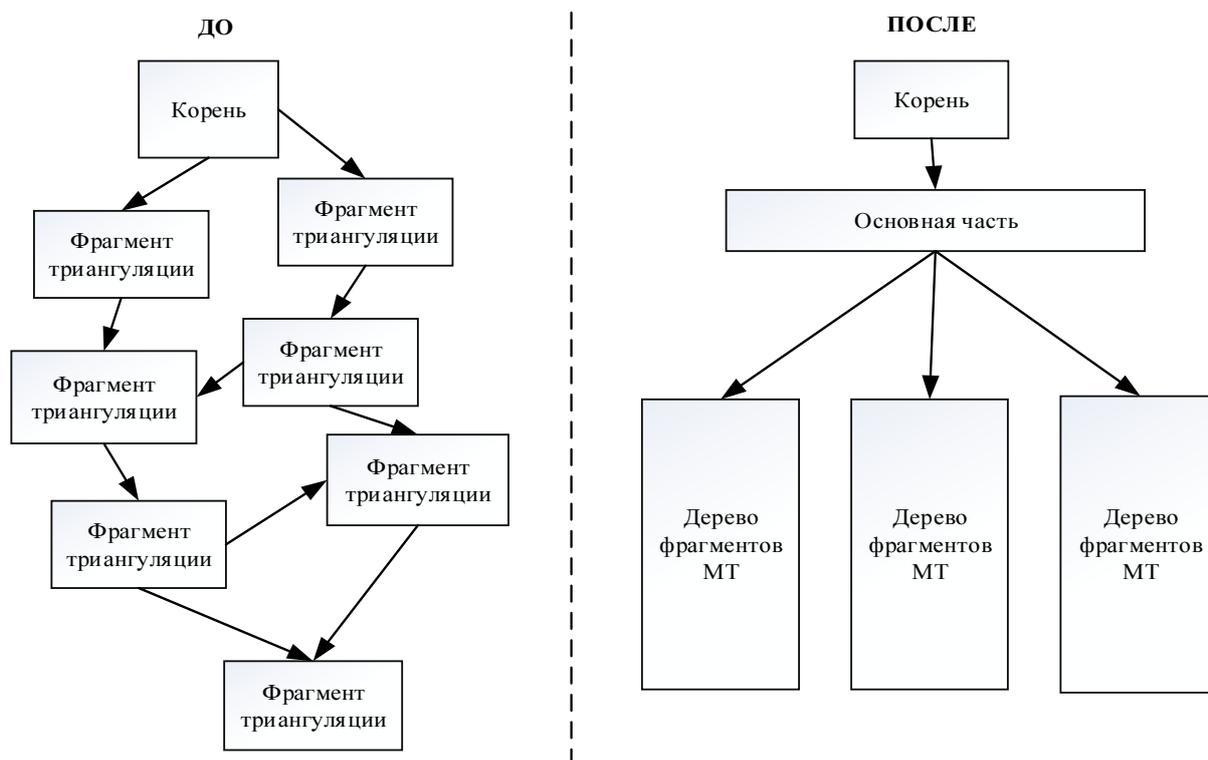


Рис. 2. Структура модифицированной мультитриангуляции

Размер ячейки разбиения влияет на скорость работы структуры данных. Так, если ячейка слишком велика, то полученные в результате деревья покрывают большие фрагменты поверхности, что снижает гибкость выгрузки данных из памяти.

Если же размер ячейки слишком мал, то остаточная основная часть получается слишком большой, что утяжеляет структуру МТ и увеличивает требования к наличию свободной памяти.

Разумным компромиссом в данном случае будет такое разбиение, при котором число точек в основной части и в каждом из деревьев примерно одинаково. Такую структуру МТ будем называть *сбалансированной*.

Авторами был проведен ряд исследований и выявлена формула для вычисления числа деревьев сбалансированной МТ.

$$TreeCount = \left\lceil \sqrt{\frac{N}{383} - 1,866 + 13,732} \right\rceil, \text{ где } N - \text{число исходных точек.}$$

Формула вычислена эмпирически для равномерного распределения точек. Впрочем, в случае лазерного сканирования точки распределяются равномерно по ходу движения лазера.

### Построение поверхностей по данным лазерного сканирования для задач САПР

Для построения модели поверхностей САПР гражданского, промышленного и транспортного строительства используется линейный проезд по проектируемому участку. Исходные данные получают упорядоченными вдоль некоторой траектории движения.

В связи с этим очень удобным представляется применение предложенной модификации МТ.

### **Алгоритм построения модели поверхности по данным лазерного сканирования**

**Шаг 1.** Из файла с исходным облаком точек считываются координаты некоторого числа точек, достаточного для построения по ним МТ (зависит от объёма доступной оперативной памяти).

**Шаг 2.** По полученному участку строится сбалансированная МТ.

**Шаг 3.** Построенная МТ сохраняется в файл и выгружается из памяти.

**Шаг 4.** Считывается следующий фрагмент данных и т.д.

#### **Конец алгоритма.**

В связи с тем, что исходное множество точек разбивается на части, необходимо также предусмотреть корректную стыковку смежных участков. Соответствующий алгоритм был предложен в [4].

После того как набор МТ построен и сохранён на жёсткий диск, он может быть использован для эффективного извлечения требуемой области в виде триангуляционной модели поверхности.

#### Литература

1. Скворцов А. В., Мирза Н. С. Алгоритмы построения и анализа триангуляции. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. – 168 с.
2. Puppo E. Variable resolution triangulations // Computational Geometry. – 1998. – Vol. 11. – P. 219–238.
3. Hoppe H. Progressive Meshes // Computer Graphics. – 1996. – Vol. 99 – P. 108.
4. Мирза Н. С., Скворцов А. В., Чаднов Р. В. Применение мультитриангуляции для визуализации сверхбольших поверхностей // Труды 15-й Международной конференции по компьютерной графике и её приложениям «Графикон'2005». – Новосибирск: Институт вычислительной математики и геофизики СО РАН, 2005. – С. 250–254.
5. De Floriani L., Magillo P., Puppo E. Building and traversing a surface at variable resolution // Proc. Conf. On Visualization '97. – 1997. – P. 18–24.
6. Мирза Н. С. Построение смежных триангуляций Делоне // Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование». Численные методы и комплексы программ. – Анжеро-Судженск, 2005. – С. 57–60.

DOI: 10.17223/9785751124335/21

## **МОДИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТНОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ODIS С ЦЕЛЬЮ УЧЕТА ОБЪЕМА ЗАЯВОК**

***А. Н. Моисеев, Е. П. Полин***

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

### **Введение**

Задача исследования систем массового обслуживания (СМО) со случайным объемом требований (заявок) [1] возникает при проектировании информационных сетей, объектом преобразования в которых является

информация, поступающая порциями в виде сообщений. В таких системах каждое требование характеризуется некоторой неотрицательной случайной величиной – объемом. Объем требования чаще всего соответствует объему памяти, занимаемому информацией о сообщении в реальной информационной системе. Под суммарным объемом понимается полная сумма объемов требований, находящихся в системе в заданный момент времени. В общем случае время обслуживания требования может зависеть от его объема.

При исследовании СМО со случайным объемом требований возникают различные задачи в зависимости от вида исследуемой СМО. В частности, для СМО с неограниченным числом приборов или неограниченным буфером задача состоит в определении характеристик суммарного объема в системе. Для СМО с ограниченным числом обслуживающих приборов и конечным объемом буфера интерес представляют не только суммарный объем заявок в системе, но и вероятность потери требования, вероятностные характеристики потерянного объема заявок и т.п. В случае, если рассматривается сеть массового обслуживания, интерес могут представлять характеристики суммарных объемов требований в каждом узле.

Так как аналитическое решение задач исследования СМО с произвольной функцией времени обслуживания и случайным объемом требований представляет определенные трудности, то для этой цели широко применяются методы имитационного моделирования. В течение ряда лет в Томском государственном университете идут разработка и развитие системы имитационного моделирования процессов массового обслуживания ODIS, которая обладает богатыми возможностями в области моделирования систем и сетей обслуживания различных конфигураций. Однако до настоящего момента в этой программной системе не было предусмотрено возможности учета объема поступающих требований, а весь анализ касался только вероятностных характеристик числа заявок (в буфере, системе, узлах сети). В настоящей работе предлагается модификация объектной модели данного приложения с целью учета объема входящих заявок.

**Общие сведения о системе ODIS.** В настоящем разделе кратко опишем основные элементы приложения ODIS, которые тем или иным образом будут вовлечены в процесс модификации.

Основной алгоритм имитационного моделирования в системе ODIS выполняется специальным объектом Модель (SimulationModel), который реализует пошаговое моделирование системы на основе дискретно-событийного подхода. Для этого в приложении реализована объектная модель событий, которая позволяет фиксировать будущие события в специальном журнале, индексируемом значением модельного времени, и таким образом последовательно обрабатывать изменения состояния элементов моделируемой системы. На рис. 1 представлен класс Event (Событие) и его связи с другими объектами модели.

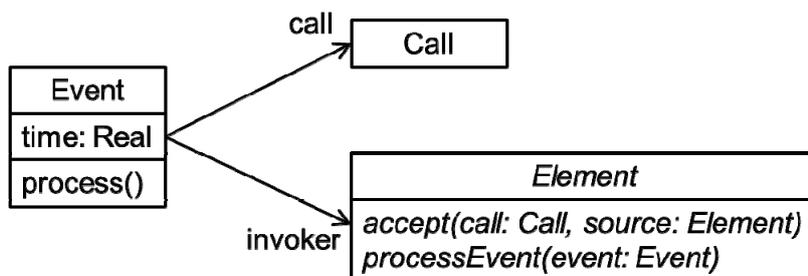


Рис. 1. Модель событий

Абстракция Call (Заявка) введена в систему как сущность переноса данных, связанных с конкретным входящим событием, а также для протоколирования информации его обработки. Объект Element – это любой элемент системы (источник заявок, блок обслуживающих приборов, буфер, маршрутизатор), способный принимать заявки (операция accept(...)) и/или генерировать и обрабатывать связанные с заявками события (операция processEvent(...)). Операция process() объекта Event вызывается объектом Модель каждый раз, когда указатель текущего времени сдвигается в журнале событий на очередное событие. Реализация этой операции состоит в вызове processEvent(...) у объекта, находящегося по указателю invoker.

Объектная модель элементов сети массового обслуживания, реализованная в приложении, представлена на рис. 2. Различные элементы модели являются потомками базового абстрактного класса Element. Каждый из них замещает операции accept() и processEvent() в соответствии со своими обязанностями.

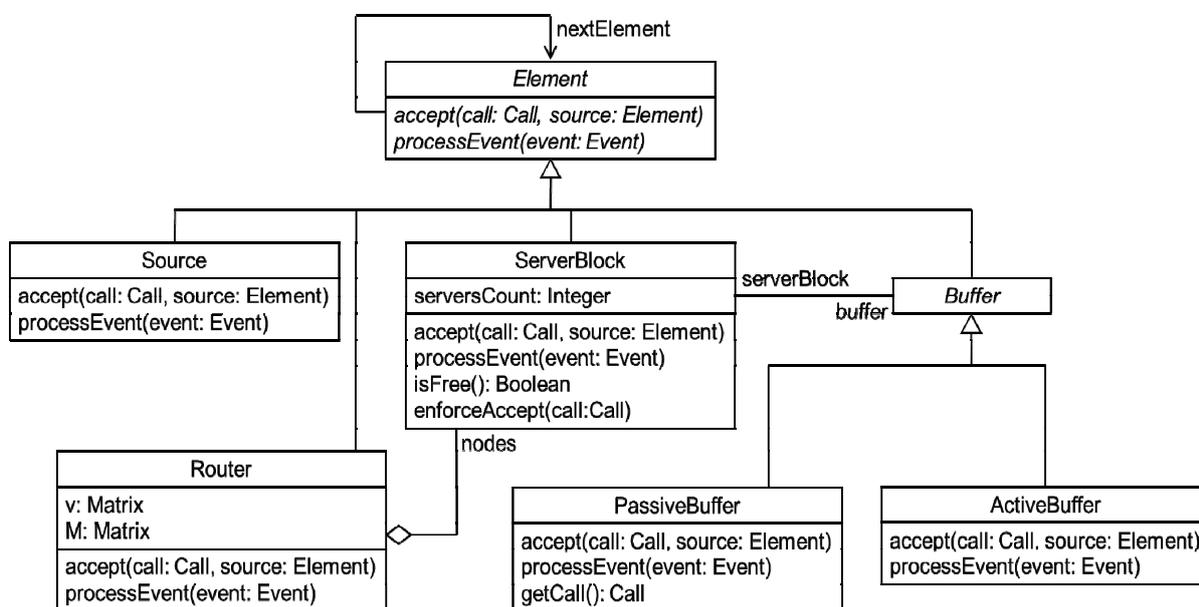


Рис. 2. Иерархия элементов объектной модели СеМО

Результатом имитационного моделирования является реализация случайного процесса изменения состояния сети массового обслуживания. Однако для исследователя наибольший интерес представляют статистические показатели функционирования, такие как выборочные

средние, ковариации и маргинальные выборочные распределения числа заявок в узлах сети. В программе имитационного моделирования ODIS контур накопления и обработки статистической информации реализован с помощью конкретных потомков класса `StatisticsAccumulator`, интерфейс которого представлен на рис. 3.

<i>StatisticsAccumulator</i>
<code>totalTime: Real</code> <code>generationVolume: Integer</code>
<code>addInterval(interval: Real, state: Integer[*])</code> <code>getMeans(): Matrix</code> <code>getCovariance(): Matrix</code> <code>save(filename: String)</code> <code>load(filename: String): StatisticsAccumulator</code> <code>merge(accumulator: StatisticsAccumulator)</code>

Рис. 3. Класс накопления и обработки статистической информации

**Модификация приложения с целью учета объема заявок.** Анализ объектной модели приложения показал, что реализовать в ней учет объема входящих заявок путем расширения (дополнения новыми классами) не удастся. Поэтому было принято решение провести модификацию путем внесения изменений в существующие классы таким образом, чтобы при этом максимально предусмотреть возможные задачи пользователей в будущем.

Для начала требуется предусмотреть возможность хранения значения объема заявки в некотором объекте переноса данных. В качестве такого объекта естественным образом подходит объект `Call`. В текущей реализации класс `Call` имеет один атрибут `generationTime`, который хранит момент поступления заявки в систему. Так как в СМО со случайным объемом требований каждая заявка дополнительно характеризуется некоторым случайным объемом, логично добавить в класс `Call` поле `volume`, представляющее собой значение этого объема. Однако для того чтобы максимально учесть все возможные величины, приносимые в систему вместе с заявкой, лучше всего создать ассоциативный массив таких величин, индексируемый по строковому ключу. В случае объема значение будет храниться по ключу «`volume`».

В СМО со случайным объемом требований в общем случае время обслуживания заявки зависит от ее объема, поэтому необходимо соответствующим образом в программе рассчитывать время, через которое заявка обслужится. Соответствующие изменения необходимо внести в метод `enforceAccept(...)` класса `ServerBlock`, который отвечает за генерацию события окончания обслуживания. Кроме этого, в настоящий момент в приложении ODIS ограниченность конечного буфера определяется числом заявок, которые могут находиться в нем одновременно. Но в общем случае буфер может быть ограничен и суммарным объемом пребывающих в нем заявок. Для реализации возможности такого учета требуется добавить в классе `Buffer` метод `GetTotalVolume()`. Таким образом, при моделировании

СМО со случайным объемом требований и конечным буфером, можно учитывать ограничение буфера не только по количеству заявок в нем, но и по значению их суммарного объема, и при превышении заданного объема буфера отказывать в приеме поступающих заявок.

Далее, в зависимости от вида исследуемой модели и типа решаемой задачи, пользователя могут интересовать вероятностные характеристики различных величин: число заявок в системе, буфере или отдельных узлах, значение суммарного объема в системе, буфере, узлах, возможно, несколько величин одновременно. Нужно предоставить пользователю возможность выбирать, что бы он хотел получить в качестве результата. Для этого необходимо добавить опции, в которых можно будет указывать, какие именно статистические данные накапливать, обрабатывать и визуализировать по окончании моделирования.

С этой целью определим класс State (рис. 4), который будет содержать все данные, необходимые для накопления и обработки статистической информации. В частности, при моделировании сетей обслуживания для учета числа заявок в узлах потребуется массив из целых неотрицательных чисел (это случай, который в настоящий момент реализован в приложении), а для учета объема заявок в узлах потребуется массив вещественных чисел. Для реализации возможности включать различные варианты учета статистической информации предлагается реализовать в классе State ассоциативный массив states, содержащий специальные объекты StateData, которые и будут реализовывать конкретные хранилища необходимой информации для текущего состояния моделируемой системы. В настоящий момент предлагается две конкретные реализации абстрактного класса StateData: IntStateData для хранения массива целых чисел и FloatStateData для массива вещественных чисел. Класс StateData имеет строковый атрибут key, определяющий семантику соответствующего объекта хранения. Этот же атрибут используется для индексации объектов StateData в массиве states объекта State.

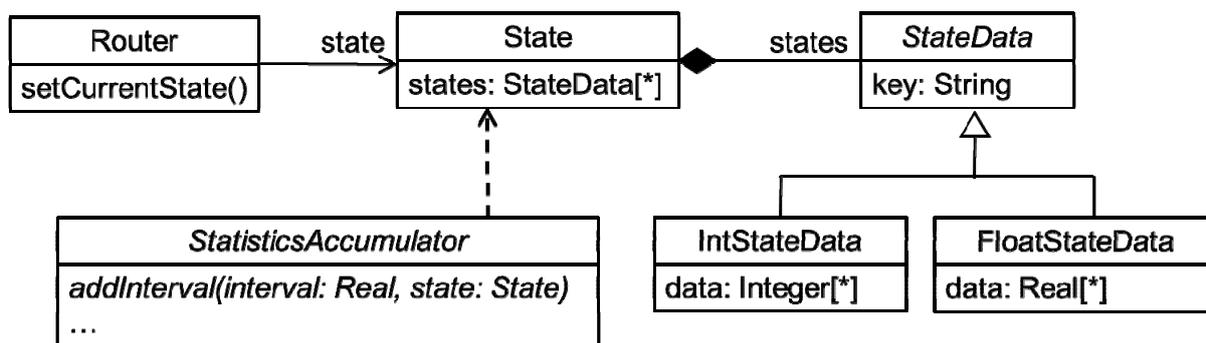


Рис. 4. Классы сбора, накопления и обработки статистической информации

Все изменения текущего состояния должны фиксироваться в объекте Router, так как именно он является ключевым объектом маршрутизации в объектной модели ODIS – любые изменения состояния моделируемой системы или сети производятся или фиксируются в его методе

processEvent(...). Для хранения текущего состояния модели в классе Router определим атрибут currentState типа State, а все действия, связанные с обработкой и фиксацией изменений, вынесем в специальный метод setCurrentState(), который будет вызываться из Router.processEvent(...). Благодаря тому, что объект Модель реализован как Одиночка [0], Router будет всегда иметь информацию о том, какие опции накопления статистических данных выбрал пользователь, и в соответствии с этим формировать и заполнять необходимые значения у объекта State.

Также в соответствии с внесенными изменениями модификациям будет подвергнут и класс StatisticsAccumulator. Новый интерфейс данного класса представлен на рис. 5. Кроме того, в данном классе также будут модифицированы и внутренние механизмы хранения и статистического анализа информации, но это по большей части технические моменты, которые не представляют особого интереса.

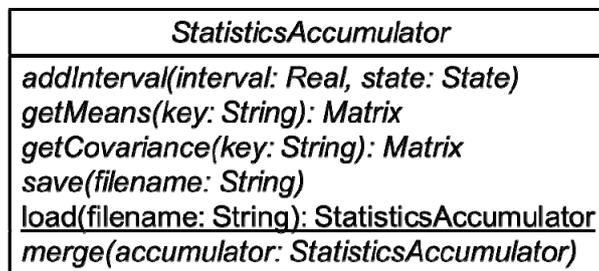


Рис. 5. Интерфейс класса StatisticsAccumulator после внесения изменений

**Заключение.** В работе предложена модификация объектной модели приложения для системы имитационного моделирования процессов массового обслуживания ODIS, выполненная с целью учета заявок, являющихся объектами переноса данных. В качестве примера таких заявок могут выступать требования случайного объема. Приложение модифицировано в соответствии с предлагаемой в работе моделью и успешно прошло практические тесты. Новая версия расширяет круг пользователей приложения, включая исследователей в области теории массового обслуживания, которые имеют дело с моделями, в которых заявки являются объектами переноса данных и имеется потребность вероятностного анализа этих данных.

*Работа выполнена при поддержке государственного задания Минобрнауки России № 1.511.2014/К.*

#### Литература

1. Александров А. М., Кац Б. А. Обслуживание потоков неоднородных требований // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1973. – № 2. – С. 47–52.
2. Тихоненко О. М. Распределение суммарного объема сообщений в однолинейной системе массового обслуживания с групповым поступлением // Автоматика и телемеханика. – 1985. – № 11. – С. 78–83.
3. Ивницкий В. А. Теория сетей массового обслуживания. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2004. – 772 с.

4. Мещеряков Р. В., Моисеев А. Н., Демин А. Ю. и др. Применение параллельных вычислений в имитационном моделировании сетей массового обслуживания // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 325, № 5. – С. 99–109.

5. Гамма Э., Хелм Р., Джонсон Р., Влессидес Дж. Приемы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования. – СПб.: Питер, 2010. – 368 с.

DOI: 10.17223/9785751124335/22

## **ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ПО ОБЕСПЕЧЕНИЮ ЭФФЕКТИВНОГО ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ**

*Л. А. Надеинский, А. Н. Абраменков, С. В. Васьковский  
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН*

В настоящее время современные информационные технологии внедряются в различные сферы человеческой деятельности, в том числе и образование. Поэтому при построении и реализации образовательных процессов важно использовать новейшие достижения информационных технологий. Не последнюю роль при взаимодействии преподавателя и обучающегося могут играть современные речевые интерфейсы [1, 2]. Кроме того, внедрение новейших обучающих систем способно увеличить эффективность процесса преподавания.

Под эффективностью обучения будем понимать быстрое и качественное усвоение преподаваемого курса определенной целевой аудиторией. Эффективность может оцениваться возможностью усвоения учебного материала с применением современных информационных технологий по сравнению с обучением на основе классических традиционных подходов. На практике доказано, что внедрение новейших обучающих систем увеличивает эффективность процесса преподавания различных дисциплин.

Другим критерием оценки эффективности новейших информационных технологий является оптимизация и организация дистанционного обучения и процессов его управления.

Исходя из опыта преподавания курса программирования, одним из авторов статьи при сравнении различных методов и подходов к обучению был выявлен ряд проблем и особенностей.

При очном обучении план занятия должен контролироваться преподавателем, а при самостоятельном – учащимся. При очном обучении план курса доступен в документации к курсу. При наличии программного комплекса план занятия и курса может быть доступен постоянно.

Возможность задать вопрос преподавателю при традиционном очном обучении ограничена, а при самостоятельном – невозможна. При применении современных обучающих средств – предполагает без отвлечения от занятия.

Кроме того, программные средства легко позволяют использовать дополнительные источники и осуществлять «процесс перемотки» занятия.

В рамках обучающей системы легко организовать обсуждение возникающих в процессе занятия проблем с аудиторией и преподавателем, не нарушая процесс проведения занятия, что при очном обучении может быть невозможно. У учащегося на очном занятии нет возможности приватно спросить преподавателя, визуализировать свой вопрос или вежливо обсудить вопрос с аудиторией.

Особенно необходимо отметить проблемы, связанные с проверкой знаний и домашних заданий. С этой точки зрения обучающая система содержит широкий спектр возможностей с различными вариациями, например с тестами, содержащими вопросы с вариантами выбора ответа.

Вебинары как способ проведения занятий также способны предоставить ряд преимуществ (массовость, удалённость). Однако для их эффективного использования необходимо расширять их функциональные возможности, в том числе и путём внедрения новейших технологий.

Создание эффективной системы обучения, включающей и расширяющей возможности вебинара, способной одинаково эффективно применяться как при заочном, так и при очном занятии, по мнению авторов, является реальной задачей.

Рассмотрим архитектуру и основные функции разработанного обучающего комплекса, а также основные подходы управления процессом обучения.

Разработанный программный комплекс состоит из ряда модулей, среди которых модуль проведения занятия, модуль управления курсом и модуль авторизации.

Центральным является модуль проведения занятий, в котором реализованы такие основные функции, как групповое взаимодействие пользователей (чат), интерактивная доска, видеотрансляция и др.

Чат является самой обширной областью для изучения и инноваций. На рис. 1 изображён пример интерфейса группового взаимодействия пользователей на занятии.

При проведении занятия чат может занимать важное место, являясь центром коммуникации преподавателя и ученика. Чат позволяет задавать вопросы и отвечать на сообщения (при этом сообщения отправляются согласно приоритету). При этом сами сообщения могут иметь различные типы (текстовые и гипертекстовые сообщения, сообщения с опросами, рисунки, ссылки на разнообразный контент).

Следует отметить, что имеется возможность формирования шаблонов сообщений, например шаблонов-заметок. Говоря о приоритете сообщений, имеется возможность закреплять сообщения поверх проходящих.

Кроме того, существует возможность отправлять видеосообщения с синхронным управлением от преподавателя для всех подключённых к чату пользователей.

Современным подходом в процессе обучения является использование методик, основанных на распознавании речи. Поэтому чрезвычайно важным

элементом разработанного программного комплекса является модуль распознавания речи. Использование речи делает взаимодействие обучающегося с компьютерной системой более эффективным и естественным. Необходимо подчеркнуть, что создание речевого интерфейса со слушателем – сложный процесс, который требует от разработчика знаний в самых различных областях, среди которых свойства распознавателей, природа речи, основы лингвистики, особенности поведения человека в различных ситуациях и присущие ему ограничения в восприятии понятий и речи. При проектировании удалось найти наиболее приемлемый способ использования системы распознавания речи, помогающей на занятии. С помощью данной системы можно решить ряд задач, например быстро надиктовывать вопросы и ответы.

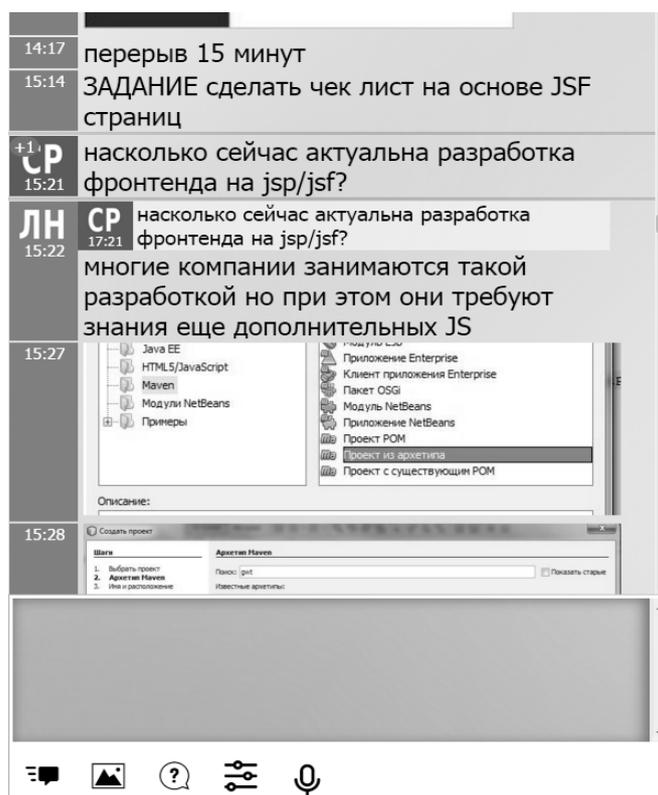


Рис. 1. Интерфейс группового взаимодействия

Новейшие подходы преподавания с использованием графических возможностей в значительной степени позволяют быстро усваивать учебный материал целевой аудитории. Среди графических возможностей обучающего комплекса эффективным средством преподавания является интерактивная доска (рис. 2). Она позволяет преподавателю совместно со студентами рисовать разнообразные изображения и передавать их в чат.

К основным элементам проведения занятия также относится видеотрансляция, позволяющая передавать видеоизображение с веб-камеры или экрана монитора преподавателя всем слушателям обучающего комплекса.

На занятии важно постоянно оценивать внимание слушателей, чему помогает ряд реализованных возможностей по мониторингу и проведению опросов.

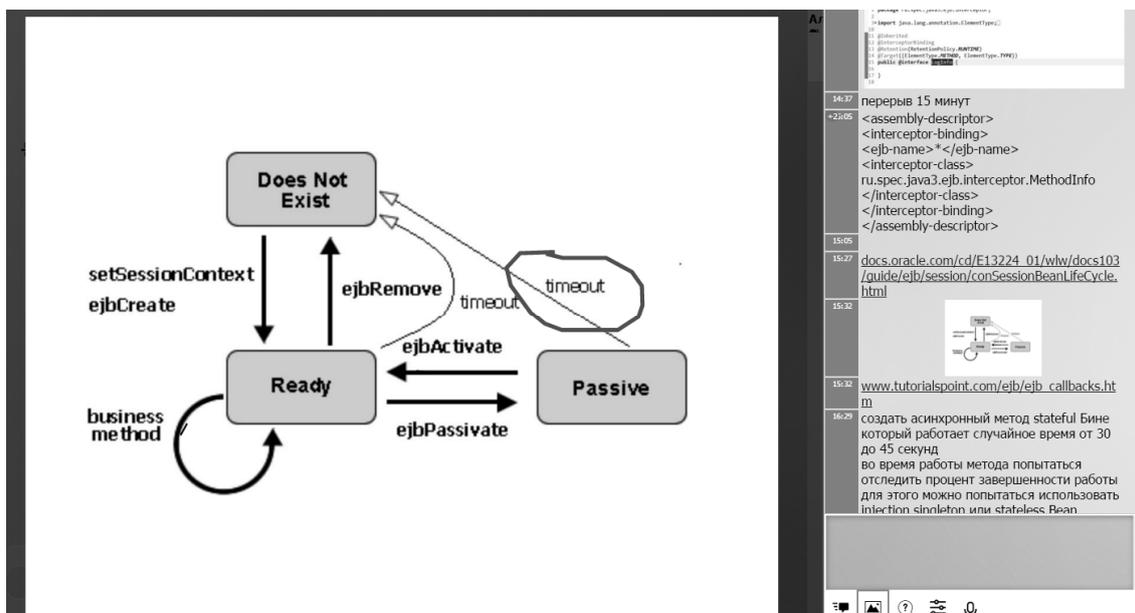


Рис. 2. Графические возможности обучающего комплекса (рисование на интерактивной доске)

Контроль присутствия можно осуществлять по состоянию вкладки браузера слушателя. В качестве обратной связи с аудиторией можно проводить мгновенные опросы с их последующей визуализацией.

При выполнении задания в другой программной среде также возможно отслеживать начало прохождения задания (по активности вкладки).

В момент проведения занятия преподаватель может отслеживать ряд параметров слушателей: статистика активности аудитории в списке группы; список подключённых пользователей (слушателей занятия); отображение качества интернет-соединения каждого пользователя (время отклика); информацию о том, просматривает пользователь материалы или нет.

В дальнейшем планируется добавить информацию о статусе пользователя (технические параметры оконечного терминала, статистика ответов на вопросы, пишет ли пользователь сообщение в чате и т.д.).

В программе присутствуют горячие клавиши, которые упрощают работу с элементами приложения (например, с контекстным меню), а также уведомления, сигнализирующие о возникновении тех или иных важных событий (приход нового сообщения в чат, открытие интерактивной доски и др.).

Отметим оставшиеся компоненты обучающего комплекса. В комплексе имеется модуль авторизации, позволяющий организовывать для пользователей различную иерархию доступа к ресурсам. Модуль управления курсами позволяет пользователям искать интересующие курсы (и записываться на них), создавать и редактировать свои курсы. Личная страница пользователя является точкой входа в приложение.

Разработанный обучающий комплекс успешно использовался в процессе преподавания курса по подготовке программистов и показал ряд достоинств и преимуществ по сравнению с традиционными методиками. При этом

важным направлением является создание обучающих средств, использующих не только системы распознавания речи, но и комплексное применение с традиционными подходами, широко применяющими графику.

Современный программный комплекс обучения должен обеспечивать взаимодействие человека с компьютером естественно и эффективно.

#### Литература

1. Петухова Н. В., Васьковский С. В., Фархадов М. П. Computer Speech Technologies in Modern Information and Service Systems (Компьютерные речевые технологии в современных информационных и сервисных системах) // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2013. – № 3. – С. 61–67.

2. Фархадов М. П., Петухова Н. В., Васьковский С. В., Смирнов В. А. Архитектура и характеристики систем распознавания речи // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. – 2013. – № 12. – С. 22–30.

DOI: 10.17223/9785751124335/23

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ НА БАЗЕ ТЕХНОЛОГИИ TIME-TRIGGERED ETHERNET**

*К. И. Никишин, Н. Н. Коннов, Д. В. Пащенко*  
*Пензенский государственный университет*

### **Введение**

Встраиваемые системы реального времени, применяемые для ответственных применений в авионике, космических аппаратах, автомобилестроении, используют распределенную архитектуру управления и развитые коммуникационные протоколы на базе технологии Time-Triggered Ethernet (TTE) [1].

Моделирование TTE-системы играет важную роль в исследовании и усовершенствовании самой технологии TTE. При этом основной акцент делается на безопасно-критические и отказоустойчивые особенности работы системы и принцип синхронизации времен между всеми узлами сети. Моделирование и верификация TTE как целой системы реального времени на сетях Петри нигде ранее не описывались и не исследовались. Кроме того, во многих работах исследуются лишь отдельные части TTE [2]. В данной статье рассматриваются вопросы моделирования именно всей системы.

### **Основные положения Time-Triggered Ethernet**

TTE является расширением стандартной Ethernet технологии (IEEE 802.3). Поэтому TTE легко встраивается в архитектуру существующих сетей. Основным принцип TTE заключается в том, что каждому узлу выделяется квант времени, за которое узел принимает или передает данные, т.е. создает временные слоты для всех узлов сети. Обмен сообщениями осуществляется с множественного доступа с временным разделением (TDMA), т.е. создаются TDMA-раунды. Это достигается за счет синхронизации часов у всех участников сети. Выделяют следующие основные свойства TTE:

1. Отказоустойчивое глобальное время – необходимо для всех объектов, взаимодействующих через глобальное время на всем временном промежутке.

2. Смешанная конфигурация – позволяет обрабатывать трафик как реального времени, так и стандартный – Ethernet технологии без использования дополнительного оборудования.

3. Сильная изоляция от ошибок – если произошла ошибка в сети, то учитывается ее обработка, и система работает в обычном режиме.

4. Пространство имен – где каждое сообщение имеет свое имя.

Функция синхронизации часов обеспечивает инициализацию синхронизации, и все локальные часы сети должны синхронизироваться с глобальным временем. Механизм синхронизации часов основывается на функции сжатия. Функция сжатия вычисляет сетевую задержку, которая основывается на локальной задержке узлов, для того чтобы синхронизировать все эти узлы.

### **Моделирование Time-Triggered Ethernet**

ТТЕ-система может иметь две конфигурации: стандартную и отказоустойчивую. В работе строится модель системы ТТЕ только стандартной конфигурации, в которой каждый клиент подключается к серверу через одиночный коммутатор для отправления сообщения к серверу. При этом клиентом и сервером может выступать любая пара подключаемых устройств. При обмене клиент–сервер учитывается возможность ошибки клиента, которая приводит к постоянной отправке кадров в сеть.

Модель ТТЕ разработана с использованием математического аппарата цветных иерархических временных сетей Петри [3]. В качестве инструментальной системы выбран свободно распространяемый пакет CPN Tools, который благодаря богатому набору расширений и наличию специального языка CPN ML позволяет моделировать различные аспекты поведения сложных телекоммуникационных систем [4].

Модель воспроизводит функционирование системы, состоящей из следующих частей: блока синхронизации глобального времени, коммуникационного канала, клиента и коммутатора-сервера. В статье рассматривается один клиент и один коммутатор/сервер, однако модель можно расширять и дополнять требуемым количеством клиентов и серверов.

При моделировании не рассматриваются реальные временные промежутки, а используется абстрактное время, которое удобно тем, что в данной модели исследуется функционирование самой системы и выявление недостижимых частей алгоритмов в ТТЕ.

Верхний уровень иерархии модели ТТЕ-системы представлен на рис. 1 и состоит из частей, описанных выше: блока синхронизации глобального времени, коммуникационного канала, клиента и коммутатора. Причем рассматривается только одна пара узлов.

В модели используются следующие основные цвета, константы и некоторые переменные модели:

– цвет **GlobTime**, который позволяет переменной иметь диапазон от 0 до  $n$ , где  $n$  равно сумме количества клиентов и количества коммутаторов (в данном случае  $n = 2$ ), и описывается так: `colset GlobTime = int with 0 ... 2 timed;`

– переменная `var globtime: GlobTime`, которая относится к цвету **GlobTime** и является ключевой в разработке модели ТТЕ, поскольку она отвечает за синхронизацию часов узлов коммуникационной сети, передаваясь клиентам и коммутатору, обеспечивая тем самым синхронизацию локальных часов всех узлов;

– константа, задающая сумму количества клиентов и количества коммутаторов в модели, `val numberpart = 2`.

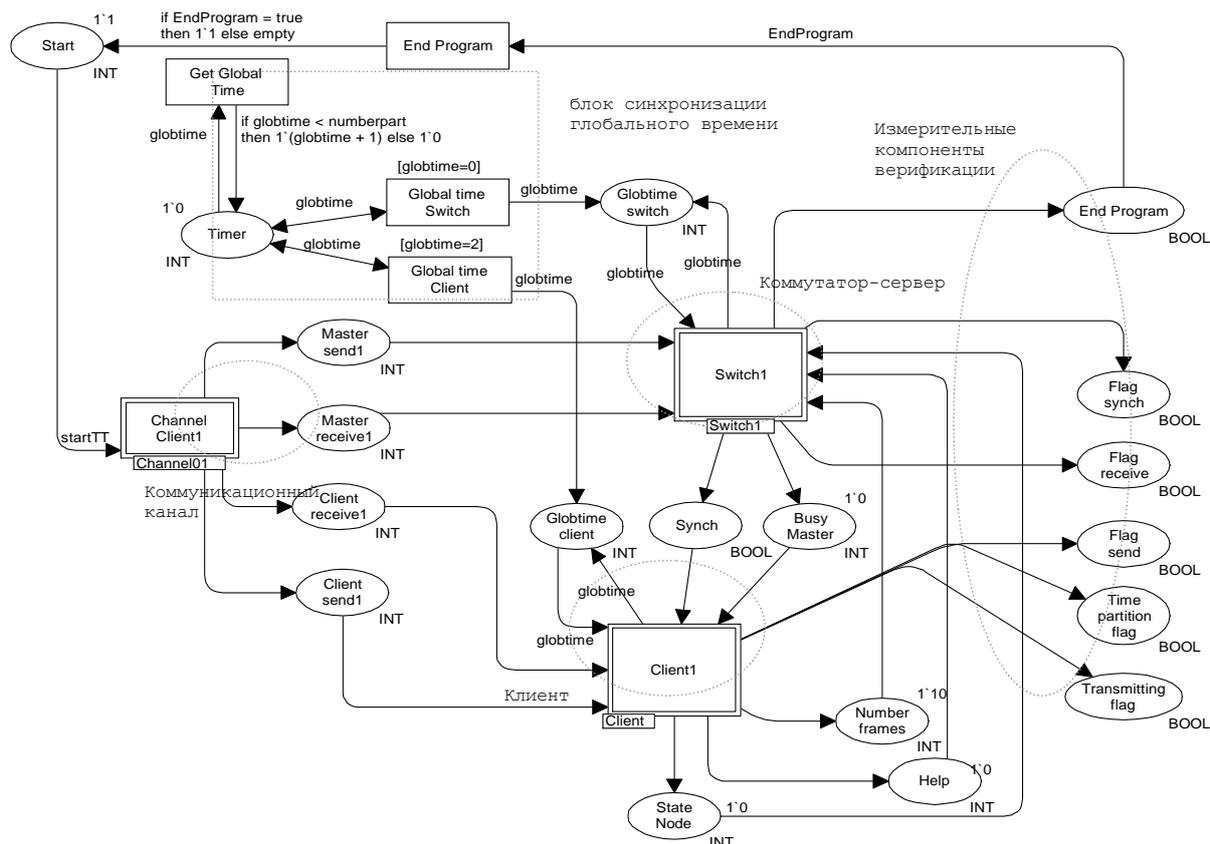


Рис. 1. Модель ТТЕ-системы

Алгоритм работы системы моделируется как приведенная ниже последовательность событий, отмеченных соответствующими маркерами.

**Start** – запуск ТТЕ-системы; передается в коммуникационный канал, для того чтобы началась работа и была осуществлена синхронизация между клиентом и коммутатором.

Коммуникационный канал вырабатывает четыре маркера, отмечающих события: передачи коммутатора, приема коммутатора, передачи клиента и приема клиента. Подробный алгоритм работы коммуникационного канала будет описан ниже.

Параллельно с выработкой маркеров от коммуникационного канала формируется глобальное время. Основа ТТЕ-систем – это определение пе-

редач реального времени и временных отрезков. Поэтому формирование глобального времени – очень важная часть ТТЕ-систем. Формирование глобального времени получается следующим образом: в позиции **Timer** хранится глобальное время, используемое для всех узлов ТТЕ-системы. Начальная маркировка позиции **Timer** равна 0. Вычисление значения глобального времени осуществляется на переходе **Get Global Time**, который осуществляет фактически циклическое инкрементирование переменной **globtime**. Ограничением цикла выступает константа **numberpart**. Глобальное время вычисляется следующим образом: если значение глобального времени меньше количества узлов ТТЕ-системы, то осуществляется инкрементирование значения глобального времени, иначе осуществляется сброс глобального времени, что на языке CPN ML записывается так: `if globtime < numberpart then 1` (globtime + 1) else 1`0.`

Если значение глобального времени равно 0, то запускается обработка коммутатора, но если готовы два маркера приема/передачи от коммуникационного канала. Если значение глобального времени равно 2, то запускается обработка клиента, но если готовы два маркера приема/передачи от коммуникационного канала. Значение глобального времени равное 1 – промежуточное состояние, используемое для исследования. После синхронизации все объекты будут иметь глобальное время.

После синхронизации клиента и коммутатора начинается передача кадров. В случае обработки последнего кадра коммутатором вырабатывается флаг окончания передачи и хранится в позиции **End Program**. Также наличие флага входит в одно из верификационных правил функционирования ТТЕ-системы, о которых будет сказано ниже. Если данный флаг установлен, то снова вырабатывается маркер запуска ТТЕ-системы и заново повторяется функционирование ТТЕ-системы.

### Верификация Time-Triggered Ethernet с использованием модели

Верификация ТТЕ-системы может быть была сделана с использованием верификационных правил, которые позволяют оценить достижимость и наличие тупиковых ситуации в моделируемой ТТЕ-системе. Описание верификационных правил выполнено с использованием логических операций и событий срабатывания на определенных переходах модели. События срабатывания на переходах обозначаются через переменную  $S$ , индекс переменной будет иметь название перехода и название подсети (клиент –  $C$ , коммутатор –  $M$ ).

