НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ШКОЛА ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ (ШТМО-2026)

ТЕЗИСЫ

II Международной конференции
20–25 апреля 2026 г.

ТОМСК
Издательство Томского
государственного университета
2026

УДК 519.872
ББК 22.18
И74
Школа теории массового обслуживания (ШТМО-2026): Тезисы II Международной конференции (20–25 апреля 2026 г.). — Томск: Издательство Томского государственного университета, 2026. — 106 с.

ISBN 978–5–908040–97–6

Сборник содержит тезисы II Международной конференции «Школа теории массового обслуживания (ШТМО-2026)» по следующим направлениям: стохастическое моделирование, анализ систем массового обслуживания и их приложения. В материалах отражены как фундаментальные математические методы, так и прикладные решения для телекоммуникаций, бизнеса, ИТ-инфраструктуры и транспортных систем. Особое внимание уделено развитию аналитических методов исследования, имитационному моделированию сложных систем, а также новым подходам к оценке качества обслуживания (QoS) и оптимизации ресурсов. В сборник включены работы ведущих российских ученых, а также доклады молодых исследователей.

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

УДК 519.872
ББК 22.18

Редколлегия:
С.П. Моисеева, доктор физико-математических наук, профессор
Е.А. Фёдорова, кандидат физико-математических наук
О.Д. Лизюра

ISBN 978–5–908040–97–6

© Авторы. Текст, 2026
© Томский государственный университет. Оформление. Дизайн, 2026

NATIONAL RESEARCH TOMSK STATE UNIVERSITY

QUEUEING THEORY SCHOOL (QTS-2026)

ABSTRACTS
of the 2nd International Conference
2026 April, 20–25

TOMSK
Tomsk State
University Publishing
2026

UDC 519.872
LBC 22.18
I60
Queueing theory school (QTS-2026): Abstracts of the 2nd International Conference (2026 April, 20–25). — Tomsk: Tomsk State University Publishing, 2026. — 106 p.

ISBN 978–5–908040–97–6

This volume presents abstracts from the 2nd International Conference "Queueing theory school (QTS-2026)". The papers are devoted to new results in the following areas: stochastic modeling, analysis of queuing systems and their applications. The materials include both fundamental mathematical methods and applied solutions for telecommunications, business, IT infrastructure and transport systems. Special attention is paid to the development of analytical methods of investigation, simulation modeling of complex systems, as well as new approaches to quality of service (QoS) assessment and resource optimization. The collection includes works by leading Russian scientists, as well as reports by young researchers.

UDC 519.872
LBC 22.18

E d i t o r s:
S.P. Moiseeva, Doctor of Physics and Mathematics, Professor
E.A. Fedorova, Candidate of Physics and Mathematics
O.D. Lizyura

ISBN 978–5–908040–97–6

© Authors. Text, 2026
© Tomsk State University Publishing. Design, 2026

Пленарные доклады

ОЦЕНКА ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ ЗА СЛУЧАЙНЫМИ ПОТОКАМИ

Г. Ш. Цициашвили[1]

[1] *Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток, Россия*
Автор, ответственный за переписку: guram@iam.dvo.ru

В работах А. М. Горцева и его учеников построены и исследованы оценки параметра мертвого времени по наблюдениям за полусинхронными дважды стохастическими потоками (см., например: [1, 2]). Однако эти оценки строятся при наличии известных параметров этих потоков. В настоящей работе построены такие оценки детерминированного мертвого времени T, которые не требуют знания параметров перечисленных потоков. Эти оценки представлены в виде минимумов расстояний $\widehat{T}_n = \min(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ между соседними наблюдаемыми точками. Доказана их состоятельность на основе свойства рекуррентности потока наблюдаемых точек.

Интенсивность полусинхронного дважды стохастического потока есть случайный кусочно-постоянный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями S_1 и S_2. Примем, что поток находится в первом состоянии S_1, когда $\lambda(t) = \lambda_1$, и поток находится во втором состоянии S_2, когда $\lambda(t) = \lambda_2$, причем $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$. При нахождении $\lambda(t)$ в i-м состоянии поступает пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i. Переход процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в состояние S_2 возможен только в момент наступления события потока. При этом переход осуществляется с вероятностью p, $0 < p \leq 1$, а с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в состоянии S_1. Переход процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в состояние S_1 осуществляется в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события. Вместе с тем длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии есть случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром α_2, где α_2 — интенсивность смены состояния S_2 на S_1, $\alpha_2 \geq 0$, $t \geq 0$.

В работе [2] доказано, что полусинхронный дважды стохастический поток событий является рекуррентным при следующих условиях на параметры наблюдаемых потоков λ_1, λ_2, p, α_2, T :

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00460-26-00).

1) $\alpha_2 = 0$, тогда $p_{\tau_1 - T}(t) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t},\ t \geq 0$,
2) $\lambda_1(1-p) = \lambda_2 + \alpha_2$, тогда $p_{\tau_1 - T}(t) = (\lambda_2 + \alpha_2) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)t},\ t \geq 0$,
3) $p = 0$, тогда $p_{\tau_1 - T}(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t},\ t \geq 0$,
4) $\lambda_2 = 0,\ \lambda_1(1-p) > \alpha_2$, тогда
$p_{\tau_1 - T}(t) = \gamma_4(T)\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1 - \gamma_4(T)\alpha_2 e^{-\alpha_2 t},\ t \geq 0$,
5) $p = 1,\ \lambda_1 - \lambda_2 > \lambda_2 + \alpha_2$, тогда
$p_{\tau_1 - T}(t) = \gamma_5(T)\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1 - \gamma_5(T))(\alpha_2 + \lambda_2) e^{-(\alpha_2 + \lambda_2)t},\ t \geq 0$.
Здесь $p_{\tau_1 - T}(t)$ – плотность распределения случайной величины $\tau_1 - T$, $0 < \gamma_4(T),\ \gamma_5(T) \leq 1$.

Теорема 1. При выполнении любого из условий 1) – 5) случайная величина $\widehat{T}_n$ является состоятельной оценкой детерминированного мертвого времени T.

Доказательство. При выполнении любого из условий 1) – 5) существуют такие $\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0$, что для любого $\varepsilon,\ 0 < \varepsilon < \delta_1$, выполняются неравенства

$$P(\tau_1 - T \leq \varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} p_{\tau_1 - T}(t)dt \geq \delta_2 \varepsilon \ \Rightarrow\ 0 \leq P(\tau_1 - T > \varepsilon) \leq 1 - \delta_2 \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$P(|\min(\tau_1, \ldots, \tau_n) - T| > \varepsilon) = P^n(\tau - T > \varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для любых параметров $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \alpha_2,\ p$, удовлетворяющих одному из условий 1) – 5), статистика $\widehat{T}_n = \min(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ является состоятельной оценкой параметра мертвого времени T. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горцев А. М., Веткина А. В.* Применение метода максимального правдоподобия для оценки параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося мертвого времени в рекуррентном альтернирующем полусинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. Т. 62. С. 36–49.
2. *Vetkina A., Nezhelskaya L.* Estimating the Distribution Parameter of Nonprolonging Random Dead Time Duration in Recurrent Semi-Synchronous Events Flow Through Maximum Likelihood // Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN 2023. Moscow: Russia, 2023. P. 305–315.

АНАЛИЗ ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ $M/GI/\infty$

А. В. Зорин[1]

[1] *Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия*
Автор, ответственный за переписку: andrei.zorine@itmm.unn.ru

В таких прикладных разделах теории вероятностей и математической статистики, как теории надежности и анализ данных типа времени жизни, предполагается, что моменты начала наблюдения объектов совпадают [1, 2]. Однако имеется ряд реальных ситуаций, когда в выборку могут попадать объекты со случайными моментами появления: как до момента начала наблюдения, так и после момента начала наблюдения. Доклад основан на представлении, что анализ таких динамически поступающих данных можно проводить на основе понятия системы массового обслуживания.

Рассмотрим систему обслуживания типа $M/GI/\infty$ с интенсивностью входного потока $\lambda > 0$ и независимыми, одинаково распределенными длительностями обслуживания с функцией распределения $F(u;\theta)$ и плотностью распределения $f(u;\theta)$, где θ — параметр, принадлежащий некоторому открытому подмножеству $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ для некоторого натурального m. СМО функционирует на промежутке времени $[-T_0, T_1]$, $T_0 > 0$, $T_1 > 0$ — заданные параметры. Можно считать, что задана случайная последовательность $\{(\tau_i, \xi_i); i = 1, 2, \ldots\}$, где $\tau_i \geqslant -T_0$ — момент поступления i-го требования, а ξ_i — длительность обслуживания i -го требования. В начальный момент $(-T_0)$ очередь пуста. Наблюдение производится на промежутке $[0, T_1]$. Непосредственному наблюдению оказываются доступны только те требования, которые удовлетворяют условию: $\tau_i + \xi_i \geqslant 0$, при этом вместо реального времени обслуживания наблюдается пара $\tilde{\xi}_i = \min\{\xi_i, T_1 - \tau_i\}$, $\zeta_i = I(\xi_i \geq T_1 - \tau_i)$. Здесь ζ_i — индикатор события цензурирования справа, а $\tilde{\xi}_i$ — реальное время наблюдения. Итак, выборкой в данной схеме наблюдения будет набор

$$\psi = \{(t_i, x_i, z_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n\},$$

причем объем выборки n также будет случайным. Необходимо отметить отличие данной постановки от известных задач оценки парамет-

ров в процессах обслуживания (например, оценка параметров процесса $M/M/\infty$ в книге [3]). Отличие заключается в том, что только «длинные» требования, поступившие до начала наблюдения, попадают в выборку. Данная постановка задачи в известной нам литературе [4, 5] не встречалась.

Введем также дополнительную функцию $\bar{F}(u;\theta) = 1 - F(u;\theta)$, функцию риска $h(u;\theta) = f(u;\theta)/\bar{F}(u;\theta)$ и среднее $\mu(\theta) = \int_0^\infty \bar{F}(u;\theta)\,du$.

Нами в данной работе доказано следующее утверждение.

Теорема 1. В качестве функции правдоподобия можно выбрать

$$L(\psi;\lambda,\theta) = \lambda^n \exp\Big\{-\lambda\Big(T_1 + \int_0^{T_0} \bar{F}(u;\theta)\,du\Big)\Big\}\times \\ \times \prod_{i=1}^{n}\Big[\big(h(x_i;\theta)\big)^{1-z_i}\big(\bar{F}(x_i;\theta)\big)\Big].$$

При $T_0 \to \infty$ имеем в пределе

$$L(\psi;\lambda,\theta) = \lambda^n e^{-\lambda(T_1+\mu(\theta))} \prod_{i=1}^{n}\Big[\big(h(x_i;\theta)\big)^{1-z_i}\big(\bar{F}(x_i;\theta)\big)\Big].$$

В докладе приводятся результаты статистического моделирования и резюмируются эмпирические свойства оценок максимального правдоподобия для параметров λ и θ показательного и вейбулловского распределений как наиболее употребительных в теории надежности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кокс Д. Р., Оукс Д.* Анализ данных типа времени жизни пер. с англ. О. В. Селезнева. М.: Финансы и статистика, 1988. 191 с.
2. *Барзилович Е. Ю., Беляев Ю. К., Каштанов В. А. и др.* Вопросы математической теории надежности. М.: Радио и связь, 1983. 376 с.
3. *Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания. 2-е изд., испр. и доп. М.: ЛИБРОКОМ, 2012. 304 с.
4. *Bhat U.* Statistical Inference for Queueing Models // An Introduction to Queueing Theory. Statistics for Industry and Technology. Boston: Birkhäuser, 2015. P. 215–231.
5. *Asanjarani A., Nazarathy Y., Taylor P.* A survey of parameter and state estimation in queues // Queueing systems. 2021. V. 97. P. 39–80.

УПРАВЛЯЕМЫЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ (УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ)

В. В. Рыков[1, 2], Н. М. Иванова[3]

[1] *Российский государственный университет нефти и газа НИУ им. И. М. Губкина, г. Москва, Россия*
[2] *Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, г. Москва, Россия*
[3] *Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: nm_ivanova@bk.ru

Доклад является представлением нового учебного пособия, посвященного теории управляемых марковских цепей (УМЦ).

В настоящее время в российской образовательной практике наблюдается дефицит доступных учебных материалов по теории УМЦ. Данное пособие, подготовленное на основе многолетнего опыта преподавания одноименного курса В. В. Рыковым в РГУ нефти и газа (НИУ) им. И. М. Губкина и РУДН им. Патриса Лумумбы, призвано устранить этот пробел. Оно ориентировано на бакалавров и магистров прикладной математики и инженерных специальностей, стремящихся использовать современные методы стохастического управления в своей профессиональной деятельности.

Теория УМЦ является фундаментальным аппаратом исследования управляемых стохастических систем, находя все более широкое применение в машинном обучении, робототехнике, экономике и инженерии. Основная задача пособия – систематическое изложение теории конечных УМЦ с акцентом на вычислительных методах и практических примерах.

Пособие имеет иерархическую структуру, позволяющую последовательно освоить материал от простого к сложному. Логика построения курса отражает эволюцию задач управления: от детерминированных систем к стохастическим, от конечного горизонта планирования к бесконечному.

— **Первая глава** закладывает фундамент, вводя понятие управляемого детерминированного процесса и метода динамического программирования.
— **Вторая глава** расширяет модель на случай стохастической неопределенности, вводя понятие УМЦ, стратегии управления и

функционалы риска, а также анализирует особенности управления на бесконечном интервале.

— **Третья глава** посвящена однородным моделям с переоценкой (β-оптимальность), где излагаются основные вычислительные алгоритмы: итерационный метод Ховарда и метод линейного программирования, а также анализируется устойчивость β-оптимальных стратегий к изменению коэффициента переоценки.

— **Четвертая глава** рассматривает однородные модели без переоценки, фокусируясь на критерии минимизации среднего риска.

— Материал **пятой главы** выходит за рамки классических УМЦ. В ней рассматривается их обобщение, а именно дискретно управляемые полурегенерирующие процессы, и демонстрируются два примера классических задач теории массового обслуживания: управление входящим потоком и проблема «медленного прибора».