Рассмотрим верификационные правила:

1. Передача начинается после успешной синхронизации узла:

$$S_{Synch\ happened, M} \ \& \ S_{Request\ to\ send\ or\ skip, C} \ \rightarrow \ S_{Busy\ Master, M}$$

Если наступает событие  $S_{Busy\ Master, M}$ , то устанавливается флаг в истинное значение у позиции **Flag synch** в подсети коммутатора. Иначе данная ветка алгоритма недостижима.

2. Отправленный кадр должен достичь своего адреса и быть принят им:

$$S_{Receive\ frames,M} \rightarrow S_{Free\ Signal,M}.$$

Данное правило означает, что если наступает событие  $S_{Receive\ frames,M}$  и при условии, что принимается последний кадр от клиента, то устанавливается флаг в истинное значение у позиции **Flag receive** в подсети коммутатора. Иначе данная ветка алгоритма недостижима.

3. Передача кадров клиента начинается после появления маркера разрешения на передачу:

$$S_{Permission\ to\ Send,C} \& S_{Send\ frames,C} \rightarrow S_{Go\ idle,C}.$$

Данное правило означает, что если наступает событие разрешения на передачу и выполняется передача кадров, то устанавливается флаг в истинное значение у позиции **Flag send** в подсети клиента. Иначе данная ветка алгоритма недостижима.

4. Каждый узел имеет свой временной интервал.

В данное правило добавляются переменные, обозначаемые через P. Индексом у переменной будет название переменной и название подсети:

$$S_{Synch\ token,C} \& P_{globtime,C} = P_{TimeA,C} \rightarrow P_{Time\ partition\ flag,C}.$$

Данное правило означает, что если наступает событие  $S_{Synch\ token,C}$  и переменная глобального времени  $P_{globtime,C}$  равна переменной  $P_{TimeA,C}$  (в данном случае для первого клиента  $P_{TimeA,C}$  равно константе 2), то устанавливается переменная  $P_{Time\ partition\ flag,C}$  в истинное значение и записывается в позицию **Time partition flag**. Иначе данная ветка алгоритма недостижима.

5. Передача осуществляется после обнаружения активного клиента через его идентификационный номер ID:

$$S_{Transmitting\ flag,C} \rightarrow P_{Transmitting\ flag,C}.$$

Данное правило означает, что если сработал переход  $S_{Transmitting\ flag,C}$  учитывающий только активное значение позиции **State Node** (нулевое значение – клиент не активен), то установится флаг  $P_{Transmitting\ flag,C}$  в истинное значение. Иначе данная ветка алгоритма недостижима.

6. Каждая передача должна быть завершена:

$$S_{End\ Program,M} \rightarrow P_{End\ Program,M}.$$

Данное правило означает, что если сработал переход  $S_{End\ Program,M}$ , то установится флаг  $P_{End\ Program,M}$  в истинное значение. Иначе данная ветка алгоритма недостижима.

Все шесть правил функционально полностью описывают условия корректного функционирования протокола TTE.

Верификационные правила применялись к разработанной модели ТТЕ-системы и были введены соответственно либо в подсеть клиента, либо в подсеть коммутатора в качестве измерительных компонентов модели, которые обеспечивают наглядность верификации. Для удобства верификационные правила были вынесены на верхний уровень иерархии модели и представлены на рис. 1.

Подобная задача верификации ТТЕ-системы решалась с использованием среды PRISM и встроенного в среду языка программирования [5]. Однако принятые в этой работе верификационные правила рассматривались отдельно от разработанной модели, не наглядны и для их обработки потребовалась разработка сторонней программы на языке C++. Кроме того, невозможно сразу определить в ходе моделирования истинность или ложность данных правил для исследователя данной модели.

Представленные в настоящей статье верификационные правила удобны в восприятии, включены в разработанную модель ТТЕ-системы, что позволяет в ходе моделирования сразу увидеть результат верификации по состоянию соответствующих флагов.

### **Выводы**

Разработана цветная иерархическая временная сеть Петри, моделирующая функционирование системы Time-Triggered Ethernet.

Показана возможность использования модели для верификации протоколов ТТЕ на недостижимость и выявление тупиковых состояний.

Результаты работы могут быть применены в исследовании и усовершенствовании технологии Time-Triggered Ethernet.

С дальнейшим развитием модели авторами планируется учет временных параметров компонент ТТЕ-системы (задержки и джиттер) и характеристик трафика коммутируемого трафика, что позволит выполнять не только логический анализ функционирования системы, но и оценивать ее вероятностно-временные характеристики.

*Работа выполнена в рамках ФЦП «Исследование и разработка по приоритетным направлениям развития ИТК России на 2014–2020 гг.» (соглашение № 14.574.21.00045 от 19.06.14) UIN: RFMEFI57414X0045.*

### **Литература**

1. Kopetz H. Real-Time Systems: Design Principles for Distributed Embedded Applications. – Springer, 2011.

2. Kopetz H., Ademaj A., Grillinger P., Steinhammer K. The time-triggered Ethernet (tte) design // Proc. of 8th IEEE International Symposium on Object-oriented Real-time Distributed Computing (ISORC). – Seattle; Washington, May 2005.

3. Jensen K., Kristensen L. Coloured Petri Nets: modelling and validation of concurrent systems. – 2009.

4. Kizilov E., Konnov N., Nikishin K. et al. Scheduling queues in the Ethernet switch, considering the waiting time of frames // MATEC Web of Conferences. – 2016. – Vol. 44. – P. 01011-p. – 1-01011-p.

5. Ammar M., Ouchani S., Mohamed O. Ai. Symmetry Reduction of Time-Triggered Ethernet Protocol // Procedia Computer Science 19. – 2013. – P. 273–280.

## **ПОДГОТОВИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА АЛГОРИТМОВ СЖАТИЯ ГИПЕРСПЕКТРАЛЬНЫХ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ С УЧЕТОМ МЕЖДИАПАЗОННОЙ КОРРЕЛЯЦИИ С ПОТЕРЯМИ И БЕЗ ПОТЕРЬ**

*А. Ж. Сарина*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

### **Описание задачи сжатия гиперспектральных аэрокосмических изображений**

Современные спутниковые центры космического мониторинга и дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) позволяют оперативно принимать, регистрировать, обрабатывать, архивировать и распространять большие объемы данных, составляющие порой сотни гигабайт. Передаваемые данные накапливаются на наземных станциях, занимая при этом огромное дисковое пространство, требующее в свою очередь затраты на их хранение. Известно, что аэрокосмические изображения (АИ) характеризуются следующими характеристиками – спектральным, радиометрическим, пространственным разрешениями, геометрическими размерами сцены, отличаются различным числом каналов и диапазонов. В гиперспектральных АИ для каждого пикселя в изображении гиперспектральная камера принимает интенсивность света для большого числа (обычно от нескольких десятков до нескольких сотен) смежных спектральных диапазонов. Каждый пиксель в изображении, таким образом, содержит непрерывный спектр и может быть использован для характеристики объектов в сцене с большой точностью и детализацией [1–3]. Следовательно, гиперспектральные АИ приводят к значительно улучшенной способности классифицировать объекты в сцене на основе их спектральных свойств. В связи с богатым содержанием информации в гиперспектральных АИ они однозначно хорошо подходят для автоматизированной обработки изображений ДЗЗ. В последнее время большинство исследователей при решении задач ДЗЗ особое внимание уделяют гиперспектральным АИ.

Гиперспектральные АИ, характеризующиеся различным числом каналов, спектральным диапазоном и радиометрическим разрешением, передаются с космических аппаратов (КА) на наземные станции, требующие архивирования в подсистемах хранения данных ДЗЗ ограниченной емкости по каналам связи ограниченной пропускной способности [4]. В связи с этим одной из важных задач является архивирование гиперспектральных АИ. В основе таких систем архивирования лежат различного рода форматы, методы и алгоритмы сжатия. Проблемы, связанные с разработкой современных систем сжатия для архивирования гиперспектральных АИ, можно разделить на два основных направления:

- 1) разработка высокопроизводительных методов и алгоритмов сжатия гиперспектральных АИ на борту КА с целью уменьшения вычислительных ресурсов для их архивации;

2) разработка эффективных методов и алгоритмов сжатия гиперспектральных АИ в центрах аэрокосмического мониторинга и обработки таких изображений с высокими показателями архивации.

К первому направлению относится создание систем архивации на борту КА, разработка которых является достаточно трудоемкой и сложной задачей. Уровень сложности такой задачи определяется тем, что вычислительные процессы архивации приводят к увеличению временной разрешающей способности.

Второе направление предполагает разработку и использование наиболее эффективных подходов к методам и алгоритмам сжатия гиперспектральных АИ. При этом возникает ситуация, когда необходимо исследовать проблемы задачи сжатия гиперспектральных АИ, на наличие известных решений для её решения.

### **Специализированные программные системы для обработки АИ**

Для исследования вышеописанной проблемы представим наиболее известные системы сжатия гиперспектральных АИ. В настоящее время существует программное обеспечение, предназначенное для сжатия гиперспектральных АИ. К ним относятся *ERDAS Imagine*, *ERDASER Mapper*, *ArcView GIS*, *GeoExpress*, которое все чаще наделяют специализированными модулями для сжатия АИ. Так, пакет *ERDAS Imagine*, а также *ArcView GIS* имеют инструменты сжатия изображений в формате MrSID (*IMAGINE MrSID Desktop Encoder* и *IMAGINE MrSID Workstation Encoder*). Их суть в том, что при создании изображения MrSID использует дискретное вейвлет-преобразование без потерь и с потерями. Система *ERDASER Mapper* имеет модули сжатия с потерями данных на основе стандартов *JPEG2000* и Enhanced Compression Wavelet (ECW) [5–9]. Программный продукт *GeoExpress* использует *JPEG2000* и формат *MrSID*.

Вышеперечисленные программные системы всё чаще включают в себя алгоритмы и методы сжатия гиперспектральных АИ на основе известных стандартов и форматов.

По результатам анализа имеющихся специализированных систем для сжатия гиперспектральных АИ показано, что многие системы используют небольшой спектр форматов сжатия с потерями и без потерь *JPEG 2000*, *MrSID* и *ECV*. Помимо специализированных систем, для сжатия исследованы частные реализации, которые ведутся по обработке гиперспектральных АИ, данные работы отражены в [10–15].

В данных работах проводились исследования проблем и перспектив сжатия гиперспектральных данных с потерями и без потерь. Большинство подходов основано на вейвлетах с потерями и без потерь. Среди разработок сжатием без потерь занимается меньшее число исследователей.

### **Предлагаемое решение задачи сжатия гиперспектральных АИ**

На основе вышеизложенных подходов к алгоритмам и методам сжатия гиперспектральных АИ можно сделать вывод, что наиболее широко использованными способами решения задачи сжатия могут являться:

- учет спектральной корреляции, что дает определенные преимущества на основе рассчитанной корреляционной матрицы;
- адаптивное вейвлет-преобразование;
- метрики для оценки критериев качества восстановленных изображений PSNR, MSE, PMSE и др.

### **Результаты исследования**

Проведены экспериментальные исследования подготовительной обработки данных для сжатия гиперспектральных АИ на основе разработанных алгоритмов по характеристикам степени сжатия без потерь и с потерями.

*I. Подготовительная обработка для сжатия гиперспектральных АИ без потерь. Рассмотрим подготовительную обработку адаптированного алгоритма данных перед сжатием гиперспектральных АИ без потерь с учетом междиапазонной корреляции. Алгоритм предлагается реализовать в три этапа:*

1. Преобразование структуры данных на основе исходного гиперспектрального АИ, хранящей значения вейвлет-коэффициентов, на примере одномерного вейвлета Хаара и учет междиапазонной корреляции между каналами изображений путем её подсчета (формирования массивов отклонений (разностей) исходных данных от значений найденной функциональной зависимости).

2. Адаптированная обработка преобразованных массивов данных с учетом поблочного формирования гиперспектральных АИ.

3. Сжатие одним из энтропийных алгоритмов.

*II. Подготовительная обработка для сжатия гиперспектральных АИ с потерями. Рассмотрим подготовительную обработку, основанную на вейвлет-преобразованиях, с учетом междиапазонной корреляции перед сжатием гиперспектральных АИ без потерь.*

*Возможны следующие этапы подготовительных обработок гиперспектральных АИ на основе предлагаемых этапов:*

1. Учет междиапазонной корреляции между каналами АИ.

2. Преобразование структуры данных на основе исходного гиперспектрального АИ, хранящей значения вейвлет-коэффициентов, на примере одномерного и двумерного вейвлета Хаара [16].

3. Преобразование структуры данных на основе исходного гиперспектрального АИ, хранящей значения вейвлет-коэффициентов, на примере одномерного вейвлета Добеши [17].

4. Преобразование на основе этапов 1–3 путем заданного шага квантования вейвлет-коэффициентов.

5. Использование стандартных метрик для оценки критериев качества восстановленных изображений PSNR, MSE, PMSE и др.

6. Сжатие одним из стандартных энтропийных алгоритмов.

## Экспериментальные исследования

Для определения эффективности предлагаемого алгоритма с точки зрения степени сжатия, а также пределов его применимости проведен ряд экспериментов на гиперспектральных АИ. Выполнено сравнение предложенного алгоритма с результатами экспериментов, полученных для универсальных алгоритмов сжатия архиваторов и компрессора *Lossless JPEG 2000*, широко применяемого в коммерческих системах обработки данных ДЗЗ. Эксперименты степени сжатия в сравнении с известными архиваторами и JPEG 2000 представлены на графике по степени сжатия без потерь (рис. 1).

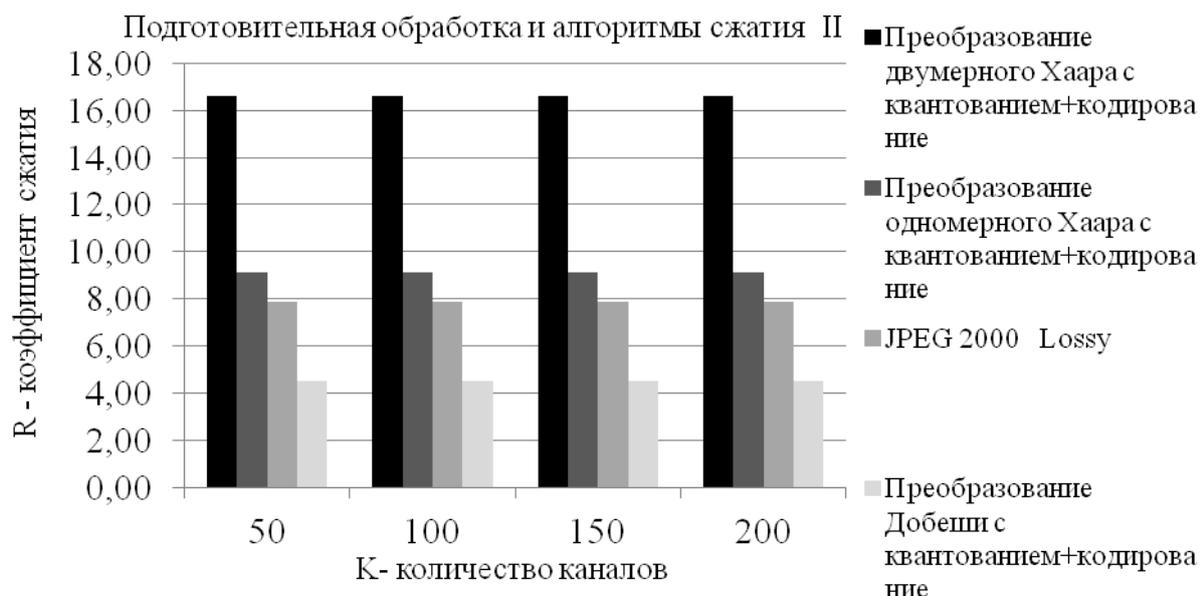


Рис. 1. Сравнение алгоритмов сжатия без потерь по степени сжатия

Как видно из рис. 1, показатели степени алгоритма сжатия I превосходят в степени сжатия архиваторы *WinRar*, *WinZip* и *Lossless JPEG* более чем на 80%.

Показатели степеней сжатия двумерного и одномерного вейвлета преобразования Хаара, Добеши и JPEG 2000 Lossy представлены на рис. 2.

Как видно из рис. 2, показатели степеней сжатия одномерного и двумерного вейвлета преобразования Хаара с потерями превосходят в степени сжатия вейвлет Добеши и компрессора *Lossless JPEG 2000*.



*Рис. 2. Показатели степеней сжатия алгоритмов с потерями*

### Заключение

На основе проведенных исследований следует сделать следующие выводы:

- подготовительная обработка без потерь с учетом междиановой корреляции и предложенного алгоритма позволяет повысить степень сжатия до  $R=9$ , чем в предложенных алгоритмах [11–13,15];

- предлагаемый подход с потерями определяется в адаптивных преобразованиях, основанных на вейвлет-преобразованиях Хаара и Добеши путём применения заданного шага квантования и последующего арифметического кодирования;

- полученные результаты сравнения преобразованных гиперспектральных АИ с JPEG 2000 *Lossless* с помощью полученных вейвлет-коэффициентов позволяют предположить эффективность применения подготовительных этапов.

Перспективами дальнейших исследований могут быть кодирование преобразованных гиперспектральных АИ адаптивным алгоритмом SPIHT, SPECK и адаптивным арифметическим кодированием.

### Литература

1. [Электронный ресурс]. – URL: [http://www.en.wikipedia.org/wiki/Panchromatic\\_film.html](http://www.en.wikipedia.org/wiki/Panchromatic_film.html) (дата обращения: 15.02.2015).
2. [Электронный ресурс]. – URL: [http://www.en.wikipedia.org/wiki/Multispectral\\_image](http://www.en.wikipedia.org/wiki/Multispectral_image) (дата обращения: 16.02.2015).
3. [Электронный ресурс]. – URL: [http://www.hypex.no/hyperspectral\\_imaging/](http://www.hypex.no/hyperspectral_imaging/)(дата обращения: 16.02.2015).
4. [Электронный ресурс]. – URL: [http://www.aviris.jpl.nasa.gov/aviris/data\\_facility.html](http://www.aviris.jpl.nasa.gov/aviris/data_facility.html) (дата обращения: 16.02.2015).
5. [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.gisa.ru/1489.html> (дата обращения: 02.03.2015).

6. [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.wikipedia.org/wiki/MrSID> (дата обращения: 03.03.2015)
7. [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.wikipedia.org/wiki/MrSID> (дата обращения: 10.03.2015)
8. [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.jpeg.org/jpeg2000/> (дата обращения: 01.03.2015)
9. [Электронный ресурс]. – URL: [http://www.wikipedia.org/wiki/Enhanced\\_Compression\\_Wavelet](http://www.wikipedia.org/wiki/Enhanced_Compression_Wavelet) (дата обращения: 01.03.2015).
10. Mohand O., Akrouf L. and etc. Aviris Hyperspectral Images Compression Using 3d Spiht Algorithm // Journal of Engineering (IOSRJEN) e-ISSN: 2250-3021, p-ISSN: 2278-8719. – 2012. – Vol. 2, is. 10. – P. 31–36.
11. Cheng-chen L., Yin-Tsung H. Lossless Compression of Hyperspectral Images Using Adaptive Prediction and Backward Search Schemes // Journal of information science and engineering. – 2011. – № 27. – P. 419–435.
12. Emmanuel C. Hyperspectral Data Compression Tradeoff. Augmented Vision and Reality, 3, DOI: 10.1007/978-3-642-14212-3\_2. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. – 22 p.
13. CCSDS Secretariat. Lossless multispectral & hyperspectral image compression. CCSDS Recommended standard for lossless multispectral & hyperspectral image compression. Recommended Standard, Space Communications and Navigation Office, 7L70. NASA Headquarters. – Washington, DC 20546-0001, USA, 2012. – 52 p.
14. Sindhuja N.M., Arumugam A. SPIHT based compression of hyper spectral images // International Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering. – 2013. – Vol. 2, is. 10. – P. 4933–4938.
15. Yuan L., Jianping L., Ke G. Lossless compression of hyperspectral images using hybrid context prediction // OPTICS EXPRESS. – 2012. – Vol. 20, № 7. – P. 8199–8206.
16. Richard W., Hamming N. Haar Wavelets. – CRC Press LLC, 1999. – 28 p.
17. Daubechies I. Lectures on Wavelets. – SIAM, 1992. – 343 p.

DOI: 10.17223/9785751124335/25

## **ЭФЕКТИВНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННОЙ МНОГОПОТОЧНОЙ АРХИТЕКТУРЫ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ПОТОКОБЕЗОПАСНЫХ ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

***М. Фархадов, Н. Надеинский***

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Рассматриваются современные нововведения в архитектуре центральных процессоров и их использование для реализации параллельных алгоритмов в среде Java 7 Enterprise Edition с целью повышения производительности приложений систем массового обслуживания.

### **1. Введение**

Существует большое количество различных видов параллелизма: на уровне битов, инструкций, данных, параллелизм задач (многопоточность), распределенные операционные системы. Современные информационные технологии позволяют использовать все виды параллелизма, но проектирование приложений, которые выполняются параллельно, – это всегда сложная задача.

Одна из основных задач в системах массового обслуживания, для достижения которой используется параллелизм, – это увеличение производительности приложения. Но можно ли достичь высокой производительности информационной системы, не используя параллельные вычисления? Так как увеличение частоты вычислительного блока ведет к нелинейному увеличению потребления электричества и нелинейному увеличению тепловыделения, то задача увеличения производительности без использования параллельных вычислений не решается. На данный момент границей производительности последовательных вычислений является частота от полутра до четырёх миллиардов операций в секунду в зависимости от архитектуры чипа. Такая производительность не позволяет реализовать систему массового обслуживания в одном потоке выполнения.

Использованию различных видов параллелизма сопутствуют множества различных сложностей:

- сложности проектирования параллельных приложений,
- различные виды блокировок,
- возможные снижения производительности на отдельных участках в определенных условиях.

В этой статье разбираются современные нововведения в архитектуре центральных процессоров и их применение для реализации параллельных алгоритмов в среде Java 7 Enterprise Edition.

## **2. Проблема использования рекурсивных алгоритмов**

Вычисление рекурсивных функций на центральных процессорах – это удобный для разработчика способ ухудшить качество алгоритма по нескольким параметрам. Использование рекурсии:

- минимизирует возможности CPU по ускорению выполняемого кода. Работая с циклами, CPU может «развернуть» цикл и заранее обратиться к ОЗУ, загрузив значения в регистры еще до того, как они потребуются;
- может легко приводить к переполнению стека, так как информация о всех высотах, их состоянии и точках возврата собирается полностью. Это сильно уменьшает универсальность алгоритма вследствие сужения множества значений входных аргументов;
- не имеет возможности распараллеливания на SIMD-архитектуре.

В большинстве случаев сложно ускорение на многоядерной платформе из-за сложности операции создания потока и небольшого среднего размера создаваемого потока. Если провести параллель с грузоперевозками, то даже при наличии большого количества грузовиков для перевозки песка из карьера доставка песка на стройку затрудняется тем, что каждый грузовик будет возить с собой еще и свой собственный экскаватор, и для песка остается совсем мало места.

При всех недостатках рекурсивных функций есть целый ряд задач, которые крайне удобно реализуются именно рекурсией, что привело к исследованию особенностей использования рекурсивных функций в рамках

современного набора команд CPU и созданию технологий параллельного выполнения легковесных и рекурсивных задач. Эти технологии продолжают развиваться, основываясь на новом фреймворке **Fork/Join Framework (FJF)** [1] спецификации Java 7.

Глобальное значение фразы Fork/Join – методика, заключающаяся в разделении задачи на параллельные, синхронизованные последовательные подзадачи.

**Fork/Join Framework** – это библиотека (часть спецификации Java 7), позволяющая использовать преимущества симметричной многоядерной SISD-архитектуры по таксономии Флинна для эффективного параллельного выполнения относительно легковесных операций без операций создания нового потока задач.

Главной идеей, реализованной в фреймворке, можно назвать механизм экономии количества параллельных потоков за счет использования простаивающих активных потоков.

«Первостепенным» объектом библиотеки является класс **ForkJoinPool (FJP)** [2], расширяющий **AbstractExecutorService**. **FJP** реализует основные алгоритмы обмена заданиями между потоками. Выполняемым объектом является экземпляр класса **ForkJoinTask**. **FJP** для разработчика – это целая среда запуска и управления выполнением множества легковесных заданий, которая автоматически прикрепляет (joins) параллельную задачу (fork) к простаивающим потокам. Технология предполагает:

- удобный программный интерфейс для разработчика;
- постепенную интеграцию в существующие стандарты языка;
- решение классических проблем использования рекурсивных функций;
- возможность использования асинхронных вычислений;
- интеграцию в Project Lambda спецификации Java 8.

Архитектура FJF с точки зрения разработчика состоит всего из трех частей:

1. Менеджер использования потоков и точка входа – класс **ForkJoinPool**, который реализует интерфейс **ExecutorService**, что упрощает переход к новой технологии.
2. Легковесная задача – класс **ForkJoinTask (FJT)**. Экземпляры наследников этого абстрактного класса будут обрабатываться в **FJP**.
3. Две реализации **FJT** для рекурсивных задач – классы **RecursiveTask** и **RecursiveAction**, которые предполагают выполнение задач, возвращающих значение, и задач, не возвращающих значение соответственно.

**FJP** сильно отличается от всех предыдущих реализаций интерфейса **ExecutorService** технологией перераспределения активных потоков (work-stealing): **FJP** пытается найти активный поток для новой задачи, что приводит к значительной экономии операций создания и завершения

потоков, а следовательно, и к увеличению производительности со снижением загрузки стека.

**FJP** предполагает использование количества параллельных потоков, которое соответствует количеству доступных процессоров, но это количество может быть изменено при вызове конструктора **FJP** для возможности эффективного использования нескольких **FJP** в одном приложении.

**FJP** можно использовать для отслеживания информации о состоянии очереди задач, что упрощает оптимизацию и поиск узких мест в приложении.

Задача, выполняемая в **FJP**, должна быть реализована через базовый класс **FJT**, но недостаточно унаследоваться от **FJT**. Для получения высокопроизводительного решения следует:

- не использовать синхронизацию;
- реализовывать неблокирующие алгоритмы;
- использовать механизм присоединения задач (join);
- использовать специальные синхронизаторы для планирования расписания в **FJF**;
- не использовать блокирующие потоки ввода/вывода;
- объем задачи должен варьироваться от 100 до 10000 вычислений (НЕ линий кода);
- большие задачи должны быть разбиты на достаточно маленькие;
- использовать технологию CAS.

**Технология CAS** (compare and set или compare and swap) – атомарная инструкция, сравнивающая значение в памяти с одним из аргументов и в случае успеха записывающая второй аргумент в память. Поддерживается в семействах процессоров x86, Itanium, Sparc и др. Технология CAS позволяет реализовывать синхронизацию без блокировки данных по следующему алгоритму:

- чтение значения из ячейки памяти;
- сравниваются значения ячейки и предполагаемое значение в регистре;
- если значение совпадает с предполагаемым, то в ячейку записывается новое значение;
- если значение не совпадает, то записывается прочитанное на первом шаге значение.

**CAS** предоставляет незаменимые при работе с многопоточностью атомарные операции.

Неблокирующая синхронизация – подход в параллельном программировании на симметрично-многопроцессорных системах, рекомендующих отказ от традиционных шаблонов блокировки, таких как семафоры, мьютексы и события. Разделение доступа между потоками идёт за счёт атомарных операций (**CAS**) и специальных, разработанных под конкретную задачу механизмов блокировки.

Преимущество неблокирующих алгоритмов – лучшая масштабируемость по количеству процессоров.

Если один из потоков фоновой задачей будет прерван, остальные выполнят свою работу, не простаивая. Возможна передача вычислений прерванной задачи на другой поток.

### 3. Шаблон использования FJF

Предполагается, что задания для параллельного выполнения будут максимально раздроблены на минимальные блоки (рис. 1). Такой подход стал возможен за счет минимизации запусков новых потоков, что является трудоемкой операцией. Существующие потоки разделяют между собой расчеты различных заданий, а общее количество потоков определяется количеством доступных процессоров.

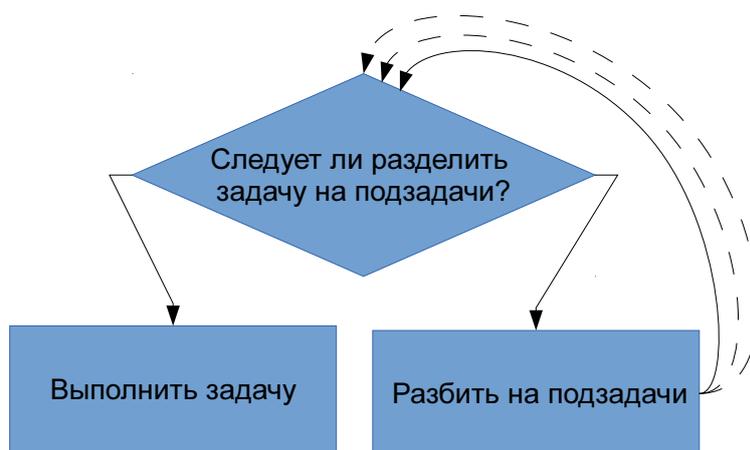


Рис. 1. Проверка объема вычислений

Возможность разделить задачу на более простые специфична для рекурсивных задач, вследствие чего разработаны классы для выполнения рекурсивных задач: **RecursiveTask** и **RecursiveAction**. **RecursiveTask** отличается наличием механизма возврата значения, который будет рассмотрен далее. По сути, алгоритм не обязательно должен быть рекурсивным, но необходимо иметь возможность рекурсивно разделять его на подзадачи.

Проблема низкой производительности рекурсии и теоретическая возможность, следовательно, и необходимость замены любой рекурсии на цикл ранее ставили усложненные задачи для разработчиков высокопроизводительных алгоритмов. Теперь же появился не менее удобный способ реализации рекурсии через объект **ForkJoinTask**. Но невозможно создать объект класса **ForkJoinTask**, не реализовав три абстрактных метода:

- `Exec()` – выполнение основной операции задачи;
- `setRawResult(V)` – установить результат;
- `getRawResult()` – получить результат.

Реализация этих методов скрывает в себе особенности, в подробности которых разработчик предлагает не вмешиваться без нужды, предоставляя

готовые реализации в классах-наследниках **RecursiveTask** и **RecursiveAction**.

Любой объект **FJT** предоставляет следующие методы:

- `fork()` – инициализация нового виртуального потока;
- `join()` – синхронизирующий метод, который не блокирует выполнение потока;
- `isDone()` – проверка готовности задания;
- `isCompletedNormally()`, `isCompletedAbnormally()` – проверка наличия исключительных ситуаций во время выполнения;
- `isCancelled()` – проверка прерывания задания;
- `getException()` – получение информации об ошибке.

Разработчикам для осуществления вычислений рекомендуется использовать уже готовые решения `RecursiveTask` и `RecursiveAction`, которые требуют реализации всего одного метода `compute()`, который содержит саму задачу, а точнее, шаблон вычисления с разбиением. `RecursiveTask` и `RecursiveAction` являются современными аналогами интерфейсов `Callable` и `Runnable` соответственно.

В целом **FJF** – это не просто компромисс между использованием `SIMD` и `CPU`, а мощный инструмент, доставляющий низкоуровневые преимущества многоядерной архитектуры до высокоуровневого разработчика. Стоит отметить, что фреймворк в полной мере нацелен на перспективу развития многопоточных платформ `Intel` и `AMD`, но уже на данный момент показывает себя отлично как со стороны производительности, так и с точки зрения удобства применения и разработки. А после интеграции с `Lambda Project` применение параллелизма задач может стать не просто удобным подходом к написанию кода, но и стандартом написания программного обеспечения в масштабируемых системах массового обслуживания.

#### Литература

1. Doug Lea. A Java Fork/Join Framework [Электронный ресурс] <http://gee.cs.oswego.edu/dl/papers/fj.pdf> (25.03.2016 г.).
2. <https://docs.oracle.com/javase/tutorial/essential/concurrency/forkjoin.html> (25.03.2016).

DOI: 10.17223/9785751124335/26

## **ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ КЛАССИФИКАЦИИ ДАННЫХ АЛГОРИТМОМ ПОСТЕПЕННОГО РАСШИРЕНИЯ КУБА АТТРИБУТОВ ОБЪЕКТОВ**

*Хоа Там Тханг, Чан Ван Ан*

*Вьетнамский государственный технический университет  
им. Ле Куй Дона, Ханой, Вьетнам*

Классификация данных – процесс сортировки и категоризации данных в различные типы, формы или любой другой отдельный класс имеет множество объектов (ситуаций), разделённых некоторым образом на классы

[1]. В статье представляется алгоритм для классификации данных на основе расширения куба атрибутов объектов. С помощью представленного алгоритма точность при распознавании рукописного ввода равна 98%, алгоритм классификации данных выполняется быстрее по сравнению с методом К-ближайших соседей [2].

Цель процесса классификации состоит в том, чтобы построить модель, которая использует прогнозирующие атрибуты в качестве входных параметров и получает значение зависимого атрибута.

Процесс классификации заключается в разбиении множества объектов на классы по определенному критерию [3, 4].

Одним из этапов процесса классификации является вычисление значений меры сходства между объектами. Для каждой пары объектов измеряется «расстояние» между ними — степень похожести. Существует множество метрик [5–7].

#### 1. Евклидово расстояние.

Наиболее распространённая функция расстояния. Представляет собой геометрическое расстояние в многомерном пространстве:

$$\rho(x, x') = \sqrt{\sum_i^n (x_i - x'_i)^2} . \quad (1)$$

#### 2. Квадрат евклидова расстояния.

Применяется для придания большего веса более отдаленным друг от друга объектам. Это расстояние вычисляется следующим образом:

$$\rho(x, x') = \sum_i^n (x_i - x'_i)^2 . \quad (2)$$

#### 3. Расстояние городских кварталов (манхэттенское расстояние).

Это расстояние является средним разностей по координатам. В большинстве случаев эта мера расстояния приводит к таким же результатам, как и для обычного расстояния Евклида. Однако для этой меры влияние отдельных больших разностей (выбросов) уменьшается (так как они не возводятся в квадрат). Формула для расчета манхэттенского расстояния:

$$\rho(x, x') = \sum_i^n |x_i - x'_i| . \quad (3)$$

#### 4. Расстояние Чебышева.

Это расстояние может оказаться полезным, когда нужно определить два объекта как «различные», если они различаются по какой-либо одной координате. Расстояние Чебышева вычисляется по формуле

$$\rho(x, x') = \max(|x_i - x'_i|) . \quad (4)$$

#### 5. Степенное расстояние.

Применяется в случае, когда необходимо увеличить или уменьшить вес, относящийся к размерности, для которой соответствующие объекты сильно отличаются. Степенное расстояние вычисляется по следующей формуле:

$$\rho(x, x') = \sqrt[r]{\sum_i^n (x_i - x'_i)^p} \quad (5)$$

где  $r$  и  $p$  – параметры, определяемые пользователем. Параметр  $p$  ответственен за постепенное взвешивание разностей по отдельным координатам, параметр  $r$  ответственен за прогрессивное взвешивание больших расстояний между объектами. Если оба параметра –  $r$  и  $p$  – равны двум, то это расстояние совпадает с расстоянием Евклида.

Выбор метрики полностью зависит от исследователя, поскольку результаты классификации могут существенно отличаться при использовании разных мер.

По методу (1) используется метрика расстояния Евклида с целью определения точек, находящихся внутри шара с заданным радиусом  $R$ . Сущность данного метода заключается в следующем.

Пусть две точки  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  и  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E^n$ , тогда Евклидова дистанция между точками  $p$  и  $q$  является длиной отрезка  $pq$  и равна:

$$d(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2}.$$

Точка  $q$  находится внутри шара с заданными радиусом  $R$  и центром  $p$  тогда и только тогда, когда  $d(p, q) < R$ .

На рис. 1 описывается метод (1), где используется 2-мерное евклидово пространство  $E^2$ . В данном примере можно определить, что точка  $X$  находится в классе (-) из-за того, что количество точек данного класса больше, чем количество точек класса (+).

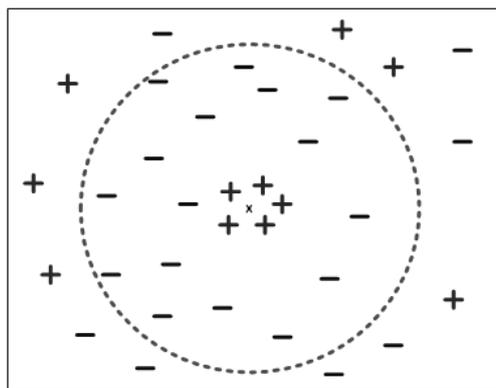


Рис. 1. Метрика расстояния Евклида

При помощи данного метода точность классификации данных повышается. Большим недостатком таких методов является то, что при наборе небольшого радиуса  $R$  нельзя найти вводные данные, вследствие чего невозможно распределить данные в соответственном классе.

С целью повышения эффективности алгоритма классификации данных авторами представляется метод постепенного расширения куба атрибутов объектов. Задача состоит в следующем: задать множество некоторых точек, которые уже находятся в определённых классах. Для введения новой точки

необходимо определить, в каком классе вводимая точка находится. Сущность данного метода заключается в том, что для нахождения используется куб, окружающий вводимую точку. Этот куб постепенно расширяется, параллельно учитывается количество точек каждого класса, находящихся в данном кубе. Класс, имеющий наибольшее количество точек, которые находятся в кубе, является искомым классом (рис. 2).

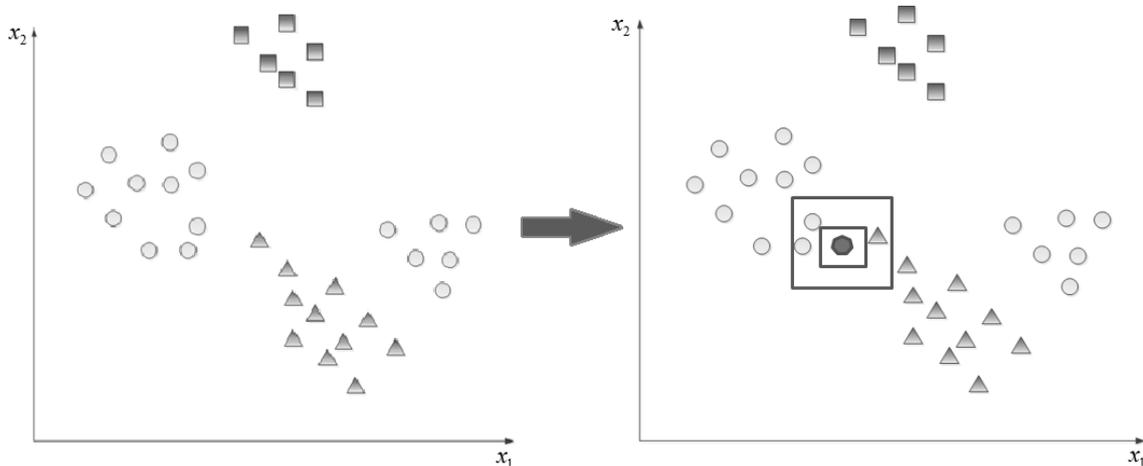


Рис. 2. Описание классификации точек методом постепенного расширения куба атрибутов объектов

Пусть:

–  $X = R^d$  – множество входных данных – объектов. Каждый объект состоит из  $d$  атрибутов. В данной задаче значения атрибутов являются вещественными числами. Это значит, что

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_d);$$

–  $Y = R$  – множество выходных данных — метки объектов.

Объект  $X$  находится внутри одного куба, если он удовлетворяет условию  $x_i^{(L)} < x_i < x_i^{(U)}, \forall i \in [1, d]$ , где объекты  $X^{(L)} = (x_1^{(L)}, x_2^{(L)}, \dots, x_d^{(L)})$  и  $X^{(U)} = (x_1^{(U)}, x_2^{(U)}, \dots, x_d^{(U)})$  являются точками, ограничивающими куб.

Как видно, на рис. 3, описывается двумерное пространство, где находятся две точки  $X^{(L)}$  и  $X^{(U)}$ , которые ограничивают прямоугольник (куб в двумерном пространстве). Нужно найти класс, в котором находится красная точка с вопросительным знаком.

Алгоритм постепенного расширения куба атрибутов объектов:

Идея: Найти класс, который имеет наибольшее количество точек, находящихся внутри куба, посредством метода постепенного расширения куба атрибутов. В данном ниже алгоритме величина  $r$  постепенно увеличивается на  $\Delta r$  до того момента, как можно найти класс, в котором  $X$  находится.

Обозначим:

- $n_k$  – количество точек класса  $k$ , находящихся в кубе;
- $N_k$  – общее количество точек класса  $k$  в пространстве  $R^d$ .

Тогда вероятность распределения  $k$  класса в кубе обозначится как

$$P_k = \frac{n_k}{N_k}, \text{ где } k = \overline{1, n}.$$

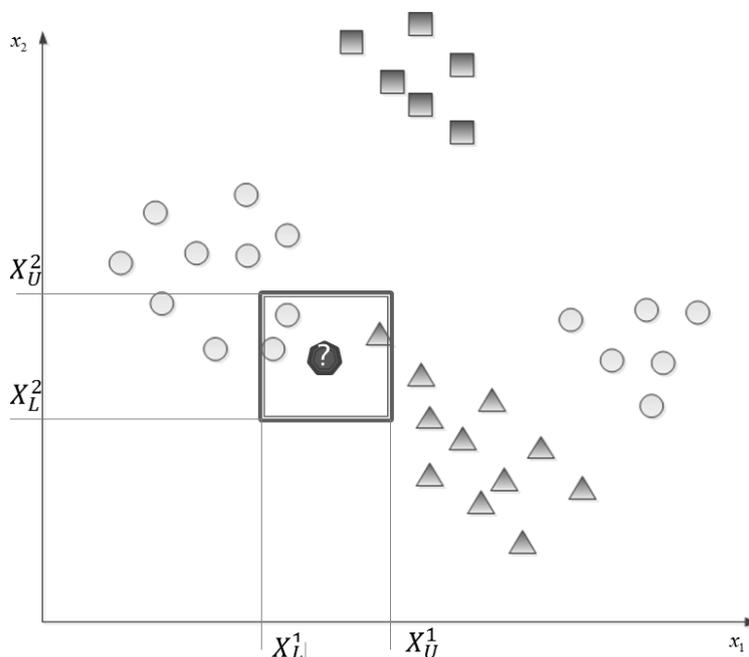


Рис. 3. Точка в ограничивающем кубе

Вход: коллекция точек, которые находятся в  $n$  определённых классах, и исследуемая точка  $X$ .

Выход: искомый класс, в котором находится  $X$ .

1. Задать значения  $\Delta r$ ,  $r = 0$ .

2. Сортировка точек по каждому классу.

3. Найти  $X^{(L)} = (x_1^{(L)}, x_2^{(L)}, \dots, x_d^{(L)})$  и  $X^{(U)} = (x_1^{(U)}, x_2^{(U)}, \dots, x_d^{(U)})$  по формуле

$$x_i^{(L)} = x_i^{(L)} - r, x_i^{(U)} = x_i^{(L)} + r.$$

4. Для всех классов учитываются все значения для каждого класса

$$P_k = \frac{n_k}{N_k}, \text{ где } k = \overline{1, n}.$$

5. Если все  $P_k = 0$ , то увеличивается радиус  $r = r + \Delta r$ , возвращение в третий шаг. В обратном случае класс с наибольшим значением  $P_k$  является искомым классом.