Методической особенностью пособия является использование единого сквозного примера – задачи управления оборудованием, который проходит через все основные разделы курса. Такой подход позволяет читателю наглядно проследить, как изменяются постановка задачи, алгоритм решения и структура оптимальной стратегии при переходе от одного класса моделей к другому.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рыков В. В., Иванова Н. М.* Управляемые марковские цепи. М.: ЛЕНАНД, 2026. 240 с.

Секционные доклады

ФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ СВЯЗИ НА ОСНОВЕ СМО

К. А. Вытовтов[1], Е. А. Барабанова[1], М. Г. Иванов[1,2]

[1] *Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия*

[2] *Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: mike.g.ivanov@gmail.com

Классические модели систем массового обслуживания (СМО) широко используют постоянные во времени значения интенсивностей входящего потока заявок λ и их обслуживания μ [1]. Однако такой подход справедлив лишь для ограниченного класса линейных задач [2]. Описание реальных телекоммуникационных систем требует учета физической природы сигналов (заявок) и фундаментальных основ радиотехнических систем. Данная работа призвана рассмотреть физические аспекты построения моделей полупроводниковых информационных систем на основе СМО.

Интенсивность поступления заявок λ, определяемая пропускной способностью канала, подчиняется формуле Шеннона–Хартли [3] и зависит не только от полосы пропускания, но и от соотношения сигнал–шум. Последнее, в свою очередь, является сложной функцией различных воздействий внешней среды. Интенсивность обслуживания μ ограничивается скоростью физических процессов в полупроводниковых элементах приемника и устройств обработки. При переключении в них МДП-структур возникают переходные процессы, обусловленные временем рассасывания избыточных зарядов и временем восстановления запирающего слоя [4]. Проведенные авторами расчеты показывают, что даже в простых структурах эти процессы вносят значительные задержки, ограничивая предельную тактовую частоту устройств.

Исходя из вышесказанного, максимальная интенсивность обслуживания определяется частотными характеристиками обслуживающего устройства, и при его функционировании можно выделить следующие характерные области (рис. 1):

— от 0 до t_0 λ и μ постоянные, равные и не зависят от времени;
— от t_0 до t_1 λ и μ равные и изменяются линейно;

— от t_1 до t_2 λ изменяется линейно, а μ является постоянной величиной и равна максимальной интенсивности обслуживания;
— при $t > t_2$, когда λ и μ являются разными постоянными величинами.

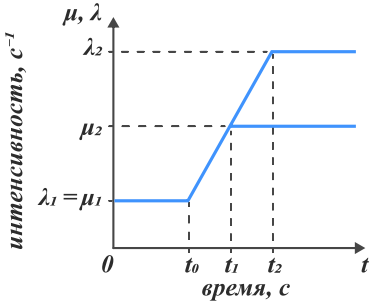


Рис. 1. Интенсивности поступления и обслуживания в переходном режиме

Таким образом, переходной режим в системе связи и обработки информации не является скачкообразным, а уравнения Колмогорова являются системой параметрических уравнений, где $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ – непрерывно изменяющиеся параметры. Решение этой системы получено численным методом, и проведен анализ результатов расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишневский В. М., Горбунова А. В.* Применение методов машинного обучения к решению задач теории массового обслуживания // Информационные технологии и вычислительные системы. 2021. № 4. С. 70–82.
2. *Вытовтов К. А., Барабанова Е. А., Шабанова Е. В.* Исследование переходного режима работы трехфазной системы массового обслуживания с общим буфером // Управление большими системами. 2025. № 117. С. 52–73.
3. *Shannon C. E.* A Mathematical Theory of Communication // Bell System Technical Journal. 1948. Vol. 27. P. 379–423, 623–656.
4. *Росадо Л.* Физическая электроника и микроэлектроника. М.: Высшая школа, 1991. 351 с.

МНОГОЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ И НЕОДНОРОДНЫМИ ПРИБОРАМИ

М. Лю[1]

[1] *Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь*
Автор, ответственный за переписку: liumei19910101@126.com

Системы массового обслуживания (СМО) с повторными вызовами, см., например, [1], описывают ситуацию, когда заявка, не получившая доступ, переходит на орбиту и через случайное время совершает повторную попытку. Такие модели востребованы при анализе call-центров, облачных платформ и сетей 5G/IoT. Однако комплексное исследование многолинейных СМО с повторными вызовами, произвольным числом N неоднородных (разной интенсивности обслуживания) приборов и марковскими потоками (MAP/BMAP) до настоящего времени не проводилось. В литературе рассматриваются, как правило, одно- или двухприборные системы либо однородные приборы.

Цель работы — разработка и исследование моделей многолинейных СМО с повторными вызовами и N неоднородными приборами при MAP/BMAP-потоке и распределении времени обслуживания фазового (PH) типа. Для каждой модели строится цепь Маркова с непрерывным временем, генератор которой выражается через кронекеровы произведения и суммы матриц. Основной аппарат — теория AQTMC [2].

Основные результаты.

1. Система MAP/M/N [3]. Построена цепь Маркова с пространством состояний размерности $W2^N$, где W – число состояний управляющего процесса MAP. Получено достаточное условие эргодичности: интенсивность входного потока должна быть строго меньше суммарной пропускной способности приборов. Выведены формулы для стационарных характеристик.

2. Система MAP/M/N с ненадёжными приборами [4]. Каждый прибор может выходить из строя и восстанавливаться; пространство состояний цепи имеет размерность $W3^N$. Условие эргодичности учитывает параметры надёжности приборов.

3. Система MAP/PH/N [5]. Времена обслуживания имеют фазовое распределение. Показано, что условие эргодичности определяется лишь средними интенсивностями обслуживания приборами.

4. Система BMAP/M/N с возможным переходом заявок между приборами. Входящий поток описывается пакетным марковским процессом поступления (BMAP), допускающим групповое поступление заявок, обслуживание экспоненциальное. Генератор цепи Маркова имеет блочную верхне-гессенбергову структуру (в отличие от блочной трёхдиагональной для моделей 1–3), что обусловлено возможностью одновременного поступления нескольких заявок. Условие эргодичности определяется лишь интенсивностями обслуживания.

5. Система BMAP/PH/N с возможным переходом заявок между приборами. Время обслуживания имеет PH-распределение. Условие эргодичности не сводится к неравенству для средних интенсивностей и требует решения конечной системы линейных алгебраических уравнений.

Для всех моделей, кроме условий эргодичности, реализованы алгоритмы расчета стационарного распределения вероятностей, получены формулы для вычисления стационарных характеристик: среднее число заявок на орбите, вероятность немедленного начала обслуживания, загрузка каждого прибора. Проведён численный анализ влияния корреляции во входном потоке, неоднородности приборов и дисперсии времени обслуживания на показатели производительности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Artalejo J. R., Gómez-Corral A.* Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Berlin: Springer, 2008. 318 p.
2. *Dudin A. N., Klimenok V. I., Vishnevsky V. M.* The Theory of Queuing Systems with Correlated Flows. Cham: Springer, 2020. 410 p.
3. *Liu M., Dudin A.* Analysis of retrial queue with heterogeneous servers and MAP // Applied Probability and Stochastic Processes. Singapore: Springer, 2020. P. 29–49.
4. *Mei L., Dudin A.* Analysis of unreliable retrial queue with heterogeneous servers and MAP // Automatic Control and Computer Sciences. 2022. Vol, 56. № 5. P. 411–420.
5. *Mei L., Dudin A.* Steady-state analysis of the multi-server retrial queueing system with heterogeneous servers and PH distribution // Proceedings of the IM of the NAS of Belarus. 2025. Vol. 33. P. 111–120.

СМО С АНОМАЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ ДЛЯ АНАЛИЗА ВЛИЯНИЯ ПОМЕХ НА УСТОЙЧИВОСТЬ УЗЛОВ БЕСПРОВОДНОЙ СЕТИ

Е. А. Барабанова[1], К. А. Вытовтов[1], А. Д. Корнеев[1]

[1] *Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: anton.korneev.2011@yandex.ru

В современном мире широкое распространение получили широкополосные беспроводные телекоммуникационные системы. При передаче беспроводного сигнала помимо положительных заявок по сети передаются помехи – повреждённые заявки. Зачастую такие системы описываются СМО с отрицательными заявками, введёнными в [1]. Такие системы исследуются в большом количестве работ (например, в [2]), но ни в одной из них не учитывается обработка повреждённой заявки.

В работе рассматривается функционирование узла беспроводной сети в условиях непреднамеренных помех и преднамеренных атак (спуфинг), который описывается СМО с аномальными заявками. При передаче положительных заявок, поступающих с интенсивностью λ_1 и обрабатываемых с интенсивностью μ_1, на приёмник с интенсивностью λ_2 поступают аномальные заявки, которые обслуживаются с интенсивностью μ_2. Каждая аномальная заявка при поступлении заменяет одну положительную заявку (в случае если она есть в системе). При замене положительная заявка уничтожается, а аномальная встаёт на её место и обрабатывается обслуживающим устройством.

Для исследования негативного воздействия используется описание интенсивности поступления аномальных заявок с помощью кусочно-постоянной функции.

Для получения результатов значений устойчивости СМО с аномальными заявками определён граф состояний СМО. В графе используется двойная индексация, т.е. каждый узел имеет индекс nm, где n – количество аномальных заявок в системе, m – количество положительных заявок в системе.

По построенному графу записана система дифференциальных уравений Колмогорова и с помощью метода матрицы преобразования

вероятностей [3] найдены её решения, что позволяет анализировать исследуемую систему как в стационарном, так и нестационарном режиме.

Далее получены значения ключевых характеристик системы, с помощью которых можно произвести оценку устойчивости СМО: вероятность потерь, пропускная способность, среднее число заявок в системе, вероятность подмены положительных заявок аномальными и показатели устойчивости.

В качестве численного примера работы математической модели была исследована система с размером буфера $N = 3$, значениями интенсивности поступления положительных заявок $\lambda_1 = 250$ Мбит/с и интенсивности обработки положительных заявок $\mu_1 = 1000$ Мбит/с. Интенсивность поступления аномальных заявок $\lambda_2(t)$ описывается кусочно-постоянной функцией (1).

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} 100, t \leq 0.2 \\ 1000, 0.2 < t \leq 0.6 \\ 100, t > 0.6 \end{cases} \tag{1}$$

Интенсивность обработки аномальных заявок изменяется следующим образом: в случае если не происходит атака (значение λ_2 меньше λ_1), значение $\mu_2 = 100$ Мбит/с, так как эти значения означают поступление непреднамеренных помех и такие пакеты обрабатываются со своим значением интенсивности. В момент атаки (всплеск $\lambda_2(t)$) значение $\mu_2 = \mu_1$, так как такие пакеты воспринимаются системой как положительные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gelenbe E., Glynn P., Signum K.* Queues with negative arrivals // Journal of Applied Probability. 1991. V. 28. P. 245–250.
2. *Горбунова А. В., Лебедев А. В.* Система массового обслуживания с двумя входящими потоками, абсолютным приоритетом и стохастическим сбросом // Автоматика и телемеханика, 2020 № 12. С. 111–128.
3. *Барабанова Е. А., Вытовтов К. А.* Аналитический метод исследования поведения системы массового обслуживания при скачкообразно-изменяющихся потоках информации // Физические основы приборостроения. 2021. Т. 10, № 1 (39). С. 36–47.

МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКОСИСТЕМЫ В ПЕРИОД РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАССОВЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ ЖИВЫХ ОРГАНИЗМОВ

К. А. Вытовтов[1], Е. А. Барабанова[1], А. В. Новочадова[1]

[1] *Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: novav@ipu.ru

Эпидемиологические модели представляют собой ключевой аппарат для описания и прогнозирования распространения инфекций [1]. Принцип формирования системы дифференциальных уравнений эпидемиологических моделей идентичен подходу в теории очередей (СМО) [2].

В данной работе представлены модели и алгоритмы оценки устойчивости экосистемы в период распространения массовых заболеваний живых организмов для описанной ранее модели [3]. Исследования в данной области важны, так как изменение состава растительности вследствие массовых заболеваний может сопровождаться изменением защитных, экранирующих, водорегулирующих и почвоукрепляющих свойств территории.

Рассматривается нелинейная модель с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным временем обслуживания, в которой интенсивность выздоровления линейно зависит от вероятности гибели. Введён параметр a – коэффициент чувствительности интенсивности выздоровления к риску гибели.

Для нахождения функционирования экосистемы предлагается аналитическое выражение

$$P(t) = 1 - P_n(t). \tag{1}$$

Устойчивость экосистемы может быть описана следующим образом:

$$R = \frac{\int_0^{t_{\text{исп}}} P(t)\,dt}{\int_0^{t_{\text{исп}}} P_{\max}\,dt}. \tag{2}$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-29-00926, https://rscf.ru/project/25-29-00926/

На основе ранее описанной модели построены графики функционирования системы $P(t)$ (рис. 1) и рассчитана устойчивость системы для каждого случая до времени перехода к новому стационарному режиму ($t_{\text{нср}}$). По результатам расчётов с увеличением параметра чувствительности устойчивость экосистемы взрастает.

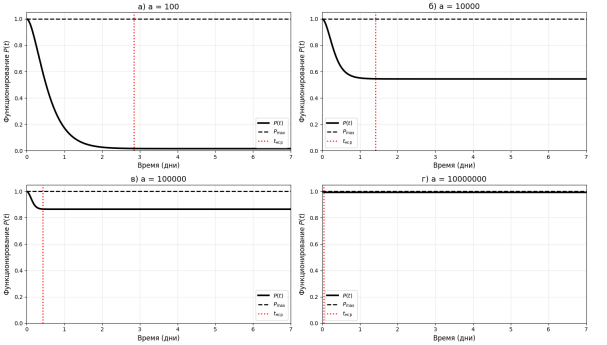


Рис. 1. Графики функционирования экосистемы $P(t)$ при а) $a = 100$ б) $a = 10000$ в) $a = 100000$ г) $a = 10000000$

Таким образом, идеи теории массового обслуживания позволяют глубже анализировать эпидемиологические модели и оценивать устойчивость экосистемы при массовых заболеваниях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леоненко В. Н.* Математическая эпидемиология: учеб.– метод. пособие по выполнению лабораторных работ. СПб.: Университет ИТМО, 2018. 38 с.
2. *Скиданов Р. В., Нестеренко Д. В.* Введение в математическое моделирование : учеб. пособие. Самара: Издательство Самарского университета, 2024. 120 с.
3. *Vytovtov K. A., Novochadova A. V., Semchenko I. V.* Nonlinear Queuing System with Finite Buffer: Transient Analysis // Proceedings of 9th International Conference on Information, Control, and Communication Technologies (ICCT). Gomel: IEEE, 2025. P. 1–3.

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУОТКРЫТОЙ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДЕЛЕНИЕМ И СЛИЯНИЕМ ЗАЯВОК ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО УЧАСТКА

М. Л. Жарков[1], А. Л. Казаков[1], А. А. Лемперт[1]

[1] *Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Россия*

Полуоткрытые сети массового обслуживания (ПСеМО) обладают гибридной структурой – заявки поступают из внешнего источника, но общее их число в системе фиксировано, либо новые заявки не поступают, если система заполнена. Благодаря своей гибкости и универсальности подобные модели широко применяются в области телекоммуникационных и компьютерных сетей [1], а также для описания работы производственных, складских и транспортных систем [2, 3].

В ходе работ над научным проектом «Фундаментальные исследования Байкальской природной территории на основе системы взаимосвязанных базовых методов, моделей, нейронных сетей и цифровой платформы экологического мониторинга окружающей среды» авторами был рассмотрен один из наиболее проблемных сегментов Транссибирской магистрали – горноперевальный участок от станции Гончарово до станции Слюдянка-1, который расположен вблизи Байкала. Здесь к грузовым поездам для следования в гору прикрепляют дополнительные локомотивы-толкачи, число которых фиксировано. Они имеют кольцевой маршрут на участке, что существенно усложняет технологию работы системы и приводит к необходимости использования при моделировании особой разновидности ПСеМО – с делением и слиянием заявок [2]. При этом в ней предусмотрено два типа заявок – внешние и внутренние. Заявки первого типа поступают из внешнего источника и могут покинуть сеть после обслуживания, заявки второго типа – циркулируют внутри системы, их число не меняется.

В модели имеется четыре типа узлов: $*/G/1/0$ описывает движение поездов по путям между станциями; $*/M/n/0$ – работа главных

Работа выполнена в рамках гранта № 075-15-2024-533 Минобрнауки РФ на выполнение крупного научного проекта по приоритетным направлениям научно-технологического развития (№ гос. рег. 124052100088-3).

путей на станциях; СМО-соединитель (интегратор) – $*/G^Y/1/m$ – операции подстановки толкача к поезду и объединения толкачей в группы для быстрого их оборота, Y – размер соединяемой группы заявок; СМО-делитель (дивайдер) – $*/G/1/m$ – операции разъединения толкача и поезда, а также групп толкачей.

Общая схема модели представлена на рис. 1: малые и большие круги обозначают одноканальные и многоканальные СМО; треугольники – интеграторы; ромбы – дивайдеры; X – количество заявок, получаемых при разделении; белые и черные стрелки – маршруты транзитных поездов, синие и красные – грузовых поездов с подталкиванием, оранжевые – групп толкачей.

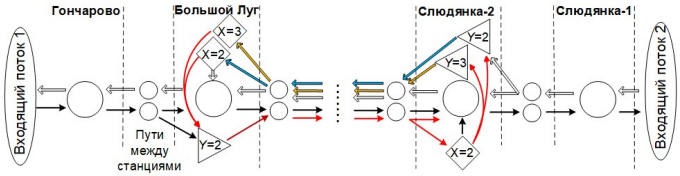


Рис. 1. Общая схема ПСеМО

Проведено численное исследование разработанной модели, по результатам которого установлено следующее. Для штатной работы участка с учетом возможных поломок толкачей требуется задействовать как минимум 30 единиц. Можно увеличить поездопоток с 123 до 136 пар поездов в сутки, т.е. на 12%, за счет lj,fdktybz количества толкачей. Для дальнейшего роста поездопотока потребуется расширение инфраструктурных возможностей станции Слюдянка-2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишневский В. М.* Теоретические основы построения компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003. 512 с.
2. *Roy D., van Ommeren J. K., de Koster R., Gharehgozli A.* Modeling landside container terminal queues: Exact analysis and approximations // Transportation Research Part B: Methodological. 2022. Vol. 162. P. 73–102.
3. *Bychkov I., Kazakov A., Lempert A., Zharkov M.* Modeling and Numerical Analysis of the Severobaikalsk Section of the Baikal–Amur Mainline Considering Environmental Points // Sustainability. 2025. Vol. 17. P. 392.

АНАЛИЗ СКВОЗНОЙ ЗАДЕРЖКИ В СЕТЯХ ИНТЕГРИРОВАННОГО ДОСТУПА И ТРАНЗИТА

А. Д. Паращенко[1]

[1] *Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: parashchenko-ad@rudn.ru

Технология интегрированного доступа и транзита (IAB) в сетях 5G [1] позволяет создавать гибкие многошаговые сети, однако транзиты и конфликты каналов приводят к дополнительным задержкам, что критически важно для услуг, чувствительных к задержкам [2]. В работах [3, 4] анализируются средние значения задержки, но для гарантии качества обслуживания необходима оптимизация квантили задержек на маршруте сети.

В докладе рассматривается сеть IAB с древовидной топологией, включающая донорский узел, ретрансляционные базовые станции и абонентские устройства. Сеть функционирует в дуплексном режиме. Обозначим $\mathcal{E}$ — множество каналов, $\mathcal{P}$ – множество путей – от донора до абонентских устройств (АУ), Λ_p — интенсивность поступления пакетов на p-путь, $\lambda_e = \sum_{p:e\in\mathcal{E}_p} \Lambda_p$ — интенсивность поступления на e-канал, q_e — доля времени активности e-канала, $\mu_e = C_e q_e$ — интенсивность обслуживания на e-канале, где C_e — скорость передачи.

Каждый канал моделируется как система M|M|1. Случайная величина сквозной задержки D_p на p-пути представляет собой сумму независимых экспоненциально распределенных с.в. задержки на каналах $e \in \mathcal{E}_p$. Поэтому с.в. D_p имеет распределение Эрланга, являющееся частным случаем PH-распределения, т.е.

$$F_{D_p}(x) = 1 - \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} e^{\mathbf{M}_p x}\mathbf{1}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$, а матрица $\mathbf{M}_p$ имеет вид

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} -(\mu_1-\lambda_1) & \mu_1-\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(\mu_2-\lambda_2) & \mu_2-\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(\mu_{|\mathcal{E}_p|}-\lambda_{|\mathcal{E}_p|}) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Сформулирована и решена задача оптимизации средней задержки в сети по долям активности каналов:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\left(\sum_{p\in\mathcal{P}}\Lambda_p\right)}\sum_{p\in\mathcal{P}}\Lambda_p\sum_{e\in\mathcal{E}}\frac{1}{\mu_e-\lambda_e}\ \to\ \min_{\mathbf{q}}\\ &R_1:\ 0\le q_e\le 1,\quad \forall e\in\mathcal{E},\\ &R_2:\ \lambda_e\le\mu_e,\quad \forall e\in\mathcal{E},\\ &R_3:\ \mathbf{F}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\le\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Для решения задачи 3 реализован алгоритм метода золотого сечения. После нахождения значений q_e, минимизирующих среднюю сквозную задержку, вычисляется квантиль задержки уровня α. Полученные результаты подтверждают, что регулирование долей активности каналов обеспечивает выполнение требований к своевременной доставке данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *3GPP* NR; NR and NG-RAN Overall Description, Stage 2 // Technical Specification (TS) 38.300, 3GPP, 07 2020. Version 16.2.0.
2. *Moltchanov D., Begishev V., Samuylov K., Kucheryavy Y.* 5G/6G Networks: Architecture, Technologies, Methods of Analysis and Calculation Moscow: PFUR, 2022.
3. *Nikolaev D., Gaidamaka Y.* Leaf Node Polling Model Analysis in an Integrated Access and Backhaul Network // International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling. Springer, 2023. P. 106–117.
4. *Khayrov E., Koucheryavy Y.* Packet Level Performance of 5G NR System Under Blockage and Micromobility Impairments // IEEE Access. Vol. 11. 2023. P. 90383–90395.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНОГО «ON / OFF» ПРОЦЕССА С MMPP УПРАВЛЯЮЩИМ ПОТОКОМ

А. С. Иванова[1]

[1] *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Автор, ответственный за переписку: alenkaivas6@gmail.com

Рассмотрим модель одномерного «On/Off» процесса с MMPP управляющим потоком, который определяется генератором $\mathbf{Q} = [q_{\nu n}]$ инфинитезимальных характеристик управляющей потоком цепи Маркова $m(t) = 0, 1, \ldots, M$ с непрерывным временем и диагональной матрицей $\mathbf{\Lambda}$ условных интенсивностей λ_m наступления событий в m-м состоянии MMPP, когда его управляющая цепь $m(t)$ принимает значение $m = 1, 2, \ldots$. На процессоре запущено одно ядро, которое может находиться или в состоянии «On» (активная фаза), или в состоянии «Off» (пассивная фаза). Обозначим процесс $\varphi(t)$ – состояние ядра в момент времени t, который принимает значения: 0 – ядро находится в состоянии «Off», 1 – ядро находится в состоянии «On». Ядро запускается на процессоре по следующей схеме. Пусть в управляющем MMPP потоке наступает событие. Если ядро находится в состоянии «Off» ($\varphi(t) = 0$), то при поступлении сигнала оно переходит в состояние «On» с вероятностью r, где находится случайное время, которое определяется экспоненциальной функцией распределения с параметром μ, и с вероятностью $(1 - r)$ остается в пассивной фазе «Off». Если при поступлении сигнала управления ядро находится в состоянии «On» ($\varphi(t) = 1$), то оно не реагирует на сигнал, сохраняет текущее состояние «On», время пребывание которого определяется экспоненциальной функцией распределения с параметром μ.

Обозначим $P_0(t) = P\{\varphi(t) = 0\}$ – вероятность того, что процесс $\varphi(t)$ находится в пассивном состоянии, $P_1(t) = P\{\varphi(t) = 1\}$ – вероятность того, что процесс $\varphi(t)$ находится в активном состоянии. Ставится задача нахождения распределения вероятностей $P_0(t)$ и $P_1(t)$ состояний одномерного «On/Off» процесса. Для составления системы дифференциальных уравнений Колмогорова для искомого распределения необходимо учитывать состояние управляющего MMPP потока (свойство марковских процессов), поэтому введем следующие двумерные вероятности $P_0(m, t) = P\{\varphi(t) = 0, m(t) = m\}$ того, что одномер-

ный «On/Off» процесс с MMPP управляющим потоком находится в пассивной фазе, а управляющий поток – в состоянии m; и вероятность $P_1(m,t) = P\{\varphi(t) = 1, m(t) = m\}$ того, что одномерный «On/Off» процесс с MMPP управляющим потоком находится в активной фазе, а управляющий поток в состоянии m.

В результате исследования была выписана система дифференциальных уравнений Колмогорова для заданного распределения, решение которой в стационарном виде имеет вид

$$\pi_0(\mathbf{Q} - r\mathbf{\Lambda}) + \pi_1\mu = 0, \tag{1}$$

$$\pi_0\mathbf{\Lambda}r + \pi_1(\mathbf{Q} - \mu\mathbf{I}) = 0, \tag{2}$$

при условии нормировки $\pi_0 + \pi_1 = \pi$, где вектор π является вектором состояний MMPP, который определяется системой

$$\pi\mathbf{Q} = 0, \;\; \pi\mathbf{e} = 1. \tag{3}$$

Полученное стационарное распределение $\{\pi_0, \pi_1\}$ полностью определяет распределение вероятностей состояний ядра с экспоненциальной активной фазой, поведение которого управляется MMPP.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Diamond J., Burtscher M., McCalpin J. D., Kim B. D., Keckler S. W., Browne J. C.* Evaluation and optimization of multicore performance bottlenecks in supercomputing applications // IEEE International Symposium on Performance Analysis of Systems and Software. Austin, TX, USA, 2011. P. 32–43.
2. *Kuczura A.* The interrupted Poisson process as an overflow process // In The Bell System Technical Journal. 1973. Vol. 52 № 3. P. 437–448.
3. *Marvi M., Aijaz A., Khurram M.* On the use of on/off traffic models for Spatio-temporal analysis of wireless networks // IEEE Communications Letters. 2019. Vol. 23 (7). P. 1219–1222.
4. *Adas A.* Traffic models in broadband networks // IEEE communications Magazine. 1997. Vol. 35 (7). P. 82–89.
5. *Gomes M.* Stochastic Processes in Telecommunication Traffic // Mathematical Techniques and Problems in Telecommunications. 2004. Vol. 24. P. 7–32.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОРБИТЫ ОЖИДАНИЯ В RQ-СИСТЕМЕ $M/G/1$ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ И ВОССТАНОВЛЕНИЕМ ИСКАЖЕННЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК

Я. Е. Измайлова[1], З. Канылбай[1]

[1] *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Автор, ответственный за переписку: zkanylbay.rs@mail.ru

В данной работе рассматриваем RQ-систему [1] $M/G/1$. Основной особенностью данной системы является процесс «искажения» заявок, а также их последующее восстановление. Представим подробное описание модели:

Входящий поток. На вход поступают два простейших потока заявок: «положительных» с интенсивностью λ и «отрицательных» с интенсивностью γ. *Время обслуживания.* Время обслуживания заявок имеет произвольное распределение $B(z)$ с конечным математическим ожиданием и дисперсией. Обслуживаются только положительные заявки, а отрицательные мгновенно покидают прибор, если застали его свободным. *Искажение.* Текущая обслуживаемая положительная заявка прерывает обслуживание и переходит на орбиту восстановления, если поступила отрицательная заявка. *Орбита ожидания.* Все (поступившие, восстановленные и ожидавшие) положительные заявки, заставшие прибор занятым, переходят на орбиту ожидания. Заявки на орбите независимо совершают экспоненциально распределенную задержку с параметром σ_1 и совершают попытку встать на обслуживание. *Орбита восстановления.* Искаженные положительные заявки находятся на орбите восстановления. Время восстановления имеет экспоненциальное распределение с параметром σ_2. После восстановления уже положительная заявка совершает попытку встать на обслуживание. Также орбиты имеют неограниченную емкость, и заявка остается в системе, пока не получит обслуживание.