С целью ускорения исполнения алгоритма в данном алгоритме представлена процедура сортировки точек по каждому классу. С помощью этих процедур минимизируется процесс обработки данных во всём алгоритме. Сущность этой процедуры состоит в том, что входные точки соответственно сортируются в порядке возрастания значений атрибутов. Данная процедура описана на рис. 4

Как видно из рис. 4, существуют два класса А и В. Берём  $X = (3,5,5,4)$ . Нужно найти класс, в котором находится  $X$ .

Вышеописанный алгоритм выполняется в следующем порядке:

1. Задать  $r = 0, \Delta r = 1$ :

$$X^{(L)} = (3,5,5,4), X^{(U)} = (3,5,5,4),$$

$$P_A = \frac{0}{17}, P_B = \frac{0}{12}.$$

2.  $r = r + \Delta r = 0 + 1$

$$X^{(L)} = (2,4,4,3), X^{(U)} = (4,6,6,5),$$

$$P_A = \frac{5}{17} = 0,295, P_B = \frac{1}{12} = 0,083.$$

буквы	X1	X2	X3	X4
A	6	10	9	8
A	3	9	6	7
B	1	3	2	1
B	2	3	2	2
A	3	6	5	4
A	4	6	5	4
A	4	9	6	7
B	6	9	6	4
A	4	9	3	4
B	2	1	3	2
B	3	7	4	5
A	6	7	8	6
B	4	4	4	7
A	2	6	4	4
A	3	5	6	4
B	4	8	6	6
A	4	9	7	7
B	4	10	6	8
A	2	8	4	6
B	4	6	5	4
B	8	12	6	6
A	4	5	6	4
A	2	7	4	4
A	4	11	6	8
A	2	2	4	3
B	10	13	7	8
A	4	11	6	8
B	4	11	4	8
A	5	11	8	8

Данные до классификации

буквы	X1	X2	X3	X4
A	2	2	4	3
A	2	6	4	4
A	2	7	4	4
A	2	8	4	6
A	3	5	6	4
A	3	6	5	4
A	3	9	6	7
A	4	5	6	4
A	4	6	5	4
A	4	9	3	4
A	4	9	6	7
A	4	9	7	7
A	4	11	6	8
A	4	11	6	8
A	5	11	8	8
A	6	7	8	6
A	6	10	9	8
B	1	3	2	1
B	2	1	3	2
B	2	3	2	2
B	3	7	4	5
B	4	4	4	7
B	4	6	5	4
B	4	8	6	6
B	4	10	6	8
B	4	11	4	8
B	6	9	6	4
B	8	12	6	6
B	10	13	7	8

Данные после классификации

Рис. 4. Данные до и после классификации

В данном случае  $P_A > P_B$ , следовательно,  $X$  находится в классе  $A$ . Сложность этого алгоритма в среднем составляет  $O(N)$ , где  $N$  – количество входных точек.

В рамках эксперимента авторами используется данный алгоритм в задаче распознавания рукописного ввода. Выбран набор данных DataSet из стандартного хранилища UCI: <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Letter+Recognition> (дата доступа 20.9.2015).

Обучающие выборки составлялись из 15000 записей, 5000 записей являются тестовыми данными. Каждая запись состоит из 16 атрибутов, количество классов равно 26. С помощью представленного алгоритма точность при распознавании рукописного ввода равна 98%.

Для оценки производительности алгоритмов можно использовать разные подходы. Самый простой – запустить каждый алгоритм на нескольких задачах и сравнить время исполнения. Другой способ – математически оценить время исполнения с подсчётом операций. Для задачи распознавания рукописного ввода с помощью метода  $K$ -ближайших соседей общая сложность программы –  $O(dNK)$  – где,  $d$  – количество атрибутов,  $N$  – количество соответствующих объектов,  $K$  – количество преопределённых ближайших соседей. По предлагаемому методу в худшем случае общая сложность программы –  $O(N)$ .

#### Литература

1. Журавлев Ю. И., Рязанов В. В., Сенько О. В. Распознавание. Математические методы. Программная система. Практические применения. – М.: Фазис, 2006.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. 9-е изд. – М.: Высшая школа, 2003.
3. Барсегян А. А., Куприянов М. С., Степаненко В. В., Холод И. И. Методы и модели анализа данных : OLAP и Data Mining. 2-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008.
4. Дюк В. А., Самойленко А. П. Data Mining: учеб. курс. – СПб.: Питер, 2001.
5. Дуброва Т. А., Бажин А. Г., Бакуменко Л. П. Методы многомерной классификации. Дискриминантный анализ в системе STATISTICA: учеб. пособие. – М.: МГУ экономики, статистики и информатики, 2002.
6. Айвазян С. А., Бежаева З. И., Староверов О. В. Классификация многомерных наблюдений. – М.: Статистика, 1974. – 240 с.
7. Дубров А. М., Мхитарян В. С., Трошин Л. И. Многомерные статистические методы: учеб. – М.: Финансы и статистика, 2000.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

DOI: 10.17223/9785751124335/27

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ИЗМЕНЕНИЙ ЛАНДШАФТНОГО ПОКРОВА В АРХИВЕ ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ БОЛЬШОГО ОБЪЕМА

*А. А. Афанасьев, А. В. Замятин*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

### Введение

Задача идентификации изменений ландшафтного покрова является одной из базовых задач обработки и интерпретации данных дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) [1–3]. На сегодняшний день разработано множество параметрических и непараметрических методов и алгоритмов идентификации изменений, различающихся как математическим аппаратом, так и степенью (или способом) учета особенностей данных. Несмотря на это, не существует универсальных методов идентификации изменений, позволяющих получить удовлетворительный результат в большинстве случаев. При этом архив разновременных данных ДЗЗ-систем приёма и хранения спутниковых данных, фиксирующих значительные изменения, характеризуется большим объёмом и может ежедневно пополняться терабайтами [4]. Проводить анализ идеентификации изменений ландшафтного покрова в таком архиве данных ДЗЗ затруднительно [5–7]. Поскольку при анализе изменений наиболее важным является нахождение наиболее значимых изменений, имеет смысл решать задачу извлечения именно таких данных из архива данных ДЗЗ большого объёма. С учётом вышеизложенного предлагается алгоритм иерархической обработки архива данных ДЗЗ, направленный на решение этой задачи, а также обсуждаются предварительные результаты его исследования.

### Процесс идентификации изменений

В общем случае решение задачи идентификации изменений требует двух разновременных АИ одного и того же фрагмента ландшафта, характеризующих интересующий временной период. Изображения, которые фиксируют произошедшие изменения, представлены в виде двух соответствующих массивов  $\mathbf{I}^{t1} = \{i_{xyz}^1, x = 1 \dots H, y = 1 \dots W, z = 1 \dots M\}$  и  $\mathbf{I}^{t2} = \{i_{xyz}^2, x = 1 \dots H, y = 1 \dots W, z = 1 \dots M\}$ , где  $H$  и  $W$  – число элементов в строках и столбцах исходных АИ,  $M$  – число диапазонов (каналов) изображения. Упрощенно процесс идентификации изменений может быть представлен следующим образом:

– на основе разновременных массивов исходных данных  $\mathbf{I}^{t1}$  и  $\mathbf{I}^{t2}$  выполнением некоторого метода идентификации изменений формируется

разностное изображение  $\mathbf{D} = \{d_{xy}\}$ , каждый элемент которого отражает степень (вероятность) изменений;

– с применением некоторого порогового значения или функции к элементам  $\mathbf{D}$  формируем итоговую матрицу изменений  $\mathbf{B} = \{b_{xy}\}$ , значения которой отражают наличие или отсутствие значимого изменения в каждой точке; величина порога может быть зафиксирована эмпирически либо рассчитана с помощью специальных дополнительных операций.

### Непрерывный мониторинг

Процесс непрерывного мониторинга ландшафтного покрова предполагает постоянное пополнение архива данных ДЗЗ новыми снимками и формирование разновременных серий исходных изображений на интересующие территории –  $\mathbf{I}^{t1}, \mathbf{I}^{t2}, \dots, \mathbf{I}^{tn-1}, \mathbf{I}^{tn}; \mathbf{I}'^{t1}, \mathbf{I}'^{t2}, \dots, \mathbf{I}'^{tn-1}, \mathbf{I}'^{tn}, \dots; \mathbf{I}''^{t1}, \mathbf{I}''^{t2}, \dots, \mathbf{I}''^{tn-1}, \mathbf{I}''^{tn}; \dots$ . Размеры подобных архивов данных могут достигать огромных величин, в связи с чем идентификация изменений ландшафтного покрова в ручном режиме представляется невозможной. В то же время автоматизированную идентификацию изменений, используя любой из вышеописанных методов, на сегодняшний день нельзя считать надежной [1–3]. Выходом из этой ситуации могло бы стать одновременное использование нескольких методов (в том числе гибридных) идентификации изменений с последующим сопоставлением результатов. Учитывая большой объем исходных данных, подобный подход будет требовать больших временных затрат. В качестве общего решения вышеуказанных проблем предлагается алгоритм иерархической идентификации изменений в большом объеме данных, в основе которого лежит сжатие (уменьшение пространственного разрешения) данных с отсеиванием части пар АИ на каждом этапе.

### Оценка масштабности изменений

В качестве критерия масштабности значимых изменений могут быть использованы, например, общая площадь зафиксированных изменений или их доля на исследуемой территории. Если известна ландшафтно-классовая структура исследуемой территории, то критерием также могут быть наличие/отсутствие вовлеченности конкретных ландшафтных классов в изменения. Поскольку предметом особого интереса в данной задаче являются области с наибольшей концентрацией изменений ландшафта, целесообразно оценивать масштабность изменений исследуемой территории с точки зрения наличия таких областей. С учётом вышерассмотренного предложим новый способ определения степени масштабности изменений фрагмента ландшафта путём оценки в нём степени концентрации изменений [8]. Областью с высокой концентрацией изменений будем считать фрагмент изображения  $\mathbf{D}$ , охватываемый «скользящим окном» порядка  $r$  с концентрацией изменений  $d_i$

выше некоторого порогового значения  $t$ , где  $d_i = \frac{n_i}{S^W}$ ,  $n_i$  – число изменённых пикселей в окне,  $S^W = (2r + 1) \cdot 2$  – площадь «скользящего окна»,  $i = 1, \dots, N$

( $N$  – число областей с высокой концентрацией изменений). В качестве интегрального критерия масштабности изменений применим параметр

$$M^d = \sum_{i=1}^N d_i \cdot \frac{S^w}{S},$$

где  $S$  – общая площадь исследуемой области ландшафта.

### **Алгоритм иерархической обработки данных**

Идентификация изменений на уменьшенных изображениях позволяет в определённой степени сохранить соотношения масштабности изменений рассматриваемого набора пар изображений, таким образом, постепенное отсеивание части пар карт с малой масштабностью изменений и одновременное увеличение пространственного разрешения может позволить выделить пары АИ с наибольшей масштабностью изменений с увеличением быстродействия. При этом предполагаем, что большинство рассматриваемых пар АИ не содержит значимых изменений.

Приведём общий алгоритм иерархического процесса идентификации изменений ландшафтного покрова:

Шаг 1: Задаём необходимые данные: начальный коэффициент сжатия  $\alpha$ , шаг увеличения коэффициента сжатия  $st_\alpha$ , доля отсеиваемых пар на каждой итерации  $r$ , граничная схожесть результатов идентификации изменений  $s$ , доля извлекаемых пар данных с наивысшей масштабностью изменений  $d$ . Также необходимо задать параметры скользящего окна для оценки масштабности изменений:  $r^w$  – порядок скользящего окна,  $t^w$  – порог плотности в скользящем окне. Немаловажными являются выбор перечня используемых методов идентификации изменений, а также пороговая функция.

Шаг 2: Идентификация изменений всех рассматриваемых пар изображений с предварительным сжатием с коэффициентом  $\alpha$ , используя все заданные методы идентификации изменений.

Шаг 3: Применение пороговой функции ко всем рассматриваемым парам. Оценка масштабности изменений.

Шаг 4: Отсеивание  $r$  доли всех пар карт с наименьшей масштабностью изменений.

Шаг 5: Парное сравнение всех результатов идентификации изменений для каждой пары и оценка их схожести. Отсеивание одного из методов идентификации изменений при схожести большей чем  $s$ .

Шаг 6: Если текущее количество пар карт  $\leq$  доли  $d$  от начального количества, то КОНЕЦ, иначе увеличиваем  $\alpha = \alpha + st_\alpha$  и на ШАГ 2.

### **Экспериментальные исследования**

Задача экспериментальных исследований – оценить влияние параметров приведенного алгоритма на быстродействие и качество итогового результата отбора, что в дальнейшем будет необходимо для настройки параметров алгоритма для работы в реальных условиях.

Для исследования описанной системы использовались данные космического аппарата Landsat ETM+ с искусственно внесёнными изменениями и помехами. Внесение изменений подобным образом позволяет объективнее оценивать результат, поскольку эталонная карта известна заранее.

### Результаты тестов

На рис. 1 представлена часть предварительных результатов тестирования системы, а именно зависимость качества итогового результата и времени работы от выбранного начального коэффициента сжатия и доли отсеиваемых пар на каждом шаге. В качестве критерия качества возьмём долю верно извлеченных пар карт.

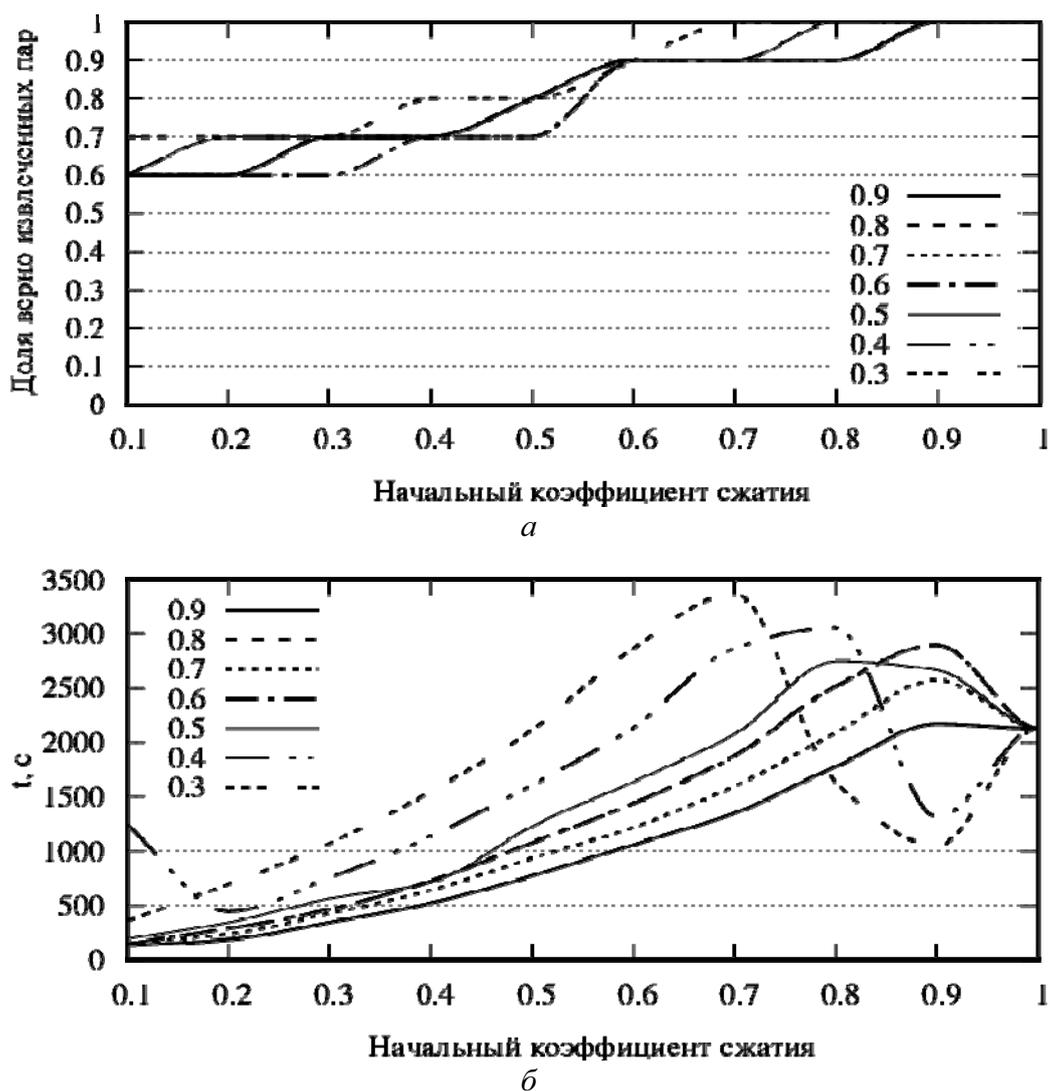


Рис. 1. Качество конечного результата (а) и время работы(б) алгоритма иерархической системы определения наиболее измененных областей ландшафта при различных начальных коэффициентах сжатия и доли отсеиваемых пар АИ на каждой итерации

### Выводы

Совместное применение методов идентификации изменений позволяет в автоматизированном режиме выявлять наиболее измененные области ландшафта среди большого объема данных ДЗЗ. При этом использование

многоитерационного алгоритма с уменьшением пространственного разрешения позволило ускорить алгоритм до двух раз при потере точности на 10% (при доле отсева пар АИ – 0,9), также можно достичь значительно большего ускорения (в 15 раз), но в этом случае потеря точности может достигнуть 40 %.

В случае применения иерархического алгоритма с уменьшением пространственного разрешения наиболее важный параметр – начальный коэффициент сжатия. Как показывают тесты, с увеличением начального коэффициента сжатия изображения скорость падает, но вместе с тем растёт качество.

С увеличением доли отсеиваемых пар на каждом шаге уменьшается время обработки, но в то же время падает качество итогового результата. При доле отсева пар АИ, равной или менее 0,5 значительно возрастает время обработки, что делает использование такой доли отсева нерациональной.

#### Литература

1. Lu D., Mausel P. Change detection techniques // Remote sensing. – 2004. – Vol. 25(20). – P. 2365–2407.
2. Hussain M., Chen D., Cheng A. et al. Change detection from remotely sensed images: from pixel-based to object-based approaches // ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing. – 2013. – Vol. 80. – P. 91-106.
3. Lu D., Li G., Moran E. Current situation and needs of change detection techniques // International Journal of Image and Data Fusion. – 2014. – Vol. 5(1). – P. 13–38.
4. Копылов В. Н. Основы создания центра космического мониторинга окружающей среды. – Екатеринбург: ПП «Контур», 2006. – 144 с.
5. Zamyatin A. Data Science and High Energy Physics collaboration enforcement by Higher Education Institutions [Электронный ресурс]. – URL: <http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.35718> (дата обращения: 15.04.2016).
6. Stamate D., Zamyatin A. Scalable Machine Learning, Big Data Analytics and High Performance Computing in Interdisciplinary Research // Building Bridges: mobilising international interdisciplinary science to benefit societies there [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.inlab.co.uk/conference.php> (дата обращения: 15.04.2016).
7. Замятин А. В. Введение в интеллектуальный анализ данных: учеб. пособие. – Томск: Издательский Дом государственного университета, 2016. – 120 с.
8. Замятин А. В., Афанасьев А. А., Кабрал П. Подход к анализу динамики ландшафтного покрова с использованием идентификации изменений и пространственного стохастического моделирования // Автометрия. – 2015. – Т. 51, № 4.

DOI: 10.17223/9785751124335/28

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОЧИСТКИ ШЛАМОВЫХ СТОКОВ ОТ ВЗВЕШЕННЫХ ПРИМЕСЕЙ**

***Л. В. Бондарева***

*Кемеровский государственный университет*

В Кузбассе доля обогащаемого угля растет с каждым годом. Это приводит к существенному увеличению объемов сточных вод. Их сброс в наземную гидрографическую сеть может вызывать заиление, засоление

и закисление водоемов и водотоков и как следствие нарушить экологическое равновесие в регионе [1].

Для ликвидации сточных вод углеобогачительных предприятий в регионе наряду с другими используется способ очистки с помощью отработанных горных выработок затопленных и закрытых угольных шахт [2]. На рис. 1 представлена часть схемы транзита и очистки жидких промышленных стоков ш. «Комсомолец» в р. Мереть. Впервые в мировой практике для обезвреживания шламовых стоков углеобогачительной фабрики «Комсомолец» [см. часть транзита (4)] используются отработанные выработки ш. «Кольчугинская». Очищенные таким образом стоки сбрасываются в очистные сооружения ш. «Красноярская» для дополнительного обезвреживания [см. часть транзита (5)].



Рис. 1. Схема транзита промышленных стоков ш. «Комсомолец» в р. Мереть. На схеме обозначены процессы: (1) – сброс шахтных вод в центральные очистные сооружения; (2) – отбор вод для использования в технологических процессах обогащения; (3) – сброс для отстаивания в шламоотстойниках; (4) – сброс для очистки в отработанных выработках ш. «Кольчугинская»; (5), (6) – сброс в очистные сооружения ш. «Красноярской»; (7) – сброс очищенных стоков в р. Мереть

Предполагается, что в отработанных горных выработках будет происходить естественная очистка сточных вод за счет отстаивания и разбавления фильтрующимися в выработанное пространство грунтовыми водами. Данная технология подразумевает не только очистку, но и складирование осажденных илов в выработанном пространстве. Изучение этого альтернативного способа очистки представляет большой практический интерес для Кузбасса. В Кемеровской области в результате закрытия нерентабельных угледобывающих предприятий заполнены техногенными подземными водами огромные по площади подземные пространства, которые потенциально можно использовать как очистные сооружения.

При всей идейной простоте и низкой стоимости применения такого подхода остается актуальной и важной проблема исследования и прогнозирования возможного развития процессов очистки. Так, наибольшую опасность представляет вероятность «залпового выброса» накопленных примесей, при котором может происходить кратковременное, но интенсивное увеличение концентрации и объема примесей в откачиваемой жидкости. Причинами этого явления может стать изменение топологии выработки из-за слеживания осадка, резкое увеличение объема поступающих грунтовых вод и другие факторы.

Обводненная выработка представляет собой «черный ящик», реальные измерения каких-либо параметров возможны лишь на входе и выходе. Проведение каких-либо измерений и наблюдений внутри выработки становится практически невозможным из-за большой протяженности, непостоянной внутренней структуры (из-за возможных обрушений кровли, оставленного под землей оборудования и других факторов) и токсичности очищаемых промышленных стоков. В связи с этим возникает необходимость в применении математического моделирования и численных экспериментов как инструментов для изучения процессов очистки, проходящих в затопленных горных выработках. На данный момент не существует физико-математической модели, с помощью которой можно было бы решить эту задачу. Построение такой модели, изучение и верификация актуальны для региона.

В данной работе предлагается математическая модель очистки жидких промышленных стоков в отработанных горных выработках закрытых и затопленных угольных шахт, которая условно делится на три подмодели: течение жидкости, распространение взвешенных примесей в найденном потоке и изменение области решения из-за слеживания осадка [3, 4].

В предлагаемой модели учитываются характерные особенности процесса очистки промышленных стоков в отработанных горных выработках. Так, шламовые гидросмеси относятся к неустойчивым, расслаивающимся системам из-за выпадения твердых частиц. Процесс сложен для аналитического описания, так как на скорость осаждения частиц подобных смесей влияют взаимодействие сил тяжести, сопротивления среды, гидродинамических факторов, различная скорость падения частиц разной крупности. Одновременно с осаждением твердой фазы образуется и уплотняется осадок [5].

Протекающие в выработке шахтные воды дополнительно загрязняются частицами породы и угольной пыли со стенок и кровли выработанного пространства. В предлагаемой математической модели предполагается, что стенки не являются дополнительным источником загрязнения. Это упрощение не повлияет на корректность модели, так как для каждой шахты известны нормализованные показатели состава шахтных вод. Для сравнения с натурными данными эти показатели необходимо будет добавлять к полученным с помощью модели результатам, а для их верификации достаточно проверять, будет ли качество очищенных вод соответствовать

нормам СанПиНа [6]. Это упрощение позволяет рассматривать только двумерную область решения.

Рассматриваемая ш. «Кольчугинская» характеризуется большой протяженностью ( $\approx 4,35$  км) по отношению к высоте ствола шахты (2–2,5 м). Это может принципиально затруднить математическое и численное моделирование. Однако приведенные реальные размеры таковы, что протяженность выбираемой области решения повлияет только на время «заиления» (заполнения слежавшимся осадком), но не на суть происходящих процессов. А так как основной задачей моделирования в данной проблеме является изучение именно тенденций накопления и выброса примесей из выработки, то не будем выбирать область решения, отвечающую реальной протяженности ш. «Кольчугинская».

Для моделирования течения жидкости в выработке используется нестационарная система уравнений Навье–Стокса в переменных «функция тока – вихрь», а для распространения загрязняющих примесей в найденном потоке – уравнения переноса примеси, для которых ставятся начальные и граничные условия. Особое внимание уделяется постановке граничных условий на нижней границе области решения. В них учитываются процессы аккумуляции и размыва накопленного осадка. Заметим, что все уравнения в предложенной математической модели записываются в безразмерном виде. В модели реализуется механизм изменения области решения из-за слеживания осадка: если на протяжении времени  $T^*$  в области решения вблизи границы, концентрация осевшей примеси превышает пороговое значение  $C^*$ , то предполагается, что данная примесь перестает сноситься течением, и граница области решения переносится в соответствии с концентрацией  $C^*$  и временем  $T^*$ .

В данной работе предполагается, что в очищаемых стоках есть только взвешенные (нерастворенные) оседающие примеси, проблема распространения растворенных примесей решена в [7], а нерастворенные всплывающие примеси рассматриваются в [8]. Как правило, в очищаемых стоках выделяют до пяти фракций взвешенных веществ – от самых летучих, до тяжелых. Предлагаемая математическая модель учитывает эту возможность. Для каждой фракции задается свой набор параметров (коэффициент диффузии, скорость оседания, интенсивность накопления и слеживания осадка у дна, пороговые значения концентрации и времени слеживания) и решается свое уравнение переноса с граничными и начальными условиями.

Для решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных используется метод сеток. Исходные дифференциальные краевые задачи аппроксимируются обычным образом на разностной, согласованной с границей, неравномерной сетке по пространственным переменным и времени. Уравнение переноса вихря и уравнение переноса примеси решаются неявной схемой стабилизирующих поправок с противопоточной аппроксимацией конвективных членов [9]. Разностное

уравнение Пуассона для функции тока решается методом минимальных невязок неполной аппроксимации с параметром – матрицей с использованием покомпонентной и глобальной оптимизации итерационных параметров [10].

В работе выбирается область решения, в которой учтены все характерные особенности ш. «Кольчугинская». Для приведенной области решения проводятся численные расчеты течения и распространения взвешенных примесей. В качестве входных параметров используются величины, характерные для ш. «Кольчугинская», приведенные к безразмерному виду. В работе приводится анализ влияния характеристик течения (изменение объема фильтрующихся грунтовых вод, вязкость жидкости) и грануляционного состава поступающей примеси (крупность частиц, скорость их осаждения и интенсивность размывания и слеживания и др.) на эффективность очистки и возможность возникновения «залпового выброса».

#### Литература

1. Лесин Ю. В., Скрынник Л. С. Охрана и рациональное использование водных ресурсов при разработке угольных месторождений Кузбасса. – Кемерово: Кузбассвуиздат, 2008.
2. Захаров Ю. Н., Потапов В. П., Счастливец Е. Л., Чирюкина А. В. Моделирование распространения примесей в затопленных горных выработках. – Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2013. – 96 с.
3. Бондарева Л. В., Захаров Ю. Н. Моделирование процесса очистки промышленных стоков с помощью затопленных горных выработок // Вестник Научного центра по безопасности работ в угольной промышленности. – 2014. – № 1. – С. 122–127.
4. Zakharov Yu., Bondareva L. Simulation of Domestic and Industrial Wastewater Disposal in Flooded Mine Workings. *Procedia Engineering* [Proc. of the International Scientific Conference Urban Civil Engineering and Municipal Facilities (SPbUCEMF-2015)]. – 2015, Vol. 117. – P. 389–396. Available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705815018378> (accessed: 18 August 2015).
5. Бутовецкий В. С. Охрана природы при обогащении углей: справ. пособие. – М.: Недра, 1991. – 231 с.
6. СанПиН 2.1.5.980-00. 2.1.5. Водоотведение населенных мест, санитарная охрана водных объектов. Гигиенические требования к охране поверхностных вод. Санитарные правила и нормы (утв. Главным государственным врачом РФ 22.06.2000) (с изм. от 25.09.2014).
7. Захаров Ю. Н., Счастливец Е. Л., Чирюкина А. В. Течение идеальной жидкости в закрытых водоемах // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13, спец. вып. 2. – С. 21–27.
8. Бондарева Л. В., Гурских М. А., Захаров Ю. Н. Об одной модели распространения всплывающей примеси в затопленных горных выработках // Вестник Кемеровского государственного университета. – 2014. – № 4(60). – С. 54–61.
9. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 197 с.
10. Захаров Ю. Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики. – Новосибирск: Наука, 2004. – 239 с.

## **ОНТОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К СИСТЕМАТИЗАЦИИ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ ПО АКТИВНОЙ СЕЙСМОЛОГИИ**

**Л. П. Брагинская<sup>1</sup>, А. П. Григорюк<sup>1</sup>, В. В. Ковалевский<sup>1</sup>, Г. Б. Загорюлько<sup>2</sup>**

*<sup>1</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики  
Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия*

*<sup>2</sup>Институт систем информатики Сибирского отделения РАН,  
Новосибирск, Россия*

События последних лет, связанные с высокой сейсмической опасностью, подтверждают, что проблемы среднесрочного прогноза сильных землетрясений и информационного обеспечения сейсмостойкого строительства далеки от практического решения. В связи с необходимостью минимизации негативных последствий особую актуальность в сейсмоопасных районах приобретают инновационные технологии, направленные на детальное изучение сейсмогенерирующих сред, и контроль инженерных объектов. Одним из направлений таких исследований является метод активной сейсмологии, в котором в качестве источника сейсмических волн используются мощные механические вибраторы. При использовании накопительных систем регистрации эти вибраторы создают наблюдаемый волновой эффект, эквивалентный среднему землетрясению. Активная сейсмология предоставляет новые методы более точного и более экологичного решения фундаментальных задач сейсмологии, связанных со строением земной коры и поиском предвестников землетрясений [1]. Последние три десятилетия работы по активной сейсмологии проводятся в России, Японии, Китае, США, европейских странах.

В результате теоретических и экспериментальных исследований в области активной сейсмологии происходит интенсивное накопление информации по всем составляющим метода, включая вопросы теории метода, создания управляемых источников, результатов экспериментальных работ, методов математического моделирования. Это связано с тем, что современные высокоточные научные инструменты, применяемые при проведении натуральных экспериментов, порождают все большие объемы данных. Также приходится работать с большими объемами синтетических данных, полученными при численном моделировании волновых процессов в сложно построенной среде.

Проблема доступа к данным и знаниям предметной области (ПО) «Активная сейсмология» состоит в том, что при больших объемах экспериментальных данных и результатов исследований, представленных в сети Интернет, контент не структурирован, представлен различными форматами, информация размещена на различных сайтах научных организаций и подразделений, материалах конференций, в электронных библиотеках и т.д. При этом следует отметить, что существует несколько специализированных сайтов и информационных систем, к которым относятся НИС «Активная сейсмология» (<http://opg.sccc.ru/>), сайт Камчатского филиала

ГС РАН (<http://www.emsd.ru/>), содержащих структурированные архивы, электронные библиотеки, базы и таблицы данных. Однако эти разрозненные ресурсы не дают полного представления о предметной области в целом, не позволяют проследить взаимосвязь между относящимися к активной сейсмологии событиями и персонами, объектами и методами исследования, полученными экспериментальными данными и результатами исследования.

В данной работе предлагается решение задачи интеграции знаний по активной сейсмологии и навигации по интернет-пространству путем построения портала знаний указанной ПО средствами, разработанными Лабораторией искусственного интеллекта ИСИ СО РАН [3].

Ядром информационной модели рассматриваемого портала является разработанная авторами онтология ПО «Активная сейсмология». Данная онтология, в соответствии с используемой технологией, строится на основе базовых онтологий научной деятельности и научного знания [2].

Онтология научной деятельности включает набор концептов (понятий, классов), относящихся к организации научной деятельности в области активной сейсмологии [4], таких как «Персона», «Организация», «Событие», «Деятельность», «Публикация». Данный набор концептов используется для описания участников научной деятельности, мероприятий, проектов, различного типа публикаций. Специфическими классами онтологии научной деятельности активной сейсмологии являются «Экспедиционные работы», «Полевые эксперименты». Класс «Информационный ресурс» описывает информационно-вычислительные системы, архивы и базы данных по активной сейсмологии и вибросейсмическому мониторингу, представленные в сети Интернет. Информационное наполнение (контент) портала образуют конкретные объекты – экземпляры классов. Так, например, объект «Комплексная эколого-геофизическая экспедиция–2005» является экземпляром класса «Экспедиционные работы», объект «Вибрационное зондирование грязевого вулкана Шуго» – экземпляром класса «Полевые эксперименты», объект «Хайретдинов Марат Саматович» – экземпляр класса «Персоны». К классу «Информационные системы» относятся тематические информационные и вычислительные интернет-ресурсы, в том числе вычислительные системы, базы данных, электронная библиотека, являющиеся структурными элементами научной информационной системы «Активная сейсмология» [4, 5].

Онтология научного знания содержит такие метапонятия, как «Раздел науки», «Метод исследования», «Объект исследования», «Предмет исследования», «Научный результат». При использовании базовых метапонятий были выделены и описаны значимые для активной сейсмологии разделы и подразделы, задана типизация методов и объектов исследования, описаны результаты научной деятельности.

Понятия онтологии рассматриваемого портала выстроены в иерархию «класс-подкласс». Так, класс «Объект исследования» имеет два подкласса –

«Геологические объекты» и «Сейсмические события». К подклассу «Геологические объекты» относятся «Вулканы», «Зоны разломов», «Региональные структуры», «Рифты». В свою очередь, в иерархии классов к классу «Вулканы» относятся подклассы «Грязевые вулканы» и «Магматические вулканы». Экземплярами этих классов являются объекты, которые были исследованы методами активной сейсмологии, как, например, грязевой вулкан Шуго, грязевой вулкан Ахтанизовский, грязевой вулкан г. Карабетова, вулкан Эльбрус.

К предметам исследования ПО «Активная сейсмология» относятся такие классы, как «Структура коры», «Динамические свойства», «Параметры волнового поля». К классу «Структура коры» относятся «Сейсмические границы», «Разломы», «Элементарные геологические тела и включения».

Под научным результатом в данной онтологии понимаются экспериментальные и теоретические данные по активной сейсмологии, а также результаты анализа этих данных, к которым будет организован доступ через портал. Класс «Научный результат» в данной онтологии содержит подклассы «Эксперименты», «Экспериментальные данные», «Теоретические сейсмограммы», «Снимки волнового поля».

Помимо отношений типа «класс–подкласс» понятия онтологии могут быть связаны между собой ассоциативными отношениями. Наиболее важными ассоциативными отношениями между понятиями онтологии научной деятельности и онтологии научного знания являются следующие отношения: «исследует» – сопоставляет научную деятельность или раздел науки с объектом исследования; «использует» – связывает метод исследования с видом деятельности, исследователем или разделом науки; «применяется к» – связывает метод исследования с объектом исследования; «описывает» – задает связь публикации с научным результатом, объектом или методом исследования.

На рис. 1 показана страница с описанием объекта «Эксперимент Эльбрус». Связанные с ним объекты представлены на этой странице гиперссылками, позволяющими переходить к описанию организаций и персон, участвующих в данном виде деятельности, использованных методах исследования, а также предоставляющими доступ к базе экспериментальных данных.

Портал знаний «Активная сейсмология» обеспечивает целостное представление знаний о предметной области и установление взаимосвязей между относящимися к этой науке событиями, объектами, результатами и методами исследования. Содержательный доступ к систематизированным знаниям и информационным ресурсам обеспечивается с помощью предоставляемых порталом развитых средств навигации и поиска, функционирование которых базируется на онтологии.

ДАКТОР ОНТОЛОГИИ | РЕДАКТОР ДАННЫХ | РЕДАКТОР НОВОСТЕЙ



# Портал знаний по активной сейсмологии

АВНАЯ | ПОИСК

## Свойства объекта

Эксперименты

Название результата	101 "Эксперимент Эльбрус-2010"
Дата получения	2010
Аббревиатура	

## Связи объекта

имеетАвтораРезультатОрганизация

Организации

- Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (ИВМиГ СО РАН)
- Институт физики Земли им. О.Ю.Шмидта РАН (ИФЗ РАН)
- Кабардино-Балкарский государственный университет (КБГУ)

имеетАвтораРезультатПерсона

Персоны

- Брагинская (Л.П.)
- Дударов (З.И.)
- Ковалевский (В.В.)
- Собисевич (А.Л.)
- Якименко (А.А.)

имеетРезультатРесурс

ИнтернетРесурс

- База данных экспериментов

используетРезультатМетод

Методы и средства исследования

- Метод сейсмической антенны

## Обратные связи объекта

имеетДеятельностьРезультат

Деятельность

- Экспедиция "Эльбрус-2010"

описываетРезультат

Рис. 1. Страница портала

На рис. 2 представлены фрагмент поисковой формы и результаты, иллюстрирующий поиск объектов класса «Публикации», связанных отношением «описывает Объект» с объектом «Вулкан Эльбрус» класса «Объект исследования».

### ПУБЛИКАЦИЯ

имеетАвтораПубликацияПерсона	Название публикации	Дата публикации	Тип публикации
Ковалевский (В.В.)	Исследование параметров локализации сейсмических событий подземной сейсмической группой в Приэльбрусье	2014	
Ковалевский (В.В.)	О характеристиках подземной сейсмической группы в Приэльбрусье	2013	статья
Масуренков (Ю.П.)	Особенности эволюции кайнозойского вулканизма Эльбрусской области		статья
Собисевич (А.Л.)	ОТЧЕТ О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ по теме: Исследование геодинамических процессов в зоне возникновения ожидаемых землетрясений на Северном Кавказе с использованием уникальной установки «Комплексная геофизическая информационно-измерительная система Кабардино-алкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова	2009	
Брагинская (Л.П.) Дударов (З.И.) Ковалевский (В.В.) Собисевич (А.Л.) Якименко (А.А.)	Отчет по экспедиционным работам в Баканской штольне	2010	отчет
Масуренков (Ю.П.)	Пульсационно-вихревое развитие Эльбрусской вулканической области (как следствие миграции мантийного плюма?)	2010	статья
Масуренков (Ю.П.)	Современная деятельность вулкана Эльбрус. Доклады АН СССР, т. 142, № 6, 1962.	1962	статья
Масуренков (Ю.П.)	Современное состояние вулкана Эльбрус	1971	статья
Масуренков (Ю.П.)	Тектоника, магматизм и углекислые воды Приэльбрусья	1961	статья
Масуренков (Ю.П.)	Эльбрусский магматический очаг	1964	статья

описываетОбъект

ОбъектИсследования

Название объекта	Эльбрус	<input type="checkbox"/> Точное значение
Описание объекта		<input type="checkbox"/> Точное значение

Рис. 2. Поисковая форма портала

Онтологический подход [6] в настоящее время широко используется для систематизации знаний во многих предметных областях. Однако в области активной сейсмологии он был использован впервые.

Портал «Активная сейсмология» может быть полезен ученым и инженерам, использующим методы и теоретические и экспериментальные

данные активной сейсмологии, студентам, изучающим представленную предметную область, а также специалистам, которые производят оценку состояния данного научного направления.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 14-07-00832 и 15-07-06821.*

#### Литература

1. Тубанов Ц. А., Толочко В. В., Ковалевский В. В. и др. Вибросейсмические исследования литосферы Байкальской рифтовой зоны и сопредельных территорий // Отечественная геология. – М.: Изд-во ЦНИГРИ, 2013. – № 3. – С. 16–24.
2. Загоруйко Ю. А., Боровикова О. И. Информационная модель портала научных знаний // Информационные технологии. – 2009. – № 12. – С. 2–7.
3. Боровикова О. И., Брагинская Л. П., Загоруйко Ю. А., Ковалевский В. В. Онтология предметной области «Активная сейсмология» // Материалы Всероссийской конференции с международным участием «Знания–Онтологии–Теории» (ЗОНТ–2015). – Новосибирск, 2015. – Т. 1. – С. 39–43.
4. Брагинская Л. П., Григорюк А. П. Информационная система для комплексной поддержки научных исследований в области активной сейсмологии // Вестник КемГУ. – 2012. – № 4. – С. 43–48.
5. Брагинская Л. П., Григорюк А. П., Ковалевский В. В. Научная информационная система «Активная сейсмология» для комплексных геофизических исследований // Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле. – 2015. – № 1, вып. 25. – С. 94–98.
6. Загоруйко Ю. А., Загоруйко Г. Б. О формализации семантики областей знаний в информационных и интеллектуальных системах на основе онтологий // Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем (OSTIS–2014): матер. IV Междунар. науч.-техн. конф. / ред. В. В. Голенков. – 2014. – С. 117–130.

DOI: 10.17223/9785751124335/30

## **МЕТОДЫ АНАЛИЗА ФОРМАЛЬНЫХ ПОНЯТИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ ТЕКСТОВ ТУВИНСКОГО ФОЛЬКЛОРА**

***В. В. Быкова, Ч. М. Монгуш***

*Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия*

В настоящее время активно создаются корпуса естественных языков с помощью современных информационных технологий и методов математического моделирования. Под корпусом понимается информационно-справочная система, основанная на собрании оцифрованных текстов. Корпус включает в себя различные типы письменных и устных текстов, представленных в данном языке, а также разметку – информацию о свойствах этих текстов. Разметка отличает корпус от электронных библиотек текстов. Чем разнообразнее разметка, тем выше научная и учебная ценность корпуса. На основании корпусов решаются различные филологические и лингвистические задачи. Для многих языков народов Российской Федерации, в том числе для тюркских языков, создаются национальные корпуса. Работа над формированием национального корпуса тувинского языка ведется

преподавателями, аспирантами и студентами Тувинского государственного и Сибирского федерального университетов [3].

Важнейшей частью поискового аппарата всякого корпуса является метаразметка. Под метаразметкой понимается приписывание тексту параметров, характеризующих текст в целом. Информация, отражающая метаразметку, хорошо структурирована и допускает представление ее в виде матрицы «объект–признак», называемой контекстом. Наличие такой информации позволяет применять в корпусах математический аппарат теории распознавания образов и анализа формальных понятий (АФП).

АФП – современный математический метод анализа данных, основанный на общей теории решеток [1]. Данный метод нашел широкое применение в различных областях машинного обучения [1, 2]. С помощью АФП и методов на его основе из заданных контекстов можно выделять наборы формальных понятий и решать задачи бинарной классификации по положительным и отрицательным прецедентам, возникающие при исследовании корпусов, включая следующие филологические задачи: установление авторства, принадлежность к определенному жанру, тематике, пространственно-временному периоду.

Существуют различные методы классификации на основе АФП. К ним относятся методы, использующие всю решетку понятий или некоторое ее подмножество, и методы, основанные на гипотезах. Достоинством всех этих методов является наглядное и удобное представление результатов в виде решеток.

В данной работе решается задача бинарной классификации на основе АФП применительно к произведениям тувинского фольклора с целью определения принадлежности к жанру героического эпоса. Для классификации используется метод, основанный на гипотезах.