Математическая модель. Пусть $i(t)$ и $n(t)$ – число заявок на орбите ожидания и восстановления соответственно, а $k(t)$ – состояние

обслуживающего прибора.

$$k(t) = \begin{cases} 0, \text{ прибор свободен} \\ 1, \text{ прибор занят} \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} P(k(t) = 0, i(t) = i, n(t) = n) = P_0(i, n, t), \\ P(k(t) = 1, i(t) = i, n(t) = n, z(t) < z) = P_0(i, n, z, t). \end{aligned} \tag{2}$$

Методом асимптотического анализа [2] первого порядка получили производящую функцию $G(x) = G_0(x) + G_1(x)$ числа заявок на орбите ожидания. Асимптотическим условием выступает длительное время восстановления $\sigma_2 \to 0$.

$$\begin{aligned} G_0(x) &= \left(1 + \frac{\varkappa_1 + \lambda}{\gamma}\left(B^*(\gamma) - 1\right)\right) \cdot \\ &\cdot exp\left\{\frac{\varkappa_1 + \lambda}{\sigma_1}\int_x^1 \frac{1 - B^*\left((1-u)(\varkappa_1+\lambda)+\gamma\right)}{u - \frac{\gamma}{\varkappa_1+\lambda} - B^*\left((1-u)(\varkappa_1+\lambda)+\gamma\right)}du\right\}, \\ G_1(x) &= \frac{(\varkappa_1 + \lambda)\left(1 - B^*((1-x)\left(\varkappa_1+\lambda\right)+\gamma)\right)}{\gamma + (\varkappa_1+\lambda)\left(B^*\left((1-x)(\varkappa_1+\lambda)+\gamma\right) - x\right)}G_0(x), \end{aligned}$$

где

$$\varkappa_1 = \frac{\lambda}{B^*(\gamma)} - \lambda, \quad B^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}dB(t). \tag{3}$$

Заключение. Была получена производящая функция числа заявок на орбите ожидания. В дальнейшем будет получена характеристическая функция числа заявок на орбите восстановления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Измайлова Я. Е., Назаров А. А., Фёдорова Е. А.* Методы исследования систем массового обслуживания с повторными вызовами: учеб. пособие. Томск: Издательство Томского государственного университета, 2025. 92 с.
2. *Назаров А. А., Моисеева С. П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ДЛЯ SIR-МОДЕЛЕЙ

И. Ф. Нетесов[1]

[1] *Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия*
Автор, ответственный за переписку: netesovivan2005@gmail.com

В 1927 г. шотландские учёные Уильям Кермак и Андерсон Маккендрик предложили модель распространения инфекционных заболеваний, в которой популяция делится на три группы: восприимчивые (Susceptible), инфицированные (Infected) и выздоровевшие с иммунитетом (Recovered). В упрощённом виде эта модель описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, получившей в научной литературе название SIR [1]. Модель SIR и её модификации (SIRS, SEIR и др.) стали основой для математического описания множества эпидемий [2]. В 50-х г. прошлого столетия наряду с детерминированными моделями начинается активное исследование вероятностных моделей, которые позволяют заложить в описание эпидемического процесса случайность — непредсказуемость контактов, разброс в сроках заражения и выздоровления. Целью работы является исследование стохастических DTMC SIR-моделей эпидемии, основанной на марковских цепях с дискретным временем (DTMC — Discrete Time Markov Chain) [3, 4].

Пусть $S_t, I_t, R_t \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ обозначают дискретные случайные величины, представляющие собой число восприимчивых, инфицированных и иммунных индивидов в момент времени t соответственно, а N — размер популяции. Пусть время дискретизировано: $t = 0, 1, 2, \ldots$, где каждый шаг соответствует фиксированному интервалу (например, одному дню). Состояние системы в момент t задаётся вектором (S_t, I_t, R_t), причём $S_t + I_t + R_t = N$ для всех t. Поскольку $R_t = N - S_t - I_t$, то DTMC SIR-модель можно представить как двумерный процесс $(S_t, I_t)_{t=0}^{\infty}$ двух независимых случайных величин S_t и I_t с совместной функцией вероятностей $p(s, i)(t) = \mathbf{P}(S_t = s, I_t = i)$. Этот двумерный процесс удовлетворяет свойству Маркова и является однородным по времени [3]. Вероятности переходов могут быть определены на основе предположений, сформулированных в детерминированной формулировке SIR [1, 3]. Обозначим через β вероятность передачи инфекции при контакте между восприимчивым и инфицирован-

ным за один временной шаг, а через γ — вероятность того, что инфицированный индивидуум выздоровеет за один шаг. За малый шаг Δt возможны три события: новое заражение: $(s,i) \to (s-1, i+1)$ с вероятностью $\frac{\beta si}{N}\Delta t$; выздоровление $(s,i) \to (s, i-1)$ с вероятностью $\gamma i \Delta t$; ничего не происходит: $(s,i) \to (s,i)$ с вероятностью $1 - \left(\frac{\beta si}{N} + \gamma i\right)\Delta t$. Таким образом, переходные вероятности примут вид

$$p_{(s,i)(k,j)} = \begin{cases} \frac{\beta si}{N}\Delta t, & (k,j) = (s-1, i+1),\ s \neq 0, i \neq N, \\ \gamma i \Delta t, & (k,j) = (s, i-1),\ i \neq 0, \\ 1 - \left(\frac{\beta si}{N} + \gamma i\right)\Delta t, & (k,j) = (s,i), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пространство состояний для DTMC SIR-модели упорядочивается следующим образом: сначала выписываются все состояния с $i = 0$ (поглощающие), затем с $i = 1$ и т.д. Число состояний $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$. Уравнения Колмогорова – Чепмена для DTMC SIR-моделей эпидемии записываются в разностной форме [3, 4]. На практике из-за большего размера пространства состояний применяется численное моделирование.

Разработана программа для численного моделирования и сопоставительного анализа детерминистической SIR-модели и её дискретной стохастической версии (DTMC SIR). На его основе изучено влияние начального числа инфицированных, базового репродуктивного числа и размера популяции на длительность эпидемии и её итоговый масштаб.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kermack W. O., McKendrick A. G.* A contribution to the mathematical theory of epidemics Proceedings of the Royal Statistical Society. London, 1927. P. 700–721.
2. *Tang L., Zhou Y., Wang L., Purkayastha S., Zhang L., He J., Wang F., Song P. X.-K.* A Review of Multi-Compartment Infectious Disease Models International Statistical Review. 2020. P. 462—513.
3. *Allen L. J. S.* An introduction to stochastic epidemic models. Mathematical epidemiology, pages, 2008. P. 81—130.
4. *Isaac D. A.* Markov chains models for epidemics // A Thesis Submitted to the College of Graduate and Postdoctoral Studies. 2024.

ПРОГРАММНЫЙ ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ ПОДБОРА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ КОРРЕЛИРОВАННОГО ПОТОКА ПО РЕАЛЬНЫМ ДАННЫМ

И. Л. Лапатин[1], Н. А. Луценко[1]

[1] *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Автор, ответственный за переписку: itname@bk.ru

В работе решается задача подбора параметров MAP-потока по имеющейся реальной трассе или при наличии информации только о значениях некоторых числовых характеристик длин интервалов в потоке. В общем случае такая задача не имеет единственного налучшего решения, поэтому важно найти такой набор параметров, который бы удовлетворял пользователя по качеству аппроксимаци исходного потока.

Мы будем полагать, что известны или вычислены по реальной трассе коэффициент вариации (cv) длин интервалов и коэффициент корреляции ($corr$) соседних длин интервалов. Также, при наличии некоторой реализации MAP-потока (выборки), можем учитывать коэффициент асимметрии ($skew$) и коэффициент эксцесса ($kurt$).

Задача сводится к тому, чтобы найти такие матрицы $\mathbf{Q}$, $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{D}$ [1], определяющие MAP-поток, чтобы вычисленные по ним теоретические числовые характеристики $(cv, corr, skew, kurt)$ длин интервалов [2] были близки к заданным.

В качестве меры близости используется среднеквадратичная функция ошибки [3] между целевыми значениями x_T характеристик потока и подобранными x_E.

Чтобы данная функция подходила под задачу, необходимо выполнить нормализацию всех используемых числовых характеристик, чтобы привести их к единому масштабу. Дополнительно для каждой характеристики можно задавать весовой коэффициент, позволяя регулировать значимость той или иной характеристики:

$$\text{loss} = \frac{1}{(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)} \times$$

$$\times\left(w_1\left(\frac{cv_E - cv_T}{cv_T}\right)^2 + w_2\left(\frac{corr_E - corr_T}{1+|corr_T|}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + w_3\left(\frac{skew_E - skew_T}{skew_T}\right)^2 + w_4\left(\frac{kurt_E - kurt_T}{kurt_T}\right)^2\right).$$

Это функция ошибки в общем виде. В программе, в зависимости от выбранного количества числовых характеристик, функция ошибки может изменяться. Обязательными характеристиками являются коэффициенты корреляции и вариации длин интервалов. Коэффициенты асимметрии и эксцесса используются на усмотрение пользователя. Также пользователь может настраивать весовые коэффициенты или оставлять значения по умолчанию (все равны 1).

Подбор параметров MAP-потока осуществляется с помощью случайного поиска и методов градиентного спуска. В случае если подбор осуществлялся по числовым характеристикам, посчитанным по реальной трассе, то программа позволяет сделать оценку качества подобранного потока в виде расстояния Колмогорова для сравнения распределений числа событий за некоторое выбранное время t. Пользователь программы сам решает, устраивает его получившийся результат или нет.

В качестве дополнительного функционала пользователь может сохранить получившийся MAP-поток и использовать его для генерации выборки. То есть запустить имитационную модель, которая моделирует поведение MAP-потока. При необходимости пользователь может сравнить две выборки через расстояние Колмогорова для распределения числа событий за время t. Время t можно задавать вручную.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гарайшина И. Р., Моисеева С. П., Назаров А. А.* Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания. Томск: Издательство НТЛ, 2010. 204 с.
2. *Вишневский В. М., Дудин А. Н., Клименок В. И.* Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М.: Рекламно-издательский центр «ТЕХНОСФЕРА», 2018. 564 с.
3. `https://www.geeksforgeeks.org/mean-squared-error/` — GeeksForGeeks. 2025.

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО УЗЛА НА БАЗЕ ЗАКРЫТОЙ ДВУХФАЗНОЙ СМО В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОГО ЧИСЛА ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ И КОНКУРЕНЦИИ ЗА РЕСУРС

К. Г. Малков[1], И. Л. Лапатин[1]

[1] *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Автор, ответственный за переписку: ssstilalive@gmail.com

Математическая модель. Вычислительный узел рассматривается как замкнутая двухфазная система массового обслуживания с конечным числом пользователей N [1]. Время пребывания пользователя в *пассивной фазе* распределено экспоненциально с параметром μ_0. В *активной фазе* заявка обрабатывается на узле. Время обработки является случайной величиной и зависит от объема работы, которую нужно выполнить, и от скорости выполнения. Объем работы для каждой заявки имеет экспоненциальное рапределение, а скорость выполнения не является постоянной и зависит от текущей нагрузки на узел. Нагрузка на узел определяется суммарной потребностью в ресурсе всеми активными заявками $R = \sum_{i \in A} r_i$, где A — множество активных заявок. Требуемый одной заявкой ресурс r_i является случайной величиной, что отличает данную модель от рассматриваемых ранее.

Система распределяет доступную вычислительную мощность между активными заявками, при этом рост суммарной нагрузки R приводит к снижению эффективной скорости обслуживания каждой из них:

$$\mu_{\text{eff}}(R) = \mu_{\text{base}} \cdot f\big(R\big), \tag{1}$$

где μ_{base} — теоретически максимально возможная скорость обработки при отсутствии конкуренции за ресурс, а $f(R)$ – функция деградации.

Имитационная модель. Реализован дискретно-событийный подход на языке C++17. Состояние системы изменяется только в моменты наступления событий двух типов: активация пользователя (переход в активную фазу) и завершение обслуживания заявки (деактивация). При каждом изменении суммарной нагрузки R (и, соответ-

ственно, эффективной скорости μ_{eff}) выполняется пересчет остаточного времени обслуживания для всех активных заявок.

Численные эксперименты. Целью проведения численного эксперимента является оценка чувствительности распределения числа заявок на активной фазе от закона распределения объема требуемого ресурса r_i.Число пользователей $N = 10$, интенсивность пассивной фазы $\mu_0 = 0.5$ и базовой скорости обслуживания $\mu_{\text{base}} = 1.0$. Для примера использовалась функция деградации $f(R) = 1/\sqrt{R+1}$. Рассмотрено три вараинта распределения требуемого объема ресурса r при фиксированном среднем $E[r] = 1.0$: детерминированное, равномерное ($[0.5; 1.5]$) и экспоненциальное ($\lambda = 1$). Для количественной оценки близости эмпирических распределений числа активных заявок было использовано расстояние Колмогорова – Смирнова.

При попарном сравнении результатов разных распределений требуемого объема ресурса r получили, что расстояния Колмогорова – Смирнова D не превышают 0,015.

Заключение. Проведенный с помощью реализованной имитационной модели эксперимент показал, что распределение числа активных заявок в замкнутой системе массового обслуживания слабо зависит от закона распределения объема требуемого ресурса каждой активной заявкой и определяется в основном его средним значением. Заметим, что эксперименты проводились для распределений с небольшим коэффициентом вариации (не более 1). На практике это означает, что поведение системы при случайном объеме требуемого ресурса можно аппроксимировать результатами для детерминированного объема требуемого ресурса, которые получены аналитически, например здесь [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башарин Г. П., Бочаров П. П., Коган Я. А.* Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета. М.: Наука, 1989. 336 с.
2. *Zhu Y., Li Q.* Analysis of a two-stage cycle queue with state-dependent vacation policy // Optimization. 1996. Vol. 36, No. 1. P. 75–91.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОТРЕБЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО УЗЛА ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ЧИСЛЕ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ

Д. Д. Жамсап[1], И. Л. Лапатин[1]

[1] *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Автор, ответственный за переписку: mr.hibari2@gmail.com

Математическая модель. Вычислительный узел моделируется в виде закрытой двухфазной системы массового обслуживания (СМО) с конечным числом пользователем N [1]. Система описывается марковским процессом $k(t)$ – число заявок на активной фазе. Интенсивности переходов определяются: μ_{01} – интенсивность выхода из пассивной фазы, $\mu_{10}(k)$ – интенсивность завершения обслуживания на активной фазе.