Пусть задано конечное множество объектов  $G$ , разделенное на два класса  $G^+$  и  $G^-$ ,  $G^+ \cap G^- = \emptyset$ ,  $G^+ \cup G^- = G$ . Такое разбиение определено экспертом с помощью некоторого целевого признака  $Z$ . Элементы множеств  $G^+$  и  $G^-$  называют положительными и отрицательными прецедентами соответственно. Все объекты из  $G$  описаны через конечное множество признаков  $M$ . Это описание задано объектно-признаковой матрицей  $T$ . Элементы матрицы  $T$  определяют степень выраженности определенного признака в данном объекте. В частном случае матрица  $T$  может быть представлена  $(0, 1)$ -матрицей, кодирующей наличие или отсутствие признаков. Пусть задан объект  $x \in G$ , описанный множеством признаков  $M_x \subseteq M$ . Требуется, исходя из  $T$  и  $M_x$ , для объекта  $x$  определить класс, к которому он может быть отнесен.

Формализуем задачу бинарной классификации по прецедентам в терминах АФП. Пусть  $I$  – отношение инцидентности между множествами  $G$  и  $M$ , определяемое матрицей  $T$ . Пусть запись  $gIm$  означает, что объект  $g \in G$  обладает признаком  $m \in M$ . Тройка  $K = (G, M, I)$  называется формальным контекстом для множества объектов  $G$ . Для произвольных подмножеств

$A \subseteq G$  и  $B \subseteq M$  введем два отображения  $\varphi: 2^G \rightarrow 2^M$  и  $\psi: 2^M \rightarrow 2^G$  такие, что  $\varphi(A) = \{m \in M \mid \forall g \in A (gIm)\}$ ,  $\psi(B) = \{g \in G \mid \forall m \in B (gIm)\}$ , где  $2^G$  – множество всех подмножеств множества  $G$ ,  $2^M$  – множество всех подмножеств множества  $M$ . Пусть  $A' = \varphi(A)$  – множество признаков, которыми обладают все объекты из  $A$ , и  $B' = \psi(B)$  – множество объектов, которые обладают всеми признаками из  $B$ .

Пара множеств  $(A, B)$ ,  $A \subseteq G$ ,  $B \subseteq M$ , таких, что  $A' = B$  и  $B' = A$ , называется формальным понятием контекста  $K$ . При этом  $A$  называется объемом, а  $B$  – содержанием формального понятия  $(A, B)$ . Если контекст  $K = (G, M, I)$  представлен в виде  $(0, 1)$ -матрицы  $T$ , то формальному понятию  $(A, B)$  соответствует максимальная подматрица матрицы  $T$ , заполненная единицами. Это означает, что каждый объект из  $A$  обладает всеми признаками из  $B$ , и наоборот, всякий признак из  $B$  характерен для всех объектов из  $A$ . Далее полагаем, что  $T$  является  $(0, 1)$ -матрицей.

Пусть  $A_1, A_2 \subseteq G$  и  $B_1, B_2 \subseteq M$ . Формальные понятия  $(A_1, B_1)$  и  $(A_2, B_2)$  связаны отношением частичного порядка  $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$ , если  $A_1 \subseteq A_2$  (что эквивалентно  $B_2 \subseteq B_1$ ). Логично считать понятие  $(A_1, B_1)$  менее общим, чем понятие  $(A_2, B_2)$ : ведь чем больше признаков входит в понятие, тем меньше объектов это понятие охватывает (и наоборот). Частично упорядоченное по вложению объемов множество формальных понятий контекста  $K$  называется решеткой понятий контекста  $K$  и обозначается  $\beta(K)$ . Решетка понятий может быть визуализирована в виде графического объекта, отражающего иерархию понятий.

В терминах АФП классы  $G^+$  и  $G^-$  могут быть описаны с помощью двух контекстов по отношению к целевому признаку  $Z$ : положительного контекста  $K^+ = (G^+, M, I^+)$  и отрицательного контекста  $K^- = (G^-, M, I^-)$ .

Определим положительные и отрицательные гипотезы для классификации по целевому признаку  $Z$ . Гипотезой называется некоторый набор признаков, который присутствует в описании объектов одного класса и не присутствует в описании объектов другого класса. Гипотезы вводятся для определения класса, к которому может быть отнесен объект  $x \notin G$ . Согласно АФП гипотезы извлекаются из решеток формальных понятий. Если содержание  $B^+$  положительного понятия  $(A^+, B^+) \in K^+$  не является подмножеством содержания какого-либо отрицательного понятия, то оно называется положительной гипотезой, иначе оно называется фальсифицированной положительной гипотезой. Аналогично для отрицательных гипотез.

Пусть  $M_x \subseteq M$  – множество признаков объекта  $x \notin G$ . Тогда простейшее решающее правило бинарной классификации для объекта  $x$  можно сформулировать следующим образом: объект  $x$  относится к классу  $G^+$ , если множество  $M_x$  включает хотя бы одну положительную гипотезу и не включает ни одной отрицательной гипотезы, в противном случае объект  $x$  относится к классу  $G^-$ ; отказ от классификации происходит, если  $M_x$  не содержит в качестве подмножеств ни положительных, ни отрицательных

гипотез и если  $M_x$  содержит одновременно как положительные, так и отрицательные гипотезы.

Для решения поставленной задачи были разработаны алгоритмы и программный комплекс, осуществляющие для заданного контекста формирование формальных понятий, построение решетки формальных понятий, выявление гипотез, реализацию правил классификации по положительным и отрицательным прецедентам. Исходные данные программного комплекса: положительный контекст  $K^+ = (G^+, M, \Gamma^+)$  для множества объектов  $G^+$  в виде  $(0, 1)$ -матрицы, отрицательный контекст  $K^- = (G^-, M, \Gamma^-)$  для множества объектов  $G^-$  в виде  $(0, 1)$ -матрицы,  $M_x$  – признаковое описание объекта  $x$ . Предполагается, что  $G^+ \cap G^- = \emptyset$ ,  $G^+ \cup G^- = G$ ,  $x \notin G$ . Выходные данные: решетки положительных и отрицательных формальных понятий  $\beta(K^+)$ ,  $\beta(K^-)$ , решение задачи классификации в виде указания класса принадлежности объекта  $x$  или отказа от классификации. Программный комплекс реализован в визуальной среде разработки Delphi 9. Ниже приводится пример применения АФП и разработанных программ для решения отдельной филологической задачи – определение принадлежности произведения тувинского фольклора к жанру героического эпоса.

Рассмотрим множество из семи произведений тувинского фольклора, разбитое на два класса  $G^+$  и  $G^-$  по целевому признаку  $Z = \langle \text{произведение относится (соответственно не относится) к жанру героического эпоса} \rangle$ . Требуется для нового произведения  $x$  определить класс. В таблице представлено объектно-признаковое описание анализируемых произведений, при этом произведению  $x$  соответствует пятая строка.

В таблице имена произведений заменены порядковыми номерами, а рассматриваемые признаки означают следующее:

$s_1$  – сказитель *Кашкак*,  $s_2$  – сказитель *Хертек*,  $s_3$  – сказитель *Ооржак*,  
 $s_4$  – другой сказитель или народ,  $a_1$  – горный ареал,  $a_2$  – степной ареал,  
 $g_1$  – главный герой богатырь,  $g_2$  – главный герой не богатырь,  
 $c_1$  – сюжет «Сватовство»,

$c_2$  – сюжет «Сестра добывает брату суженую»,  $c_3$  – другой сюжет,

$t_1$  – зачин «Эрте шагның эктинде, бурун шагның мурнунда, эдилээн эди эктин ашкан»,  $t_2$  – зачин «Шыянам, эрте бурунгу шагда»,

$t_3$  – зачин «Шыянам, эртенгиниң эртезинде бурунгунуң мурнунда».

Контекст  $K$  произведений тувинского фольклора

№	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$a_1$	$a_2$	$g_1$	$g_2$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$Z$
1			1		1		1		1			1			+
2	1					1	1		1				1		+
3		1			1		1			1				1	+
4			1		1		1			1		1			+
5		1			1		1			1		1			?
6				1		1		1			1		1		-
7				1	1		1		1				1		-
8				1		1		1			1			1	-

Для  $K^+ = (G^+, M, I^+)$  имеем  $G^+ = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $M = \{s_1, s_2, s_3, s_4, a_1, a_2, g_1, g_2, c_1, c_2, c_3, t_1, t_2, t_3\}$ , отношение  $I^+$  представлено верхней частью таблицы. Для  $K^- = (G^-, M, I^-)$  имеем  $G^- = \{6, 7, 8\}$ , отношение  $I^-$  отражено в нижней части таблицы. Определим элементарные положительные формальные понятия:  $(1, \{s_3, a_1, g_1, c_1, t_1\})$ ,  $(2, \{s_1, a_2, g_1, c_1, t_2\})$ ,  $(3, \{s_2, a_1, g_1, c_2, t_3\})$ ,  $(4, \{s_3, a_1, g_1, c_2, t_1\})$ . Рассматривая всевозможные попарные пересечения содержаний построенных элементарных понятий, а также их вложенность, получим новые положительные формальные понятия для  $K^+$ :  $(\{1, 2\}, \{g_1, c_1\})$ ,  $(\{1, 4\}, \{s_3, a_1, g_1, t_1\})$ ,  $(\{3, 4\}, \{a_1, g_1, c_2\})$ . Отношение частичного порядка между установленными положительными формальными понятиями описывается решеткой  $\beta(K^+)$ , представленной на рис. 1. Решетка  $\beta(K^-)$  для отрицательного контекста  $K^-$  строится аналогичным образом (рис. 2).

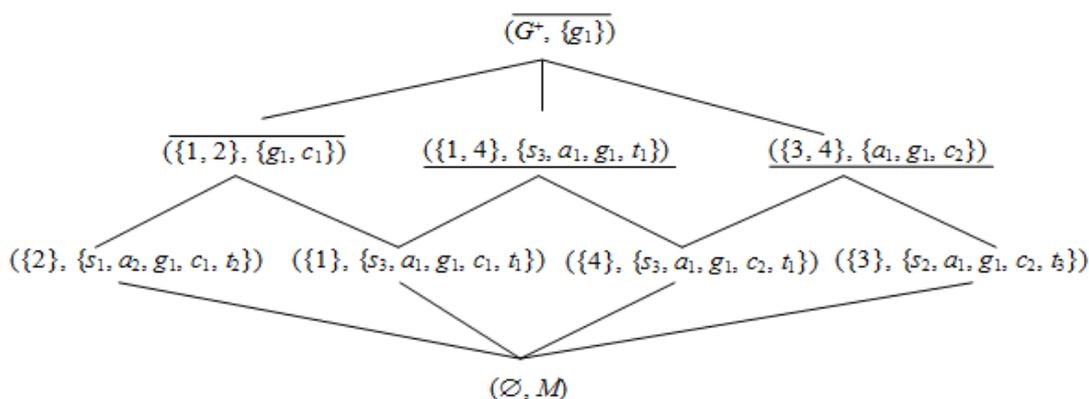


Рис. 1. Решетка положительных формальных понятий  $\beta(K^+)$

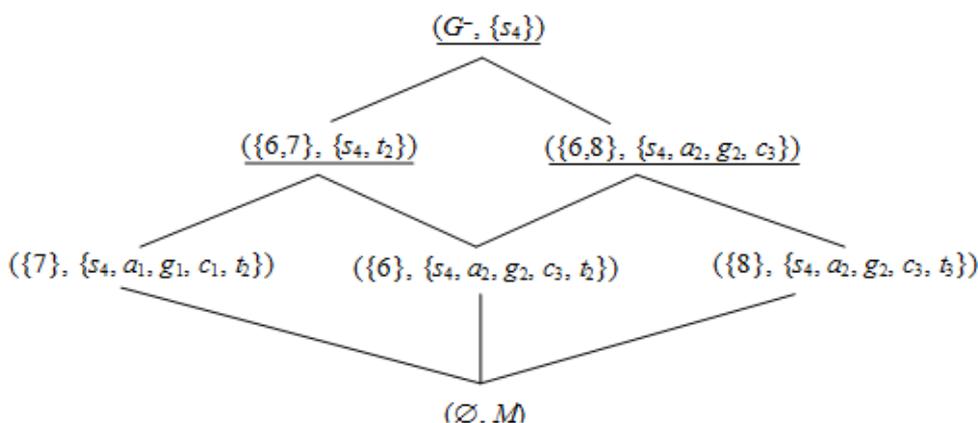


Рис. 2. Решетка отрицательных формальных понятий  $\beta(K^-)$

Для целевого признака  $Z$  положительными гипотезами являются  $\{s_3, a_1, g_1, t_1\}$ ,  $\{a_1, g_1, c_2\}$ , они подчеркнуты в  $\beta(K^+)$ . Надчёркнуты в  $\beta(K^+)$  положительные фальсифицированные гипотезы  $\{g_1, c_1\}$ ,  $\{g_1\}$ . Отрицательными гипотезами являются  $\{s_4, t_2\}$ ,  $\{s_4, a_2, g_2, c_3\}$ ,  $\{s_4\}$ , они в  $\beta(K^-)$  подчеркнуты. Согласно правилу классификации объект  $x$  с содержанием  $M_x = \{s_2, a_1, g_1, c_2, t_1\}$  относится к классу  $G^+$ , т. е. к жанру героического эпоса, так как  $M_x$  включает положительную гипотезу  $\{a_1, g_1, c_2\}$  и не содержит отрицательных гипотез. Однако если объект  $x$  обладает набором признаков

$\{s_4, t_2\}$  или  $\{s_4, a_2, g_2, c_3\}$ ,  $\{s_4\}$ , то этот объект следует причислить к классу  $G$ . При  $M_x = \{g_1, c_1\}$  или  $M_x = \{g_1\}$  произойдет отказ от классификации. Экспертами-филологами установлено, что полученные результаты классификации соответствуют действительности.

Применение АФП в исследовании текстов тувинского фольклора позволило сделать следующие выводы. Методы на основе АФП позволяют из объектно-признакового описания литературных произведений выделять произведения с общими признаками, устанавливая иерархию между выявленными формальными понятиями, классифицировать неопределенные произведения. Метод результативен для филологических задач, решаемых в рамках корпусов. Недостаток АФП – размер решетки экспоненциально зависит от числа объектов и признаков, поэтому процесс ее построения вычислительно сложен. Дальнейшие исследования будут направлены на решение указанной проблемы, а также на разработку программы автоматического формирования контекстов в корпусе тувинского языка.

#### Литература

1. Гуров С. И. Булевы алгебры, упорядоченные множества, решетки: определения, свойства, примеры. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 352 с.
2. Прокашева О. В. Повышение эффективности алгоритма классификации на основе анализа формальных понятий // Машинное обучение и анализ данных. – 2013. – Т. 1, № 5. – С. 552–558.
3. Салчак А. Я., Байыр-оол А. В. Электронный корпус тувинского языка: состояние, проблемы // Мир науки, культуры, образование. – 2013. – № 6. – С. 408–409.

DOI: 10.17223/9785751124335/31

## **СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ОРГАНИЗАЦИИ РАБОТЫ ЭКСКАВАТОРНО-АВТОМОБИЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ НА УГОЛЬНЫХ РАЗРЕЗАХ**

***А. Ю. Воронов<sup>1</sup>, М. Е. Корягин<sup>2</sup>***

*<sup>1</sup> Кузбасский государственный технический университет  
им. Т. Ф. Горбачева, Кемерово, Россия*

*<sup>2</sup> Кемеровский государственный сельскохозяйственный институт*

Открытый способ разработки твердых полезных ископаемых является преобладающим во всем мире. Высокий удельный вес открытого способа объясняется его преимуществами перед подземным способом: более высокой производительностью труда (в 10–11 раз по угольным карьерам); более низкой себестоимостью продукции (в 3–4 раза); сокращенным сроком строительства предприятий (в 2–3 раза) [1].

В России удельный вес открытого способа в общем объеме добычи угля в настоящее время составляет около 70%, и имеется тенденция к его увеличению. При этом большая часть российского угля добывается в Кузбассе. Ведущими

угольными предприятиями Кузбасса, осуществляющими добычу открытым способом, являются компании «Кузбассразрезуголь» и «СДС-Уголь»; на их долю приходится около 20% российского угля [2].

Основным видом транспорта на разрезах Кузбасса является автомобильный. По данным компании «Кузбассразрезуголь», в настоящее время им перевозится от 85 до 100% вскрыши и весь уголь [3].

С развитием автоматизированных методов планирования открытых горных работ и диспетчерского управления карьерным автотранспортом возникает необходимость создания математических моделей и алгоритмов, с помощью которых будут решаться задачи оперативного управления.

Известны два основных способа организации работы карьерных экскаваторно-автомобильных комплексов (ЭАК).

При работе по закрытому циклу каждый автосамосвал в начале смены закрепляется за конкретным экскаватором и пунктом разгрузки и работает с ними в течение всей смены. Самосвалы перезакрепляются только в случае изменения условий работы (например, при поломке экскаватора).

Эта стратегия наименее эффективна, так как ввиду вероятностного характера транспортных процессов и простоев горного оборудования у отдельных экскаваторов периодически образуются очереди, в то время как другие экскаваторы могут простаивать ввиду отсутствия самосвалов. Наивысшей эффективности такая система достигает тогда, когда все экскаваторы работают непрерывно, а самосвалы подаются к экскаваторам через равные промежутки времени. Однако обеспечить своевременную подачу самосвалов сложно из-за влияния неконтролируемых факторов.

В настоящее время все российские разрезы организуют работу своих ЭАК по закрытому циклу, что приводит к большим простоям самосвалов и экскаваторов в ожидании обслуживания. До 30% внутрисменных простоев самосвалов составляют именно простои в ожидании погрузки. Они возникают в основном по причине неорганизованной работы ЭАК, и при эффективной организации их можно существенно сократить.

Для этого существует метод открытого цикла, при котором самосвал после разгрузки направляется к свободному (или малозагруженному) экскаватору на основании выбранного критерия. Это позволит значительно уменьшить простои погрузочно-транспортного оборудования и повысить его производительность. Однако здесь есть свои проблемы: во-первых, сложность такого управления, во-вторых, возможное несоответствие типоразмеров самосвалов и экскаваторов, что может привести к увеличению простоев самосвалов и снижению производительности ЭАК.

Более рациональным представляется усовершенствованный метод открытого цикла, при котором формируются «группы диспетчеризации» из конкретных экскаваторов и разгрузочных пунктов, которые будут работать вместе. Каждой из групп придается некоторое количество самосвалов, которые распределяются между пунктами погрузки по открытому циклу.

Непрерывное распределение карьерных самосвалов между экскаваторами (диспетчеризация) является динамическим процессом, требующим

постоянного мониторинга маршрутов, типоразмеров и местоположения самосвалов и экскаваторов. Применяя диспетчеризацию, можно либо повысить производительность ЭАК с имеющейся в наличии техникой, либо обеспечить желаемую производительность с меньшим количеством техники, – за счет принятия оптимальных диспетчерских решений, что сокращает простои и улучшает использование горного оборудования.

Существует два основных подхода к диспетчеризации карьерного автотранспорта – одноуровневый и мультиуровневый [4]. При одноуровневом подходе самосвалы распределяют между экскаваторами, руководствуясь лишь имеющимся опытом, без учета каких бы то ни было специфических задач или условий производства. По сути это эвристический подход, имеющий сугубо эмпирический характер. В мультиуровневых системах проблема диспетчеризации разбивается обычно на два уровня: на верхнем уровне происходит установление норм выработки для экскаваторов, на нижнем – распределение самосвалов между экскаваторами так, чтобы минимизировать отклонения от плана, установленного на верхнем уровне.

На верхнем уровне обычно используется программно-целевая модель, а на нижнем – эвристический метод, так как диспетчерские решения должны приниматься в реальном времени. Приближенные методы, дающие быстрые решения, во многих случаях могут оказаться предпочтительнее точных решений оптимальными методами, поскольку точные решения требуют больших затрат времени. Диспетчерские системы, основанные на эвристических методах, легче внедряются и не требуют больших вычислительных мощностей для принятия решений в реальном времени [5].

Проблема диспетчеризации карьерного автотранспорта заключается в том, что для каждого самосвала, покидающего зону разгрузки, нужно подобрать наиболее подходящий пункт погрузки. Обычно таким пунктом является тот, который в наибольшей степени удовлетворяет «критерию диспетчеризации» [6]. При распределении самосвалов между погрузочными пунктами используются различные критерии, и их общая цель – либо максимизировать производительность ЭАК, либо минимизировать простои техники при заданных условиях.

В целом, анализируя существующие методы диспетчеризации карьерного автотранспорта [4, 6, 7], можно отметить их общий недостаток: вероятностная природа технологических процессов в карьерах либо не учитывается вообще, либо учитывается недостаточно. Этот недостаток можно устранить, используя имитационное моделирование.

Как показали проведенные исследования, закономерности изменения времени выполнения технологических операций и ремонта различных видов техники наилучшим образом описываются гамма-распределением [8]. Кроме того, гамма-распределение для этих временных составляющих рекомендуется в классических работах по имитационному моделированию [9]. Процесс транспортирования горной массы описывается замкнутой (с неизменным

числом заявок-самосвалов) сетью массового обслуживания, для которой получены аналитические формулы лишь при экспоненциальном распределении времени выполнения технологических операций [10]. Это доказывает необходимость применения имитационного моделирования для решения диспетчерских задач. Существует достаточно большое количество имитационных моделей, исследующих ЭАК карьеров. Анализируя имеющиеся модели [5, 11, 12], можно отметить, что все они служат либо для наглядного представления процессов в ЭАК и их дальнейшего изучения, либо для простой оценки эффективности предлагаемых методов, тогда как для действительно эффективной диспетчеризации результаты имитационного моделирования необходимо использовать в дальнейшей работе ЭАК.

Нами предлагается модель диспетчеризации ЭАК, состоящая из двух уровней. На верхнем уровне задаются нормы выработки для каждого экскаватора, а также производится рациональное распределение грузопотоков по имеющимся маршрутам. Кроме этого, формируются «группы диспетчеризации» для работы по открытому циклу. В группы сводятся экскаваторы, работающие с одним типом горной массы, расположенные на одном участке горных работ и способные обслуживаться самосвалами одного типоразмера. В группах рекомендуется использовать однотипные самосвалы, так как это позволит свести к минимуму их простои в ожидании погрузки [13]. Также должно учитываться соотношение вместимостей кузовов самосвалов и ковшей экскаваторов.

Критерий принятия диспетчерских решений можно описать следующим образом. Для сокращения суммарных простоев самосвалов и экскаваторов ожидаемый простой рассматриваемого самосвала при принятии решения должен стремиться к минимуму, то есть необходимо найти экскаватор, по прибытии к которому самосвал будет загружен через наименьший промежуток времени. Это позволит сократить очереди самосвалов в ожидании погрузки, а также уменьшить вероятность возникновения простоев экскаваторов. Простой самосвала оценивается как разность между ожидаемым временем окончания последней загрузки  $j$ -го экскаватора и ожидаемым временем движения распределяемого самосвала до этого же экскаватора.

К ожидаемому простоя самосвала необходимо прибавить произвольное малое число  $\delta$ , чтобы избежать одинаковых значений критерия при нулевых простоях самосвала. Получившаяся сумма делится на параметр приоритетности  $j$ -го экскаватора и соответствующего ему маршрута транспортирования. Расчет производится для всех экскаваторов в группе, и самосвал направляется по маршруту с наименьшим значением критерия.

В качестве критерия эффективности предлагаемого метода используется минимум денежных потерь от простоев всех экскаваторов и всех самосвалов в рассматриваемой группе за смену. В результате расчетов на имитационной модели для различного количества самосвалов, действующих в группе,

выбирается набор параметров приоритетности, наилучшим образом удовлетворяющий критерию эффективности.

Параметры приоритетности в дальнейшем используются для принятия диспетчерских решений. При значительном изменении в условиях работы (например, замене экскаватора) параметры переоцениваются.

В условиях разреза «Кедровский» была выделена одна группа диспетчеризации, соответствующая приведенным выше условиям. В нее вошли два экскаватора – Р&Н-2800 (объем ковша 33 м<sup>3</sup>) и ЭКГ-12ус (объем ковша 12,5 м<sup>3</sup>), работавшие на один отвал. Средние расстояния перевозки составили: 3,95 км для Р&Н-2800 и 4,2 км для ЭКГ-12ус. В группе использовались однотипные самосвалы БелАЗ-75306 грузоподъемностью 220 т.

Расчеты проводились для режимов работы ЭАК по закрытому и открытому циклам. Результаты показали, что открытый цикл дает значительную экономию по сравнению с закрытым – в основном за счет сокращения простоев самосвалов. При оптимальном количестве самосвалов сокращение потерь от простоев составляет 12,6%, или 139 тыс. рублей за смену.

Открытый цикл дает выигрыш и в плане производительности. При 14 самосвалах в группе закрытый цикл позволяет перевезти только 50800 т вскрыши, а открытый цикл – около 52900 т, то есть на 4% больше. Поэтому, если норма выработки будет установлена на уровне не ниже 52500 т. за смену (что примерно соответствует реальной производительности экскаваторов в группе), то закрытый цикл потребует на один самосвал больше. Это говорит о том, что организация работы ЭАК по открытому циклу может дать экономию не только за счет сокращения простоев, но и за счет сокращения количества работающих самосвалов.

Также установлено, что более производительный экскаватор Р&Н-2800 при любом количестве самосвалов приоритетнее маломощного экскаватора ЭКГ-12ус. Это вполне очевидно: чем быстрее загружает экскаватор, тем быстрее он освобождается и тем больше вероятность его простоя. Следовательно, к нему нужно направлять больше самосвалов.

Но наибольший интерес представляет соотношение параметров приоритетности. Если значение близко к 1, то это свидетельствует о том, что оба экскаватора во время принятия диспетчерских решений либо свободны, либо перегружены. Большое значение отношения указывает на нестабильность ЭАК; вероятность спорных ситуаций при принятии решений резко возрастает. Это свойство можно использовать для оценки рационального количественного состава парка самосвалов в случае отсутствия на предприятии производственного плана (или отсутствия данных о нем).

#### Литература

1. Трубецкой К. Н. Современные системы управления горно-транспортными комплексами // К. Н. Трубецкой, А. А. Кулешов, А. Ф. Клебанов, Д. Я. Владимиров / под ред. К. Н. Трубецкого. – СПб.: Наука, 2007. – 306 с.

2. Таразанов И. Итоги работы угольной промышленности России за 2013 год // Уголь. – 2014. – № 3. – С. 53–66.

3. Годовой отчет ОАО «УК «Кузбассразрезуголь» за 2013 год [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.e-disclosure.ru/portal/files.aspx?id=10488&type=2> (дата обращения: 10.07.2015).
4. Alarie S. Overview of solution strategies used in truck dispatching systems for open pit mines / S. Alarie, M. Gamache // International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment. – 2002. – Vol. 16, №1. – P. 59–76.
5. Cetin N. Open-pit truck/shovel haulage system simulation / Ph.D. Thesis/ – Middle East Technical University, Turkey, 2004. – 133 p.
6. Munirathinam M. A review of computer-based truck dispatching strategies for surface mining operations / M. Munirathinam, J. C. Yingling // International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment. – 1994. – Vol. 8, №1. – P. 1–15.
7. Subtil R. F. A practical approach to truck dispatch for open pit mines / R. F. Subtil, D. M. Silva, J. C. Alves // 35<sup>th</sup> APCOM Symposium. – 2011. – P. 765–777.
8. Бахтурин Ю. А. Моделирование работы сложных транспортных систем карьеров // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2011. – № 1. – С. 82–90.
9. Law A. M. Simulation modeling and analysis / A. M. Law, W. D. Kelton. – New York: McGraw-Hill, 2000. – 847 p.
10. Корягин М. Е. Оптимальное управление грузопотоками при циклическом снабжении двух потребителей / М. Е. Корягин, В. А. Чекменев // Вестник КузГТУ. – 2003. – № 1. – С. 37–40.
11. Krause A. J. Shovel-truck cycle simulation methods in surface mining / M. Sc. Thesis. – University of the Witwatersrand, South Africa, 2006. – 123 p.
12. Stout C. E. Simulation of a large multi-pit mining operation / M. Sc. Thesis. – The University of Montana. – 2011.
13. Вуейкова О. Н. Обоснование рациональной структуры автомобильно-экскаваторного комплекса открытого горнорудного карьера: автореф. дис. .... канд. техн. наук. – Оренбург: Южно-Уральский государственный университет, 2013. – 15 с.

DOI: 10.17223/9785751124335/32

**МОДЕЛИРОВАНИЕ В УСТРОЙСТВЕ ДЛЯ ОТВОДА  
ДИФфуЗИОННОГО СЛОЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ С  
ПЕРЕМЕННЫМИ ПЛОТНОСТЬЮ И ВЯЗКОСТЬЮ**  
*Н. М. Вьюнник, Ю. Н. Захаров, А. А. Кириченко, Б. А. Лобасенко*  
*Кемеровский государственный университет*

Математическое моделирование движения жидкости имеет большое значение в развитии различных областей науки и промышленности.

Одной из областей, нуждающихся в математическом моделировании, являются различные технические системы, используемые в пищевой промышленности. При этом важная роль отводится глубокой переработке пищевого сырья. Часто для этого производят разделение сырья на различные компоненты для последующего синтеза на их основе разнообразных пищевых продуктов. Для этих целей целесообразно использовать мембранные технологии, которые обладают рядом преимуществ по сравнению с традиционными методами разделения. Однако при фильтрации на мембране образуется диффузионный пограничный слой с повышенной

концентрацией задерживаемых веществ (явление концентрационной поляризации), который увеличивает гидравлическое сопротивление и снижает производительность процесса. В типовых мембранных аппаратах с ним борются, используя различные способы: механические, гидродинамические, физические, химические. Однако предотвратить полностью это явление невозможно. Кроме того, это требует использования дополнительных средств и трудозатрат, усложняет конструкцию аппаратов.

Авторами [2] использован иной подход, предусматривающий отвод некоторой части диффузионного пограничного слоя в качестве готового продукта или в качестве исходного раствора в дальнейшем процессе концентрирования. При этом одновременно осуществляется отвод фильтрата. Совместное сочетание этих способов позволяет значительно увеличить производительность процесса.

Проводимые в последние годы работы в этом направлении привели к созданию ряда конструкций, использующих это явление, отличающихся более высокой производительностью и меньшими энергозатратами по сравнению с типовыми. Решение прикладных задач потребовало создания соответствующего математического обеспечения, так как известные математические модели трансмембранного переноса не всегда адекватно описывают процессы концентрирования, происходящие в этих аппаратах.

В данной работе предлагается математическая модель процесса концентрирования раствора высокомолекулярных веществ в конструкции с отводом диффузионного слоя [5] как движение вязкой несжимаемой жидкости с переменной плотностью.

### **Математическая модель**

Приведём описание устройства, необходимое для построения расчетной области (и построения модели):

- устройство состоит из цилиндрического корпуса;
- корпус имеет кольцевые щели;
- внутри корпуса находится подвижный шток переменной конфигурации.

Переменная конфигурация и подвижность штока будут осуществляться за счет изменения значений параметров, геометрии устройства при расчетах.

Из рис. 1 видно, что канал протекания имеет четыре различных вида поверхностей.

- $\Gamma_0$  – жесткая стенка;
- $\Gamma_1$  – поверхность, через которую смесь поступает внутрь канала;
- $\Gamma_2, \Gamma_{21}, \Gamma_{22}$  – отверстия, через которые смесь покидает канал;
- $\Gamma_3$  – центр осевой симметрии.

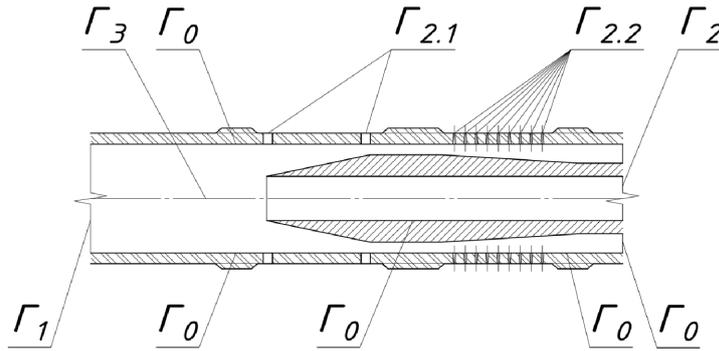


Рис. 1. Аппарат для мембранного концентрирования в разрезе

Учитывая принятое описание аппарата, будем считать, что канал образован в результате вращения своего разреза (см. рис. 1) вокруг своей оси.

Далее будем предполагать осевую симметрию всех процессов в концентрате.

Нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости будем описывать системой дифференциальных уравнений Навье–Стокса. В естественных переменных система запишется в виде [3]:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) &= -v_i(\rho_2 - \rho_1)D\Delta C - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( 2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) + \sum_{j \neq i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right), i = 1, 2, 3; \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $v_i$  –  $i$ -й компонент вектора скорости  $\vec{V}$  ( $i=1,2,3$ ),  $p$  – давление,  $\mu > 0$  – динамическая вязкость,  $\mu_2$  – динамическая вязкость примеси (задерживаемых компонентов),  $\mu_1$  – динамическая вязкость жидкости без учета примеси,  $\rho$  – плотность смеси,  $\rho_2$  – плотность примеси,  $\rho_1$  – плотность жидкости без учета примеси,  $D$  – диффузия,  $C$  – концентрация примеси.

Для системы (1) поставим следующие краевые условия для скоростей:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 : v_1 &= 0; v_2 = 0; v_3 = 0; \\ \Gamma_1 : v_1 &= 0; v_2 = 0; \frac{\partial v_3}{\partial t} = F_3; \\ \Gamma_2 : v_1 &= 0; v_2 = 0; \frac{\partial v_3}{\partial t} = F_3; \\ \Gamma_{21} : \frac{\partial v_1}{\partial t} &= F_1; \frac{\partial v_2}{\partial t} = F_2; v_3 = 0; \\ \Gamma_{22} : \frac{\partial v_1}{\partial t} &= F_1; \frac{\partial v_2}{\partial t} = F_2; v_3 = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

Для нахождения значений плотности и вязкости смеси используются следующие зависимости от концентраций компонент смеси:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_2 \cdot C + (1 - C)\rho_1, \\ \mu &= \mu_2 \cdot C + (1 - C)\mu_1.\end{aligned}\quad (3)$$

Краевые условия для давления:

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &: \frac{\partial p}{\partial n} = 0; \\ \Gamma_1 &: p = p_1; \\ \Gamma_2 &: p = p_2; \\ \Gamma_{21} &: p = p_{21}; \\ \Gamma_{22} &: p = p_{22}.\end{aligned}\quad (4)$$

### Алгоритм решения

Для решения начально-краевой задачи для системы (1)–(2) был использован следующий алгоритм.

На первом этапе, с учетом известных вектора скорости и распределения концентрации (а значит, и значений плотности и вязкости), совершается шаг по времени для гидродинамической части системы уравнений (1), для этого используется схема расщепления по физическим факторам. В цилиндрической системе координат эта схема выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) &= -\tilde{u} \cdot (\rho_2 - \rho_1) D\Delta C + \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} \left( 2\mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) \right) + \frac{2 \cdot \mu}{r} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \frac{\tilde{u}}{r} \right), \\ \rho \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) &= -\tilde{w} \cdot (\rho_2 - \rho_1) D\Delta C + \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{r} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right), \\ \Delta &\equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.\end{aligned}\quad (5)$$

Уравнение для нахождения давления:

$$\begin{aligned}\tilde{A}p &= f, \\ f &= \rho^2 \left( \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{u}}{r} \right)^2 + 2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) - \\ &- 2\rho \left( \frac{\partial \mu}{\partial r} (\Delta \tilde{u}) + \frac{\partial \mu}{\partial z} (\Delta \tilde{w}) + \frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{\partial \rho}{\partial r} \left( 2 \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) + \mu \left( \Delta \tilde{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) \right) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial \rho}{\partial z} \left( \frac{\partial \mu}{\partial r} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \mu (\Delta \tilde{w}) \right); \\
\tilde{A} & = -\rho \Delta + KC \cdot \tilde{u} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + KC \cdot \tilde{w} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}; \\
\Delta & \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Уравнение для нахождения итоговых скоростей:

$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}}{\tau} = - \left( \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial z} \right).$$

Уравнение переноса концентрации:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \left( \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) = D \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right). \tag{7}$$

Для численного решения уравнений (5)–(7) с соответствующими краевыми условиями (2), (4) используется метод сеток с использованием неравномерной сетки по пространственным переменным. На этой сетке решаемые уравнения аппроксимировались разностными схемами, удовлетворяющими законам сохранения [4].

Для решения системы уравнений (5) используется схема стабилизирующих поправок [8].

Для решения системы линейных алгебраических уравнений, получающихся после аппроксимации задачи (4), (6) разностной схемой второго порядка аппроксимации, использовался итерационный метод неполной аппроксимации [1].

Для решения уравнения переноса концентрации (7) использовалась схема продольно-поперечной прогонки [8].

Предложенная в статье модель позволяет изучить характер распространения примеси в устройстве для отвода диффузионного слоя. При проведении соответствующих расчетов модель позволит прогнозировать геометрические параметры устройства с целью интенсификации производительности.

*Работа выполнена при поддержке проектной части Государственного задания № 1.630.2014/К.*

#### Литература

1. Захаров Ю. Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ие, 2004. – 239 с.

2. Лобасенко Б. А., Лобасенко Р. Б. Ультрафильтрация молока и молочных продуктов // Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. – Кемерово, 2006. – 117 с.

3. Милошевич Х., Захаров Ю. Н., Контрец Н. и др. Об одной модели размыва связного грунта и движения поверхностных волн // Вестник Кемеровского государственного университета. – 2015. – № 2(62). – С. 35–40.

4. Патанкар С. Численные методы решения задач тепломеханики и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 149 с.

5. Пат. № 2506991. Российская Федерация, МПК<sup>7</sup> В 01 D 63/06. Аппарат для мембранного концентрирования / Лобасенко Б.А., Шушпанников А.С., Семенов А.Г., Захаров Ю.Н.; заявитель и патентообладатель Лобасенко Б.А. – №2012138966/05; заявл. 11.09.2012; опубл. 20.02.14. Бюл. 5 (2014 г.). – 4 с.: ил.

6. Пивоваров Ю. В. Расчет движения жидкости с переменной вязкостью в области с криволинейной границей // Вычислительные технологии. – 2005. – Вып. 3(10). – С. 87–107.

7. Хайрисламов К. З. Течение Пуазейля для жидкости с переменной // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Математика. Механика. Физика. – 2013. – Вып. 2(5). – С. 170–173.

8. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск, 1967. – 197 с.

DOI: 10.17223/9785751124335/33

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЕРЕЗ ОБЛАЧНУЮ АТМОСФЕРУ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ СПУТНИКОВЫХ НАБЛЮДЕНИЙ**

***И. Ю. Гендрина***

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Системой видения в оптике дисперсных сред [1] называют систему наблюдения, включающую в себя: а) подстилающую поверхность; б) рассеивающую и поглощающую среду; в) оптическое устройство, осуществляющее регистрацию проходящего излучения. Для изучения процессов переноса излучения в таких системах традиционно используют теорию линейных систем и теорию переноса излучения [1, 2]. Одной из основных характеристик системы видения является угловое распределение яркости точечного источника, являющееся его изображением, формируемым приемным устройством [2]. В данной работе рассмотрен алгоритм статистического моделирования, адаптированный для расчета указанной характеристики, и описана оптическая модель проведения расчетов. Предполагается, что оптическая система не вносит собственных искажений в изображение и точечному источнику ставит в соответствие в плоскости изображения единственное направление падающих на входной зрачок лучей.

Будем рассматривать систему видения через слоисто-однородную, аэрозольно-молекулярную атмосферу, включающую слой сплошной облачности.

Оптическая модель атмосферы задается следующими характеристиками:

а) полный коэффициент ослабления  $\sigma_{ext}(\lambda, \vec{r}) = \sigma_{sc}(\lambda, \vec{r}) + \sigma_a(\lambda, \vec{r})$ , где  $\sigma_{sc}$  – коэффициент рассеяния,  $\sigma_a$  – коэффициент поглощения;

б)  $g(\lambda, \mu, \vec{r})$  – индикатриса рассеяния.

Здесь  $\vec{r} = (x, y, z)$  – радиус-вектор текущей точки в пространстве,  $\mu = (\vec{\omega}', \vec{\omega})$  – косинус угла рассеяния излучения, пришедшего с направления  $\vec{\omega}'$ , в направлении  $\vec{\omega}$ ,  $\lambda$  – длина волны падающего излучения.

Для облачного слоя предполагается задание собственных оптических характеристик: балла облачности, оптической толщины, индикатрисы рассеяния. Оптическая модель безоблачной атмосферы представлена моделью [3]. Для моделирования облачного слоя используются данные, генерируемые на специальном сайте [4].

Отношение  $\omega_0 = \frac{\sigma_{sc}}{\sigma_{ext}}$  (альbedo однократного рассеяния) можно

рассматривать как вероятность того, что в точке  $\vec{r} = (x, y, z)$  происходит «рассеяние» фотона (изменение направления его движения), отношение  $\frac{\sigma_a}{\sigma_{ext}}$  – вероятность поглощения фотона (его исчезновение).

Индикатриса рассеяния  $g(\lambda, \mu, \vec{r})$  представляет собой плотность вероятности того, что фотон, имеющий направление  $\vec{\omega}'$ , изменит его на направление  $\vec{\omega}$  в результате столкновения с частицей среды в точке  $\vec{r} = (x, y, z)$ .

Вместе с функцией  $g(\lambda, \mu, \vec{r})$  (нормированная индикатриса) используют функцию  $G(\lambda, \mu, \vec{r}) = \int_1^\mu g(\lambda, \mu', \vec{r}) d\mu'$ . Эта функция (интегральная индикатриса рассеяния) представляет собой вероятность того, что в точке столкновения фотон отклонится от направления  $\vec{\omega}'$  на угол  $\arccos \mu$ .

Геометрическая схема расчетов такова: на нижней границе атмосферы (на подстилающей поверхности) находится точечный источник единичной мощности. На верхней границе атмосферы находится идеальный оптический приемник, который может принимать рассеянное излучение, приходящее с различных направлений (углов наблюдения).

Необходимо построить угловое распределение яркости рассеянного излучения для различных оптико-геометрических условий наблюдения.

Яркость рассеянного излучения является решением интегро-дифференциального уравнения переноса и в общем случае может быть найдена только приближенными или численными методами.

$$\begin{aligned} (\vec{\omega}, \text{grad} \Phi(\vec{r}, \vec{\omega})) = & -\sigma_{ext}(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, \vec{\omega}) + \\ & + \sigma_{sc}(\vec{r}) \cdot \int_{\Omega} \Phi(\vec{r}, \vec{\omega}') g(\vec{r}, \vec{\omega}, \vec{\omega}') d\vec{\omega}' + \Phi_0(\vec{r}, \vec{\omega}). \end{aligned} \quad (1)$$

Если речь идет о рассеянном излучении, то  $\Phi_0(\vec{r}, \vec{\omega})$  – плотность распределения первично рассеянных частиц [1, 6]:

$$\Phi_0(\vec{r}, \vec{\omega}) = g(\vec{r}, \vec{\omega}, \vec{\omega}') \sigma_{sc}(\vec{r}) \exp(-\tau(\vec{r}', \vec{r})) \chi(\vec{\omega}') / 2\pi |\vec{r}' - \vec{r}|^2.$$

Наряду с уравнением (1) (прямым уравнением переноса) используют сопряженное уравнение переноса (2):

$$-(\vec{\omega}, \text{grad}\Phi^*(\vec{r}, \vec{\omega})) = -\sigma_{ext}(\vec{r})\Phi^*(\vec{r}, \vec{\omega}) + \sigma_{sc}(\vec{r}) \cdot \int_{\Omega} \Phi^*(\vec{r}, \vec{\omega}')g(\vec{r}, \vec{\omega}, \vec{\omega}')d\vec{\omega}' + p(\vec{r}, \vec{\omega}). \quad (2)$$

Одним из наиболее универсальных методов решения поставленной задачи является метод имитационного моделирования, или метод Монте-Карло. Метод Монте-Карло заключается в моделировании траекторий случайной марковской цепи столкновений фотонов с веществом и вычислении статистической оценки для искомым функционалов. Общая схема построения случайных траекторий описана в [5]. Дадим некоторые комментарии.