Автоскейлинг и деградация обслуживания. Для управления вычислительными ресурсами используется механизм динамического масштабирования (автоскейлинг). Количество активных ресурсов $m(k)$ задается ступенчатой функцией:

$$m(k) = \begin{cases} M_1, & k \le K_1, \\ M_2, & K_1 < k \le K_2, \\ M_3, & k > K_2. \end{cases}$$

Снижение интенсивности обслуживания при росте нагрузки учитывается с помощью функции деградации $f(k)$:

$$\mu_{10}(k) = f(k)\, m(k)\, \mu_{10}.$$

Оптимизационная задача. Целью является минимизация среднего энергопотребления вычислительного узла за период функционирования при сохранении требуемого уровня производительности. Поскольку энергия определяется как интеграл мощности по времени, в стационарном режиме задача сводится к минимизации средней потребляемой мощности W системы.

$$\mathbb{M}[W] = \sum_{k=1}^{N} p_k\, k\, \mathbb{M}[E] \to \min,$$

где p_k — стационарная вероятность наличия k активных заявок, $\mathbb{M}[E]$ – среднее потребление мощности одной заявки. Оптимизация производится по значениям параметров функции автоскейлинга. Дополнительно задается ограничение $\mu_{10}(k) \geq \mu_{min}$. Задача решается методом дискретного покоординатного спуска [2].

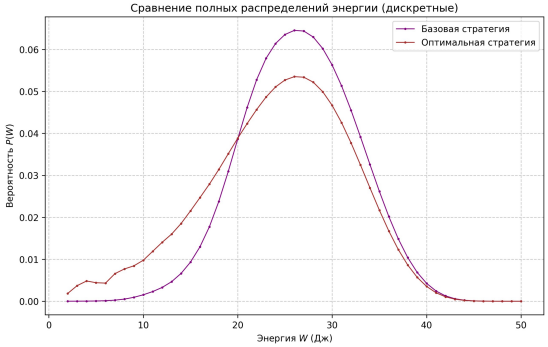


Рис. 1. Распределение суммарного потребления мощности для базовой и оптимальной стратегий

Результаты. Численный анализ (рис. 1) выполнен при $N = 10$, $\mu_{10} = 0.8$, $\mu_{01} = 1.2$. Функция деградации задана как $f(k) = 1/\sqrt{1+k}$. Базовые параметры функции автоскейлинга $K_1 = 4$, $K_2 = 7$, $M_1 = 1$, $M_2 = 3$, $M_3 = 6$. Минимальная пропускная способность $\mu_{min} = 0.64$.

Оптимизация порогов автоскейлинга уменьшает вероятность состояний с высоким потреблением мощности. Среднее энергопотребление системы уменьшилось с $\bar{W}_{base} = 26.50$ до $\bar{W}_{opt} = 24.03$, что соответствует снижению на 9,31%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. пер. с англ. И. И. Грушко; ред. В. И. Нейман. М. Машиностроение, 1979. 432 с.
2. *Калиткин Н. Н.* Численные методы: учеб. пособие. 2-е изд., испр. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
3. *Назаров А. А., Федорова Е. А., Лизюра О. Д., Паулъ С. В., Моисеев А. Н.* Двухфазная СМО с неограниченным числом приборов и деградацией обслуживания // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2022) : материалы XXI Междунар. конф. имени А. Ф. Терпугова, 2023. С. 18–23.

БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА С ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ЧИСЛА ЗАНЯТЫХ ПРИБОРОВ В СИСТЕМЕ

Б. Б. Бабаева[1], А. А. Назаров[1]

[1] *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Автор, ответственный за переписку: basti.babaeva@yandex.ru

В данной работе рассматривается система массового обслуживания с интенсивностью входящего потока, зависящей от числа занятых приборов [1]. Система имеет неограниченное число приборов с случайным временем обслуживания, имеющее экспоненциальное распределение с параметром μ. Обозначим $i(t)$ — число занятых приборов в момент времени t, $\lambda(x)$ - функция непрерывного аргумента x. Введем $\frac{i}{T}$ – дискретный аргумент, где T (дополнительный параметр) в теоретических исследованиях будет задаваться как $T \to \infty$, однако в допредельных равенствах будем задавать его конечным числом. Подставим этот аргумент вместо x, а интенсивность входящего потока определим в виде $T\lambda(\frac{i}{T})$ – высокая интенсивность входящего потока.

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P_i(t)}{\partial t} = T\lambda\left(\frac{i-1}{T}\right)P_{i-1}(t) - \left(T\lambda\left(\frac{i}{T}\right) + i\mu\right)P_i(t) + (i+1)\mu P_{i+1}(t).$$

Далее было составлено уравнение в стационарном режиме и выполнен асимптотически-гауссовский анализ. Была построена апроксимация дискретного распределения вероятностей числа занятых приборов в виде бимодального распределения. Вычислено расстояние Колмогорова между предлагаемой аппроксимацией и допредельным распределением вероятностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чегодаева Е. Г., Моисеева С. П., Полин Е. П., Меликов А. З.* Исследование числа повторных обращений в системе M(i)|M|∞ с обратной связью. //Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2022) : материалы XXI Междунар. конф. имени А. Ф. Терпугова, 2023. С. 187–192.

О ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕКОМЕНДАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ B2B-ТОРГОВЛИ

А. В. Мухин[1], Д. В. Семенова[1]

[1] *Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия*
Автор, ответственный за переписку: snake.02@inbox.ru

В B2B-торговле торговые представители формируют заказы для клиентов, ориентируясь на личный опыт, что приводит к упущенным продажам и переизбытку неликвидных позиций. Целью исследования является создание комплекса моделей и программного обеспечения, реализующего функционал рекомендательной системы для ГК Ярошенко. Система должна обеспечивать автоматическое формирование персонализированного списка товаров с учётом истории заказов, рыночных трендов, акций и региональных особенностей. Решение должно работать в реальном времени, выдавать упорядоченный список из 10–15 позиций и учитывать товарные ограничения (остатки, сроки годности).

Рассмотрены основные подходы к построению рекомендательных систем [1, 2, 3, 4] и проведён анализ их актуальности в B2B-торговле. Для моделирования взаимодействия между рекомендательным агентом и торговой точкой выбран марковский процесс принятия решений (MDP) [4, 5]. Это обосновано тем, что MDP максимизирует суммарную дисконтированную награду, учитывает динамику спроса и позволяет включать в состояние историю заказов, акции и новинки.

Рассмотрим упрощенный пример. Пусть X — множество товаров: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, где x_1 — «Ленинградское», x_2 — «Бабаевские», x_3 — «Десерт с черемуховой начинкой», x_4 — «Мульти-пряник», x_5 — «Ореховая роща». Процесс моделируется марковским процессом принятия решений с дискретным временем, задаваемым пятеркой $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \gamma)$. Здесь $\mathcal{S}$ — конечное множество состояний, отражающих спрос и историю заказов. Для рассматриваемого примера $S = \{s^{(0)}, s^{(1)}, s^{(2)}\}$, где $s^{(0)}$ — «базовые конфеты», $s^{(1)}$ — «база + десерты», $s^{(2)}$ — «расширенный ассортимент». Далее $\mathcal{A}$ — конечное множество действий агента, каждое из которых соответствует рекомендации определённого товара: $A = \{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}, a^{(5)}\}$, где $a^{(i)}$ – соответствует рекомендации товара x_i. Переходы отражают изменение

спроса и структуры заказов после рекомендации. После выполнения действия a_t торговая точка принимает решение о заказе рекомендованного товара, а агент получает награду $r(s_t, a_t)$, которая выше при покупке приоритетных товаров и ниже при покупке базовых позиций. Агент следует стратегии $\pi : \mathcal{S} \to \mathcal{A}$, выбирая действие в каждом состоянии. Целевая функция — ожидаемая суммарная дисконтированная награда: $V^\pi = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r(s_t, a_t)\right], \quad 0 \leq \gamma < 1$. Задача – поиск стратегии $\pi^*(s_t) = a_t$, максимизирующей V^π.

Таким образом, задача сформулирована как управление марковским процессом, учитывающее динамику предпочтений клиента. Для упрощённого примера построена формальная модель. Результаты позволяют перейти к разработке алгоритмов оптимизации стратегий рекомендаций. Для исследования представленной модели разработана программа имитационного моделирования и проведена серия вычислительных экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *AL-Ghuribi S. M., Noah S. A. M.* A Comprehensive Overview of Recommendation System and Sentiment Analysis // International Journal of Advanced Computer Science and Applications (IJACSA). 2020. Vol. 11.
2. *Zhao X., Zhang L., Xia L., Ding Z., Yin D., Tang J.* Deep Reinforcement Learning for List-wise Recommendations // Proceedings of the 1st Workshop on Deep Reinforcement Learning for Knowledge Discovery (DRL4KDD'19). Anchorage, AK, USA. 2019. P. 1–9.
3. *Kang W.-C., McAuley J.* Self-Attentive Sequential Recommendation // 2018 IEEE International Conference on Data Mining (ICDM). 2018. P. 197–206.
4. *Shani G., Brafman R. I., Heckerman D.* An MDP-based Recommender System // Journal of Machine Learning Research. 2005. Vol. 6. P. 1265–1295.
5. *Sutton R. S., Barto A. G.* Reinforcement Learning: An Introduction. Second edition. Chapter 3. Cambridge, MA: MIT Press, 2018. P. 47–103.

К АНАЛИЗУ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ОБСЛУЖИВАНИЕ ЗАЯВОК

Е. А. Гайдамака[1]

[1] *Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: 1032259375@rudn.ru

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) [1, 2], изображенную на рис. 1, состоящую из накопителя емкости r, обслуживающего прибора и бункера. Назовем заявки, попадающие на прибор из накопителя, – 1-заявки, из бункера – 2-заявки. 1-заявки поступают в накопитель согласно пуассоновскому потоку с интенсивностью λ и обслуживаются за случайное время с функцией распределения $B(x)$ и средним m_B. Обслуживание 1-заявок происходит до того момента, пока накопитель не опустеет либо пока не обслужится ровно L штук 1-заявок. В обоих случаях прибор начинает обслуживание 2-заявки из бункера с ФР $F(x)$. Эту СМО в нотации Башарина–Кендалла будем обозначать М,Б|G, G|1|$\langle r, L\rangle$.

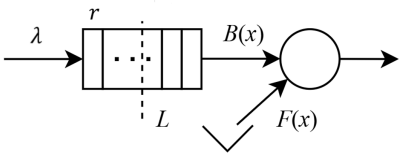


Рис. 1. Схема СМО

Введем случайный процесс (СП) $\gamma(t) = (\eta(t), \xi(t))$, где $\eta(t)$ – число обслуженных 1-заявок с момента выхода из системы последней обслуженной 2-заявки до момента времени t, $\xi(t)$ – число заявок в системе в момент времени t. Последовательность $\{\gamma(t_n)\}$, где t_n – моменты окончания обслуживания любой заявки, образует цепь.

Для пространства состояний $\mathcal{X}^r = \{(L,0)\} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{X}_k^r$ системы конечной емкости r, где $\mathcal{X}_k = \{(l,k) : l = 0,1,\dots,L\}, k = 1,2,\dots$ выписана и численно решена система уравнений равновесия. Найдена связь между распределениями, вложенными по цепи
$q_{lk}^r = \lim\limits_{t\to\infty} P\{(\eta(t) = l) \cap (\xi(t) = k)\},\ l = 0,1,\dots,L,\ k = 0,1,\dots,r$

и по процессу $p^r_{lk} = \lim\limits_{t\to\infty} P\{(\eta(t) = l) \cap (\xi(t) = k)\}$, $l = 0, 1, \ldots, L$, $k = 0, 1, \ldots, r+1$. По полученному стационарному распределению СП вычислены основные вероятностно-временные характеристики системы – вероятность блокировки, вероятность того, что прибор не занят обслуживанием 1-заявки, среднее число заявок в СМО, среднее время пребывания 1-заявки в СМО.

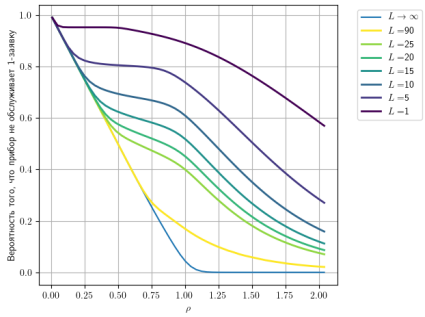


Рис. 2. График зависимости вероятности того, что прибор не обслуживает 1-заявку от нагрузки на СМО

Из графика на рис. 2 видно следующее: вероятность того, что прибор не обслуживает 1-заявку, монотонно убывает. Кривая имеет точку перегиба примерно при ρ, близких к единице. Причем чем больше L, тем ближе точка перегиба к значению $\rho = 1$. Сам перегиб показывает, при каких ρ вступает в силу ограничение L на начало принудительного обслуживания 2-заявки. Это объясняется тем, что прибор не обслуживает 1-заявки в течение некоторого времени, если накопитель пуст или обслужилось L штук 1-заявок. Первое чаще всего возникает при $\rho = \lambda m_B \to 0$, второе – при $\rho \geq 0.5$ в зависимости от значения L.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самуйлов К. Е.* Системы массового обслуживания ограниченной емкости и их приложение к анализу информационно-вычислительных систем : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.05. М., 1984. 102 с.
2. *Климов Г. П.* Системы обслуживания с разделением времени. I // Теория вероятностей и ее применение. 1974. Т. 29, № 3.

ОБ ОЦЕНКЕ ХАРАКТЕРИСТИК SPLIT-MERGE СИСТЕМ С ЗАВИСИМЫМИ ПРИБОРАМИ

А. В. Горбунова[1], А. В. Лебедев[2]

[1] *Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия*

[2] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: avgorbunova@list.ru

Split-merge системы представляют собой модели стохастических систем, в которых происходит разделение поступающих в систему задач (заявок) перед непосредственным поступлением на обработку (обслуживание) на части или фрагменты (рис. 1). Механизм разделения клиентских запросов на части получил широкое распространение, например, на вычислительных платформах с целью повышения производительности обработки больших объемов данных. В работе предлагается метагауссовская модель для оценки характеристик времени обслуживания в split-merge системах с зависимыми временами обслуживания на приборах и, соответственно, характеристик производительности самой системы.

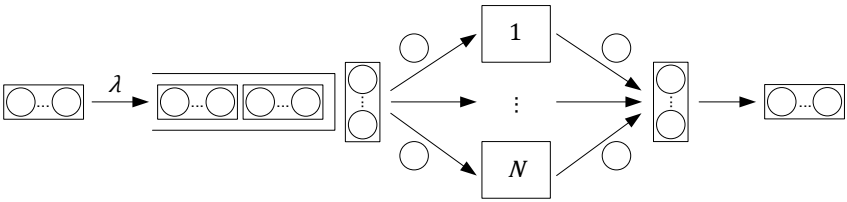


Рис. 1. Схема split-merge системы массового обслуживания

Зависимость времен обслуживания моделируется с помощью различных вариантов копула-функций [1], например, копулы Гумбеля или копулы Спирмена. Однако в общем и целом моделирование посредством копул не всегда позволяет аналитически определить общую функцию распределения времени обслуживания и, соответственно, моменты этой величины, необходимые для оценки качества функционирования системы в целом. Поэтому предлагается метагауссовская модель, которая основывается на сведении произвольного многомер-

ного распределения к многомерному нормальному. Разумеется, при этом делаются некоторые допущения, тем не менее, как показывает практика применения данной модели для моделирования fork-join системы [2] и стохастических процессов различной природы в других областях науки [3, 4], результирующее приближение оказывается довольно качественным.

Метагауссовская модель позволяет получить моменты времени обслуживания η с помощью несложной симуляции случайных времен обслуживания частей заявки для любых частных распределений, например, для случая показательного распределения времени обслуживания на однородных приборах с параметром μ, получаем следующую оценку для случайной величины времени обслуживания всей заявки (максимум из зависимых времен обслуживания ее N фрагментов):

$$\hat{\eta} = -\frac{1}{\mu} \ln\left(1 - \Phi(\sqrt{r}\xi_0 + \sqrt{1-r}\max(\xi_1, ..., \xi_N))\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция стандартного нормального распределения, ξ_i, $i = 0, ..., N$, – независимые нормально распределенные случайные величины, а r — это коэффициент корреляции Пирсона, который вычисляется с помощью коэффициента корреляции Спирмена между исходными зависимыми случайными величинами времен обслуживания фрагментов заявки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев А. В., Горбунова А. В.* Эффекты зависимости времен обслуживания подзаявок в системе массового обслуживания с разделением заявок типа split-merge // Материалы XI Всероссийской научно-практической конференции «Современные проблемы физико-математических наук (СПФМН-2025)». Орёл: ОГУ имени И. С. Тургенева, 2025. С. 230–236.
2. *Gorbunova A. V., Lebedev A. V.* Copulas and Quantiles in Fork-Join Queueing Systems // Advances in Systems Science and Applications. 2024. V. 24, № 1. P. 1–19.
3. *McNeil A. J., Frey R., Embrechts P.* Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools – Revised Edition. Princeton University Press, 2015. 720 p.
4. *Bauer P., Thorpe A., Brunet G.* The quiet revolution of numerical weather prediction // Nature. 2015. V. 525, № 7567. P. 47–55.

ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНОГО РЕЖИМА СМО С НЕТЕРПЕЛИВЫМИ ЗАЯВКАМИ И МАРКОВСКИМ ВХОДНЫМ ПОТОКОМ

А. Г. Дворецкий[1]

[1] *МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва, Россия*
Автор, ответственный за переписку: dvoretsky@sumirea.ru

Исследование переходного режима систем массового обслуживания (СМО) является одним из актуальных направлений в задачах теории массового обслуживания. Применение такого подхода позволяет моделировать поведение информационно-измерительных систем в условиях сбоев, несправностей оборудования, изменения входных параметров, перезагрузки управляющих устройств и других ситуациях, которые сопровождаются изменением состояния системы [1].

В данной работе поставлена задача разработать имитационную модель СМО с марковским входным потоком, нетерпеливыми заявками и конечным буфером размера N. Использование марковского входного потока позволяет учесть неоднородность и коррелированность поступления заявок, что особенно важно при моделировании реальных источников нагрузки, характеризующихся изменением интенсивности в зависимости от состояния системы.

Для построения имитационной модели используется концепция дискретно-событийного моделирования. Для каждого текущего состояния i задаются интенсивности переходов в состояния $j \neq i$, обозначаемые через $q_{ij}(t)$ ($\sum_{j \neq i} q_{ij}(t) = 1$). Время до ближайшего события моделируется по формуле $\Delta t = -\frac{\ln U}{\Lambda_i(t)}$, где U — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[0, 1)$ [2], $\Lambda_i(t)$ — средняя интенсивность поступления заявок. После генерации Δt тип следующего события выбирается случайным образом с вероятностями, пропорциональными интенсивностям $q_{ij}(t)$.

С использованием метода Монте-Карло вычисляются оценки нестационарных вероятностей состояний и характеристики производительности системы, в том числе вероятность потери заявки, вероятность ухода заявки из очереди и среднее число заявок в системе. Результаты моделирования представлены на рис. 1.

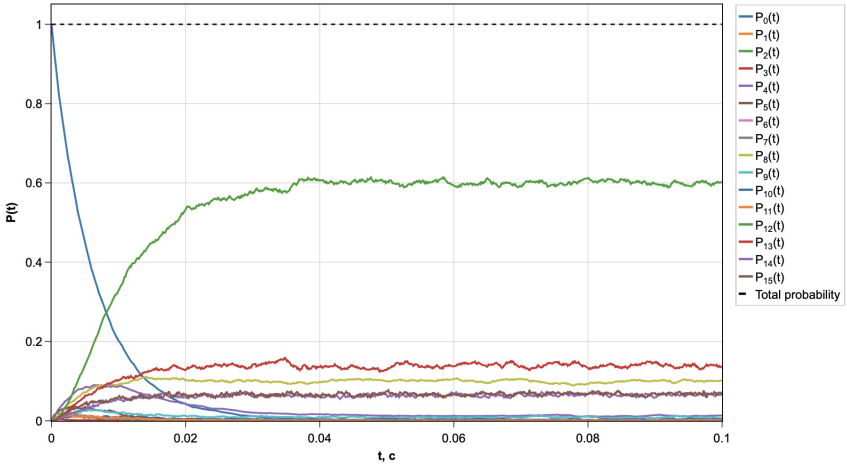


Рис. 1. Нестационарные вероятности состояний СМО

Верификация имитационной модели выполняется путем сопоставления результатов имитационного моделирования с аналитическими зависимостями, полученными в работе [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vishnevsky V., Vytovtov K., Barabanova E., Semenova O.* Analysis of a MAP/M/1/N Queue with Periodic and Non-Periodic Piecewise Constant Input Rate // Mathematics. 2022. Vol. 10. Art. num. 1684.
2. *Зверкина Г. А., Кошелев А. А.* Об имитационном моделировании случайных величин с помощью интенсивности // Управление большими системами: сб. тр. 2021. № 94. С. 33–49.
3. *Barabanova E. A., Dvoretsky A. G.* Transient Behaviar of Queuing System with Correlated Arrival Flows and Impatient Customers // 2025 9th International Conference on Information, Control, and Communication Technologies (ICCT). Gomel, Belarus, 2025. P. 1–3.

СМО С РАЗНОРОДНЫМ ВХОДНЫМ ПОТОКОМ ДЛЯ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ОБЪЕКТА ТРАНСПОРТНОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ

А. Л. Ковалев[1]

[1] *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: al_13@bk.ru

Для оценки производительности и устойчивости объектов транспортной инфраструктуры в условиях нестационарной нагрузки целесообразно использовать нестационарные модели теории массового обслуживания [1, 2, 3]. Это особенно важно для локальных узлов с ограниченной пропускной способностью, где случайный характер входного потока, наличие очередей и потери заявок существенно влияют на режим работы [2, 4]. Цель работы состоит в построении модели СМО с марковским входным потоком, описывающей процесс обслуживания транспортных средств однополосных дорог с трафиком разного приоритета и типа и конечной вместимостью.

Рассматривается регулируемый перекресток, представляющий собой пересечение на одном уровне четырех проезжих частей с ограниченной пропускной способностью. Каждая система дорог описывается как однолинейная система массового обслуживания [2]. Входной поток каждой СМО включает Z классов транспортных средств, разделенных на приоритетные и неприоритетные. Для каждого класса z, $z = \overline{0, Z-1}$ задаются интенсивности поступления $\lambda_{1z}(t)$ и $\lambda_{2z}(t)$. Время обслуживания заявок обоих типов распределено с параметрами $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$. Предполагается, что в момент времени t_0 внешнее воздействие изменяет параметры системы, после чего они изменяются во времени в фазах деградации и восстановления [3].

Пусть N — число мест ожидания. Тогда суммарное число транспортных средств в системе не превышает $N + 1$, а при заполнении новые поступления считаются потерянными. Состояние системы в момент времени t задается множеством

$$\big((x_z, y_z),\ z = 0, \ldots, Z-1\big),$$

где x — число неприоритетных транспортных средств в системе, y — число приоритетных транспортных средств, z — класс транспортного средства.

Переходы между состояниями определяются поступлением заявок различных классов и приоритетов, а также завершением обслуживания. Для вероятностей состояний в нестационарном режиме записывается система уравнений Колмогорова

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) = A(t)\mathbf{P}(t),$$

где $\mathbf{P}(t)$ — вектор вероятностей состояний, $A(t)$ — матрица интенсивностей переходов, определяемая параметрами $\lambda_{1z}(t)$, $\lambda_{2z}(t)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$.

Решение системы позволяет определять вероятности состояний в переходных режимах и на их основе вычислять вероятность потерь, средние длины очередей и пропускную способность по приоритетам, классам транспортных средств и системе в целом. Полученная модель может применяться при исследовании транспортных узлов в условиях нестационарной нагрузки и при разработке мер повышения устойчивости их функционирования. На данном этапе рассматривается однолинейная система, в дальнейшем предполагается переход к многолинейной постановке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zhou Y., Wang J., Hai Y.* Resilience of Transportation Systems: Concepts and Comprehensive Review // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2025. Vol. 20, No. 12. P. 4262–4276.
2. *Жарков М. Л., Петров М. Б.* Применение сетей массового обслуживания для моделирования транспортно-логистических систем различного уровня // Межтерриториальное неравенство: проблема или драйвер развития: материалы VI Междунар. симп. по региональной экономике Екатеринбург: Институт экономики Уральского отделения РАН, 2021. С. 29–37.
3. *Барабанова Е. А., Ковалев А. Л.* Математическая модель анализа устойчивости объекта транспортной инфраструктуры в чрезвычайных ситуациях // VI Международный симпозиум по региональной экономике Информационные процессы. 2026. Т. 26, № 1.
4. *Завалищин Д. С., Тимофеева Г. А.* Исследование математической модели регулируемого перекрестка // Труды института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 108–119.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ ПЕРЕКРЁСТКА С ВЫДЕЛЕННЫМ ПЕШЕХОДНЫМ ПОТОКОМ

Е. В. Кувыкина[1], В. А. Кузнецова[1]

[1] *Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия*
Автор, ответственный за переписку: lerasavotina@gmail.com

В работе четырёхсторонний транспортный перекрёсток рассматривается как система массового обслуживания с ожиданием. Входными потоками являются потоки машин Π_1 и Π_2, а также пешеходный поток Π_3. Особенность рассматриваемого перекрёстка заключается в том, что обслуживание потока Π_3 пешеходов происходит в специальные промежутки времени, в которые запрещается движение транспорта. Потоки $\Pi_j, j = \overline{1,3}$ являются конфликтными и не суммируются. Математическая модель данной системы построена в рамках теории систем обслуживания с переменной структурой [1].

Обслуживающее устройство (ОУ) — это автомат-светофор, который в определённый момент времени может находиться в одном из 8 состояний (сигналов) $\Gamma^{(1)}, \ldots, \Gamma^{(8)}$. Каждый сигнал $\Gamma^{(r)}$ длится фиксированное время $\mathrm{T}_r, r = \overline{1,8}$. Состояния $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(3)}$ — зелёный сигнал в направлении потоков машин Π_1 и Π_2 соответственно. Жёлтые сигналы светофора обозначаются как $\Gamma^{(2s)}, s = \overline{1,4}$. В состояниях $\Gamma^{(5)}$ и $\Gamma^{(7)}$ обслуживается пешеходный поток Π_3. Величина x_3 — очередь по Π_3 в момент окончания $\Gamma^{(2)}$ или $\Gamma^{(4)}$. Процесс переключения сигналов ОУ происходит в соответствии с направленным графом (рис. 1).

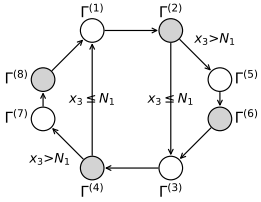


Рис. 1. Граф, визуализирующий смену режимов ОУ

Рассмотрим подробнее только те состояния, переход из которых определяется неоднозначно. Если в момент окончания жёлтого сиг-

нала светофора $\Gamma^{(2)}$ очередь x_3 по пешеходному потоку Π_3 не превышает некоторое критическое значение N_1, то ОУ переходит в $\Gamma^{(3)}$, соответствующее зелёному сигналу в направлении транспортного потока Π_2. В противном случае после $\Gamma^{(2)}$ включается состояние $\Gamma^{(5)}$, в котором обслуживается поток пешеходов Π_3. Аналогично осуществляется переход из $\Gamma^{(4)}$ в состояние $\Gamma^{(1)}$ или в $\Gamma^{(7)}$. Таким образом, поток Π_3 является информативным, так как переключение сигналов светофора зависит от процессов поступления и обслуживания пешеходов.