Источник задается плотностью распределения первоначальных направлений  $\chi(\vec{\omega}_0) = \chi(\mu, \varphi)$ , где  $\vec{\omega}_0$  – направление вылета фотона из источника (определяется косинусом зенитного угла  $\mu$  и азимутальным углом  $\varphi$ ). Обычно рассматривают три варианта: изотропный ( $\chi(\vec{\omega}_0) = \frac{1}{2\pi}$ ),

ламбертовский ( $\chi(\vec{\omega}_0) = \frac{\mu}{\pi}$ ) и мононаправленный ( $\chi(\vec{\omega}_0) = \delta(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0)$ ).

При моделировании используется модификация «без поглощения»: в каждой точке столкновения не разыгрывается тип взаимодействия (рассеяние или поглощение). Поглощение учитывается путем умножения «веса» частицы на альбедо однократного рассеяния.

Наличие различных компонент рассеяния (например, аэрозольные частицы или облачные) учитывается с помощью соответствующего розыгрыша равномерно распределенной случайной величины. В частности, в качестве вероятности «облачного» взаимодействия можно использовать балл облачности.

Основой всех алгоритмов метода Монте-Карло является интегральное уравнение переноса 2-го рода с обобщенным ядром для плотности столкновений частиц [5]:

$$f(\vec{x}) = \int_X k(\vec{x}', \vec{x})f(\vec{x}')d\vec{x}' + \psi(\vec{x}), \quad f = Kf + \psi.$$

Здесь  $\vec{x} = (\vec{r}, \vec{\omega})$  – точка фазового пространства координат и направлений,  $\psi(\vec{x})$  – функция источников,  $K$  - интегральный оператор с ядром  $k(\vec{x}', \vec{x})$ :

$$k(\vec{x}', \vec{x}) = \frac{\sigma_{sc}(\vec{r}) \cdot g(\mu) \exp(-\tau(\vec{r}', \vec{r}))\sigma(\vec{r})}{\sigma_{ext}(\vec{r}')2\pi|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \delta\left(\vec{\omega} - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right).$$

Одним из широко используемых алгоритмов является метод локальной оценки [5].

Алгоритм локальной оценки заключается в расчете следующего функционала:

$$J(\Omega_i) = \int_{\Omega_i} \Phi(\vec{r}^*, \vec{\omega}^*)d\vec{\omega}^* = \int_X l_i(\vec{x}', \vec{x}^*)f(\vec{x}')d\vec{x}' = M \sum_{n=0}^N Q_n \cdot l_i(\vec{x}_n, \vec{x}^*), \quad (3)$$

$$l_i(\vec{x}, \vec{x}^*) = \frac{\exp(-\tau(\vec{r}, \vec{r}^*)) \cdot g(\mu^*)}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}^*|^2} \Delta_i(\vec{s}^*). \quad (4)$$

Здесь  $\vec{s}^* = \frac{\vec{r}^* - \vec{r}}{|\vec{r}^* - \vec{r}|}$ ,  $\mu^* = (\vec{\omega}, \vec{s}^*)$ ,  $\Delta_i(\vec{s})$  – индикатор области  $\Omega_i$ .  $\Phi$  –

поток частиц (интенсивность) в заданной точке  $\vec{x}^*$ , приходящий с направления  $\vec{\omega}^*$ ,  $Q_n$  – вес частицы,  $f(\vec{x})$  – плотность столкновений.

Суть метода локальной оценки состоит в том, что в каждой «точке столкновения» определяется плотность вероятности попадания фотона из текущей точки фазового пространства в заданную точку в заданном направлении.

Одним из главных недостатков обычного метода локальной оценки является то, что яркость излучения можно определить лишь в некоторой области направлений, индикатором которой является параметр  $\Delta_i(\vec{s})$ . Увеличить эффективность моделирования и устранить отмеченный недостаток позволяет метод сопряженных траекторий, реализующий моделирование на основе сопряженного уравнения переноса (2).

Пусть требуется оценить функционал  $I_p = (\Phi, p)$ . В соответствии со свойствами сопряженных операторов имеет место соотношение [5]

$$\begin{aligned} (\Phi, p) &= \int_R \int_{\Omega} \Phi(\vec{r}, \vec{\omega}) p(\vec{r}, \vec{\omega}) d\vec{r} d\vec{\omega} = (\Phi^*, \Phi_0) = \int_R \int_{\Omega} \Phi^*(\vec{r}, \vec{\omega}) \Phi_0(\vec{r}, -\vec{\omega}) d\vec{r} d\vec{\omega} = \\ &= \int_R \int_{\Omega} f^*(\vec{r}, -\vec{\omega}) \frac{\Phi_0(\vec{r}, -\vec{\omega})}{\sigma_{ext}(\vec{r})} d\vec{r} d\vec{\omega}. \end{aligned}$$

Основной несмещенной оценкой последнего интеграла является величина [5]:

$$M \sum_{n=1}^N Q_n \frac{\Phi_0(\vec{r}_n, -\vec{\omega}_n)}{\sigma_{ext}(\vec{r}_n)}.$$

Суть алгоритма заключается в том, что искомая характеристика представляется в виде функционала от плотности столкновений [6]. Яркость излучения в заданной точке  $\vec{r}^*$  в заданном направлении  $-\vec{\omega}^*$  можно определить так:  $I(\vec{r}^*, -\vec{\omega}^*) = \int_R \int_{\Omega} I(\vec{r}, \vec{\omega}) \delta(\vec{r} - \vec{r}^*) \delta(\vec{\omega} - (-\vec{\omega}^*)) d\vec{r} d\vec{\omega}$ . Таким образом,

особенностью этого метода является обратный порядок построения траекторий фотонов. Траектория теперь представляет собой путь от детектора, который находится на верхней границе атмосферы, к источнику, расположенному на нижней границе. Достоинством этого метода является то, что траектории выходят из точки наблюдения  $\vec{r}^*$  непосредственно по интересующим нас направлениям  $-\vec{\omega}^*$  в соответствии с плотностью  $p(\vec{r}, -\vec{\omega}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}^*) \delta(\vec{\omega} - (-\vec{\omega}^*))$ . В каждой точке столкновения вычисляется величина  $\frac{\Phi_0(\vec{r}_n, -\vec{\omega}_n)}{\sigma_{ext}(\vec{r}_n)}$ , где  $\Phi_0(\vec{r}_n, -\vec{\omega}_n)$  – плотность распределения первично

рассеянных частиц из уравнения (1). Вид вычисляемой величины совпадает с видом локальной оценки (4), поэтому рассмотренный алгоритм является локальной оценкой на сопряженных траекториях.

#### Литература

1. Зуев В. Е., Белов В. В., Веретенников В. В. Теория систем в оптике дисперсных сред. – Томск: Изд-во СО РАН, 1997. – 402 с.
2. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. – М.: Мир, 1971. – 495 с.
3. Креков Г. М., Рахимов Р. Ф. Оптические модели атмосферного аэрозоля. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1986. – 294 с.
4. [http://gdata1.sci.gsfc.nasa.gov/daac-bin/G3/gui.cgi?instance\\_id=MODIS\\_DAILY\\_L3](http://gdata1.sci.gsfc.nasa.gov/daac-bin/G3/gui.cgi?instance_id=MODIS_DAILY_L3)
5. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике / под ред. Г.И. Марчука – Новосибирск: Наука, 1976. – 100 с.
6. Белов В. В., Борисов Б. Д., Макушкина И. Ю. Некоторые закономерности формирования помехи бокового подсвета в системах видения // Оптика атмосферы и океана. – 1988. – Т. 1, № 2. – С. 18–24.  
DOI: 10.17223/9785751124335/34

## КРАТКИЙ ОБЗОР ПО ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВ

*Н. А. Лукьянова, Д. В. Семенова*

*Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия*

В последние годы в многомерном анализе данных при моделировании случайных объектов нечисловой природы возрос интерес к изучению частично определенных моделей, в которых объектом статистического интереса является множество, а не точка. Подобные объекты появились давно в статистике и эконометрике и описываются естественным образом случайными множествами. Основным направлением современной теории случайных множеств является разработка математического аппарата для описания характеристик случайного множества и процедур получения множества с желаемыми свойствами.

Понятие случайного множества было упомянуто впервые в работе А. Н. Колмогорова в 1933 г. вместе с математическими основами теории вероятностей: «область ..., форма которой зависит от случая». Позже множества, полученные случайным образом, появились в различных контекстах, например в статистике Robbins [1], стохастической геометрии Kendall [2] и др. Теория случайных множеств была разработана в рамках стохастической геометрии и стала неотъемлемой частью теории вероятностей с момента публикации фундаментальной книги G. Matheron [3]. Движимый проблемами в морфологии, Матерон определяет понятие случайных замкнутых подмножеств локально компактных пространств со счетной базой. Наиболее существенной особенностью в теории случайных замкнутых множеств Матерона является установление взаимно однозначного соответствия между вероятностными мерами случайных замкнутых множеств и функционалами емкостей Шоке (называется теоремой Шоке [4]),

которые порождают понятие функций распределения обыкновенных случайных точек / векторов в евклидовом пространстве или в более общем случае в метрическом пространстве. Концепция емкостей Шоке проявляется также в качестве полезной меры неопределенности, которая необязательно аддитивна. Теория случайных замкнутых множеств изучает вероятностные меры на пространстве замкнутых подмножеств с произвольной топологией. Случайные множества являются обобщением случайных величин в традиционной теории вероятностей. В отличие от случайных величин, вероятностные законы случайных множеств определены на элементах, которые являются множествами, а не точками.

Важные результаты теории случайных множеств в области стохастической геометрии получены в работах G. Matheron, J. Serra, L. Santalo, D. Stoyan, J. Mecke, О. Ю. Воробьева, P. Diggle, D. G. Kendall, И. Молчанова, A. Baddeley, и др. Например, J. Serra использовал случайные множества для моделирования агломерации руды, P. Diggle – для моделирования распространения вереска и при имитировании природных текстур в бинарных изображениях, в то время как D. Stoyan и H. Stoyan применили случайные множества в статистике частиц для изучения колебаний форм песчинок, показывая, что случайные множества в качестве теоретико-множественного метода имеют свои преимущества и могут выступать в качестве дополнения к другим мощным средствам, таким как многомерная статистика. D. Stoyan применял случайные множества к стохастическим моделям систем из твердых сред, а также при изучении пористых сред. Много работ связано с изучением случайных геометрических объектов – точек, прямых, кругов, мозаик и т.д. В основе исследований лежит математическая морфология, которая изучает форму, в том числе и случайную форму пространственных объектов. Основными объектами в этой области являются случайные множества элементов *числовой* природы, например случайные подмножества евклидова пространства. Поэтому в анализе таких случайных множеств используются классические методы работы с числовыми объектами.

Математические определения новых концепций в теории случайных множеств относятся к И. Молчанову [5], H. Nguyen [6], О. Ю. Воробьеву [7–11], А. И. Орлову [12, 13].

Тесные связи между случайными множествами и другими теориями были исследованы и раскрыты в ряде публикаций.

- Случайные множества обеспечивают существенную математическую основу для точечных процессов (M. Baudin, B. Ripley, D. Stoyan и др.).

- Теория нечетких множеств тесно связана с теорией случайных множеств (I. Goodman, H. Nguyen, L. A. Zade, А. И. Орлов и др.) Полученные связи отражены в работе [14]. Стоит отметить, что изучение этих связей началось с введения случайных множеств с целью развития и обобщения аппарата нечетких множеств Л. А. Заде (1995). В работах [15–17] показано, что нечеткие множества естественно рассматривать как «проекции» случайных множеств.

• Теория свидетельств Демпстера–Шейфера может быть выражена формально в контексте теории случайных множеств (H. Nguyen).

• Теория случайных множеств служит в качестве фундамента для теории экспертных систем (D. Dubois, I. Goodman, H. Nguyen, J. Goutsias, Mahler, Rogers, А. И. Орлов и др.).

По существу теория случайных множеств является дополнением к существующей теории случайных векторов (многомерный статистический анализ) и случайных функций, например, для броуновского движения и скачкообразных процессов. Она служит главным образом строгим механизмом для моделирования наблюдаемых явлений, которые являются множествами, а не конкретными точками. В частности, она выступает как теория множественно-значных случайных процессов. Как неполные данные представляют собой случай неточных наблюдений, так и концепция случайных множеств может быть распространена на случайные нечеткие множества для моделирования сбора основной информации в социальных системах как неполных множеств. Это полезно для проблем искусственного интеллекта, таких как интеллектуальное управление и принятие решений.

Кроме статистических моделей выборки, доверительных областей, стохастической геометрии и морфологических проблем, случайные множества появляются в общем случае в качестве множественно-значных наблюдаемых процессов. К ним относятся:

- анализ изображений (Goutsias, 1997);
- моделирование роста раковой опухоли (Cressie и Laslett, 1987);
- статистика неполных данных (Heitjan и Rubin, 1991);
- моделирование неопределенности (Nguyen, 1978);
- процесс случайного распространения (J. Serra, 2007), например, распространение пожара [18, 19];
- управление запасами и ресурсами (в логистике) (А. И. Орлов, 1979).

В отечественных работах случайные множества нашли применение в статистике объектов нечисловой природы в работах А. И. Орлова [12, 15–17] и О. Ю. Воробьева [7–9, 11] по случайным конечным абстрактным множествам, которые являются случайными элементами со значениями из булеана конечного абстрактного множества. Основная идея состоит в том, что структура статистических взаимозависимостей подмножеств конечного множества полностью определяется распределением случайного множества, заданного на множестве всех его подмножеств. Случайные множества применялись также для решения некоторых финансовых и экономических задач [20–25].

В рамках теории случайных конечных абстрактных множеств решались прикладные задачи социально-экономического, экологического и медицинского характера (И. В. Баранова, А. О. Воробьев, Е. Е. Голденко, Т. В. Куприянова, Е. Г. Тяглова, А. Ю. Фомин, Д. В. Семенова), в которых центральным объектом исследования являлись специфические случайные множества, заданные на конечных множествах событий, и их дискретные

вероятностные распределения, которые позволяли выявить общие статистические закономерности распределения событий в различных системах объектов нечисловой природы. Распределение случайного множества используется для описания всех способов взаимодействия элементов между собой.

Традиционно, начиная с классических работ Шоке [4], Кендала [2], Матерона [3] и опираясь на определение случайного элемента [30, 31], случайные множества определяют посредством отображения  $K$  некоторого вероятностного пространства  $(\Omega, F, \mathbf{P})$  такого, у которого образами элементов  $\omega$  пространства элементарных событий  $\Omega$  являются подмножества фиксированного множества  $U$ . Множество  $U$  называется *носителем случайного множества* [5], в работах О.Ю. Воробьева и его учеников [9, 11, 20–29] в качестве носителя рассматривается конечное *множество случайных событий*.

Рассмотрим вероятностное пространство  $(\Omega, F, \mathbf{P})$ , где  $\Omega$  – пространство элементарных исходов,  $F$  –  $\sigma$ -алгебра событий,  $\mathbf{P}$  – вероятностная мера на  $F$ . Пусть  $U \subset F$  – конечное множество из  $N$  случайных событий, выбранных из  $\sigma$ -алгебры  $F$  этого пространства.

**Определение 1.** Случайное множество  $K$  на конечном множестве случайных событий  $U \subset F$  определяется как отображение  $K : \Omega \rightarrow 2^U$  такое, что  $K^{-1}(\{X\}) = \{\omega \in \Omega : K(\omega) = X\} \in F$  для всякого  $X \in 2^{2^U}$ , где  $2^U$  – булеан множества  $U$ ,  $2^{2^U}$  – алгебра всех его подмножеств.

Случайное множество  $K$  отображает любой элементарный исход  $\omega \in \Omega$  в  $2^U$ , i.e.  $K(\omega \in \Omega) \in 2^U$ . Это отображение измеримо в том смысле, что для всякого  $X \in 2^{2^U}$  существует прообраз  $K^{-1}(X) \in F$  такой, что  $\mathbf{P}(X) = \mathbf{P}(K^{-1}(X))$ .

Выражение  $K(\omega) = \{x \in U : \omega \in x\}$  может быть истолковано как «случайное множество наступивших событий», поскольку элементарному исходу эксперимента  $\omega \in \Omega$  ставится в соответствие некоторое подмножество событий  $X \subseteq U$ , которое содержит все те события, которые наступили в данном испытании.

**Определение 2.** Вероятностное распределение случайного множества  $K$ , заданного на конечном множестве случайных событий  $U \subset F$ , может быть задано несколькими эквивалентными распределениями вероятностей, порожденными множеством событий  $U$  [9, 11]:

**PI.** Вероятностное распределение I рода случайного множества  $K$  на  $U$  есть набор  $\{p(X), X \subseteq U\}$  из  $2^N$  вероятностей вида

$$p(X) = \mathbf{P}(\{K = X\}) = \mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{x \in X} x\right) \cap \left(\bigcap_{x \in X^c} x^c\right)\right), \quad X^c = U \setminus X, \quad x^c = \Omega \setminus x.$$

Вероятностное распределение I рода удовлетворяет следующим условиям:  $0 \leq p(X) \leq 1$ ,  $X \subseteq U$ , и  $\sum_{X \subseteq U} p(X) = 1$ .

**II.** Вероятностное распределение II рода есть набор из  $2^N$  вероятностей вида  $\{p_X, X \subseteq U\}$ , где  $p_X = \mathbf{P}(\{K \supseteq X\}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right)$ .

Вероятностные распределения I и II рода связаны взаимно-обратными формулами обращения Мёбиуса [9, 11].

$$p_X = \sum_{Y \in 2^U: X \subseteq Y} p(Y); \quad p(X) = \sum_{Y \in 2^U: X \subseteq Y} (-1)^{|Y|-|X|} p_Y, \quad \text{для всех } X \in 2^U.$$

Предметом исследования таких случайных множеств является задача построения их вероятностных распределений, которые описывают все способы взаимодействия элементов между собой в моделируемом множестве [24–29]. В общем случае количество параметров, задающих вероятностные распределения случайного множества событий, зависит от мощности  $U$ , поскольку каждое множество из  $N$  событий характеризуется набором из  $2^N$  вероятностей. При исследовании случайных множеств, заданных на множестве событий, возникает задача описания их вероятностных распределений через меньшее число параметров. Это одна из проблем многомерного анализа нечисловых данных, востребованная необходимостью дискретно-событийного моделирования случайных объектов нечисловой природы при создании различных типов интеллектуальных систем технической, социально-экономической и медико-биологической направленности.

Несмотря на то, что между теорией случайных множеств и многомерным статистическим анализом хорошо прослеживается связь, предмет их исследований существенно отличается. Например, методами многомерного статистического анализа довольно успешно проводится анализ некоторых видов статистических зависимостей в медицинских, социальных, экономических, экологических системах. Эти методы направлены на моделирование и измерение статистических зависимостей между случайными величинами, векторами или функциями. Однако подавляющее большинство событий, происходящих в обществе и в природе, имеют случайно-множественный характер и поэтому могут быть статистически измерены только случайными множествами. Все количественные характеристики подобных объектов всегда измерялись классическими методами многомерного статистического анализа, а для анализа случайно-множественной информации классические количественные методы не подходят, потому что не дают полную информацию о структуре зависимостей в случайном множестве, определенном на конечном множестве событий.

Принципиальное отличие методов работы по случайным множествам, заданным на конечном множестве событий, от методов математической морфологии заключается в том, что они направлены на изучение и моделирование случайных объектов *нечисловой* природы. Случайные множества, заданные на конечном множестве из  $N$  событий, состоят из произвольных абстрактных элементов, которые не принадлежат пространствам с привычной линейной или любой другой структурой. Данные объекты

требуют для своего изучения эффективных методов статистических оценок распределений и генерации случайных множеств.

#### Литература

1. Robbins H. E. On the measure of a random set // *Ann. Math. Statist.* – 1944. – № 15. – P. 70–74; 1945. – № 16. – P. 342–347.
2. Kendall D. G. *Foundations of theory of random sets. Stochastic Geometry.* – New York: Wiley, 1974. – P. 322–376.
3. Matheron G. *Random Sets and Integral Geometry.* – New York: J.Wiley, 1975. – 320 с.
4. Choquet G. *Theory of capacities / Ann. Inst. Fourier.* – 1953. – Vol. 5. – P. 131–295.
5. Molchanov I. *The Theory of Random Sets.* – New York: Springer, 2011. – 488 p.
6. Nguyen H. T. *An Introduction to Random Sets.* – Taylor & Francis Group, LLC, 2006.
7. Воробьев О. Ю. *Среднемерное моделирование.* – М.: Наука, 1984. – 133 с.
8. Воробьев О. Ю. *Сет-суммирование.* – Новосибирск, 1993. – 137 с
9. Воробьев А. О., Воробьев О. Ю. Суммирование сет-аддитивных функций и формула обращения Мёбиуса // *Доклады РАН.* – 1994. – Т. 336, № 4. – С. 417–420.
10. Vorob'ov O., Stoyan D. *Random Sets, Shapes, Figures and Their Means.* – Freiberg: TU Bergakademie. – Preprint 94-04. – 1994. – P. 45–64.
11. Воробьев О. Ю. *Эвентология.* – Красноярск, СФУ, 2007. – 435 с.
12. Орлов А. И. *Устойчивость в социально-экономических моделях.* – М.: Наука, 1979. – 296 с.
13. Орлов А. И. *Статистика объектов нечисловой природы // Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия / гл. ред. Ю. В. Прохоров.* – М.: БРЭ, 1999. – С. 646–648.
14. Goodman I. *Fuzzy sets as equivalence classes of random sets. Fuzzy Sets and Possibility Theory: Recent Developments.* (R. Yager, editor). – Pergamon Press, 1982.
15. Орлов А. И. *Теория нечетких множеств - часть теории вероятностей // Научный журнал КубГАУ.* – 2013. – № 92(08).
16. Орлов А. И. *Задачи оптимизации и нечеткие переменные.* – М.: Знание, 1980. – 63 с.
17. Орлов А. И. *Нечисловая статистика.* – М.: МЗ-Пресс, 2004. – 513 с.
18. Воробьев О. Ю., Валендик, Э. Н. *Вероятностное множественное моделирование распространения лесных пожаров.* – Новосибирск: Наука, 1978. – 160 с.
19. Vorob'ov, O. *Random set models of fire spread // Fire Technology.* – 1996. – № 32(2). – P. 137–173.
20. Воробьев О. Ю., Новоселов А. А. *Случайно множественное моделирование финансовых рынков // Материалы семинара «Нестандартные и случайно – множественные методы измерения рисков в социально – экономических системах».* – Красноярск, 1998. – С. 60–86.
21. Vorobyev O. Yu., Goldblatt, J. J., Finkel R. *Eventological theory of decision-making. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics.* – 2009. – № 2 (1). – P. 3–16.
22. Goldenok E. E., Goldenok K. V. *An eventological substantiation of the classical market model // Vestnik of the Krasnoyarsk State University. Phys.-Math. Sc. Series.* – 2006. – № 9. – P. 135–139.
23. Goldenok E. E., Goldenok K. V. *Eventological measurements of superpositional supply and demand by distribution functions // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics.* – 2008. – № 1. – P. 76–82.
24. Воробьев О. Ю., Голденок Е. Е. *Случайно-множественное измерение спроса и предложения на товарных рынках.* – Красноярск: ИВМ СО РАН (под ред. О. Воробьева). – 2002. – P. – 225–230.
25. Воробьев О. Ю., Семёнова Д. В. *Портфельный сет-анализ случайных событий.* – Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 2005. – 106 с.

26. Воробьев О. Ю., Голденко Е. Е. Структурный сет-анализ зависимостей случайных событий. – Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 2004. – 106 с.
27. Воробьев О. Ю., Фомин А. Ю. Регрессионный сет-анализ случайных событий. – Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 2004. – 116 с.
28. Воробьев О. Ю., Баранова И. В. Метод двудольных множеств событий в эвентологическом анализе сложных систем. – Красноярск, 2007. – 132 с.
29. Семенова Д. В., Лукьянова Н. А. Рекуррентное построение дискретных вероятностных распределений случайных множеств событий // Прикладная дискретная математика. – Томск, 2014. – № 4. – С. 47–58.
30. Ширяев А. Н. Вероятность. – М: МЦНМО, 1980. – 580 с.
31. Вероятность и математическая статистика: энциклопедия / гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. – 910 с.
32. Goutsias J., Mahler R., Nguyen H. Random Sets: Theory and Applications. – New York, 2012. – 416 p.

DOI: 10.17223/9785751124335/35

## **РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ ВЛАГОПЕРЕНОСА НА ПРИМЕРЕ ТЕРРИТОРИИ СЕВЕРА ЗАПАДНОЙ СИБИРИ**

*Ю. А. Мусеева, М. В. Решетько*

*Национальный исследовательский Томский политехнический университет*

Одной из особенностей атмосферы является неоднородность ее свойств в пространстве и изменчивость их во времени. Это объясняется весьма сложным характером взаимодействия атмосферы с земной поверхностью, с космической средой и Солнцем. Другая особенность атмосферных процессов связана с наличием водяного пара в атмосфере. В связи с этим изучение атмосферных процессов и их предсказание становятся чрезвычайно сложными [1].

Тепловое и динамическое взаимодействие, обмен влагой являются основными процессами «атмосфера–океан». Именно эти процессы имеются в виду, когда рассматривается проблема взаимодействия океана и атмосферы. В нее входит и взаимодействие атмосферы с поверхностью материков, без которого крупномасштабное взаимодействие было бы неполным.

В тепловом отношении океан более активен, так как обладает большим запасом тепла, а атмосфера более активна в динамическом – в силу большей подвижности и больших запасов кинетической энергии. Океан является важным фактором, влияющим на изменение климата Земли на временных масштабах более года.

Изменения климата, обусловленные естественными процессами или антропогенным влиянием, являются результатом сложных нелинейных взаимодействий физических, химических и биологических процессов в атмосфере, океане и на поверхности суши.

Ранее для исследуемой территории за период с 1970 по 2014 г., авторами были выявлены некоторые изменения климатических характеристик [2], в том числе было установлено увеличение продолжительности прямой

солнечной радиации (от 0,15 до 1,5 ч/год) преимущественно в холодное время года на всей территории и уменьшение в августе и ноябре в восточной части области исследования (0,5–1 ч/год), также отмечено продолжающееся увеличение температуры воздуха в мае и июне в среднем на 0,08 °С/год преимущественно на всех точках исследования, кроме прибрежной части Обской губы (изменений не выявлено) и выявлен зональный характер изменения суммы атмосферных осадков и снежного покрова.

Изучение атмосферного увлажнения играет важную роль в построении теории формирования геохимических аномалий и поисков гидrogenных месторождений полезных ископаемых.

Оценка испарения с водной поверхности может быть произведена с использованием целого ряда методов. Их значительное количество объясняется тем, что сложный механизм взаимодействия между водной поверхностью водоема и прилегающей к ней воздушной массой полностью не раскрыт.

В работах О. А. Дроздова, Х. П. Погосяна [1] и других советских ученых исследован круговорот воды между океанами и материками. Горизонтальный перенос водяного пара оценен с помощью карт барической топографии, испарение, осадки и сток – по данным наземных наблюдений [Там же].

Известно, что испарение с поверхности Мирового океана ( $E_0$ ) превышает количество осадков ( $X_0$ ), выпадающих на ту же поверхность. Оставшаяся часть  $A=E_0-X_0$  водяного пара океанического происхождения выносится воздушными потоками на материки [Там же].

Целью данной работы является сравнительный анализ значений атмосферного увлажнения в пунктах гидрометеорологической информации на территории исследования и расчетного испарения.

В работе использовались данные для точек земной и водной поверхностей, то есть точки на территории севера Западной Сибири, совпадающие с координатами современных пунктов гидроклиматической информации, и точки районов Мирового океана, откуда могут поступать воздушные массы на исследуемую территорию. Для минимизации влияния суши точки над океаном выбирались по срединной линии между материками с запада и востока через каждые 10° широты, далее по широте 80° через каждые 10° долготы, а с южной стороны – срединные части Черного, Каспийского и Аральского морей.

Для расчета испарения в точках над океаном использовались среднемноголетние данные метеорологических параметров (температура воздуха и относительная влажность) по данным [3] за период с 1983 по 2005 г., а значения количества испарения и атмосферных осадков для земной поверхности были взяты на основе опубликованных среднемноголетних данных, полученных на территории бывшего СССР (для территории севера Западной Сибири) за условно однородные периоды (за период 1930–1969 гг. и с 1970 г. до 2000-х гг.) [4, 5].

Методика исследований заключалась в следующем:

- расчет характеристик, влияющих на влагоперенос, по эмпирическим формулам;
- выявление связи между расчетным и наблюдаемым (норма) испарением (приемлемым результатом считалась связь с коэффициентом детерминации  $R^2 > 0,5$ );
- составление уравнения регрессии для вычисления значений характеристик, определяющих испарение, и их сравнение со значениями атмосферного увлажнения в точках на территории исследования.

Для поставленной задачи был применен методологический приём определения количества влаги, перенесенной с рассматриваемых точек в океане на территорию Севера Западной Сибири, включающий расчет характеристик, связанных с испарением в точках над океаном по эмпирическим формулам (1)–(4).

Для вычисления упругости насыщения (предельная величина упругости, которую мог бы иметь водяной пар при данной температуре)  $E^*$  (гПа) над плоской поверхностью воды служит эмпирическая формула

$$E^* = 6,1 \times 10^{\frac{7,63 \times t}{242+t}}, \quad (1)$$

где  $t$  – температура воздуха в градусах по Цельсию.

Упругость водяного пара можно определить по психрометрической формуле

$$e = E_1^* - A \times (t - t') \times P, \quad (2)$$

где  $e$  – упругость водяного пара, гПа;  $E_1^*$  – упругость насыщающего пара при температуре смоченного термометра, гПа;  $t$  – температура сухого термометра, °С;  $t'$  – температура смоченного термометра, °С;  $P$  – атмосферное давление, гПа;  $A$  – коэффициент, зависящий от скорости ветра. Для стационарного психрометра  $A=0,0007947$ .

Относительная влажность  $r$  (%) представляет собой отношение упругости водяного пара, содержащегося в воздухе, к упругости насыщающего пара при данной температуре, выраженное в процентах:

$$r = \frac{e}{E^*} \times 100\%. \quad (3)$$

Недостаток насыщения, или дефицит влажности,  $d$  составляет разность между упругостью насыщения  $E^*$  и упругостью водяного пара  $e$ , содержащегося в воздухе, при данной температуре.

Для определения парциального давления и дефицита влажности в точках на поверхности океана были использованы психрометрические таблицы [6] по данным из [3].

В настоящее время получено большое количество эмпирических формул для расчета испарения, но почти все они имеют структуру, предложенную еще Дальтоном (1802 г.) [1]:

$$E = \varepsilon_0 \times (E - e_2), \quad (4)$$

где  $\varepsilon_0$  – коэффициент, зависящий от скорости ветра;  $E^*$  и  $e_2$  – давление насыщенного водяного пара и парциальное давление на высоте 2 м;  $E$  – слой испарившейся воды в мм/сут.

В данной работе авторами предложен способ определения испарения исходя из использования следующей характеристики: произведения дефицита влажности на длину пути переноса  $L_1$  (расстояние между точками, взятыми на территории Западной Сибири и на поверхности океана).

В результате проведенных вычислений полученные значения сравнивались с наблюдаемым испарением на метеостанции с помощью корреляционного анализа, при этом значимым результатом считалась связь с коэффициентом детерминации  $R^2 > 0,5$ . Так, были определены точки, в которых прослеживалась связь (рис. 1) и сгруппированы по возможным траекториям воздушных масс, переносимых атмосферными барическими образованиями.

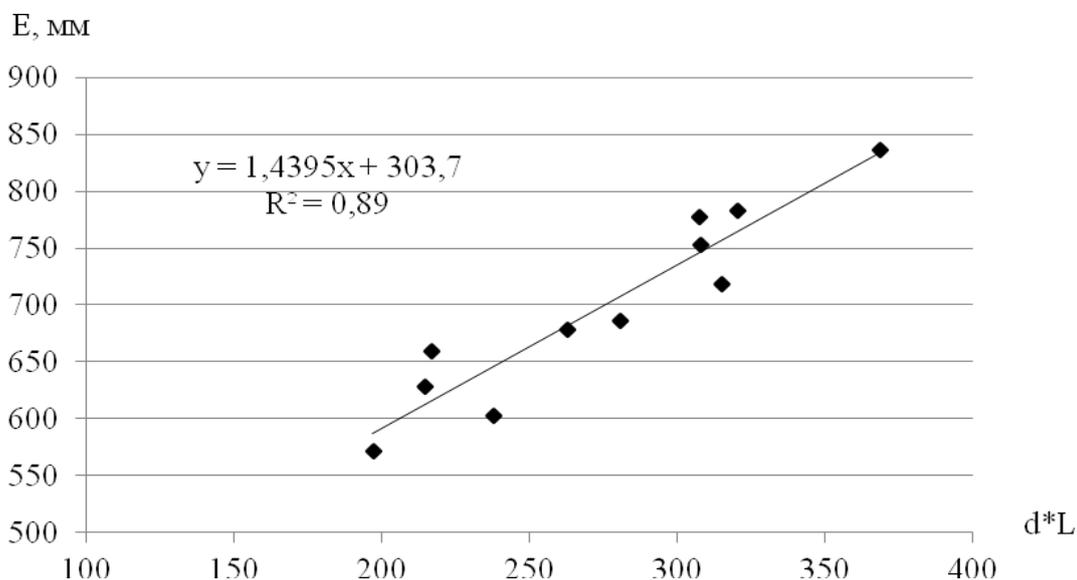


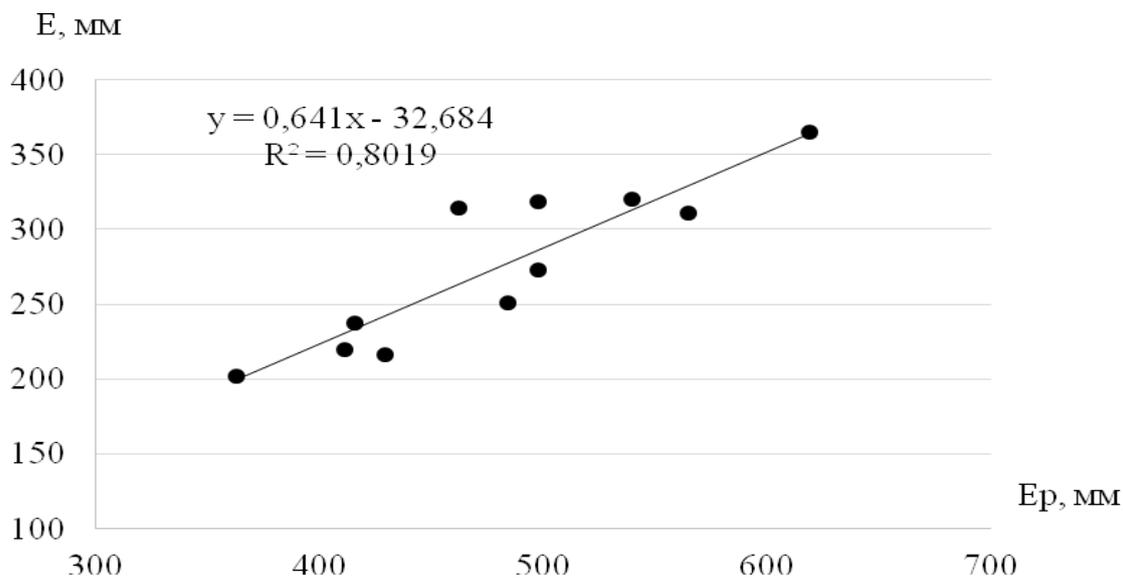
Рис. 1. Зависимость между испарением в точках на территории исследования ( $E$ ) и характеристикой в океане ( $d \cdot L$ )

Далее был проведен регрессионный анализ связи нормы испарения за однородный период в пунктах гидрометеорологической информации с расчетным испарением, на основе которого было составлено уравнение регрессии для вычисления характеристик, определяющих испарение (таблица).

Выявлена зависимость у расчетного испарения в направлениях северо-западное (рис. 2), северное и в Беринговом проливе (рис. 3) при  $R^2 > 0,8$ . Также найдена взаимосвязь в северо-восточном направлении, европейской части, с Аральского и Каспийского морей ( $R^2 = 0,79$ ).

*Вычисленные значения расчетного испарения с помощью регрессионного анализа и среднегодовые значения испарения (E) и атмосферного увлажнения (X) на территории исследования*

Пункты гидрометеорологической информации	E, мм	X, мм	Расчетные значения испарения, мм				Аральское и Каспийское моря
			0° в.д. 80° с.ш. — 30° в.д. 80° с.ш.	40° в.д. 80° с.ш. — 90° в.д. 80° с.ш.	100° в.д. 80° с.ш. — 40° в.д. 80° с.ш.	150° в.д. 80° с.ш. — 164° з.д. 50° с.ш.	
Тазовское	197	363	202,2	201,8	196,5	197,7	201,6
Ныда	215	429	215,9	216,4	214,1	218,0	239,5
Сидоровск	237	416	237,2	237,5	242,2	237,9	213,4
Салехард	216	411	218,4	219,3	220,3	214,4	237,2
Надым	262	484	251,8	250,8	254,2	256,6	275,7
Тарко-Сале	280	498	274,0	273,0	276,4	277,9	281,3
Саранпауль	320	498	318,4	318,6	316,2	317,4	283,2
Толька	315	565	309,5	310,9	307,6	314,3	287,4
Березово	307	462	314,8	314,2	316,9	319,2	315,9
Халесовая	308	540	321,0	320,6	319,6	311,3	324,8
Октябрьское	368	619	365,0	365,2	364,3	363,5	368,3



*Рис. 2. Зависимость между наблюдаемым (E) и расчетным (E<sub>р</sub>) испарением с 40° в.д. 80° с.ш. до 90° в.д. 80° с.ш.*

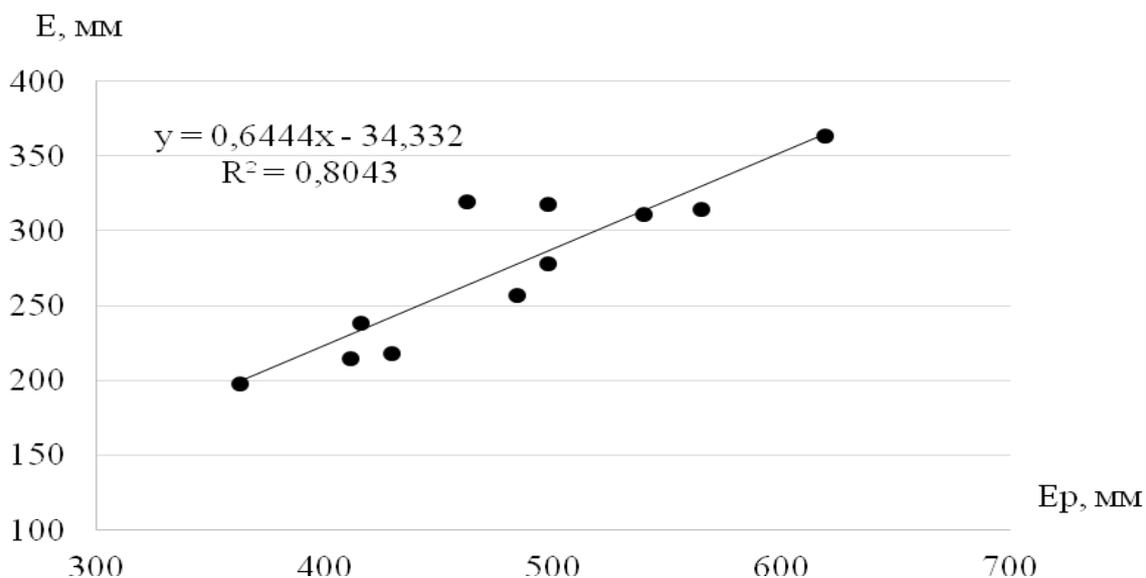


Рис. 3. Зависимость между наблюдаемым ( $E$ ) и расчетным ( $E_p$ ) испарением с  $150^\circ$  в.д.  $80^\circ$  с.ш. до  $164^\circ$  з.д.  $50^\circ$  с.ш.

Следовательно, со стороны Тихого океана до северной широты  $80^\circ$  не были обнаружены связи переноса влаги с океана на территорию севера Западной Сибири. То есть количество атмосферного увлажнения на территории исследования складывается из переносимой влаги с океана в североевропейской, северной, северо-восточной и восточной частях, а также с Каспийского и Аральского морей.

#### Литература

1. Матвеев Л. Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1984. – 376 с.
2. Решетько М. В., Моисеева Ю. А. Климатические особенности и статистические оценки изменения элементов климата в районах вечной мерзлоты на территории севера Западной Сибири // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2016. – Т. 327, № 4. – С. 108–118.
3. Atmospheric Science data center [Электронный ресурс] NASA Surface meteorology and Solar Energy. – URL: <https://eosweb.larc.nasa.gov/cgi-bin/sse/retscreen.cgi?email=skip@larc.nasa.gov> (дата обращения: 09.04.2016).
4. Научно-прикладной справочник по климату СССР. Сер. 3. Многолетние данные. Ч. 1–6, вып. 20: Томская, Новосибирская, Кемеровская области, Алтайский край. – СПб.: Гидрометеиздат, 1993. – 718 с.
5. Научно-прикладной справочник по климату СССР. Сер. 3. Многолетние данные. Ч. 1–6, вып. 17: Тюменская и Омская области. – СПб.: Гидрометеиздат, 1998. – 702 с.
6. Савич В. А. Психометрические таблицы. – Л.: Гидрометеиздат, 1963. – 252 с.

## **АНАЛИЗ ПРОБЛЕМ ВИЗУАЛЬНОГО ВОСПРИЯТИЯ УСТНОЙ РЕЧИ**

*М. А. Мясоедова<sup>1</sup>, З. П. Мясоедова<sup>2</sup>, Т. К. Пественидзе<sup>3</sup>*

*<sup>1, 2</sup> Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН*

*<sup>3</sup> Государственный университет им. Акакия Церетели, Кутаиси, Грузия*

### **Введение**

Статья посвящена проблемам визуального восприятия устной речи в условиях влияния на этот процесс ряда факторов, приводящих к неопределённости фонетического и артикуляционного характера.

Речевая коммуникация как основное средство общения людей не всегда и не для всех бывает полноценной и доступной в одинаковой степени, что обусловлено рядом причин. Выходом из данной ситуации является подключение зрительной системы, позволяющей отслеживать движения речевых органов говорящего.

### **Визуальное восприятие устной речи**

Зрительное восприятие устной речи возможно благодаря соответствию каждой фонеме языка своего артикуляционного рисунка (виземы), который можно описать геометрическими признаками губ, положением языка и т.д. Однако не все виземы доступны восприятию в одинаковой степени, поскольку отличаются степенью отчётливости. Даже опорные фонемы, имеющие наиболее яркие артикуляционные рисунки, могут в определённом сочетании с другими фонемами быть легко- или трудночитаемыми. Отдельные фонемы русского языка имеют схожие виземы, что приводит к невозможности их различения между собой.

Получить абсолютно правильно распознанную информацию по артикуляционным движениям практически невозможно. При этом чаще всего происходит не полное распознавание слова, а определение в нём лишь отдельных визем. Компенсировать неполноценность зрительного восприятия речи позволяет смысловое комбинирование, т.е. отбор из всего множества возможных комбинаций лишь дающих осмысленное слово.

### **Факторы, влияющие на зрительное восприятие устной речи**

В ходе речевой коммуникации нередко приходится сталкиваться с явлением неоднозначного толкования слов, приводящим к неопределённости всей фразы, что наблюдается на всех языковых уровнях. Сложность восприятия отдельных слов русского языка во многом обусловлена неопределённостью их звучания, не всегда совпадающего с их напи-санием [1].

Успешность визуального восприятия устного сообщения существенно зависит от ряда факторов: его характера (особенностей его построения, заложенной в нём фонетической информации, наличия контекста); качества его произнесения; влияния окружающего пространства и личных качеств человека, распознающего речь.

Процесс формирования и передачи сообщения сопровождается изменением характеристик его акустической составляющей в зависимости от особенностей говорящего (его грамотности, использования им литературной или диалектной речи и т.п.) и действия фонетических процессов. Это отражается на артикуляционной составляющей сообщения, зачастую приводя к приобретению им иного смысла.

### **Фонетические особенности русского языка**

Специфические трудности визуального восприятия устной речи в целом обусловлены влиянием на её произношение фонетических процессов. В результате этого в речевом потоке одна и та же фонема в зависимости от её позиции в слове часто приобретает новое звучание, которое может соответствовать нескольким разным фонемам, которые будут обозначаться одной виземой.

Здесь имеет место нейтрализация фонем, реализующихся одним и тем же звуком. Так, для согласных фонем нейтрализация проявляется при оглушении звонких в конце слова («код» – «кот» и [кот] – [кот]), для гласных – в пред- и безударных слогах («раннее» – «ранние» и [ра́н'и'џь] – [ра́н':и'џь]).

Данные процессы приводят к несоответствию графической и акустической составляющих речевых элементов и появлению новых, схожих по звучанию или по артикуляционным рисункам, но совершенно разных по написанию и значению (омонимов).

Такая особенность омонимов зачастую является источником ошибок в устной речи, связанных с неразличением их лексического значения, что приводит к замене одного из слов другим. Снятие акустической и артикуляционной неопределённости, как показывает практика, не всегда возможно даже при наличии контекста.

### **Результаты экспериментов с учётом особенностей сообщений**

Для определения зависимости качества визуального распознавания речи от характера сообщения был проведён ряд экспериментов [2] с использованием в каждом из них групп слов со схожими артикуляционными рисунками (таблица).

Каждое из указанных слов включает одну из парных гласных или согласных фонем со слабо выраженным отличием ([г] – [к], [з] – [с]), что существенно сказывается на их визуальном распознавании, приводя к взаимозаменяемости отдельных слов внутри данной группы и не в равной степени.

В соответствии с полученными в ходе эксперимента результатами построена схема (рис. 1), отражающая реальную взаимозаменяемость схожих слов.

Как видно из рисунка, взаимозаменяемость слов при их распознавании не является полной, что объясняется влиянием такого фактора, как частотность каждого из слов.

*Двусложные схожие слова*

Слова	Фонемный состав					
	слов	СЛОГОВ				
		1				2
		[г] – [к]	[л] – [р]	[а] – [ја]	[з] – [с]	ный
<i>гласный</i>	[глас']ный	[г]	[л]	[а]	[с]	ный
<i>грязный</i>	[гр'аз']ный	[г]	[р]	[ја]	[з]	
<i>классный</i>	[клас:]ный	[к]	[л]	[а]	[с:]	
<i>красный</i>	[крас']ный	[к]	[р]	[а]	[с]	
<i>разный</i>	[раз']ный	–	[р]	[а]	[з]	
<i>рясный</i>	[р'ас']ный	–	[р]	[ја]	[с]	

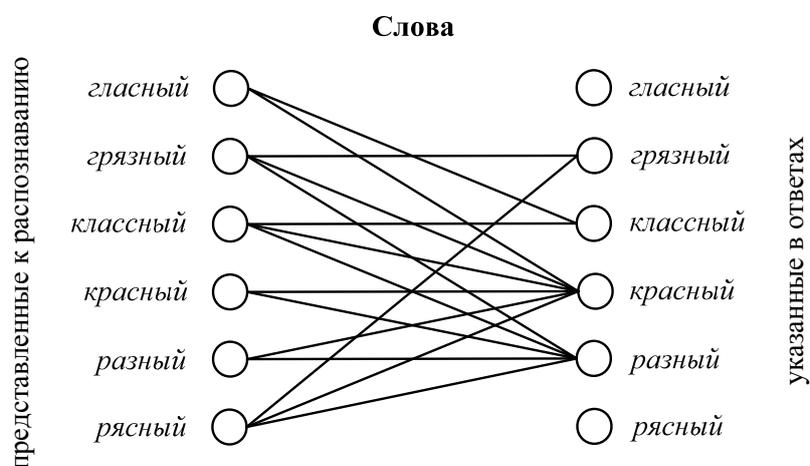


Рис. 1. Схема взаимозаменяемости схожих слов

Указанные в таблице слова имеют схожие артикуляционные образы, идентифицировать которые в условиях неопределённости не всегда удаётся точно, поэтому при распознавании слов возникнет проблема в выборе распознавателями правильного ответа. Стоит сказать, что частота использования каждым человеком тех или иных речевых элементов носит индивидуальный характер, отличающийся словарным запасом, объём и состав которого напрямую зависят от уровня образования, сферы деятельности, района проживания человека и т.п. Поэтому предпочтение, скорее всего, будет отдано словам, имеющим наибольшую частоту использования каждым из распознавателей в своей речи.

Данное предположение подтверждено результатами эксперимента, в ходе которого было выявлено, что слова данной группы были указаны в ответах с разной частотой, среди которых слово «красный» является самым часто называемым словом. Отсутствие упоминаний в ответах слова «гласный» можно объяснить тем, что оно обычно употребляется в конкретной ситуации, например в сочетании со словом «звук», что в обычной речи бывает нечасто. Слово «рясный», включённое в группу лишь

по схожести звуков с другими её словами, считается устаревшим и в настоящее время не имеет широкого применения [2].

На рис. 2 приведена диаграмма «популярности» схожих артикуляционными рисунками слов, указанных в ответах участниками эксперимента.

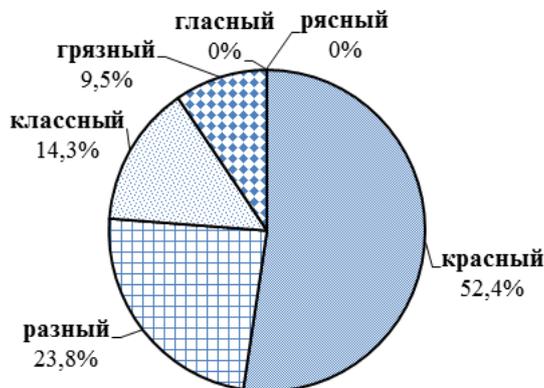


Рис. 2. «Популярность» схожих слов при их распознавании участниками эксперимента

Вероятность визуального распознавания слов и взаимной замены слов со схожими артикуляционными рисунками может быть описана с помощью теоремы Байеса:

$$P(Z|S) = \frac{P(S|Z) \cdot P(Z)}{P(S)} = \frac{P(S|Z) \cdot P(Z)}{\sum_{i=1}^n P(Z_i) P(S|Z_i)},$$

где  $S$  и  $Z$  – исходное и заменяющее слова,

$P(S)$  и  $P(Z)$  – вероятности распознавания исходного и заменяющего слов,

$P(S|Z)$  и  $P(Z|S)$  – вероятности прямой и обратной замен исходного слова другим словом.

Таким образом, используя данную формулу, с учётом полученных результатов эксперимента можно определить, какова вероятность верного распознавания исходного слова или замены его другим схожим с ним словом.

### Заключение

Анализ факторов, влияющих на визуальное распознавание устной речи, позволяет сделать вывод о проблеме различения между собой слов-омонимов, образованных в результате фонетических процессов. Схожесть артикуляционных рисунков таких слов, встречающихся в разговорной речи довольно часто, затрудняет выделение одного из них среди других и вносит некоторую путаницу при их распознавании.

### Литература

1. Зубкова Л. Г. Неопределённость в языке как посредник между миром и человеком // Культура народов Причерноморья. – 2006. – Т. 1, № 82. – С. 174–177.

2. Мясоедова М. А., Мясоедова З. П., Петухова Н. В. Визуальное восприятие устной речи и обучающая программа «Читаем с губ». – М.: ООО «Буки Веди», 2015. – 153 с.

DOI: 10.17223/9785751124335/37

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОМИНАНТНЫХ КАНАЛОВ ЭЭГ ПОСРЕДСТВОМ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА**

*М. А. Новожилов, Р. И. Ивановский*

*Санкт-Петербургский политехнический университет  
Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия*

Предлагается подход к анализу множественных связей каналов ЭЭГ с использованием матрицы корреляционных отношений. На основе анализа этой матрицы предложены алгоритмы выявления доминантных каналов и определения параметра доминирования.

Поиск новых подходов к обработке данных электроэнцефалограмм (ЭЭГ) продолжает оставаться весьма актуальным. При обработке данных ЭЭГ особенно остро стоит проблема получения параметров, способных оперативно характеризовать состояние пациентов в клинической практике и обеспечивать объективность оценки состояния.

Одна из важных задач обработки данных ЭЭГ связана с анализом межканального взаимодействия, а следовательно, и связей соответствующих корковых зон [1]. Один из новых подходов к решению этих задач с применением специальных разделов регрессионного и корреляционного анализа математической статистики предлагается ниже.

Пусть данные ЭЭГ получены по  $m$  однотипным каналам на промежутке времени  $t_D$ . Фиксация данных каждого канала на этом промежутке времени осуществляется на определенной частоте последовательностями по  $n$  значений в каждой. Тогда в результате проведения ЭЭГ получается массив данных в виде  $(n \times m)$ -матрицы  $F$ .

Представление исходных данных ЭЭГ в виде матриц  $F$  универсально. Оно может использоваться при решении всей совокупности задач обработки: при анализе состояний пациентов в статике и динамике, при спектральных преобразованиях данных, при выделении из них диапазонов частот и биоритмов. Последующее изложение будет опираться на структуру матрицы  $F$ , что подчеркивает общность предлагаемого ниже подхода.

Этот формат данных упрощает переход от обработки всего массива на полном временном интервале  $t_D$  к обработке на коротких временных отрезках, а также анализ связей для локальной группы каналов ЭЭГ.

Анализ межканальных связей предполагает наличие множества вариантов. Наиболее часто рассматриваются так называемые парные связи, т.е. связи между двумя каналами в составе некоторой группы. Для  $m$ -канальной ЭЭГ необходимо рассматривать  $m \cdot (m - 1)$  парных связей. Другим,

менее распространенным вариантом, служит анализ множественных связей. Для каждого из вариантов на практике может использоваться большое количество различных параметров связи. Все они могут рассматриваться в качестве индивидуальных показателей состояния пациента, используемых при диагностике.

Основой изучения межканальных связей служат корреляционный и регрессионный анализы, тесно связанные между собой. Первый из методов призван оценивать степень взаимозависимостей двух (или более) каналов при различных законах (моделях) их связи. Второй метод определяет вид и параметры этих моделей.

Изучение межканальных взаимодействий по данным ЭЭГ традиционно проводится на основе анализа парных связей. При этом в качестве параметра без всяких обоснований используют коэффициенты корреляции  $r$  [2]. Однако хорошо известно [3], что область практического применения параметров  $r$  ограничена лишь линейными моделями. Это означает, что  $r$  можно использовать без риска искажения истинных свойств связи двух каналов (с измеренными значениями  $y$  и  $x$ ) только в случаях, когда для них справедливо уравнение вида

$$y = a + b \cdot x, \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  – коэффициенты, подлежащие определению в задаче регрессии.

Выражение (1) служит простейшим регрессионным соотношением, причем в этой записи  $y$  и  $x$  носят названия отклика и фактора соответственно.

Логическое усложнение выражения (1) приводит к нелинейной модели второго порядка вида

$$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2, \quad (2)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – коэффициенты, подлежащие определению.

Линейная модель (1) представляет весьма частный случай реальных связей, поэтому она способна лишь поверхностно охарактеризовать взаимозависимость каналов в общем случае. Это в полной мере относится и к способности  $r$  служить объективным признаком состояния пациента.

Для оценки уровней парных связей в многоканальных измерительных системах авторами предложен [4, 5] другой параметр – корреляционное отношение  $R$ . Для нелинейных моделей связи  $R_{ij} \neq R_{ji}$  ( $i, j = 1, \dots, m; i \neq j$ ). Равенство  $R_{ij} = R_{ji}$  имеет место только для линейных моделей (1).

Корреляционное отношение  $R$ , в отличие от параметра  $r$ , способно объективно характеризовать уровни связей при произвольных моделях, как линейных, так и нелинейных. Более того, показано [4], что  $R$  как пострегрессионный параметр можно использовать для выбора модели связи, наилучшим образом согласованной с исходными данными. Для  $m$ -канальной ЭЭГ алгоритм определения такой наилучшей модели предполагает решение  $m \cdot (m - 1)$  задач регрессии, получение  $R_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, m; i \neq j$ ) и выбор большего значения в каждой паре  $R_{ij} \neq R_{ji}$ . Модель связи, имеющая максимальное значение  $R$ , будет наилучшей в смысле согласованности с исходными данными. При этом будет автоматически разрешена априорная неопределенность – какой канал считать откликом, а какой – фактором.

Для анализа и выбора моделей парных связей удобно использовать матрицы корреляционных отношений  $\mathbf{R}$  и матрицы  $\mathbf{r}$  коэффициентов корреляции размерностью  $(m \times m)$ . Диагональные элементы этих матриц – единицы. В общем случае недиагональные элементы этих матриц  $R_{ij} \neq R_{ji}$  и  $r_{ij} = r_{ji}$ . Поэтому в общем случае матрица  $\mathbf{R}$  несимметричная, матрица  $\mathbf{r}$  – симметричная. Матрицы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  содержат показатели связи всех  $m \cdot (m - 1)$  пар каналов.

Анализ элементов матрицы  $\mathbf{R}$  резко упрощает выделение линейных (для них  $R_{ij} = R_{ji}$ ) и нелинейных ( $R_{ij} \neq R_{ji}$ ) связей, определение лучших вариантов модели и распределение факторов-откликов для каждой из пар каналов.

Авторами разработано несколько программ в среде Mathcad (mcd), позволяющих вести обработку данных реальных ЭЭГ на основе предлагаемого подхода. Некоторые из этих программ размещены на портале [6] в подразделе «Математика > Теория вероятностей > Общие сведения». Портал обеспечивает возможность решения задач в режиме свободного доступа. В программах предусмотрено решение задач регрессии и вычисление элементов матриц  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$ . Формирование этих матриц выполнено в программе так, что в обозначении их элементов индекс строки связан с фактором, а индекс столбца – с откликом. Некоторые результаты работы программ в виде копий mcd-файлов приводятся ниже.

На рис. 1 приведены матрицы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$ . Исходными при этом служили данные реальной ЭЭГ, матрица  $\mathbf{F}$  для которых имеет параметры:  $m = 16$ ,  $n = 11486$ ,  $t_D = 45,22$  с. Расчеты проводились при  $t_D = 45$  с. Матрицы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  получены в рамках моделей (2) и (1) соответственно. Учитывая трудности размещения матриц большой размерности, эти матрицы (см. рис. 1) приведены для группы каналов (с 8 по 11). Единицы в диагоналях  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  заменены номерами каналов для удобства работы с элементами матриц.

$\mathbf{R} =$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: black; color: white;">8</td><td>0.258</td><td>0.597</td><td>0.398</td></tr> <tr><td>0.19</td><td style="background-color: black; color: white;">9</td><td>0.355</td><td>0.472</td></tr> <tr><td>0.464</td><td>0.349</td><td style="background-color: black; color: white;">10</td><td>0.511</td></tr> <tr><td>0.35</td><td>0.438</td><td>0.511</td><td style="background-color: black; color: white;">11</td></tr> </table>	8	0.258	0.597	0.398	0.19	9	0.355	0.472	0.464	0.349	10	0.511	0.35	0.438	0.511	11
8	0.258	0.597	0.398														
0.19	9	0.355	0.472														
0.464	0.349	10	0.511														
0.35	0.438	0.511	11														

$\mathbf{r} =$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: black; color: white;">8</td><td>-0.177</td><td>-0.456</td><td>0.345</td></tr> <tr><td>-0.177</td><td style="background-color: black; color: white;">9</td><td>0.347</td><td>-0.438</td></tr> <tr><td>-0.456</td><td>0.347</td><td style="background-color: black; color: white;">10</td><td>-0.511</td></tr> <tr><td>0.345</td><td>-0.438</td><td>-0.511</td><td style="background-color: black; color: white;">11</td></tr> </table>	8	-0.177	-0.456	0.345	-0.177	9	0.347	-0.438	-0.456	0.347	10	-0.511	0.345	-0.438	-0.511	11
8	-0.177	-0.456	0.345														
-0.177	9	0.347	-0.438														
-0.456	0.347	10	-0.511														
0.345	-0.438	-0.511	11														

Рис. 1. Матрицы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  для группы из четырех каналов

Из недиагональных элементов матрицы  $\mathbf{R}$  (см. рис. 1), например для каналов 8 и 10, имеем:  $R_{10,8} = 0,464$ ,  $R_{8,10} = 0,597$ . Преобладает элемент  $R_{8,10}$ , откуда сразу следует вывод, что предпочтительной моделью связи этих каналов служит полином (2), причем данные канала 10 выступают в качестве отклика  $y$ . Для другой пары элементов  $R_{11,10} = R_{10,11} = 0,511$ , откуда видно, что каналы 10 и 11 связаны линейной моделью (1). Знак этой связи следует из соответствующего элемента матрицы  $\mathbf{r}$ .

Анализ матриц  $\mathbf{R}$  выявляет случаи, когда какой-то ее столбец содержит несколько превалирующих элементов. Так, в матрице  $\mathbf{R}$  из рис. 1 это касается элементов  $R_{8,10} > R_{10,8}$  и  $R_{9,10} > R_{10,9}$ . Здесь десятый канал имеет несколько

влияющих на него факторов и в этом смысле может быть назван доминирующим каналом, а связанная с ним корковая зона – доминирующей зоной. Оценки уровней доминирования каналов должны предполагать решение задач множественной регрессии и определения сводных коэффициентов корреляции [3], который обозначим здесь  $S$ .

Получим эти коэффициенты для каналов 10 (отклик  $y$ ), 8 (фактор  $x$ ) и 9 (фактор  $z$ ) в рамках моделей первого и второго порядков:

$$y = a + b \cdot x + c \cdot z; \quad (3)$$

$$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot z + g \cdot z^2. \quad (4)$$

Как и в однофакторных задачах, оценки уровней множественных связей в сильной степени зависят от вида регрессионных соотношений, используемых при решении задач регрессии. На рис. 2 приведены результаты вычисления сводных коэффициентов корреляции для линейной (3) модели (слева) и модели (4) второго порядка (справа). Здесь использован алгоритм, учитывающий определение параметра  $S$ : сводный коэффициент корреляции есть коэффициент корреляции вектора откликов (обозначен  $Y$ ) и его оценки ( $Y0$  для модели (3) и  $Y1$  — для модели второго порядка).

$$\boxed{\text{corr}(Y, Y0) = 0.53} \quad \boxed{\text{corr}(Y, Y1) = 0.632}$$

Рис. 2. Параметры  $S$  доминирования канала 10

Полученные значения параметра  $S$  свидетельствуют о том, что и при рассматриваемом случае множественной связи нелинейная модель полнее отражает свойства исходных данных ЭЭГ. Факт доминирования определенного канала и значения параметра  $S$  являются новыми важными элементами индивидуальных показателей пациента, используемых при диагностике.

#### Литература

1. Захаров С. М., Скоморохов А. А. Практическое применение компьютерной электроэнцефалографии. – Таганрог: Медиком МТД, 2000. – 68 с.: ил.
2. Сахаров В. Л., Андреев А. С. Методы математической обработки электроэнцефалограмм: учеб. пособие. – Таганрог: Антон, 2000. – 44 с.: ил.
3. Ивановский Р. И. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде Mathcad. – СПб.: БХВ, 2008. – 528 с.
4. Новожилов М. А. Анализ причинно-следственных связей на основе корреляционных отношений // Навигация и управление движением: Материалы XVII конференции молодых ученых. – 2015. – С. 228–232.
5. Ивановский Р. И., Новожилов М. А. Статистическая обработка данных геофизического мониторинга // Геоинформатика. – 2016. – С. 54–58.
6. URL: <http://mas.exponenta.ru/> (10.04.2016).

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕРМООБЕСЦВЕЧИВАНИЯ ДЫРОЧНЫХ  $V_2$ -ЦЕНТРОВ ОКРАСКИ  
В КРИСТАЛЛАХ NaCl С РАЗЛИЧНЫМИ КОНЦЕНТРАЦИЯМИ Ag**

***М. Ч. Осконбаев, З. К. Абдимуталипова, А. Арстанбек кызы,  
К. Ураимова, А. Б. Осмоналиев***

*Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан*

При решении задачи на ЭВМ основная роль все-таки принадлежит человеку. Машина лишь выполняет его задание по разработанной программе. Роль человека и машины легко уяснить, если процесс решения задачи разбить на перечисленные здесь этапы.

1. Постановки задачи. Этот этап в нашем случае заключается в физической постановке задачи и определении конечных целей решения.

2. Построение математической модели. Модель должна правильно (адекватно) описывать основные законы физического процесса. Построение или выбор математической модели из существующих требует глубокого понимания проблемы и знания соответствующих разделов математики.

Модель имитируемой системы служит основой любого имитационного эксперимента на ЭВМ. В теории моделей [1] определение данного понятия дается следующим образом.

**Определение 1.** Модель – это произвольное множество с разработкой численного метода. Поскольку ЭВМ может выполнять лишь простейшие операции, она «не понимает» постановки задачи даже в математической формулировке. Для ее решения должен быть найден численный метод, позволяющий свести задачу к некоторому вычислительному алгоритму.

3. Разработка алгоритма и построение блок-схемы. Процесс решения задачи записывается в виде последовательности элементарных арифметических и логических операций, приводящей к конечному результату и называемой алгоритмом решения задачи. Алгоритм можно изобразить в виде блок-схемы.

4. Программирование. Алгоритм решения задачи записывается на понятном машинном языке в виде точно определенной последовательности операций – программы для ЭВМ. Составление программы (программирование) обычно производится с помощью некоторого промежуточного (алгоритмического) языка, а ее трансляция осуществляется самой вычислительной машиной.

Мы в своих исследованиях имеем четкую адекватную постановку физической задачи. Для решения этой задачи построена математическая модель, в которой использован интерполяционный полином Ньютона. На основании построенной модели составлена программа для решения задачи на ЭВМ.

Экспериментальное и теоретическое исследования процессов распада и преобразование различных по структуре радиационных центров показали,

что в процессе распада и взаимопревращения радиационных дефектов в области высоких температур основную роль играют ионные процессы, протекающие в ШГК [2, 3].

В работе [4] было рассмотрено математическое моделирование термолюминесценции в кристаллах NaCl с различной концентрацией серебра. В работе [5] – математическое моделирование термообесцвечивания электронных F-центров окраски в кристаллах NaCl с различной концентрацией серебра. В работе [6] – математическое моделирование термообесцвечивания дырочных  $Ag_a$ -центров окраски в кристаллах NaCl с различной концентрацией серебра.

В данной работе была попытка определить с помощью первой интерполяционной формулы Ньютона начальные и конечные значения функции и поведение термообесцвечивания дырочных  $V_2$ -центров окраски в кристаллах NaCl с различными концентрациями Ag.

Если принять полученные экспериментальные данные за узловые точки, то можно провести анализ поведения распада и взаимодействия дырочных  $V_2$ -центров окраски в близлежащих к узловым точкам, используя современные методы интерполяции.

Считая J функцией от температуры и принимая значения температуры за узлы интерполирования, интерполируем заданную табличную функцию J. Так как в нашем случае узлы равноотстоящие, будем пользоваться интерполированным полиномом Ньютона в следующем виде:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad (1)$$

где  $q = \frac{x-x_0}{h}$ ,  $x_i = x_0 + ih (i = 0, 1, 2, \dots, h)$ ,  $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1}$ .

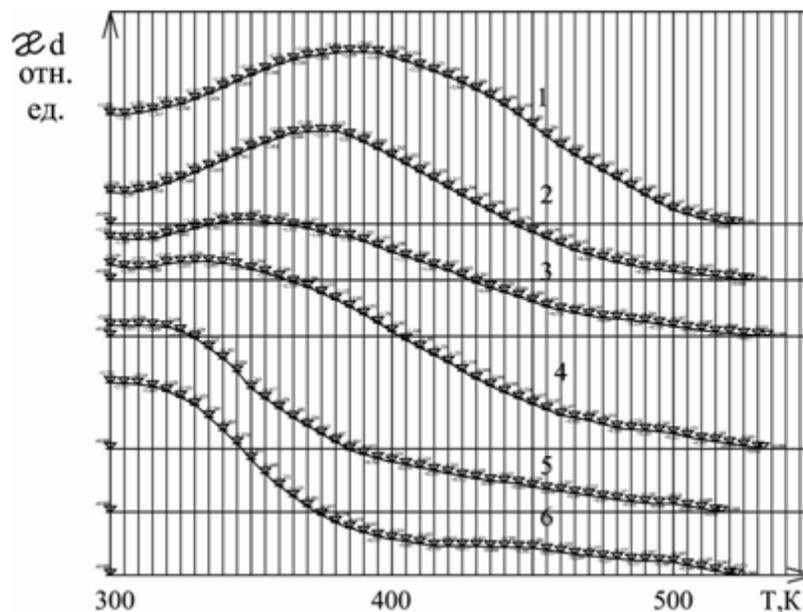


Рис. 1

На рис. 1 показаны экспериментальные результаты термообесцвечивания дырочных  $V_2$ -центров окраски в кристаллах NaCl с различными концентрациями серебра: 1 – 0,01 м%; 2 – 0,05 м%; 3 – 0,10 м%; 4 – 0,50 м%; 5 – 1,0 м%; 6 – 10,0 м%. На полиномах (полиномы 1–6) показано математическое моделирование  $V_2$ -центров окраски с различными концентрациями серебра в кристаллах NaCl (рис. 2).

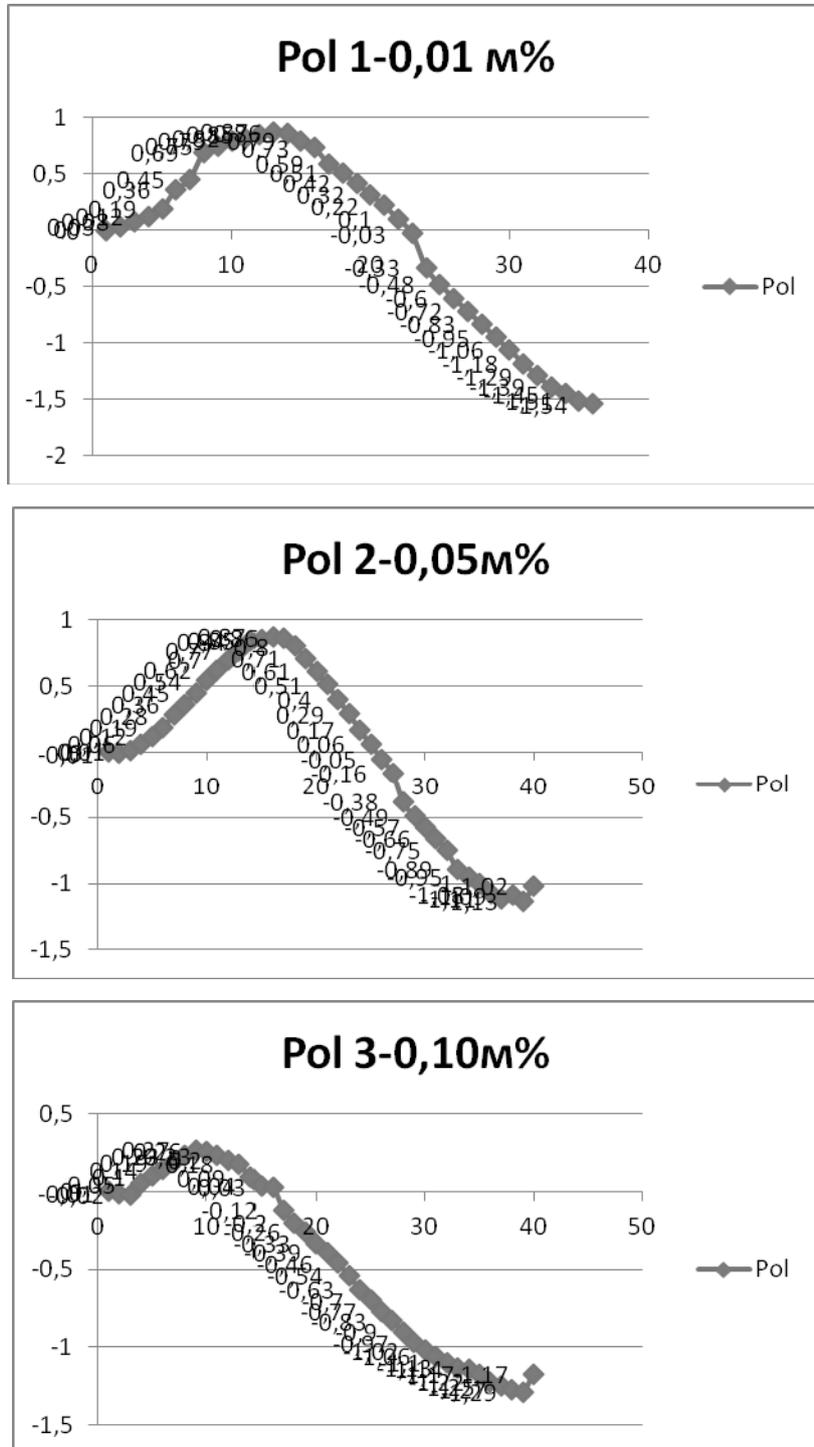


Рис. 2 (начало)

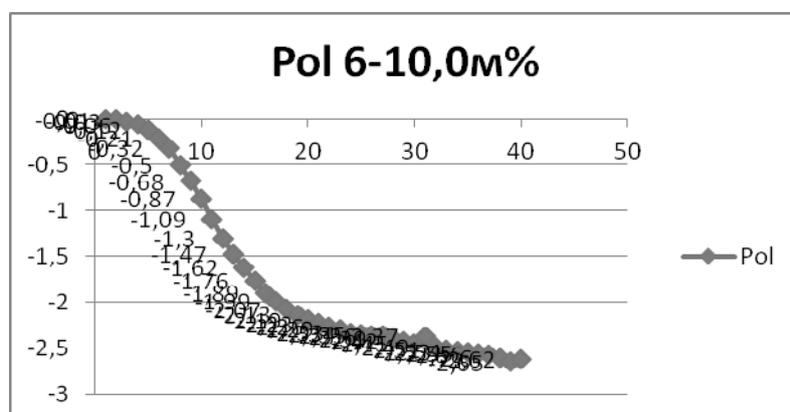
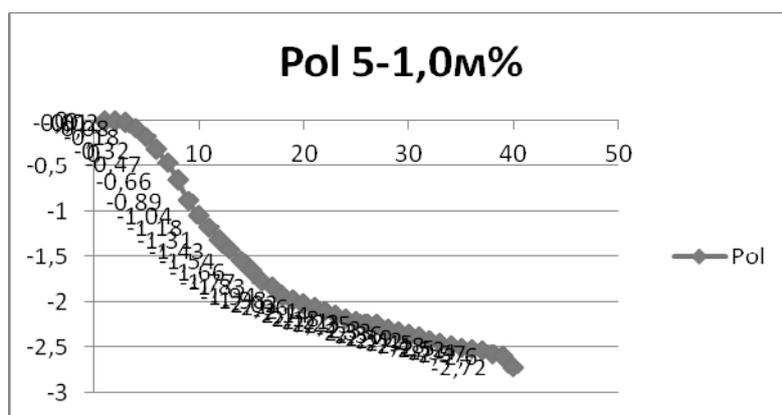
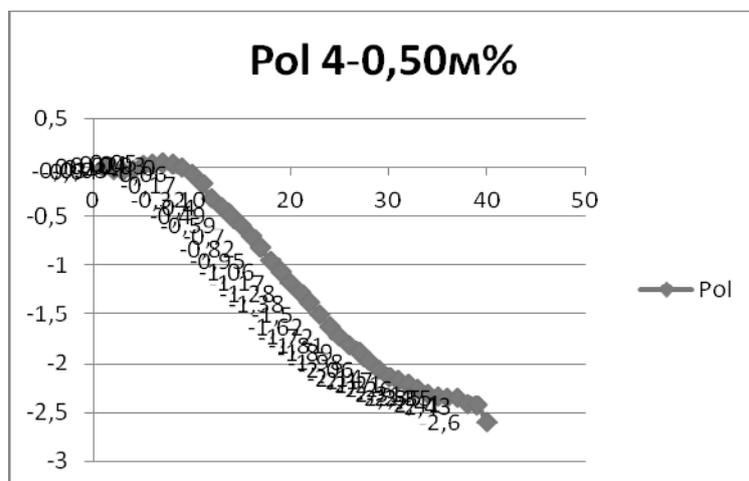


Рис. 2 (окончание)

Сопоставление экспериментальных данных термообесцвечивания дырочных центров окраски с результатами, полученными на ЭВМ, показывают, что построенная математическая модель достоверно описывает исследуемый физический процесс.

#### Литература

1. Иванюков Ю. П., Лотов А. В. Математические модели в экономике. – М.: Наука, 1979. – 304 с.
2. Осмонбаев М. Ч. Роль вакансионных дефектов в распаде и преобразовании радиационных центров в кристаллах NaCl и KCl: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Ош, 1996.

3. Арапов Б. Ионные, ионно-дырочные и ионно-электронные процессы в ЩГК: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Ош, 1993.

4. Осмонбаев М. Ч., Арстанбек кызы А., Ураимова К., Осмоналиев А. Б. Математическое моделирование электронных F-центров окраски в кристаллах NaCl с различными концентрациями Ag // Сборник трудов XI Иссык-Кульской международной конференции по радиационной физике твердого тела. SCORPH – 2015. – Бишкек, 2015. – С. 174–177.

5. Осмонбаев М. Ч., Арстанбек кызы А., Ураимова К., Осмоналиев А. Б. Математическое моделирование термообесцвечивания электронных F-центров окраски в кристаллах NaCl с различными концентрациями Ag // Тезисы докладов 5-й Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора О. Шаршекеева. – Бишкек, 2015. – С. 32–33.

6. Осмонбаев М. Ч., Арстанбек кызы А., Ураимова К. и др. Математическое моделирование термообесцвечивания дырочных Ag-центров окраски в кристаллах NaCl с различными концентрациями Ag // Proceedings of the 11th International Scientific and Practical Conference «Methodology of Modern Research». – Dubai, UAE, 2016. – March 28 – 29. – P. 59–62.

DOI: 10.17223/9785751124335/39

## **ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ДИСКРЕТНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ПАРАМЕТРОВ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ**

**Ю. И. Параев<sup>1</sup>, В. Г. Букреев<sup>2</sup>, А. А. Шилин<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

<sup>2</sup>*Национальный исследовательский Томский политехнический университет*

### **Введение**

Процедура оптимизации многих систем управления предполагает достаточно точное знание параметров реального объекта. При отсутствии точной априорной информации о свойствах управляемого объекта целесообразно организовать субоптимальный регулятор, обеспечивающий экстремальность назначенного критерия качества в некоторой ограниченной временной области [1–5]. Такое управление позволяет минимизировать ошибку регулирования на достаточно малом интервале времени и имеет хорошие перспективы для практического применения.

### **1. Синтез субоптимального регулятора на основе теории модального управления**

Рассмотрим стационарный динамический объект, представленный моделью вида  $\dot{x}(t) = Ax(t) + bU(t)$ ,  $x(t = t_0) = x_0$ , (1.1) где  $x(t)$  –  $n$ -мерный вектор переменных состояния объекта управления;  $U(t)$  – скалярное управляющее воздействие;  $A$  –  $n \times n$ -матрица параметров объекта;  $b$  –  $n$ -мерный вектор-столбец параметров управляющего воздействия.

Для управления  $U(t)$  объектом будем использовать широтно-импульсный модулятор (ШИМ), представленный уравнениями

$$\tau_k = \begin{cases} \Delta \operatorname{mod}(u(t_k)) & \text{при } \Delta \operatorname{mod}(u(t_k)) < T, \\ T & \text{при } \Delta \operatorname{mod}(u(t_k)) > T, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$U(t) = \begin{cases} U_0 s_k & \text{при } t_k < t < t_k + \tau_k, \\ 0 & \text{при } t_k + \tau_k < t < t_k + T, \end{cases} \quad (1.3)$$

где  $\Delta$ ,  $u(t_k)$ ,  $T$ ,  $\tau_k$  – коэффициент передачи, входной сигнал, период дискретизации, длительность включения ШИМ;  $t_k = kT$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $s_k = \operatorname{sign} u(t_k)$ ,  $U_0$  – напряжение источника питания силового преобразователя.

При дискретном управлении вида (1.2) и (1.3) решение уравнения (1.1) на интервале времени  $[t_k, t_k + T]$  записывается в виде

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= F(T - \tau_k)x(t_k + \tau_k), \\ x(t_k + \tau_k) &= F(T) \left[ x(t_k) + (I - F(-\tau_k))g \right], \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $F(\tau_k) = \exp(A\tau_k)$  – матричная экспонента;  $I$  – единичная матрица;

$$g = s_k A^{-1} b U_0. \quad (1.5)$$

Входной сигнал ШИМ  $u(t_k)$  формируется в виде комбинации составляющих вектора состояния:

$$u(t_k) = d^T x(t_k), \quad (1.6)$$

где  $d^T$  –  $n$ -мерный вектор-строка параметров регулятора;  $T$  – символ транспонирования.

Таким образом, задача синтеза оптимального управления будет заключаться в выборе компонентов вектора-строки  $d^T$ , при которых гарантируется необходимая стабилизация процесса  $x(t)$ . Используя равенство

$$F(-\tau_k) \cong I - A\tau_k, \quad (1.7)$$

на первоначальном этапе синтеза выполним линеаризацию системы (1.4). Подставляя (1.7) в (1.4) с учетом того, что  $s_k \tau_k = gu(t_k)$ , получим

$$x(t_{k+1}) = F(T) \left[ x(t_k) + Bu(t_k) \right], \quad (1.8)$$

где

$$B = gbU_0. \quad (1.9)$$

Исключая переменную величину  $u(t_k)$  в (1.8) путем подстановки (1.6), окончательно запишем линейную дискретную систему

$$x(t_{k+1}) = F(T) \left[ I + Bd^T \right] x(t_k). \quad (1.10)$$

Следовательно, задачу синтеза модального управления можно поставить следующим образом: определить такие значения вектора-строки  $d^T$ , при которых матрица

$$W = F(T) \left[ I + Bd^T \right] \quad (1.11)$$

имеет заданный спектр, или, что то же самое, равенство характеристического многочлена матрицы  $W$  заданному многочлену  $\Delta^*(p)$ .

Пусть характеристические многочлены матриц  $W$  и матрицы  $F(T)$  соответственно имеют вид

$$\Delta^*(p) = p^n + a_n^* p^{n-1} + \dots + a_2^* p + a_1^*, \quad (1.12)$$

$$\Delta(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1. \quad (1.13)$$

Составим из коэффициентов  $a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$  вектор-столбец  $a^*$ , а из коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – вектор-столбец  $a$ .

Основной способ решения задачи синтеза модального управления заключается в линейном преобразовании (1.11). Пусть  $P$  – матрица преобразования такая, что выполняются равенства:

$$P^{-1}F(T)P = H - e_n a^T, \quad (1.14)$$

$$P^{-1}F(T)B = e_n,$$

где  $H$  – верхняя наддиагональная  $n \times n$ -матрица;  $e_n$  –  $n$ -й орт-вектор-столбец. Тогда

$$P^{-1}F(T)(I + Bd^T)P = H + e_n(D - a)^T, \quad (1.15)$$

где  $D^T = d^T P$ .

Приравняв левую часть равенства (1.15) к матрице

$$W^* = H - e_n a^{*T}, \quad (1.16)$$

характеристический многочлен которой записывается уравнением (1.13), получим решение задачи синтеза модального управления:

$$D^T = a^T - a^{*T} \quad \text{или} \quad d^T = (a^T - a^{*T})P^{-1}. \quad (1.17)$$

Таким образом, с помощью выражения (1.12) можно вычислить параметры регулятора (1.6), при котором матрице динамики замкнутой системы (1.11) соответствует характеристический многочлен (1.12).

## 2. Синтез локально-оптимального управления на интервалах дискретности управляющего сигнала

Пусть длительность функционирования динамической системы с некоторого начального момента  $t_0$  времени равномерно разбивается на интервалы  $T = t_{k+1} - t_k$ . Рассмотрим случай, когда для каждого интервала  $[t_k, t_{k+1}]$  поведение непрерывного стационарного объекта описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + b_1 \quad \text{при} \quad t \in [t_k, t_k + \tau_k], \quad (2.1)$$

$$\dot{x}(t) = A_2 x(t) + b_2 \quad \text{при} \quad t \in [t_k + \tau_k, t_k + T],$$

где  $x(t)$  –  $n$ -мерный вектор переменных состояния;  $b_1$  и  $b_2$  – внешние воздействия;  $A_1$  и  $A_2$  –  $n \times n$ -матрицы параметров объекта.

Задача оптимального управления объектом вида (2.1) будет заключаться в выборе последовательности  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k$ , позволяющих на каждом интервале

$T$  стабилизировать величину  $z(t) = c^T x(t)$ , где  $c^T$  – вектор-строка параметров информационных каналов в окрестности заданного значения  $z^*$ , т.е. обеспечить неравенство

$$|z(t) - z^*| \leq \varepsilon, \quad (2.2)$$

где  $\varepsilon$  – малое число.

Решения уравнений (2.1) на интервале времени  $[t_k, t_k + T]$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} x(t_k + \tau_k) &= U_1(\tau_k) \cdot x(t_k) + f_1(\tau_k), \\ x(t_k + T) &= U_2(T - \tau_k) \cdot x(t_k + \tau_k) + f_2(T - \tau_k), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $U_k = U_i(t) = \exp A_i \cdot t$  – матричная экспонента,  $i = 1, 2$ .

$$f_i(t) = \int_0^t U_i(t) b_i dt = (U_i(t) - I) A_i^{-1} b_i, \quad (2.4)$$

На основании уравнений (2.3) и (2.4) имеем дискретную модель объекта

$$x(k+1) = F(\tau_k) x(k) + h(\tau_k), \quad (2.5)$$

где  $x(k) = x(t_k)$ ,  $F(\tau) = U_2(T - \tau) U_1(\tau)$ ,  $h(\tau) = U_2(T - \tau) f_1(\tau) + f_2(T - \tau)$ .

Поставленная задача для объекта управления вида (2.5) состоит в том, что начиная с некоторого  $k$ -го такта необходимо выполнить неравенство (2.2).

В результате линеаризации уравнения (2.5) запишем следующее разностное уравнение:

$$x(k+1) = F_0 x(k) + h_0 + (F_1 x(k) + h_1) \tau_k, \quad (2.6)$$

где  $F_0 = F(0) = U_2(T)$ ,  $F_1 = U_2(T) \Delta A$ ,  $\Delta A = A_1 - A_2$ ,

$$h_0 = f_2(T) = (U_2(T) - I) A_2^{-1} b_2, \quad h_1 = U_2(T) \Delta b, \quad \Delta b = b_1 - b_2. \quad (2.7)$$

Из (2.6) следует, что ошибка слежения на  $(k+1)$ -м такте формирования управления равна

$$e(k+1) = z^* - c^T x(k+1) = z^* - q_0(x(k)) - q_1(x(k)) \tau_k, \quad (2.8)$$

$$q_0(x(k)) = c^T (F_0 x(k) + h_0) = c^T U_2(T) x(k) + c^T h_0,$$

$$q_1(x(k)) = c^T (F_1 x(k) + h_1) = c^T U_2(T) (\Delta A x(k) + \Delta b). \quad (2.9)$$

Минимум ошибки (2.2) слежения будет обеспечиваться при выполнении следующих условий:

$$\tau_k = \begin{cases} 0 & \text{при } p(x(k)) < 0, \\ p(x(k)) & \text{при } 0 < p(x(k)) < T, \\ T & \text{при } T < p(x(k)), \end{cases} \quad (2.10)$$

где

$$p(x(k)) = \frac{z^* - q_0(x(k))}{q_1(x(k))}. \quad (2.11)$$

Таким образом, соотношение (2.10) определяет оптимальный закон управления объектом на локальном интервале времени. Результаты моделирования синтезированных регуляторов для стабилизации частоты

вращения электропривода постоянного тока приведены авторами в публикации [5].

### **Выводы**

Предложенные методы синтеза позволяют записать в аналитическом виде достаточно эффективные законы дискретного управления линейными непрерывными объектами, обеспечивающие необходимую стабилизацию регулируемых переменных при внешних и параметрических возмущениях. Следует отметить, что рассмотренные подходы к построению оптимальных регуляторов могут найти применение в релейно-импульсных системах управления различного класса объектов, в том числе и нелинейных [6].

### **Литература**

1. Kogan M. M., Neimark J. I. Locally optimal adaptive control without persistent excitation *Automatica* // DOI: 10,1016/0005-1098(96)00097-0. – 1996. – No. 32(10). – P. 1463–1467.
2. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop *Modern Control Systems*. – NJ: Upper Saddle River, 2008. – 730 p.
3. Charles L. Phillips, Royce D. Harbor *Feedback Control Systems*. – Prentice Hall, 2011. – 774 p.
4. Mukhina O., Smagin V. Locally Optimal Control for Discrete Time Delay Systems with Interval Parameters // *Communications in Computer and Information Science*. – 2014. – № 487. – P. 301–311.
5. Paraev Yu. I., Bukreev V. G. Local-optimal control of electromechanic objects // *Elektrotehnika*. – 1998. – № 8. – P. 48–52.
6. Shilin A. A., Bukreev V. G. Linearization of a heat-transfer system model with approximation of transport time delay // *Thermal Engineering (English translation of Teploenergetika)*. – 2014. – Vol. 61(10). – P. 741–746.

DOI: 10.17223/9785751124335/40

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ РОЗЖИГА ОГНЕВОГО ЗАБОЯ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ПОДЗЕМНОЙ ГАЗИФИКАЦИИ УГЛЯ**

*М. Е. Полухина*

*Кемеровский государственный университет*

1. Глубокая переработка угля – актуальная задача угольной отрасли. Решение данной задачи способно улучшить экономические показатели топливно-энергетического комплекса, ввести в оборот маломощные и крутосклонные месторождения, повысить экологическую безопасность процесса добычи угля. Возможное решение этих проблем – подземная газификация углей (ПГУ).

По определению, ПГУ – это физико-химический процесс превращения угля в горючие газы с помощью свободного или связанного кислорода в недрах земли [1, 3].

Согласно [1, 3] основными стадиями ПГУ являются: 1) бурение с поверхности земли по угольному пласту наклонно-вертикальных скважин (минимум – две скважины); 2) соединение этих скважин горизонтальным

каналом, проходящим через угольный пласт (создание начального огневого штрека); 3) розжиг огневого штрека и распространение фронта горения по угольной поверхности, которая называется огневым забоем; 4) нагнетание в одну из скважин воздушного или парокислородного дутья и получение из другой (газоотводящей) скважины горючего газа, основными компонентами которого являются водород, метан и угарный газ. Этот метод ПГУ называют поточным, так как поток воздуха, проходя по горящему каналу, превращается в горючий газ.

Для розжига угля в огневой штрек закладывают горючие и легковоспламеняющиеся материалы, которые поджигаются при помощи зажигательных патронов. Нагнетание в скважину воздушного или парокислородного дутья необходимо для поддержания процесса розжига угля и последующей газификации.

В статье [1] представлены описание и математическая постановка физико-химической модели процесса ПГУ. Необходимо отметить, что данная модель предполагает, что уголь уже находится в процессе горения. В работе [2] все процессы рассматриваются в огневом забое и огневом штреке. Цель данной работы – моделирование процесса розжига огневого забоя, распространения тепла от границы, на которой осуществляется процесс горения, внутрь угольного массива и грунта, согласно модели, описанной в [1].

2. На основе статьи [1], в которой рассматривается полная двумерная нестационарная сопряженная модель подземного газогенератора (ПГ) по методу потока, представленная в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями, в данной работе моделируется непосредственно розжиг огневого забоя.

На рис. 1 представлена схема ПГ.

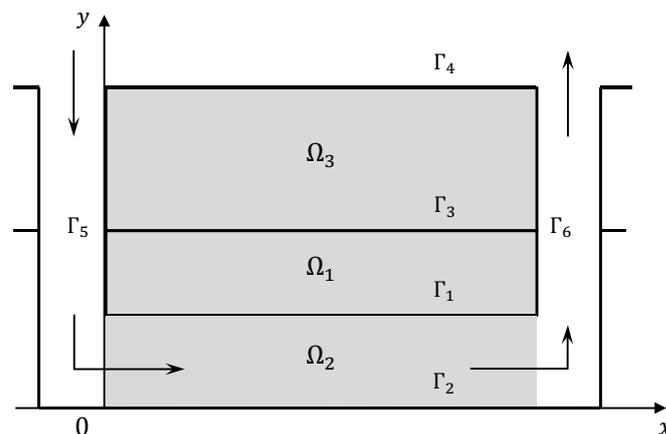


Рис. 1. Схема ПГ по методу потока

На рис. 1 введены следующие обозначения:  $\Omega_1$  – область угольного массива,  $\Omega_2$  – огневой штрек,  $\Omega_3$  – порода/грунт,  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ ,  $\Gamma_1$  – огневой забой,  $\Gamma_2$  – нижняя граница штрека,  $\Gamma_3$  – граница между средами уголь-грунт,  $\Gamma_4$  – поверхность земли,  $\Gamma_5, \Gamma_6$  – стенки дутьевой и газоотводящей скважин.

3. В данном пункте приводятся результаты расчетов температуры  $T$  с учетом сгорания топлива в угольном пласте, содержащем участки породы. В данной задаче массовая доля газовой фазы считается неизменной, скорость движения газа в порах определяется по закону Дарси.

Моделирование процесса розжига заключается в подводе постоянного источника тепла к участку границы. Изменение фронта горения определяется температурой воспламенения топлива  $T^*$ , а также временем его горения  $t^*$ . Шаги по времени и по пространственным переменным:  $\tau = 0,0001$ ,  $h_x = h_y = 0,01$ . Размер сетки:  $N_x = N_y = 100$ . Задача рассматривается в размерных физических величинах. Значения теплопроводности были взяты как  $\lambda_i = 10^5$ , что на 6 порядков выше их настоящих значений, что позволяет оценить распределение температуры в области на существенно меньшем интервале времени  $t$ . Остальные параметры заданы их значениями по умолчанию, принятыми в задаче.

Далее представлена серия расчетов, на которых показано распространение области горения по всему пласту. Постепенно происходит распространение огня на верхние пласты топлива в соответствии с условием сопряжения уголь–штрек. По мере сгорания фронт горения поднимается вверх, выгоревшее пространство частично заполняется обрушивающимися породами кровли и зольными остатками угля.

На рис. 2 представлены результаты расчетов в случае точечных розжигов по распространению области горения (верхние рисунки) и затем области выгорания угля (нижние рисунки, на которых темные участки – это выгоревшие участки) с одним, двумя и тремя очагами возгорания с течением времени. Рисунки по горизонтали приведены на один момент времени  $n$  – слой по времени (для верхних рисунков  $n = 2130$ , для нижних рисунков  $n = 3030$ ). Чем больше очагов розжига, тем быстрее выгорает уголь.

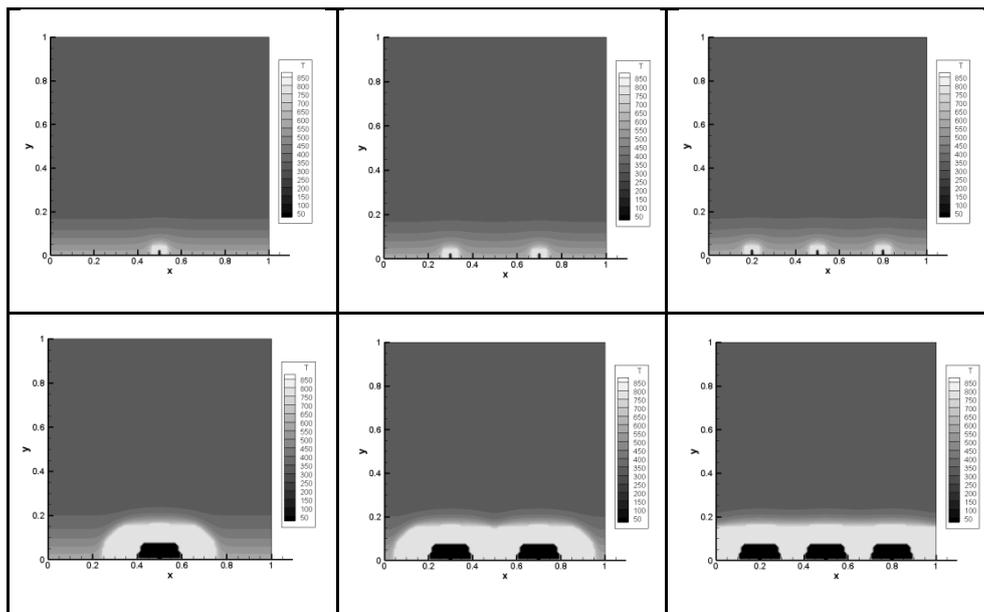


Рис. 2. Распространение области горения и области выгорания угля

Как правило, уголь неоднородный по всей длине, поэтому была смоделирована ситуация, при которой уголь горит с разной скоростью (рис. 3). Температура на нижней границе области была задана неравномерно (слева температура была задана величиной, достаточной для поджига угля, справа температура была задана сравнительно меньшей величиной – в 1,5 раза меньше), поэтому массовые скорости происходящих реакций различны. Правая часть уравнения движения огневого забоя зависит от массовой скорости реакции, поэтому его движение в данной постановке происходит неравномерно.

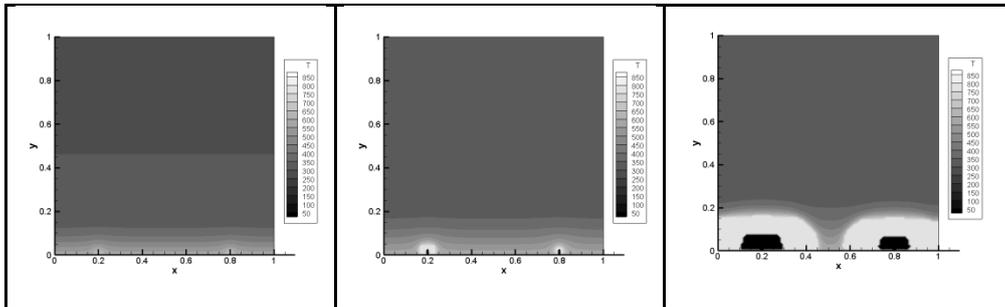


Рис. 3. Распространение областей горения и выгорания неоднородного угля

Соответствующие результаты расчетов распространения области горения и области выгорания неоднородного угля с течением времени (для  $n = 1230, 2130, 3030$  соответственно) представлены на рис. 3.

Также была смоделирована ситуация, при которой процесс горения прекращается после того как розжиг был осуществлен. Данные расчета показывают, что если точечный розжиг огневого штрека происходил в течение недостаточного количества времени, то энергии не хватает для поддержания процесса горения, и он со временем прекращается. На рис. 4 представлены результаты расчетов распространения температуры угля при затухании очага поджига с течением времени.

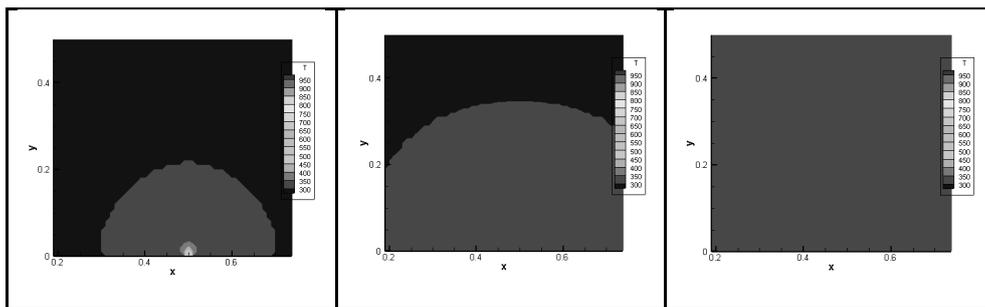


Рис. 4. Моделирование ситуации распространения температуры угля при затухании очага поджига

#### Литература

1. Zakharov Y. N., Zelensky E. E., Shokin Yu. I. A model of an underground gas problem // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 28, № 3. – P. 301–317.
2. Захаров Ю. Н. Математическое моделирование работы подземного газификатора по методу потока / Ю. Н. Захаров, Е. Е. Зеленский, М. С. Родина // Вестник Кемеровского государственного университета. – 2012. – № 4(52), т. 2. – С. 61–68.

3. Крейнин Е. В. Нетрадиционные термические технологии добычи трудноизвлекаемых топлив: уголь, углеводородное сырьё / Е. В. Крейнин. – М.: ООО «ИРЦ Газпром», 2004. – 302 с.

DOI: 10.17223/9785751124335/41

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОДОЗАБОРА ХОЗЯЙСТВЕННО-ПИТЬЕВОГО ВОДОСНАБЖЕНИЯ ДЛЯ НУЖД УГОЛЬНОЙ ШАХТЫ**

*Д. В. Пургина*

*Национальный исследовательский Томский политехнический университет*

### **1. Введение**

Подземные воды в Кузнецком угольном бассейне играют исключительно важную роль. Они широко используются для водоснабжения промышленных центров и населенных пунктов, определяя размещение производительных сил Кемеровской области, имеют огромное значение при разработке угольных, рудных и других месторождений полезных ископаемых [5].

Рациональное водопользование промышленных районов Кузбасса является в настоящее время одной из весьма актуальных проблем. Востребованность запасов подземных вод питьевого качества осложняется широким развитием горнодобывающей промышленности, сопровождающимся осушением верхней гидродинамической зоны при добыче полезных ископаемых.

Целью исследования является изучение гидрогеологических условий работы подземного водозабора питьевого водоснабжения, создание численной модели по данным отчета по разведке подземных вод, выяснение балансовых характеристик водозаборного участка и уточнение граничных условий; оценка водного баланса с учетом наличия несовершенных откачивающих скважин с общим расходом  $1500 \text{ м}^2/\text{сут}$  на конец расчетного периода (25 лет).

### **2. Методы исследования**

В основу работы положены в качестве исходных данные, полученные при подсчете запасов подземных вод на участке недр «Никитинский 4» Никитинского месторождения. Геологоразведочные работы с целью подсчета балансовых запасов питьевых подземных вод были проведены на основании геологического задания ООО «Шахта им. С.Д. Тихова» предприятием ООО «Центр гидрогеологических исследований» в 2013–2014 гг.

В процессе проведения полевых работ выполнен комплекс необходимых исследований. Было проведено санитарно-экологическое обследование территории в районе водозаборных скважин ООО «Шахта им. С.Д. Тихова», проведена кустовая откачка из скважины № 4ВСН и пробные откачки из трех скважин.

Основным методом оценки выяснения балансовых характеристик водозаборного участка являлось численное моделирование с использованием решающего модуля, реализующего алгоритм решения дифференциальных уравнений нестандартной плановой фильтрации по методу конечных разностей

[2]. В составе программного комплекса Processing Modflow, в качестве препроцессоров применялись программные комплексы Surfer и AutoCad.

### 3. Гидрогеологические условия

Участок работ расположен на юго-восточной окраине Ленинск-Кузнецкого района Кемеровской области, в 3,2 км западнее пос. Конево и в 3,5 км юго-восточнее пос. Поречье, на левом склоне долины р. Ур. По геолого-гидрогеологическому районированию рассматриваемый участок приурочен к западной окраине Кузнецкого бассейна пластово-блоковых вод, а в его пределах – к площади распространения водоносного комплекса среднепермских отложений ильинской подсерии. В кровле водоносного комплекса залегают верхнечетвертичные современные аллювиальные отложения р. Ур (рис. 1, 2) [6].

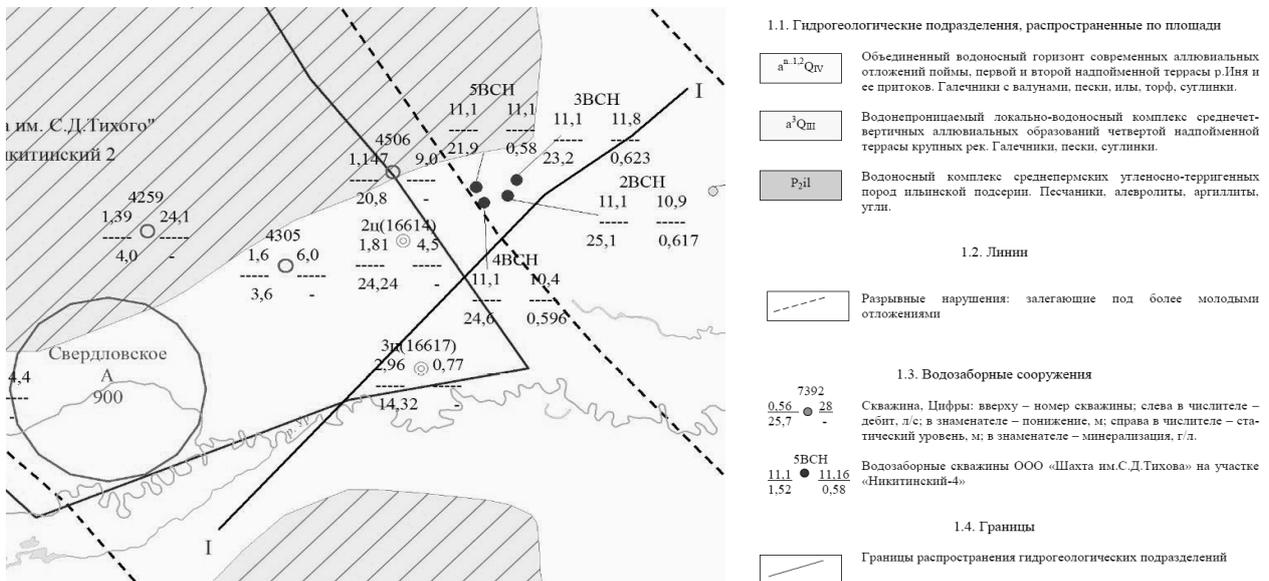


Рис. 1. Фрагмент гидрогеологической карты

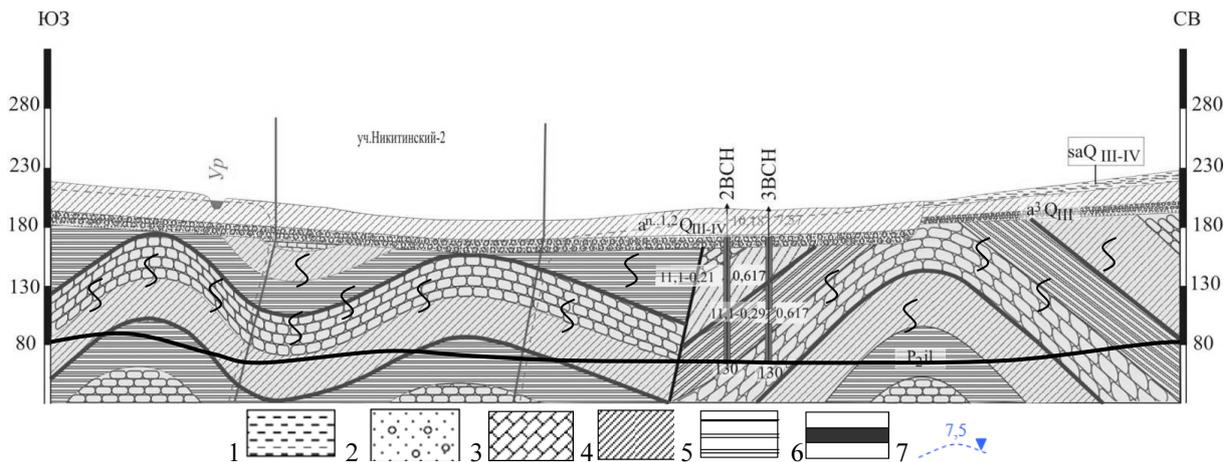


Рис. 2. Гидрогеологический разрез по линии I-I:

1 – суглинки; 2 – гравийно-галечниковые отложения; 3 – песчаники; 4 – алевролиты; 5 – аргиллиты; 6 – уголь; 7 – уровень подземных вод

#### 4. Граничные условия исследуемого участка

Расчетная схема отражает подсчет запасов подземных вод, представляющих собой ограниченный в плане пласт с наличием непроницаемой границы со стороны действующего шахтного поля (ООО «Шахта им. С.Д. Тихова»), а также границу с постоянным напором, представленную р. Ур, смещенную с учетом руслового сопротивления на 600 м. Кроме того, следует учитывать постоянное пополнение запасов подземных вод за счет стока с коренного склона (рис. 3).

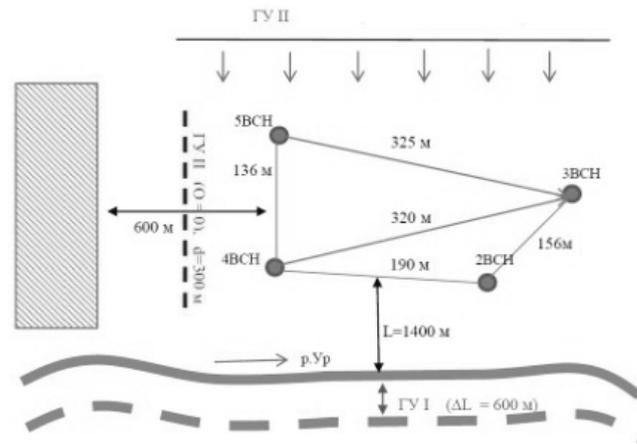


Рис. 3. Схематизация граничных условий

В указанной схеме учитываются при подсчете прогнозного понижения уровней в качестве источника запасов подземных вод упругие запасы коренных образований среднепермских пород ильинской подсерии (P2il), так и восполнение за счет ресурсов поверхностных вод.

В составе гидродинамической модели области фильтрации состав водомещающих пород по проводимости представлен двумя расчетными слоями. Первый расчетный слой соответствует первому от поверхности напорно-безнапорному водоносному горизонту трещиноватых пород мощностью 100 м и водопроницаемостью  $50 \text{ м}^2/\text{сут}$ , что характерно для зоны активного водообмена. Второй расчетный слой представляет собой горизонт мощностью 50 м с водопроницаемостью, не превышающей  $10 \text{ м}^2/\text{сут}$ . Он характеризует зону затухания открытой трещиноватости в горно-складчатом массиве пород [3].

Все фильтрационные и емкостные параметры приняты по материалам отчета по подсчету запасов подземных вод, предоставленным главным геологом ООО «Шахты им. С.Д. Тихова» Г.В. Мальцевым.

Область моделирования в плане была покрыта равномерной сеткой с шагом 25 м по обоим пространственным направлениям. Южная граница модели, соответствующая пространственному положению р. Ур, учтена на модели как граница III рода с учетом оценки гидравлического несовершенства русла величиной 600 м. Западная граница модели проведена по разрывному нарушению, предположительно затертому до состояния непроницаемой границы (ГУ II рода). Гидрогеологический характер этой границы рекомендуется уточнить в последующем по данным опытно-фильтрационных работ. Северная

граница проходит вдоль линии водораздела, что соответствует граничным условиям второго рода (ГУ II рода) (см. рис. 1).

Для исследования естественного режима подземных вод была решена геофильтрационная задача в стационарной постановке [1]. В результате получено расчётное поле напоров. В качестве главного критерия точности численного решения принято значение гидравлического уклона фильтрационного потока 0,008. На стадии эпигнозного моделирования методом подбора выполнена оценка величины инфильтрационного питания, которая составила 0,00033 м/сут.

Анализ водного баланса численной модели позволяет сделать следующие выводы [2, 4]. Величина естественных ресурсов в целом составляет 2945,26 м<sup>3</sup>/сут. При этом все ресурсы формируются за счет инфильтрационного питания и разгружаются в р. Ур. На долю первого водоносного приходится 2459,75 м<sup>3</sup>/сут, остальные 485,46 м<sup>3</sup>/сут перетекают во второй водоносный горизонт (рис. 4, а).

Прогнозное моделирование учитывает работу трех эксплуатационных скважин. Это предполагает решение нестационарной задачи. Начальное распределение напоров принято по результатам решения стационарной задачи в каждом расчетном слое. Заданы емкостные свойства водоносных горизонтов: коэффициент упругости, коэффициент гравитационной водоотдачи и коэффициент упругой водоотдачи. Все скважины расположены в пределах мощности первого водоносного горизонта. Расчетное время составило 25 лет, или 9125 сут (рис. 4, б).

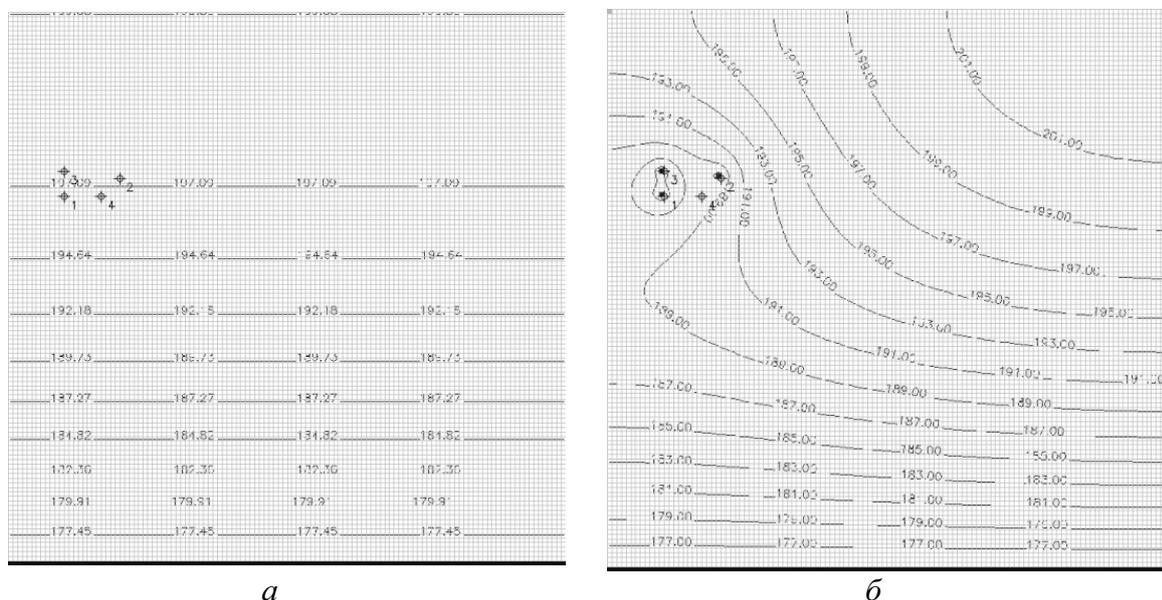


Рис. 4. Карты гидроизогипс: а – при эпигнозном моделировании; б – при прогнозном моделировании

Этот интервал был разбит на 300 временных шагов с множителем 1,3 для более детального отображения результатов расчетов в начале работы водозабора и меньшего количества выходных данных при установившемся

режиме работы эксплуатационных скважин. В результате моделирования получены карты гидроизогипс для естественных и нарушенных условий.

По результатам прогнозного гидродинамического моделирования установлено, что величина понижения уровня в скважинах не достигает абсолютных отметок уровня в р. Ур. Между рекой и скважинами образуется локальный водораздел, который при длительной эксплуатации водозабора может быть смещен в сторону реки. Анализ водного баланса модели дает следующие результаты. Естественные запасы водоносного горизонта составляют 1222 м<sup>3</sup>/сут. Привлекаемые запасы из нижнего горизонта не превышают 278 м<sup>3</sup>/сут (таблица).

*Баланс модели при работе водозабора*

Источник	Вошло м <sup>3</sup> /сут	Вышло м <sup>3</sup> /сут
Водный баланс всей территории		
Естественные условия	2945,66 (инфильтрация)	2945,66 (в р. Ур)
Нарушенные условия	3142,91 (емкость) 1643,33	1643,33 (в реку)
Величина изменения	1722,19 (емкость)	> на 222,03 (в р. Ур)
Водный баланс первого от поверхности водоносного горизонта		
Естественные условия	2945,66 (инфильтрация)	2459,7 (в р. Ур) 485,46 (во 2-й в.г.)
	1407,46 (емкость)	2645,12 (в р. Ур)
Нарушенные условия	230,44 (приток снизу)	438,2 (во 2-й в.г.)
	2945,66 (инфильтрация)	1500 (скважины)
	1407,46 (емкость)	185,42 (в р. Ур)
Величина изменения	230,44 (из 2-го в.г.)	47,26 (во 2-й в.г.)
Водный баланс второго от поверхности водоносного горизонта		
Естественные условия	485,4	485,5
Нарушенные условия	314,74	522,57
	438,214	230,44
Величина изменения	314,74 (емкость)	37,07 (в р. Ур)
	47,186 (из 1-го в.г.)	230,44 (в 1-й в.г.)
	1407,46+314,76=1722,22	185,45+37,07=222,52
	1722,22-222,52=1500 м <sup>3</sup> /сут	

Влияние р. Ур на формирование эксплуатационных запасов подземных вод в скважинах водозабора не прослеживается. Таким образом, можно сделать выводы о том, что основные источники формирования подземных вод являются восполнимыми.

Для прогноза работы водозабора важнейшим условием является характер граничных условий с учетом водоотлива шахты.

Необходимо исследовать режим шахтного поля и его влияние на водозабор на стадии эксплуатации и разведки подземных вод.

## 5. Заключение

Результаты численного моделирования показывают, что расчетная схема подсчета запасов подземных вод, выполненная аналитическими методами, требует уточнения. На численной модели р. Ур не проявляет себя как граница третьего рода, и это вступает в противоречие с аналитической расчетной схемой. Главной причиной такого несоответствия является инфильтрационное питание, выступающее на модели дополнительным источником водных ресурсов, который не учитывается в аналитических расчетах. Анализ работы водозабора на модели с суммарным расходом  $1500 \text{ м}^3/\text{сут}$  показывает, что абсолютная отметка динамического уровня в эксплуатационных скважинах превышает уровень в р. Ур, что препятствует их взаимодействию с поверхностными водами.

При анализе работы водозаборов в условиях взаимодействия с разнообразными граничными условиями рекомендуется использовать численное моделирование. Это позволяет получать более точные прогнозные оценки изменения гидрогеологических условий под влиянием внешних факторов, включающих работу водозаборов во взаимодействии с дренажными системами горнодобывающих предприятий.

### Литература

1. Жернов И. Е., Павловец И. Н. Моделирование фильтрационных процессов. – Киев: ВШ, 1976. – 192 с.
2. Жернов И. Е., Шестаков В. М. Моделирование фильтрации подземных вод. – М.: Наука, 1971. – 266 с.
3. Мироненко В. А. Динамика подземных вод: учебник. – 3-е изд. – М.: МГГУ, 2001. – 519 с.
4. Плотников Н. А. Оценка запасов подземных вод. – М.: Гос. науч.-техн. изд-во лит-ры по геологии и охране недр, 1959. – 288 с.
5. Рогов Г. М., Попов В. К. Гидрогеология и катагенез пород Кузбасса. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1985.
6. Рассказов Н. М., Букаты М. Б. Запасы и ресурсы подземных вод: учеб. пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 1996. – 50 с.

DOI: 10.17223/9785751124335/42

## **ОБ ОЦЕНКЕ СХОДИМОСТИ МНОГОШАГОВОГО МЕТОДА МИНИМИЗАЦИИ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ**

*Н. С. Самойленко, В. Н. Крутиков, В. В. Мешечкин*  
*Кемеровский государственный университет*

### **Введение**

В этой работе мы преобразуем метод минимальных итераций в многошаговый метод минимизации, в котором операции с матрицами заменены на операции с характеристиками минимизируемой функции, и приводим доказательство скорости сходимости данного метода для выпуклых

функций. Полученный в работе метод принадлежит классу методов негладкой оптимизации, основное свойство которых заключается в сокращении расстояния до экстремума минимизируемой функции  $f(x), x \in R^n$ .

Итерация простого субградиентного метода имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k g(x_k).$$

Здесь  $x_k$  – текущее приближение на  $k$ -й итерации,  $\gamma_k$  – шаговый множитель,  $g(x_k)$  – произвольный субградиент субградиентного множества  $\partial f(x_k)$  в точке  $x_k$ , т.е.  $g(x_k) \in \partial f(x_k)$ . Б. Т. Поляк в своих работах [1, 2] предложил и исследовал вариант субградиентного метода минимизации для выпуклой, не обязательно дифференцируемой функции, в котором длина шага вычисляется на основании известного минимального значения функции  $f^*$ :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\gamma [f(x_k) - f^*]}{(g(x_k), g(x_k))} g(x_k). \quad (1)$$

Здесь  $\gamma$  – шаговый множитель, определяемый свойствами минимизируемой функции  $f(x)$ ;  $g(x_k)$  – субградиент функции в точке  $x_k$ ;  $f^*$  – минимальное значение функции  $f(x)$ , которое считается известным. Представленный алгоритм (1) является аналогом метода минимальных ошибок в оптимизации [16, 17]. Аналогично (1) сформулируем многошаговый субградиентный метод – аналог метода минимальных итераций, применимый для минимизации произвольных выпуклых функций.

### Аналог метода минимальных итераций в оптимизации

Рассмотрим метод сопряженных градиентов для решения системы уравнений

$$Bx = b, \quad (2)$$

где  $B$  – невырожденная матрица. В силу применимости метода для решения систем уравнений с симметричной и положительно определенной матрицей образуем вспомогательную систему уравнений посредством второй трансформации Гаусса, где после замены  $B^T y = x$  получаем

$$BB^T y = b. \quad (3)$$

Применим метод сопряженных градиентов для системы уравнений (3) относительно  $y$ :

$$y_{k+1} = y_k - \gamma_k s_k, \quad (4)$$

$$s_k = r_k + b_k s_{k-1}, \quad (5)$$

$$\gamma_k = \arg \min_{\gamma > 0} f(x_k - \gamma s_k) = \frac{(s_k, r_k)}{(s_k, A s_k)} = \frac{(r_k, r_k)}{(A s_k, r_k)}, \quad (6)$$

$$b_k = -\frac{(r_k, A s_{k-1})}{(A s_{k-1}, s_{k-1})} = \frac{(r_k, r_k)}{(r_{k-1}, r_{k-1})} > 0. \quad (7)$$

Здесь матрица  $A = BB^T$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $r = Bx - b$ . Введем квадратичную функцию

$$f(x) = \frac{(Bx - b, Bx - b)}{2} = \frac{(r, r)}{2}, \quad (8)$$

точка минимума  $x^*$ , которая совпадает с решением системы (2). Ее градиент  $g(x) = \nabla f(x) = B^T (Bx - b) = B^T r$ .

Обозначим  $B^T s_k = p_k$ . Так как  $B^T y = x$ , умножая на  $B^T$  (4), (5), получим расчетные формулы в старой системе координат:  $x_{k+1} = x_k - \gamma_k p_k$ , (9)

$$p_k = g_k + b_k p_{k-1}, \quad (10)$$

Используя равенства  $A = BB^T$ ,  $(r_k, r_k) = 2(f(x_k) - f^*)$ ,

$$(As_k, r_k) = (BB^T s_k, r_k) = (B^T s_k, B^T r_k) = (p_k, g_k),$$

$$(As_k, s_k) = (BB^T s_k, s_k) = (B^T s_k, B^T s_k) = (p_k, p_k),$$

преобразуем выражения (6) и (7):

$$\gamma_k = \frac{(r_k, r_k)}{(As_k, r_k)} = \frac{(r_k, r_k)}{(p_k, g_k)} = \frac{(r_k, r_k)}{(p_k, p_k)} = \frac{2(f(x_k) - f^*)}{(p_k, g_k)} = \frac{2(f(x_k) - f^*)}{(p_k, p_k)}, \quad (11)$$

$$b_k = -\frac{(r_k, As_{k-1})}{(As_{k-1}, s_{k-1})} = -\frac{(g_k, p_{k-1})}{(p_{k-1}, p_{k-1})} > 0. \quad (12)$$

Расчетные формулы метода минимальных итераций запишем в виде

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k p_k, \quad \gamma_k = \frac{(r_k, r_k)}{(p_k, g_k)} = \frac{(r_k, r_k)}{(p_k, p_k)}, \quad (13)$$

$$p_k = g_k + b_k p_{k-1}, \quad b_k = -\frac{(g_k, p_{k-1})}{(p_{k-1}, p_{k-1})} > 0. \quad (14)$$

Отметим, что в (14) в явном виде производится ортогонализация векторов  $p_k$ .

Рассмотрим теперь оптимизационную задачу. Пусть требуется найти точку минимума функции  $f(x)$  при известном минимальном значении  $f(x^*)$ . Построим метод, который, в отличие от (13), (14) использует только характеристики функции и в случае квадратичных функций реализует метод минимальных итераций, который, как известно, сходится, как и метод сопряженных градиентов, за конечное число шагов. Отметим, что мы предполагаем, что информация о матрице, как это было при решении систем линейных уравнений, нам не доступна. В формулах метода минимальных итераций (13)–(14) содержится следующий ниже метод, который использует только значения функции  $f(x)$ , градиента  $\nabla f(x)$  или субградиента, который мы будем иногда также обозначать  $g$ ,  $g(x)$  или  $g_f$ ,  $g_f(x)$ , и ее минимальное значение  $f^*$ . Расчетные формулы эквивалентны формулам (13), (14):

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k p_k, \quad (15)$$

$$p_k = g_k + \beta_k p_{k-1}, \quad (16)$$

$$\gamma_k = \frac{2(f(x_k) - f^*)}{(p_k, g_k)} = \frac{2(f(x_k) - f^*)}{(p_k, p_k)}, \quad (17)$$

$$\beta_k = -\frac{(g_k, p_{k-1})}{(p_{k-1}, p_{k-1})} > 0. \quad (18)$$

Выражение (17) запишем в более общем виде:

$$\gamma_k = \gamma \frac{(f(x_k) - f^*)}{(p_k, g_k)} = \gamma \frac{(f(x_k) - f^*)}{(p_k, p_k)}. \quad (19)$$

Поскольку неравенство в (18) не всегда выполняется для функций, отличных от квадратичных, метод (15)–(18) не будет работоспособным. Приведем его модификацию, которая будет сходиться на квадратичных функциях при  $\gamma = 2$  за конечное число шагов:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k p_k, \quad (20)$$

$$p_k = g_k + \beta_k p_{k-1}, \quad (21)$$

$$\gamma_k = \gamma \frac{(f(x_k) - f^*)}{(p_k, p_k)}, \quad (22)$$

$$\beta_k = \begin{cases} -\frac{(g_k, p_{k-1})}{(p_{k-1}, p_{k-1})}, & \text{при } (g_k, p_{k-1}) < 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (23)$$

Для квадратичных функций условие в (23) не разрушает процесса (15)–(18) поскольку для них всегда выполняется неравенство в (18). Параметр  $\gamma$  определяется свойствами функций и задается пользователем.

Таким образом, метод минимальных итераций представлен в терминах минимизируемой функции, что позволяет использовать его для минимизации выпуклых функций при известном значении минимума. Выбор величины шагового множителя  $\gamma$  в алгоритме (19) определяется свойствами функции: для квадратичных функций величина шагового множителя в (19)  $\gamma = 2$ . При  $\gamma = 1$  метод (20)–(23) применяется для решения выпуклых задач минимизации общего вида.

### **Сходимость аналога метода минимальных итераций в оптимизации**

Рассмотрим сформулированный метод (20)–(23) и докажем, что сходимость многошагового метода на выпуклых функциях будет конечна и метод сохранит свои свойства высокой скорости сходимости при минимизации выпуклых функций.

Относительно сходимости процесса (20)–(23) известны следующие результаты.

**Лемма 1.** Пусть последовательность  $\{x_k\}$  получена в результате работы метода (20)–(23). Тогда для  $k = 0, 1, 2, \dots$  имеет место:

В первом случае при  $p_k = g_k$  автоматически выполняется выражение

$$(p_k, g_k) = (g_k, g_k). \quad (24)$$

Так как на каждом шаге выполнения процесса (20)–(23) возможны два случая представления параметра  $\beta_k$ , то при  $p_k \leq g_k$

$$(p_k, g_k) \leq (g_k, g_k). \quad (25)$$

*Доказательство.* В силу равенства

$$(p_k, g_k) = (g_k, g_k) - \frac{(g_k, p_{k-1})^2}{(p_{k-1}, p_{k-1})} \leq (g_k, g_k).$$

**Лемма 2.** Вектор  $p_k$  в методе (20)–(23) ортогонален вектору  $p_{k-1}$  для  $k = 0, 1, 2, \dots$ , т.е.

$$(p_k, p_{k-1}) = 0. \quad (26)$$

*Доказательство.*

$$(p_k, p_{k-1}) = (g_k, p_{k-1}) - \frac{(g_k, p_{k-1})}{(p_{k-1}, p_{k-1})} (p_{k-1}, p_{k-1}) = 0.$$

**Лемма 3.** Пусть  $x^*$  – точка минимума функции  $f(x)$ ;  $\{x_k\}$  – последовательность, полученная в результате работы метода (20)–(23). Тогда в данном методе направление  $p_k$  образует меньший угол с направлением на точку минимума по сравнению с антисубградиентом

$$(x_k - x^*, p_k) \geq (x_k - x^*, g_k). \quad (27)$$

*Доказательство.* Докажем методом индукции по  $k$ . Допустим, что оценка справедлива для  $k = m$ . Докажем ее для  $k = m + 1$ .

$$\begin{aligned} (x_{m+1} - x^*, p_{m+1}) &= (x_m - \gamma_m p_m - x^*, g_{m+1} + \beta_{m+1} p_m) = \\ &= (x_{m+1} - x^*, g_{m+1}) + \beta_{m+1} [(x_m - x^*, p_m) - \gamma_m (p_m, p_m)] = \\ &= (x_{m+1} - x^*, g_{m+1}) + \beta_{m+1} [(x_m - x^*, p_m) - \gamma (f(x_m) - f^*)]. \end{aligned}$$

Из предположения индукции следует, что

$$(x_m - x^*, p_m) \geq (x_m - x^*, g_m) \geq f(x_m) - f^*.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (x_{m+1} - x^*, g_{m+1}) + \beta_{m+1} [(x_m - x^*, p_m) - \gamma (f(x_m) - f^*)] &\geq (x_{m+1} - x^*, g_{m+1}) + \\ &+ \beta_{m+1} [f(x_m) - f^* - \gamma (f(x_m) - f^*)] \geq (x_{m+1} - x^*, g_{m+1}). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем  $(x_{m+1} - x^*, p_{m+1}) \geq (x_{m+1} - x^*, g_{m+1})$ .

**Лемма 4.** Пусть  $\{x_k\}$  – последовательность, полученная в результате работы метода (20)–(23). Тогда для данного метода справедлива следующая оценка:

$$(p_k, p_k) = (p_k, g_k). \quad (28)$$

*Доказательство.* В силу леммы 2 из (26)

$$(p_k, p_k) = (g_k, p_k) - \frac{(g_k, p_{k-1})}{(p_{k-1}, p_{k-1})} (p_{k-1}, p_k) = (g_k, p_k).$$

**Теорема 1.** Пусть  $f(x)$  – выпуклая функция на  $R^n$ . Тогда для метода (20)–(23) оценка скорости сходимости следующая:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{k} (f(x_k) - f^*) = 0, \quad (29)$$

где для последовательности процесса (20)–(23) справедливы следующие ограничения:  $\|g_k\| \leq C, k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;  $C$  – некоторая фиксированная константа.

*Доказательство.* Пусть  $x^* \in X^*$  – произвольная точка минимума функции  $f(x)$ . Тогда для процесса (20)–(23) получим:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= (x_k - x^* - \frac{k(f(x_k) - f^*)}{(p_k, p_k)} p_k, x_k - x^* - \frac{(f(x_k) - f^*)}{(p_k, p_k)} p_k) = \\ &= (x_k - x^*, x_k - x^*) - 2(f(x_k) - f^*) \frac{(p_k, x_k - x^*)}{(p_k, p_k)} + \frac{(f(x_k) - f^*)^2}{(p_k, p_k)^2} (p_k, p_k) = \quad (30) \\ &= (x_k - x^*, x_k - x^*) - 2(f(x_k) - f^*) \frac{(p_k, x_k - x^*)}{(p_k, p_k)} + \frac{(f(x_k) - f^*)^2}{(p_k, p_k)}. \end{aligned}$$

Оценим полученное выражение (30), применяя леммы (1)–(3)

$$\begin{aligned} (x_k - x^*, x_k - x^*) - 2(f(x_k) - f^*) \frac{(p_k, x_k - x^*)}{(p_k, g_k)} + \frac{(f(x_k) - f^*)^2}{(p_k, g_k)} &\leq \\ \leq (x_k - x^*, x_k - x^*) - 2(f(x_k) - f^*) \frac{(g_k, x_k - x^*)}{(p_k, g_k)} + \frac{(f(x_k) - f^*)^2}{(p_k, g_k)} &\leq \quad (31) \\ \leq (x_k - x^*, x_k - x^*) - \frac{(f(x_k) - f^*)^2}{(p_k, g_k)} = \|x_k - x^*\|^2 - \frac{(f(x_k) - f^*)^2}{(p_k, g_k)}. \end{aligned}$$

Из (30) и (31) получаем неравенство вида

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - \frac{(f(x_k) - f^*)^2}{(g_k, g_k)}. \quad (32)$$

Тогда, используя (32), получаем

$$\frac{(f(x_k) - f^*)^2}{\|g_k\|^2} \leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2,$$

откуда из ограниченности  $\|g_k\| \leq C, k = 0, 1, 2, 3, \dots$  следует  $\sum_{k=0}^{\infty} (f(x_k) - f^*)^2 < \infty$ .

Для окончания доказательства теоремы проверим следующее утверждение:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{k}(f(x_k) - f^*) = 0$ . Предположим, что

$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{k}(f(x_k) - f^*) > 0$ , то  $\frac{(g_k + \beta_k p(x_k))}{\sqrt{k}} > 0$  и  $f(x_k) - f^* > a/\sqrt{k}$  для

достаточно больших  $k$ , что противоречит условию  $\sum_{k=0}^{\infty} (f(x_k) - f^*)^2 < \infty$ .

Итак,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{k}(f(x_k) - f^*) = 0$ . Ранее доказано, что

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - \frac{(f(x_k) - f^*)^2}{(g_k, g_k)}. \quad \text{Следовательно, для } \|x_{k+1} - x^*\|^2$$

справедлива оценка (32). Следовательно, для метода (20)–(23) оценка скорости сходимости следующая:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{k}(f(x_k) - f^*) = 0.$$

*Теорема доказана.*

В работе представлено исследование метода минимальных итераций. Обнаружено, что метод минимальных итераций является аналогом многошагового метода минимизации в оптимизации. При исследовании скорости сходимости выявлена фиксированная скорость сходимости данного метода для выпуклых функций при шаговом множителе  $\gamma = 1$ .

#### Литература

1. Поляк Б. Т. Минимизация негладких функционалов // Журн. вычислит. математики и матем. физики. – 1969. – Т. 9, №3. – С. 507–521.
2. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
3. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – К.: Наукова думка, 1979. – 199 с.
4. Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз. – 1960. – 656 с.
5. Немировский А. С., Юдин Д. Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. – М.: Наука, 1979. – 340 с.
6. Крутиков В. Н. Обучающиеся методы безусловной оптимизации и их применение. – Томск: Изд-во Том. гос. пед. ун-та, 2008. – 264с.
7. Крутиков В. Н. Релаксационные методы безусловной оптимизации, основанные на принципах обучения. – Кемерово: КемГУ, 2004. – 171 с.
8. Крутиков В. Н. Методы оптимизации: учеб. пособие. – Кемерово, 2011. – 93 с.
9. Самойленко Н. С., Крутиков В. Н., Мешечкин В. В. Об аналогии между методом минимальных ошибок и субградиентным методом Поляка // Научное творчество молодежи. Математика. Информатика : материалы XVIII Всероссийской научно-практической конференции 24–25 апреля 2014 г., ч. 1. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2014. – С. 67–68.
10. Самойленко Н. С., Крутиков В. Н., Мешечкин В. В. Об оценке сходимости субградиентного метода // Образование, наука, инновации: вклад молодых исследователей : материалы IX (XLI) Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. – Кемерово, 2014. – Вып. 15. – С. 1518–1519.

DOI: 10.17223/9785751124335/43

## **ПРОЦЕДУРА СТРУКТУРИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО ЭНТРОПИЙНОМУ КРИТЕРИЮ ПРИ АНАЛИЗЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПРОЕКТИРОВАНИЯ**

***И. Н. Статников, Г. И. Фирсов***

*Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия*

С теоретической точки зрения эффективность применения того или иного метода оптимизации, понимаемой широко, существенно зависит от степени адекватности используемой математической модели (ММ) реальным динамическим процессам, происходящим в создаваемом или усовершенствуемом устройстве. Разумеется, в узком смысле при использовании

одной и той же математической модели всегда имеет место конкуренция различных методов оптимизации (по точности, по скорости сходимости результатов расчетов, по ясности интерпретации этих результатов). Но в этом случае сама эффективность применения того или иного метода оптимизации становится заложницей объема и качества априорной информации, имеющейся к моменту начала решения прикладной задачи оптимизации. Поэтому кажется очевидным, что наиболее привлекательными становятся такие методы оптимизации, которые, при условии наличия адекватной ММ, требуют минимума априорной информации о решаемой задаче, более того, позволяют по ходу решения получать такую информацию легко и просто. Такие методы естественно называть универсальными. К ним можно отнести метод Монте-Карло и его различные модификации [1, 2], в основе использования которых лежат принципы случайного поиска решения задачи, что и делает такой подход универсальным. Но платой за такую универсальность является определенная «слепота», и это приводит к громадным объемам вычислений, тем более, что имеет место рост размерности решаемых задач оптимизации (растет число фазовых координат и число конструктивных (оптимизируемых) параметров, растет число критериев качества, характеризующих систему (объект)). А громадные объемы получаемой информации при проведении вычислительных экспериментов, естественно, затрудняют ее интерпретацию. Возникла потребность сочетания универсальности метода Монте-Карло с элементами более интеллектуального анализа результатов численных экспериментов, чем простая констатация статистических оценок, то есть усовершенствования технологии проведения математических экспериментов.

Как представляется, в значительной степени эту потребность реализует метод планируемого ЛП-поиска (ПЛП-поиска) [3, 4], благодаря одновременному использованию в нем идеи дискретного квазиравномерного по вероятности зондирования  $J$ -мерного пространства варьируемых параметров  $\alpha_j$  ( $j=1, \dots, J$ ) и методологии планируемого математического эксперимента. Сочетание таких идей в алгоритме ПЛП-поиска позволило, с одной стороны, осуществить глобальный квазиравномерный просмотр заданной области варьируемых параметров, а с другой стороны, применить многие формальные оценки из математической статистики.

Рассмотрим алгоритм ПЛП-поиска и формализованную постановку решаемой задачи при его использовании. Отметим, что успешность применения ПЛП-поиска обуславливается тем, что этот метод предназначен, в основном, для применения на предварительном этапе решения задачи, когда полученная информация позволяет принять решение об использовании других методов оптимизации (но значительно эффективнее), или об окончании решения (такое тоже возможно). В основание метода положена рандомизация расположения в области  $G(\bar{\alpha})$  векторов  $\bar{\alpha}$ , рассчитываемых по ЛП  $\tau$ -сеткам [2], которая оказывается возможной благодаря тому, что весь

вычислительный эксперимент проводится сериями. В ППП-поиске на сегодняшний день можно варьировать одновременно значения до 51-го параметра ( $J = 51$ ). Для рандомизации (случайного смешения уровней варьируемых параметров  $\alpha_{ijh}$ ) дискретного обзора  $G(\bar{\alpha})$  могут быть использованы многие существующие таблицы равномерно распределенных по вероятности целых чисел. Рандомизация состоит в том, что для каждой  $h$ -й серии экспериментов ( $h=1, \dots, H(i, j)$ ), где  $H(i, j)$  – объем выборки из элементов  $\Phi_{ijh}$  для одного критерия, вычисляется свой вектор случайных номеров строк  $\vec{j} = (j_{1h}, j_{2h}, \dots, j_{\beta h})$  в таблице направляющих числителей (ТНЧ) по формуле

$$j_{\beta h} = [R \times q] + 1, \quad (1)$$

а значения  $\alpha_{ij}$  в  $h$ -й серии рассчитываются с помощью линейного преобразования  $\alpha_{ijh} = \alpha_{j^*} + q_{ihj\beta h} \times \Delta\alpha_j$ , где  $\Delta\alpha_j = \alpha_{j^{**}} - \alpha_{j^*}$ ,  $\alpha_{j^{**}}, \alpha_{j^*}$  – соответственно верхние и нижние границы области  $G(\bar{\alpha})$ ;  $\beta = 1, \dots, J$ ;  $R$  – любое целое число (в ППП-поиске  $R = 51$ );  $j$  – фиксированный номер варьируемого параметра;  $i = 1, \dots, M(j)$  – номер уровня  $j$ -го параметра в  $h$ -й серии;  $M(j)$  – число уровней, на которое разбивается  $j$ -й параметр; в общем случае  $j_{\beta h} \neq j$  (в чем и состоит одна из целей рандомизации). Было доказано с помощью критерия Романовского [5], что числа  $j_{\beta h}$ , вырабатываемые по формуле (1), оказываются совокупностью равномерно распределенных по вероятности целых чисел. Обратим внимание, что  $M(j)$  и есть количество экспериментов, реализуемых в одной серии. И если  $M(j) = M = \text{const}$  и  $H(i, j) = H = \text{const}$ , то в этом случае параметры  $N0$ ,  $M$  и  $H$  связаны простым соотношением:

$$N0 = M \times H, \quad (2)$$

где  $N0$  – общее число вычислительных экспериментов (ВЭ), при этом длина выборки из  $\Phi_{ijh}$  в точности равна  $H$ . Но в общем случае, когда  $M(j) = \text{var}$ , то и  $H(i, j) = \text{var}$ , и тогда формула (2) для одного критерия примет такой вид:

$$N0 = \sum_{i=1}^{M(j)} H(i, j).$$

Обработка результатов основывается на сопоставлении выборочных средних  $\bar{\Phi}_{ijk}$  с общим средним значением критерия  $\bar{\Phi}_{0k}$  по критерию Фишера [5], где  $i = \overline{1, M_j}$ ,  $M_j$  – число уровней варьируемого параметра. Существенными из итогов результатов обработки экспериментов на математической модели в [3, 6, 7] являются как выделение областей концентрации  $G_{0k}$  наилучших решений по  $k$ -му критерию, так и выделение подобласти концентрации компромиссных решений при выбранной (или заданной) схеме компромисса.

Однако в этой методике, как и для любой другой, связанной с вероятностной интерпретацией получаемых результатов, всегда присутст-

вует «осадо́к» сомнений: а с наиболее ли вероятностным распределением мы имеем дело? (что, конечно, связано с достаточностью объема проведенных вычислительных экспериментов). Поэтому в данной работе излагается попытка предварительного оценивания энтропийных свойств [8] системы «пространство варьируемых параметров – поверхность отклика  $\Phi(\alpha)$ » на основе методики [3, 6, 7] с надеждой найти, по аналогии с вышеизложенным, ярко выделяющиеся подобласти максимума или минимума энтропии  $S$ . Привлекает интерпретация принципа максимума энтропии [9]: «...не представляется возможным выбрать распределение, уменьшающее предполагаемую неопределенность...».

С этой целью был проведен вычислительный эксперимент на двух функциях типа Розенброка [10]:  $\Phi_1(\alpha) = 100(\alpha_2 - \alpha_1^2)^2 + (1 - \alpha_1)^2$  и  $\Phi_2(\alpha) = 70(\alpha_2 - \alpha_1^2)^2 + (0,2 - \alpha_1)^2$ . В соответствии с [3, 7] для двух функций в пространстве исследуемых параметров размерности  $J = 2$  была построена матрица планируемых экспериментов (МПЭ) размерности  $N_0 \times J$ , где  $N_0 = 64$  – число строк этой матрицы (или число вычислительных экспериментов; небольшое). При этом  $M_j = 16$  для каждого из двух варьируемых параметров. Исходная область варьирования была задана такой:  $\alpha_1 \in (-2; 2), \alpha_2 \in (-0,5; 3,5)$ . Сама величина энтропии  $S$  подсчитывалась по известной формуле  $S = -P_m \ln P_m$ , где  $P_m$  – вероятность попадания значения  $\Phi(\alpha)$  в  $m$ -й интервал изменения значений критерия; при этом  $m = 1, \dots, n$ , а само  $n$  – число интервалов, на которое разбивается диапазон  $\Phi_{\max} - \Phi_{\min}$ . В данной работе бралось  $n = 10$ , что определяет  $\max S = \ln(n) \approx 2,3026$ , соответствующий равномерному распределению вероятностей критерия (как наиболее вероятному).

Результаты вычислительных экспериментов приведены в табл. 1 и 2. В таблицах для каждого  $i$ -го сечения для двух функций приведено по три выборочных значения энтропии: 1-я строчка – средние выборочные значения энтропии  $\bar{S}_{ij}$ ; 2-я строчка – максимальные выборочные значения энтропии  $S_{ij}^{\max}$ ; 3-я строчка – минимальные выборочные значения энтропии  $S_{ij}^{\min}$ . Для каждой функции по всей области варьирования параметров были получены общие средние значения энтропии –  $S_{01} = 1,5849$  и  $S_{02} = 1,2506$  соответственно. Из данных таблицы следует, что для функции  $\Phi_1(\alpha)$  по  $\alpha_1$  существует два интервала  $(-1,875; -0,375)$  и  $(0,375; 1,875)$ , где  $\bar{S}_{ij} \gg S_{01} = 1,5849$ , и второй из двух интервалов содержит координату экстремума функции ( $\alpha_1 = 1$ ); по  $\alpha_2$  можно приблизительно выделить интервал  $(> 0,125; 2,125)$ , где  $\bar{S}_{ij} > S_{01} = 1,5849$ , также содержащий координату экстремума ( $\alpha_2 = 1$ ). Для функции  $\Phi_2(\alpha)$  наблюдается иная ситуация: по  $\alpha_1$  существует два интервала  $(-1,875; -0,375)$  и  $(0,625; 1,875)$ , где  $\bar{S}_{ij} > S_{02} = 1,2506$ , оба интервала не содержат координату экстремума функции ( $\alpha_1 = 0,21$ ); по  $\alpha_2$  нельзя точно выделить какой-либо один интервал; поэтому при дальнейших поисках оставляем исходный.

Таблица 1. Результаты вычислительных экспериментов (для сечений с 1 по 8)

Номер $i$ -го сечения	$\Phi_1(\alpha)$				$\Phi_2(\alpha)$			
	$\alpha_1$	$S_i$	$\alpha_2$	$S_i$	$\alpha_1$	$S_i$	$\alpha_2$	$S_i$
1	-1,875	1,7610	-0,375	1,4316	-1,875	1,3664	-0,375	1,1246
		1,9730		1,5048		1,5013		1,3055
		1,5968		1,2899		1,3055		1,0297
2	-1,625	1,7207	-0,125	1,2175	-1,625	1,3687	-0,125	0,9859
		1,9730		1,5968		1,6138		1,3055
		1,3274		0,6730		0,8711		0,5004
3	-1,375	1,7585	0,125	1,5989	-1,375	1,4466	0,125	1,820
		1,9298		1,8605		1,5657		1,5013
		1,5571		1,7219		1,3331		1,3055
4	-1,125	1,6329	0,375	1,5989	-1,125	1,3359	0,375	1,1882
		1,7751		1,7820		1,4703		1,3762
		1,5827		1,0961		1,2052		0,6881
5	-0,875	1,5148	0,625	1,6428	-0,875	1,2135	0,625	1,3919
		1,5827		1,7524		1,4320		1,5013
		1,2899		1,3748		1,0961		1,2241
6	-0,625	1,3505	0,875	1,8581	-0,625	1,0924	0,875	1,4683
		1,4306		2,0389		1,2023		1,7219
		1,2899		1,5430		1,0297		1,1611
7	-0,375	1,3737	1,125	1,7066	-0,375	0,8530	1,125	1,3279
		1,3762		1,9730		0,8557		1,5126
		1,3662		1,3535		0,8451		0,8557
8	-0,125	1,2892	1,375	1,5549	-0,125	0,8604	1,375	1,1301
		1,535		1,7751		0,9489		1,2780
		1,0961		1,3662		0,6881		0,8451

Таблица 2. Результаты вычислительных экспериментов (для сечений с 9 по 15)

Номер $i$ -го сечения	$\Phi_1(\alpha)$				$\Phi_2(\alpha)$			
	$\alpha_1$	$S_i$	$\alpha_2$	$S_i$	$\alpha_1$	$S_i$	$\alpha_2$	$S_i$
9	0,125	1,1834	1,625	1,8234	0,125	0,8368	1,625	1,5523
		1,3535		2,0162		0,9489		1,8047
		0,6730		1,4306		0,5004		1,2023
10	0,375	1,3378	1,875	1,6820	0,375	0,9960	1,875	1,3353
		1,3762		1,9730		1,2241		1,6138
		1,2241		1,3535		0,8557		0,9489
11	0,625	1,5568	2,125	1,5180	0,625	1,2069	2,125	1,1992
		1,8605		1,7820		1,5013		1,5657
		1,4306		1,3535		1,0671		0,9489
12	0,875	1,6739	2,375	1,5358	0,875	1,3423	2,375	1,1484
		1,9172		1,9730		1,5126		1,7219
		1,4306		1,3535		1,2023		0,8557
13	1,125	1,7628	2,625	1,3583	1,125	1,5840	2,625	0,8829
		2,0389		1,3762		1,7219		0,9489
		1,5126		1,3274		1,4446		0,9489
14	1,375	1,7349	2,875	1,4066	1,375	1,4690	2,875	1,1285
		2,0162		1,5126		1,8047		1,4446
		1,4286		1,3055		1,2773		0,8557
15	1,625	1,8411	3,125	1,6213	1,625	1,5143	3,125	1,3742
		1,9730		1,9434		1,6908		1,6923
		1,7219		1,3762		1,3535		0,8557
16	1,875	1,8659	3,375	1,6240	1,875	1,5236	3,375	1,3903
		1,9730		1,9172		1,7219		1,6908
		1,7651		1,4306		1,3351		1,2023

Следует отметить, что характер изменения энтропийных оценок в зависимости от значений параметров был в определенной мере аналогичен характеру изменения самих выборочных средних значений функций. Дальнейший случайный поиск значений экстремумов в указанных областях привел к таким результатам:  $\Phi_1(\alpha) = 0,0267$  за 756 испытаний (экспериментов) и  $\Phi_2(\alpha) = 0,03$  за 1163 эксперимента.

#### Литература

1. Бусленко Н. П., Голенко Д. И., Соболев И. М. и др. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). – М.: Физматгиз, 1962. – 322 с.
2. Соболев И. М., Статников Р. Б. Выбор оптимальных параметров в задачах проектирования со многими критериями. – М.: Наука, 1981. – 110 с.
3. Статников И. Н., Фирсов Г. И. Планирование вычислительного эксперимента в задачах оптимизационного синтеза динамических систем // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2010). – Ч. 2. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. – С. 181–186.
4. Статников И. Н., Фирсов Г. И. ППП-поиск и его возможности в решении задач проектирования динамических систем // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2014). – Ч. 1. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2014. – С. 99–104.
5. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1971. – 576 с.
6. Статников И. Н., Фирсов Г. И. Планирование вычислительного эксперимента в задаче выявления существенных параметров динамической модели // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2015). – Ч. 2. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2015. – С. 92–97.
7. Статников И. Н., Суслов Г. В., Фирсов Г. И. Рациональное проектирование динамических систем машин на основе применения ППП-поиска // Научное творчество молодежи. Математика. Информатика. – Ч. 1. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2014. – С. 69–73.
8. Климонтович Ю. Л. Статистическая теория открытых систем. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 624 с.
9. Вильсон Ф. Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. – М.: Наука, Физматлит, 1978. – 248 с.
10. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.

DOI: 10.17223/9785751124335/44

## ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ СОЦИУМА И ЕГО КУЛЬТУРНОГО КОДА

*В. А. Шведовский, А. С. Стандрик*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Предполагается [1], что система общественного воспроизводства как совокупность воспроизводственных ядер (ЯВ), охваченных множеством воспроизводственных циклов (ВЦ), адекватно отображаема (у автора [1] – релевантна) образами жизни (о.ж.) социума.

Изучается эволюция о.ж. первобытного общества в простейшей форме развития взаимоотношений двух семейных общин, находящихся в соседском

проживании на двух различных биотопах, например, условно называемых: 1 – «река», 2 – «лес». Полукочевой о.ж. сохраняет как привязанность каждой общины («3» и «4»), соответствуя чётности, к базе («1» и «2») добывания благ, прежде всего пищи, так и соседство. Всем поименованным цифрам отвечают ядра воспроизводства: биотопам «1» и «2» – природные, общинам «3» и «4» – социально-экономические. Всем 4 ЯВ сопоставляются 4 вершины графа  $G_4$ . Рёбра графа представляют саму возможность взаимодействий между вершинами, а их отсутствие означает маловероятность или невозможность таковых (см.  $G_4$ , подграф  $G_6$  на рис. 2).

Добывание благ в экономической сфере (сначала рассматривается только эта сфера воспроизводства) разбивается по фазам 'экономической деятельности и обозначается дугами орграфа: *производства* –  $p$  (вертикальная дуга «сверху вниз») *распределения* –  $d$  (одна горизонтальная дуга), *обмена* –  $e$  (две встречные горизонтальные дуги), *присвоения* –  $c$  (вертикальная дуга «снизу вверх») и *потребления* –  $u$  (петля). В учёте только дуги – элементы ВЦ, т.е. контуров орграфов. На каждом конкретном графе  $G_4$  (полном или неполном) в соответствии с вышеописанными правилами образования дуг возникает своё множество допустимых орграфов.

Первая гипотеза: ВЦ отображаемы контурами орграфа, т.е. перестановками. Число вершин такого графа – 4. Группа перестановок на таком полном графе есть некоммутативная группа симметрий тетраэдра –  $S_4$ . Порядок этой группы перестановок – 24.

Вторая гипотеза: уровень развития социума задаётся его уровнем сложности, который оценивается набором воспроизводственных циклов, описываемых группой или подгруппой перестановок. Переход от менее сложного уровня к более сложному происходит за счёт совершённых и освоенных в виде изобретений открытий, сложность которых отвечает уровню сложности социума (в этом смысле закона перемен) [3, 4].

Таким образом, эволюция сформулированной модели ячейки первобытного общества происходит по следующему алгоритму. Акторы древнего социума воспроизводят данный о.ж. в конечном наборе ВЦ, т.е. заданного уровня сложности о.ж., т.е. такого же уровня восприятия окружающего мира, до тех пор, пока одному из них «не повезёт» сделать открытие или изобретение на этом уровне сложности. Например, открыть обсидиан как высоко твёрдый материал для каменных орудий труда. Освоение открытия существенно повышает эволюционный потенциал, а с ним и набор ВЦ образа жизни, т.е. его уровень сложности.

Третья гипотеза: усложнение о.ж. может быть описано как минимальное расширение  $H_n$  группы перестановок, где  $n$  – порядок описывающих набор ВЦ таким образом, что предыдущая группа становится подгруппой вновь построенной группы. Простейшим вариантом является удвоение порядка каждой подгруппы, а результатом этой процедуры выступает последовательность вложенных подгрупп:  $H_n \subset H_m \subset H_l$ ,  $n < m < l$ , реализующая

социальную наследственность. Примеры перестановок элементов групп: 1) 4 вершины графа  $G_4$  с петлями – образ единичной перестановки  $T_0$  – (1)(2)(3)(4); трактовка: общины живут за счёт запасов, ибо биотопы «под паром» не дают продуктов питания; 2) каждая пара вершин  $G_4$  (13) и (24) образует циклы транспозиций  $T_1$ : каждая община автономно живёт на своём биотопе, добывая и питаясь его плодами, например речными – община «3», и лесными – община «4». На основе анализа полного множества подгрупп выявлены все последовательности вложенных подгрупп для построения решётки  $L(S_4)$  (рис. 1).

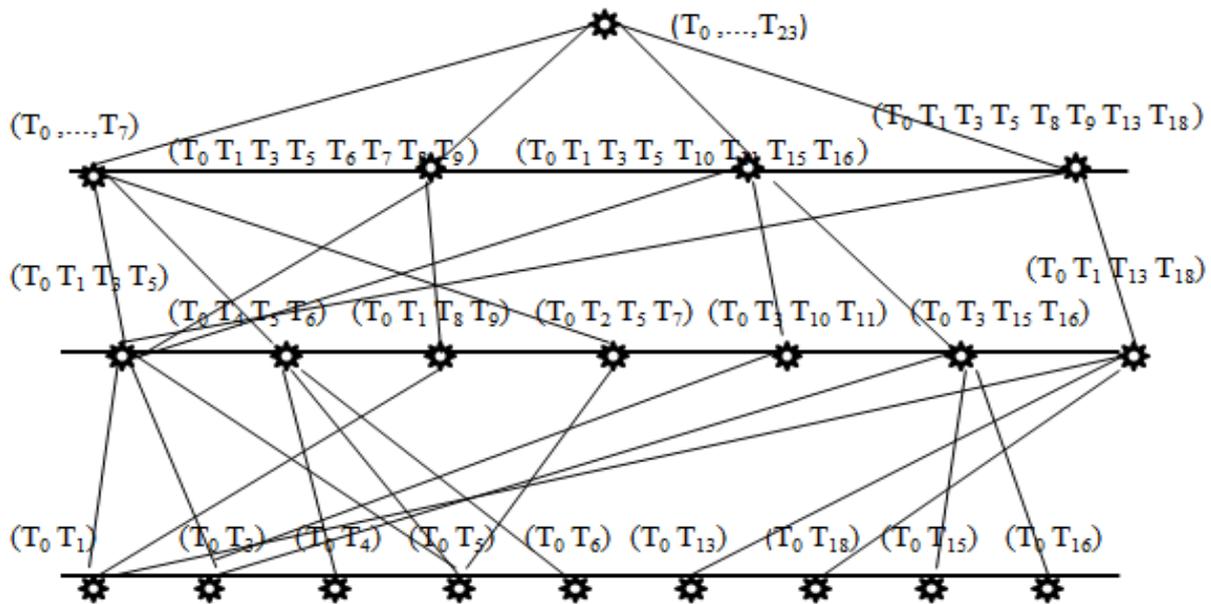


Рис. 1. Решётка  $L(S_4)$  – все последовательности вложенных подгрупп группы  $S_4$  для старта с подгрупп 2-го порядка, таких как  $(T_0, T_1)$  и др. – см. нижний ряд  $L(S_4)$

Из всего множества эволюционных траекторий отбираются те, для которых суммарная оценка сложности (по Уёмову [5]) каждой траектории перехода от одного уровня сложности к другому обладает минимумом. Поскольку эволюция древнего социума моделируется, не ограничиваясь  $S_4$ , то учитывается рост числа вершин в графе. Это происходит из-за перехода от присваивающей экономики к экономике присвоения и производства – от  $G_4$  к  $G_6$ . А поскольку группа  $S_4$  является подгруппой  $S_6$ , то соответственно усложняется и групповая решётка (решётка  $L(S_n)$  – совокупность узлов и связей между ними, выражающая структуру подгрупп группы  $S_n$ ).

В соответствии с длинами отобранных на групповых решётках эволюционных траекторий строится  $I_{\text{укк}}$  – индекс укоренности культурного кода (**Культурный код (К.К.)** – это способ передачи знаний о мире, навыков, умений в данной культурной эпохе. К.К. различают для эпох: 1) дописьменной, 2) письменной, 3) экранной. Например, наскальные рисунки передавали молодым поколениям охотничьи приёмы. Также к дописьменным К.К. относится изустная передача примет сроков удачных посевов [2. С. 563], например: «ячмень сеют, пока цветёт калина», «лягушка с

голосом – сей овёс» и т.п. Кроме того, они могут выразить как культурное сознательное, так и культурное бессознательное (рожающая женщина кричит «мама» на языке и диалекте своей малой родины). В основу концепции связи культурного кода, образа жизни и образа мыслей лежит социологическая гипотеза: образ жизни порождает образ мыслей, а устойчивое повторение образа мыслей формирует культурный код. В итоговом расчёте  $I_{у\text{кк}}$  вычислительный эксперимент осуществлялся для двух графов  $G_6$ , характеризующих земледельческие социумы, складывающиеся в переходных экономиках Востока и Запада, различающихся наличием ребер в графе  $G_4$  подграфа  $G_6$ : а – (1–2), б – (3–4).

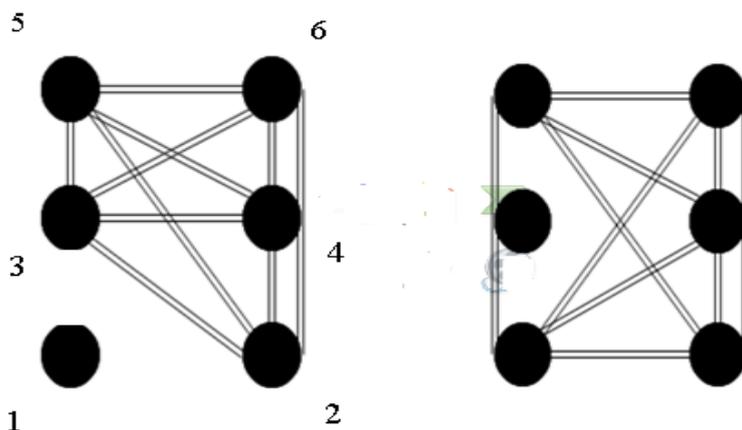


Рис. 2. Представление различия 6-вершинных графов – образов структуры связей элементов земледельческих хозяйств – общинного на Востоке – слева и фермерского на Западе – справа

Расчёты, впервые проведённые по диахронной методике, сравнивались с аналогичными данными, ранее полученными социологами в рамках синхронной методики.

Таблица 1. Сравнение значимости ценностей «уважение к власти» и «коллективизм» на Востоке и на Западе методом измерения индекса Г. Хофстеда (синхронная методика) –  $I_{\text{Hof}}$

Локальность $I_{\text{Hof}}$ (ценности)	Восток – В			ВЗ	Запад – З		
	РФ	КНР	Индия	Турция	США	Австралия	Швеция
$I_{\text{Hof}}$ (коллективизм) = $100 - I_{\text{Hof}}$ (индивидуализм)	61	80	52	63	9	10	29
$I_{\text{Hof}}$ (уважение к власти, к иерархии)	93	80	77	66	40	36	31

Таблица 2. Расчёт индексов укоренённости культурных кодов  $I_{у\text{кк}}$  в сельскохозяйственных хозяйствах (переход от присваивающей к производящей экономике) – диахронная методика

$I_{у\text{кк}}$ (ценности)	Локальность	Восток	Запад	$\Delta$ (%)
$I_{у\text{кк}}$ (взаимопомощь, коллективная ответственность)		0,265	0,239	0,026 (~10%)
$I_{у\text{кк}}$ (уважение к иерархии)		0,324	0,319	0,005 (~1.5%)

Сравнивая результаты современных социологических измерений (табл. 1), обнаруживаем, что построенный Index – индекс укоренённости культурных кодов –  $I_{у\text{кк}}$  адекватно отражает различие и тождество ценностных ориентаций цивилизаций Востока и Запада. При этом адекватность точно соблюдается в системе отношений порядка как для горизонтальных, так и вертикальных сравнений значений индексов.

### Выводы

1. Построен инструмент отображения ряда воспроизводственных циклов с помощью групп и подгрупп перестановок на графе системы ядер воспроизводства.
2. Посчитаны цепочки вложенных подгрупп – моделей траекторий эволюции на четырёх-, шести- и восьмивершинном графе.
3. Предложен критерий отбора оптимальных эволюционных путей на групповой решётке, отображающей все цепочки вложенных подгрупп.
4. Длина отобранных эволюционных траекторий сопоставлен индекс укоренённости культурных кодов –  $I_{у\text{кк}}$ .
5. Построенный по диахронной методике индекс протестирован на отношениях порядка между значениями аналогичных по смыслу индексов, полученных в синхронной методике.

Данная работа была выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ – 16-01-0100306 и РГНФ – 15-03-00435

### Литература

1. Возьмитель А. А. Динамическая концепция образа жизни // Тезисы докладов и выступлений на II Всероссийском социологическом конгрессе. – М., 2003. – Т. 1. – С. 88.
2. Даль В. И. Пословицы русского народа. – М.: Эксмо, Изд-во ННН, 2005. – С. 567.
3. Шведовский В. А. Опыт теоретико-группового представления циклов общественного воспроизводства // Математическое моделирование социальных процессов / Социологический факультет МГУ. Вып. 4. – М., 2002. – С. 52–88.
4. Шведовский В. А. О вычислении социальных констант в моделировании эволюции архаичного социума // Пространство и человек. – М., 2013. – № 4.
5. Shvedovskiy V. A., Standrik A. S. Group-lattice approach to computation of social constants in the modeling of evolution path of the archaic society // Numerical Algebra with Applications – Proceedings of Fourth China-Russia Conference. – Rostov-on-Don: Southern Federal University Publishing, 2015. – P. 130–134.
6. Hofstede G. Culture's Consequences: Intern Differences in Work-Related Volues. – L.: Beverly Hills, 1980.

## СОДЕРЖАНИЕ

### ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

<i>Medvedev G. A.</i> Probability properties of the interest rate models.....	3
<i>Бушкова Т. В., Кошкин Г. М.</i> Исследование регрессионных моделей зависимости стоимости квартир г.Томска от различных факторов.....	8
<i>Грекова Т. И., Рощин А. В.</i> Оптимальное управление для модели односекторной экономики со стохастической динамикой трудовых ресурсов.....	13
<i>Даммер Д. Д.</i> Математическая модель страховой компании в виде системы массового обслуживания с неограниченным количеством приборов с учетом единовременных страховых выплат.....	18
<i>Дмитриев Ю. Г., Кошечая Т. О.</i> О комбинированных оценках доли...	23
<i>Домбровский В. В., Ларина Т. М.</i> Адаптивные стратегии прогнозирующего управления инвестиционным портфелем с учетом торговых издержек и ограничений на вложения в финансовые активы.....	27
<i>Катаев Ю. М., Лосева Н. В., Мицель А. А., Козлов С. В.</i> Событийное моделирование деятельности государственного учреждения при оказании услуги на основе бизнес-процессов.....	33
<i>Колесникова С. И., Егоров С. А.</i> Управление нелинейным экономическим объектом второго порядка.....	38
<i>Костюк Ю. Л.</i> Сбалансированная задача к коммивояжеров для несимметричных расстояний.....	43
<i>Лившиц К. И., Ульянова Е. С.</i> Релейно-гистерезисное управление процессом производства в задаче производства и сбыта скоропортящейся продукции.....	47
<i>Назаров А. А., Бронер В. И.</i> Система управления запасами с распределением Эрланга объемов потребления ресурсов.....	53
<i>Полуэктова К. О., Грекова Т. И.</i> Двухсекторная модель экономики с распределением государственного бюджета в производственные сектора.....	59
<i>Поттосина С. А., Сергеева И. Л.</i> Ликвидность как фактор управления инвестиционным портфелем.....	64
<i>Решетникова Г. Н., Малахова Т. Е.</i> Управление поставками с прогнозированием.....	69

### ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

<i>Аксёнов С. В., Замятин А. В., Костин К. А., Джанминг Л.</i> Использование методов Deep Learning для детектирования полипов при колоноскопии.....	75
<i>Бабанов А. М.</i> ERM-модель данных и новые возможности в проектировании баз данных .....	80

<b>Вершинина О. Г.</b> Применение методов data mining для прогнозирования скорости продажи подержанных автомобилей.....	85
<b>Гимранов Р. Д., Лугачев М. И.</b> Real Time Enterprise. Бизнес и ИТ в эпоху «Больших данных».....	91
<b>Дружинин Д. В., Замятин А. В.</b> Адаптивный алгоритм сжатия видеоданных графического интерфейса пользователя.....	96
<b>Мирза Н. С., Скворцов А. В.</b> Алгоритмы и структуры данных для построения модели поверхности по данным лазерного сканирования.....	102
<b>Моисеев А. Н., Полин Е. П.</b> Модификация объектной модели системы имитационного моделирования ODIS с целью учета объема заявок.....	107
<b>Надеинский Л. А., Абраменков А. Н., Васьковский С. В.</b> Программный комплекс по обеспечению эффективного процесса обучения.....	113
<b>Никишин К. И., Коннов Н. Н., Пащенко Д. В.</b> Моделирование систем на базе технологии TIME-TRIGGERED ETHERNET.....	117
<b>Саринова А. Ж.</b> Подготовительная обработка алгоритмов сжатия гиперспектральных аэрокосмических изображений с учетом междиапазонной корреляции с потерями и без потерь.....	123
<b>Фархадов М., Надеинский Н.</b> Эффективное использование современной многопоточной архитектуры для создания потокобезопасных высокопроизводительных систем массового обслуживания.....	128
<b>Хоа Там Тханг, Чан Ван Ан.</b> Возможности применения классификации данных алгоритмом постепенного расширения куба атрибутов объектов.....	133

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

<b>Афанасьев А. А., Замятин А. В.</b> Идентификация изменений ландшафтного покрова в большом объеме данных дистанционного зондирования Земли большого объема. ....	140
<b>Бондарева Л. В.</b> Численное моделирование очистки шламовых стоков от взвешенных примесей.....	144
<b>Брагинская Л. П., Григорюк А. П., Ковалевский В. В., Загорулько Г. Б.</b> Онтологический подход к систематизации научной информации по активной сейсмологии.....	149
<b>Быкова В. В., Монгуш Ч. М.</b> Методы анализа формальных понятий в исследовании текстов тувинского фольклора.....	153
<b>Воронов А. Ю., Корягин М. Е.</b> Совершенствование организации работы экскаваторно-автомобильных комплексов на угольных разрезах... ..	158
<b>Вьюнник Н. М., Захаров Ю. Н., Кириченко А. А., Лобасенко Б. А.</b> Моделирование в устройстве для отвода диффузионного слоя движения жидкости с переменными плотностью и вязкостью.....	163
<b>Гендрина И. Ю.</b> Моделирование переноса излучения через облачную атмосферу на основе данных спутниковых наблюдений.....	168

<i>Лукьянова Н. А., Семенова Д. В.</i> Краткий обзор по теории случайных множеств .....	172
<i>Моисеева Ю. А., Решетько М. В.</i> Регрессионный анализ процессов влагопереноса на примере территории севера Западной Сибири.....	178
<i>Мясоедова М. А., Мясоедова З. П., Пественидзе Т. К.</i> Анализ проблем визуального восприятия устной речи.....	184
<i>Новожилов М. А., Ивановский Р. И.</i> Определение доминантных каналов ЭЭГ посредством регрессионного анализа.....	188
<i>Осконбаев М. Ч., Абдимуталипова З. К., Арстанбек кызы А., Ураимова К., Осмоналиев А. Б.</i> Математическое моделирование термообесцвечивание дырочных $V_2$ -центров окраски в кристаллах NaCl с различными концентрациями Ag.....	192
<i>Параев Ю. И., Букреев В. Г., Шилин А. А.</i> Оптимальное управление динамическими объектами с дискретным изменением параметров на основе линейных моделей.....	196
<i>Полухина М. Е.</i> Моделирование розжига огневого забоя в одной модели подземной газификации угля.....	200
<i>Пургина Д. В.</i> Численное моделирование водозабора хозяйственно-питьевого водоснабжения для нужд угольной шахты.....	204
<i>Самойленко Н. С., Крутиков В. Н., Мешечкин В. В.</i> Об оценке сходимости многошагового метода минимизации негладких функций.....	209
<i>Статников И. Н., Фирсов Г. И.</i> Процедура структурирования пространства параметров динамической системы по энтропийному критерию при анализе многокритериальных задач проектирования.....	215
<i>Шведовский В. А., Стандрик А. С.</i> Теоретико-групповое моделирование эволюции социума и его культурного кода.....	220

Научное издание

**Информационные технологии  
и математическое моделирование  
(ИТММ–2016)**

Материалы XV Международной конференции  
имени А. Ф. Терпугова  
12–16 сентября 2016 г.  
Часть 2

Составители Е. Ю. Лисовская, Е. А. Фёдорова  
Редактор В. Г. Лихачева  
Компьютерная верстка Т. В. Дьяковой

---

Подписано в печать 16.08.2016.

Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.

Печ. л. 14,2; усл. печ. л. 13,2; уч.-изд. л. 13,0. Тираж 500 экз. Заказ

---

ОАО «Издательство ТГУ», 634029, г. Томск, ул. Никитина, 4.

ООО «ПРИНТ-2», 426035, г. Ижевск, ул. Тимирязева, 5, оф. 1.