В работе проведено численное исследование рассмотренного перекрёстка в условиях реального времени и влияния случайных факторов, таких как погода, аварии и др. Построена и программно реализована на языке Python имитационная модель данной системы для случаев входных потоков Пуассона и Бартлетта [2]. В качестве критерия оптимальности параметров управляющего алгоритма выбраны минимальные средние задержки γ^* произвольной заявки в системе.

В работе рассмотрены следующие задачи:

- ◇ Анализ влияния интенсивностей входных потоков и средних длин пачек на минимальные средние задержки γ^* и параметр N_1.
- ◇ Изучение зависимости γ^* от параметров r_j и $g_j, j = \overline{1,3}$ потоков Бартлетта при фиксированной средней длине пачки.

Основные результаты:

- С ростом интенсивностей входных потоков γ^* возрастают, а также увеличивается критическое значение N_1 очереди по Π_3.
- Увеличение средних длин пачек вызывает рост γ^*, но практически не влияет на параметр N_1. Кроме того, γ^* больше зависят от интенсивностей входных потоков, нежели от средних длин пачек.
- Параметр g_j существенно влияет на γ^*, и при $g_j \geq 0.9, j = \overline{1,3}$ наблюдается резкий рост минимальных средних задержек γ^*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кувыкина Е. В.* Общая постановка задачи об алгоритмическом управлении конфликтными потоками заявок при их нелокальном описании // Моделирование динамических систем. Сборник научных трудов Нижегородского филиала института машиноведения РАН, 2007. С. 65–71.
2. *Федоткин М. А.* Неполное описание потоков неоднородных требований // Теория массового обслуживания. М.: МГУ. ВНИИСИ, 1981. С. 113–118.

СМО С ГРУППОВЫМ МАРКОВСКИМ ВХОДНЫМ ПОТОКОМ ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ СЕРВЕРА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ КИБЕРАТАК

К. А. Вытовтов[1], С. Э. Казаков[1]

[1] *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: staskazackoff@yandex.ru

Устойчивое функционирование объектов информационной инфраструктуры, таких как серверы, различное сетевое оборудование, подверженных воздействию кибератак, обеспечивается сохранением ими допустимого уровня производительности, позволяющего обрабатывать необходимый объем информации с требуемым качеством [1].

Постановка задачи заключается в следующем. На сервер поступают пакеты с информацией, содержащей данные M-типов. Пакеты могут поступать группами размера $i = \overline{0,n}$. Процесс поступления заявок в СМО задается групповым марковским потоком, описываемым матрицами D_i размером $M \times M$, время обслуживания заявок подчиняется экспоненциальному закону распределения. В момент времени t_1 (на рис. 1 и 2 $t_1 = 1$ с) на сервер воздействует кибератака типа компьютерный вирус, что приводит к изменению входного потока за счет добавления нового типа данных и увеличению размера матриц $D_0 - D_n$ на единицу. Данное воздействие приводит с снижению производительности сервера (рис. 2). В момент времени t_2 (на рис. 1 и 2 $t_2 = 2$ с) в результате удаления вируса антивирусной программой размер входного потока снова меняется до исходного, за счет чего происходит восстановление производительности сервера. Ставится задача разработать математическую модель для исследования характеристик производительности сервера до и после воздействия кибератаки для оценки его устойчивости к данным негативным воздействиям.

Для нахождения вероятностей состояний и характеристик производительности СМО предлагается использовать метод матрицы преобразования вероятностей [2]. Под вероятностью потерь понимается сумма вероятностей нахождения сервера в состояниях, когда буфер полностью заполнен пакетами разного типа трафика $P_{\text{пб}}(t)$ (тип данных от 0 до $M-1$) и вероятности потерь, связанной с нахож-

дением в системе вируса $P_{\text{пинф}}(t)$: $P_{\text{пот}}(t) = P_{\text{пб}}(t) + P_{\text{пинф}}(t) = \sum_{j=0}^{M-1} P_{(N+1),j}(t) + \sum_{i=1}^{N} P_{i,(M-1)}(t)$, где N — размер буфера.

Производительность сервера $A(t)$ определяется как произведение средней интенсивности поступления пакетов на сумму вероятностей состояний объекта КИИ, нахождение в которых допускает поступление пакетов без потерь: $A(t) = [1 - P_{\text{пот}}(t)]\,\lambda_{\text{ср}}$, где $\lambda_{\text{ср}}$ – средняя интенсивность поступления группы пакетов разного типа трафика [2].

Устойчивость сервера к воздействию кибератак определяется по формуле $R = \frac{\int_0^{\Delta t} A(t)dt}{A_{max}\Delta t}$, где A_{max} — стационарное значение производительности СМО при отсутствии кибератаки (на рис. 2 $A_{max} = 21$ пакетов/с), Δt — интервал времени от начала установившегося режима в период отсутствия кибератаки до начала стационарного режима после восстановления системы [2]. Для рассматриваемого случая устойчивость равна 93% ($\Delta t = 2.15 - 0.15$ с).

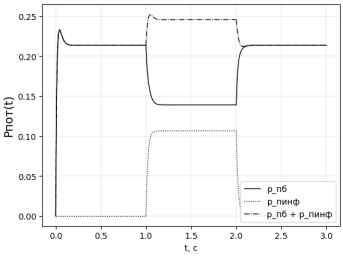


Рис. 1. Вероятности потерь

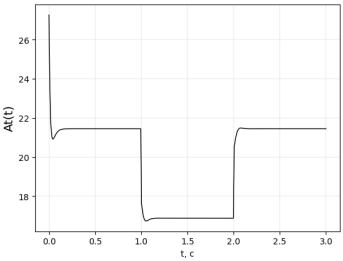


Рис. 2. Производительность

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гавдан Г. П., Иваненко В. Г., Рыбалко Э. П., Рыбалко Д. П.* Устойчивость функционирования объектов критической информационной инфраструктуры // Безопасность информационных технологий. 2022. Т. 29, № 4. С. 53–66.
2. *Barabanova E. A., Kazakov S. E.* Research of Server Resilience to Cyberattacks Using Queuing System with Correlated Arrival Flows // Proceedings of 9th International Conference on Information, Control, and Communication Technologies (ICCT 2025), 2025. https://ieeexplore.ieee.org/document/11427515.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕЦИКЛИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ

И. М. Лысов[1], Е. В. Кудрявцев[1]

[1] *Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия*
Автор, ответственный за переписку: ivan.lysov.05@gmail.com

Рассматривается система массового обслуживания с двумя конфликтными входными потоками заявок. Поступления заявок в каждый поток независимы и распределены по закону Пуассона с интенсивностями λ_1 и λ_2. Обслуживание осуществляется одним обслуживающим устройством (ОУ).

Обслуживающее устройство может находиться в одном из состояний: $\Gamma^{(1)}$ — обслуживание первого потока, $\Gamma^{(2)}$ — переналадка, $\Gamma^{(3)}$ — обслуживание второго потока, $\Gamma^{(4)}$ — переналадка. Граф смены состояний приведён на рис. 1.

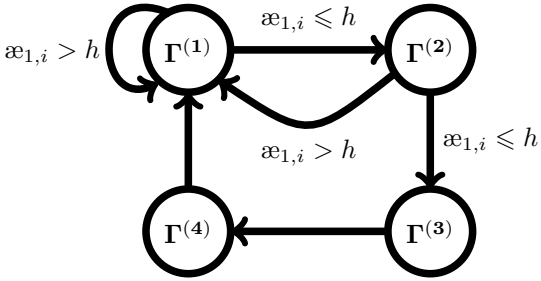


Рис. 1. Граф смены состояний обслуживающего устройства

Выделим дискретную шкалу [1] времени τ_i смены состояний ОУ. Обозначим через Γ_i состояние ОУ на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$; $æ_{1,i}$, $æ_{2,i}$ — длины очередей в момент τ_i; $\eta_{1,i}$, $\eta_{2,i}$ — числа поступивших заявок на $[\tau_i, \tau_{i+1})$; $\xi_{1,i}$, $\xi_{2,i}$ — числа обслуженных заявок на $[\tau_i, \tau_{i+1})$; h — пороговое значение очереди.

Уравнения баланса для длин очередей имеют вид

$$æ_{1,i+1} = æ_{1,i} + \eta_{1,i} - \xi_{1,i},$$
$$æ_{2,i+1} = æ_{2,i} + \eta_{2,i} - \xi_{2,i}.$$

Число обслуженных заявок определяется состоянием системы

$$\xi_{j,i} = \begin{cases} \min(æ_{j,i} + \eta_{j,i}, a_j), & \Gamma_i = \Gamma^{(2j-1)}, \\ 0, & \Gamma_i \neq \Gamma^{(2j-1)}, \end{cases} \qquad j = 1, 2.$$

Параметры обслуживания: a_1, a_2 — максимальные числа обслуженных заявок в состояниях Γ_1 и Γ_3 соответственно, μ_1^{-1}, μ_2^{-1} — времена обслуживания одной заявки. Длительность пребывания в состоянии $\Gamma^{(r)}$ составляет $T_r, r = 1, 2, 3, 4$. При этом должны выполняться соотношения для T_1 и T_3:

$$T_1 = \frac{a_1}{\mu_1}, \qquad T_3 = \frac{a_2}{\mu_2}.$$

Марковское свойство системы

Состояние системы на i-м шаге описывается случайным вектором $(\Gamma_i, æ_{1,i}, æ_{2,i})$. Динамика системы определяется векторной последовательностью $\{(\Gamma_i, æ_{1,i}, æ_{2,i})\colon i \geqslant 0\}$. Для данной последовательности доказаны следующие теорема и лемма.

Теорема 1. Случайная векторная последовательность $\{(\Gamma_i, æ_{1,i}, æ_{2,i})\colon i \geqslant 0\}$ с начальным состоянием $(\Gamma_0, æ_{1,0}, æ_{2,0})$ является марковской.

Пусть множество всех возможных состояний марковской последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{1,i}, æ_{2,i})\colon i \geqslant 0\}$ обозначено через

$$S = \left\{ (\Gamma^{(r)}, k_1, k_2)\colon r \in \{1, 2, 3, 4\},\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

Лемма 1. Множество несущественных состояний имеет вид $S_{\text{irr}} = \left\{ (\Gamma^{(2)}, k_1, k_2) \in S\colon k_1 > h \right\} \cup \left\{ (\Gamma^{(3)}, k_1, k_2) \in S\colon k_1 > h \right\}$, множество существенных состояний описывается как $S_{\text{ess}} = S \setminus S_{\text{irr}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Федоткин М. А.* Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 7: Сборник статей / Под ред. С.В. Яблонского. М.: Наука; Физматлит, 1998. С. 333–344.

ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ СЕТИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ МЕЖДУ ЦЕНТРОМ УПРАВЛЕНИЯ И ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ

П. А. Даренский[1]

[1] *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Автор, ответственный за переписку: pashok.darenskii@gmail.com

В настоящее время беспилотные летательные аппараты широко применяются в различных областях. Во многих практических задачах используется подход, при котором группа аппаратов взаимодействует с центром управления по принципу «звезда», не осуществляя прямого обмена данными друг с другом. В такой системе каждый аппарат функционирует как независимый источник запросов, а центр управления выступает в роли общего ресурса обработки. Используя аппарат теории массового обслуживания для анализа подобной сети, предлагается рассмотреть ее в виде замкнутой системы массового обслуживания с конечным числом источников N и повторными вызовами и построить имитационную модель предложенной системы (рис. 1) [1, 2].

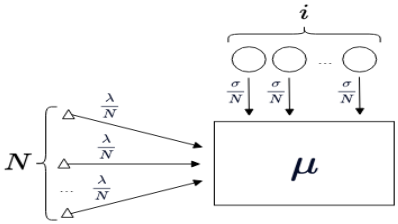


Рис. 1. Математическая модель замкнутой системы массового обслуживания с повторными вызовами

Каждый источник генерирует запросы с интенсивностью $\frac{\lambda}{N}$ и не формирует новые до завершения обслуживания текущего. Запрос на соединение передается на свободный сервер, и сеанс связи осуществляется в течение экспоненциально распределенного времени с параметром μ. При занятости сервера запрос переходит на орбиту и повторяет попытку через случайное время с параметром $\frac{\sigma}{N}$.

Вводятся обозначения: $i(t)$ – число заявок на орбите; $k(t)$ – состояние сервера, 0 – если сервер свободен и 1 – если сервер занят. Задачей исследования является построение имитационной модели и определение области применимости ранее полученных предельных результатов для предложенной системы массового обслуживания [3]. Был проведен численный анализ полученных результатов, сравнивая предельное распределение с распределением вероятностей, полученным с помощью имитационного моделирования, используя расстояние Колмогорова в качестве оценки погрешности. Анализ результатов, полученных для различных значений параметра N, показал, что по мере увеличения числа источников генерации запросов расстояние Колмогорова уменьшается, что указывает на повышение точности приближения (рис. 2).

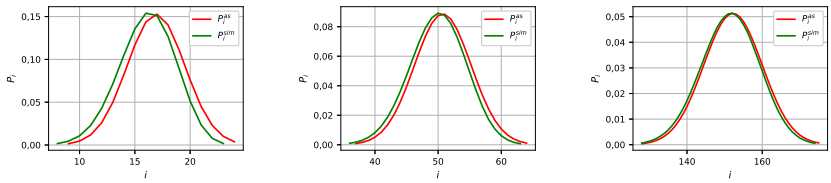


Рис. 2. Сравнение методов при $N = 25, 75, 225$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nazarov A., Sztrik J., Kvach A.* Asymptotic waiting time analysis of finite source M/GI/1 retrial queueing systems with conflicts and unreliable server // Publicationes Mathematicae Debrecen. 2022. Vol. 101, № 3-4. P. 397–419.
2. *Nazarov A., Sztrik J., Kvach A., Toth A.* Asymptotic Analysis of Finite-Source M/G I/1 Retrial Queueing Systems with Collisions and Server Subject to Breakdowns and Repairs // Methodology and Computing in Applied Probability. 2022. Vol. 24, № 3. P. 1503–1518.
3. *Даренский П. А., Пауль С. В.* Математическое моделирование сети передачи данных между центром управления полетами и группой БПЛА со стратегией развертывания без взаимодействия // Ляпуновские чтения – 2024: материалы 40-й междунар. конф., Иркутск, 2024. С. 66–68.

ОПТИМИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ РЕАКЦИИ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Н. В. Сергеева[1], Е. А. Васильева[1]

[1] *Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия*
Автор, ответственный за переписку: SergeevaNV@info.sgu.ru

Для получения экономической эффективности в логистике, телекоммуникациях, транспортной и производственной отраслях удобно использовать результаты, полученные с помощью оптимизации параметров математических моделей таких систем – сетей массового обслуживания различных типов. Методы оптимизации сетей массового обслуживания можно найти, например, в [1, 2]. В данной работе решена задача поиска интенсивностей обслуживания в системах сети массового обслуживания с групповым обслуживанием, которые обеспечивают минимальное математическое ожидание длительности пребывания требований в сети (время реакции сети) при заданном ограничении на общую стоимость ресурсов сети.

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, состоящая из L систем массового обслуживания S_i, $i = 1, \ldots, L$ [3]. В сеть из источника S_0 поступает пуассоновский поток требований одного класса с интенсивностью λ_0. Каждая система S_i состоит из бункера бесконечной емкости и одного прибора, обслуживающего группу требований фиксированного размера b_i, $b_i \geq 1$. Длительность обслуживания группы требований в системе S_i является экспоненциально распределённой случайной величиной с параметром μ_i. Обслуживание группы требований прибором начинается только в том случае, когда в бункере накопится минимум b_i требований, в остальных случаях прибор простаивает. После того, как в системе S_i, $i = 1, \ldots, L$ прибор завершит обслуживание группы требований, каждое требование независимо от остальных требований группы переходит в S_j с вероятностью θ_{ij}, $j = 0, \ldots, L$.

Математическое ожидание длительности пребывания требований в системе S_i, $i = 1, \ldots, L$ рассматриваемой сети обслуживания имеет вид [3]:

$$\bar{u}_i = \frac{b_i + 1}{2\lambda_i} + \frac{1}{M_i - \lambda_i},$$

где M_i – вещественный корень многочлена,

$$M_i^{b_i+1} - (\lambda_i + \mu_i)M_i^{b_i} + \lambda_i^{b_i}\mu_i = 0,$$

λ_i – интенсивность входящего в систему S_i потока, находится из решения системы уравнений

$$\lambda_j = \sum_{i=0}^{L} \lambda_i \theta_{ij},\ j = 1, \ldots, L.$$

Время реакции сети массового обслуживания

$$\bar{\tau}_0 = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=1}^{L} \lambda_i \overline{u}_i.$$

Задача оптимизации сети заключается в нахождении вектора интенсивностей обслуживания $\mu^* = (\mu_1^*, \ldots, \mu_L^*)$, обеспечивающего минимум времени реакции сети:

$$\bar{\tau}_0^* = \min_{\mu} \bar{\tau}_0(\mu)$$

при ограничении на общую стоимость ресурсов сети:

$$\sum_{i=1}^{L} a_i \mu_i \leq C,$$

где $a_i > 0$ — весовые коэффициенты, определяющие стоимость единицы интенсивности обслуживания в системе S_i, а C — ограничение на суммарный ресурс сети.

Для поиска оптимального вектора интенсивностей обслуживания используется метод случайного поиска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Neely M. J.* Stochastic Network Optimization with Application to Communication and Queueing Systems. Springer Cham., 2010. 199 p.
2. *Вишневский В. М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003. 512 с.
3. *Stankevich E., Tananko I., Pagano M.* Optimization of Open Queuing Networks with Batch Services // Mathematics. 2022. Vol. 10, No. 16. Art. num. 3027.

АППРОКСИМАЦИЯ МЕЖУЗЛОВЫХ ПОТОКОВ В МНОГОФАЗНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ПОТЕРЯМИ

Н. В. Журавель[1], О. В. Семёнова[1]

[1] *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: zhuravel.nv@phystech.edu

В настоящее время одним из важных направлений проектирования и оценки производительности современных телекоммуникационных систем и сетей является анализ математических моделей тандемных систем. Тандемные системы служат моделями различных технических и социальных объектов и, в частности, адекватно описывают широкополосные беспроводные сети вдоль протяженных транспортных магистралей (автомобильные и железные дороги, нефтяные и газовые трубопроводы и т.д.). Подобные тандемные системы используются и для моделирования связи для привязных БПЛА-станций [1].

В сетях, которые представляют собой системы с линейной топологией, ключевыми метриками являются средняя межконцевая задержка пакетов $E[\tau]$ и вероятность потерь P_{loss}, обусловленных переполнением буферов.

Точные марковские модели часто непрактичны из-за большого пространства состояний цепей Маркова, описывающих поведение систем с большим числом узлов, поэтому более удобным методом является декомпозиция «узел за узлом», при которой выходящий из узла поток формализуется или аппроксимируется для описания входящего потока на следующий узел [2].

Рассматривается тандем из N узлов с простейшим входным потоком на первый узел с интенсивностью $\lambda > 0$. На i-м узле время обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu_i > 0$, ёмкость узла n (максимум пакетов в узле, включая обслуживаемый), дисциплина обслуживания FIFO. В отличие от тандемных систем с неограниченными буферами, в нашем случае выходящие из узлов потоки не являются простейшими, более того, они являются коррелированными [3].

Цель данной работы — исследование характера выходящих потоков между узлами тандемной системы с учётом ограниченности буфе-

ров и разработка численного алгоритма расчёта характеристик производительности системы для произвольного числа N фаз.

Пропускная способность (среднее число заявок, покидающих узел успешно обслуженными в единицу времени) равна $\lambda_{\text{out}} = \lambda(1-p_n)$, где p_n — стационарная вероятность того, что в узле находится n заявок. Тогда средняя задержка в узле есть $E(\tau) = \frac{L}{\lambda_{\text{out}}}$, где L — среднее число заявок в узле. Тогда для всей тандемной системы в целом $E(\overline{\tau}) = \sum_{i=1}^{N} E(\tau_i)$, а вероятность потери $P_{\text{loss}} = 1 - \prod_{i=1}^{N} \left(1 - p_n^{(i)}\right)$.

Выходной поток со второго узла предлагается находить в рамках аппроксимации, рассматривая второй узел как систему $GI/M/1/N$ с функцией распределения входных интервалов $A_2(t) = F_1(t) =$ $= \pi_0 \left(1 - \frac{e^{-t\lambda}}{\mu_1 - \lambda}\right) + (1-\pi_0)\left(1 - e^{-\mu_1 t}\right)$; $\pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu_1}$, где $F_1(t)$ – функция распределения интервалов между моментами ухода заявок из первого узла.

Рассмотрим далее выходящий поток из второго узла. Интервалы времени между моментами ухода заявок из узла зависят лишь от того, остался ли узел пустым после очередного завершения обслуживания (с вероятностью $p_0^{(2)}$) или нет. В этом случае функцию распределения интервалов между моментами ухода обслуженных заявок аппроксимируем как $F_2(t) \approx p_0^{(2)}(A_2 * B_2)(t) + \left(1 - p_0^{(2)}\right) B_2(t)$.

Далее функция распределения $F_2(t)$ используется для описания входящего потока на третий узел системы. Подобную аппроксимацию предлагается продолжить до последнего узла системы.

Дальнейший анализ системы направлен на оценку точности предложенной аппроксимации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишневский В.М., Авраменко Ю.А., Нгуен В.Х., Калмыков Н.С.* Оценка характеристик производительности беспроводной сети на базе привязных БПЛА // Проблемы информатики. 2025. № 1 (66). С. 60–77.
2. *Whitt W., You W.* New decomposition approximations for queueing networks // Queueing Systems. 2022. Vol. 100(3). DOI: 10.1007/s11134-022-09739-w.
3. *Sagron R. et al.* Inter-Departure Time Correlations in PH/G/1 Queues // Mathematics. 2024. Vol. 12 (9). Art. num. 1362. DOI: 10.3390/math12091362.

ДВУХОЧЕРЕДНАЯ JSQ–SLQ СИСТЕМА С ПРЕРЫВАЕМЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ И ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ ПРИБОРА: МАТРИЧНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Е. А. Хитяев[1], И. С. Зарядов[1, 2]

[1] *Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, г. Москва, Россия*

[2] *Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: evgenykhityaev@yandex.ru

1. Постановка модели

В работах E. Perel и соавт. рассматриваются системы массового обслуживания с дисциплинами выбора кратчайшей очереди (JSQ) и обслуживания длиннейшей очереди (SLQ), которые представлены в виде обобщенных процессов рождения и гибели (QBD) и исследованы с использованием матрично-геометрического подхода [1–3]. При этом в данных работах в случае равенства длин очередей используется детерминированное правило выбора очереди прибором.

В настоящей работе рассматривается двухочередная JSQ–SLQ система с одним прибором, прерываемым обслуживанием, ненулевыми временами переключения и вероятностным правилом выбора очереди прибором при равенстве длин очередей. Заявки поступают согласно пуассоновскому потоку с интенсивностью λ, а времена обслуживания и переключения имеют экспоненциальные распределения с параметрами μ_i и γ_i, $i = \overline{1,2}$. Поступающая заявка направляется в кратчайшую очередь, а при равенстве длин очередей — в очередь Q_i с вероятностью p_i, $i = \overline{1,2}$, где $p_1 + p_2 = 1$. В случае изменения длин очередей прибор выбирает длиннейшую очередь, а при равенстве их длин остается в очереди Q_i с вероятностью q_i или переходит в другую очередь с вероятностью $1 - q_i$, $i = \overline{1,2}$. Данное правило действует как в процессе обслуживания, так и в процессе переключения прибора.

Состояние системы описывается марковским процессом $\xi(t) = \{L_1(t), D(t)\}$, $\quad D(t) = L_1(t) - L_2(t)$, где пространство фаз задается множеством $\mathcal{D} = \{1, 1_{s_1}, 0_1, 0_{s_1}, 0_{s_2}, 0_2, -1_{s_2}, -1\}$.

Данный процесс представляет собой QBD-процесс с уровнями $n = L_1$ и конечным числом фаз, причем для уровней $n \geq 1$ его струк-

тура является однородной. Для данного процесса авторами получена матрица интенсивностей переходов вида

$$Q = \begin{pmatrix} B_1 & B_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ B_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

где матрицы A_0, A_1, A_2 описывают переходы между уровнями $n \geq 1$, блоки B_0, B_1 — для уровней $n = 0$, а B_2 — из уровня $n = 1$ в $n = 0$.

2. Условие устойчивости

Обозначим $A = A_0 + A_1 + A_2$. Пусть π — стационарный вектор матрицы A, удовлетворяющий условиям:

$$\pi A = 0, \quad \pi e = 1,$$

где e — единичный вектор-столбец.

Тогда условие устойчивости имеет вид [4]:

$$\pi A_0 e < \pi A_2 e.$$

После преобразований условие сводится к неравенству $g(\lambda) < 0$, где $g(\lambda)$ — многочлен по λ. По результатам численных экспериментов $g(\lambda)$ имеет единственный положительный корень λ_0. Следовательно, условие устойчивости может быть записано в виде $\lambda < \lambda_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Perel E., Perel N., Yechiali U.* A Polling System with Join-the-Shortest–Serve-the-Longest Policy // Computers & Operations Research. 2020. Vol. 114. Art. num 104809.
2. *Perel E., Perel N., Yechiali U.* A 3-queue polling system with join the shortest-serve the longest policy // Indagationes Mathematicae. 2023. Vol. 34, № 5. P. 1101–1120.
3. *Perel E., Perel N., Yechiali U.* The Non-Preemptive Join-the-Shortest-Queue–Serve-the-Longest-Queue Service System with or without Switch-Over Times // Mathematical Methods of Operations Research. 2024. Vol. 99, № 1. P. 3–38.
4. *Neuts M. F.* Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1981. 332 p.

АСИМПТОТИЧЕСКИ-ДИФФУЗИОННЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С АНОМАЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Е. Т. Ахметова[1], С. П. Моисеева[1]

[1] *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Автор, ответственный за переписку: keifern@yandex.ru

В современных телекоммуникационных системах и распределённых вычислительных комплексах наряду с обычными запросами возникают аномальные события: вредоносные пакеты, ошибочные транзакции, каскадные сбои. Такие события способны существенно влиять на производительность системы и качество обслуживания. Для анализа подобных сценариев в работе рассматривается система массового обслуживания типа $M/M/\infty$ с двумя типами заявок: нормальными и аномальными. Выбор модели с бесконечным числом каналов обусловлен динамическим масштабированием ресурсов в облачных архитектурах, что позволяет пренебречь ограничениями на число одновременно обслуживаемых запросов на рассматриваемом временном интервале.

Нормальные заявки поступают в систему с интенсивностью λ и моделируют стандартную нагрузку. Аномальные заявки возникают в результате «заражения» нормальных заявок с интенсивностью α при условии наличия хотя бы одной нормальной заявки в системе. Данный механизм отражает процессы распространения сбоев и вирусных атак. Обслуживание нормальных и аномальных заявок происходит с интенсивностями μ_1 и μ_2 соответственно. Число каналов обслуживания не ограничено.

Введём процессы $i(t)$ и $k(t)$, обозначающие число нормальных и аномальных заявок в момент $t \geqslant 0$. Через $P\{i(t) = i, k(t) = k\} = P(i, k, t)$ обозначим вероятность нахождения системы в состоянии (i, k), где $i, k = 0, 1, 2, \ldots$ Целью исследования является нахождение стационарного распределения π_i числа нормальных заявок. Так как процесс $\{i(t), k(t)\}$ марковский, для его анализа применим уравнения Колмогорова [1].

Для решения полученной бесконечной системы уравнений используется метод производящих функций. Вводится смешанная

производящe-характеристическая функция $h(x,u,t)$, получаемая заменой $y = e^{ju}$. В результате задача сводится к системе уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial h(x,u,t)}{\partial t} + \mu_1 \frac{\partial h(x,u,t)}{\partial x}(x-1) + j\mu_2(1-e^{-ju})\frac{\partial h(x,u,t)}{\partial u} = \\ = h(x,u,t)\left(\lambda(x-1) + \frac{\alpha}{x}(e^{ju}-x)\right) - \\ - h(0,u,t)\frac{\alpha}{x}(e^{ju}-x). \quad (1)$$

При $x = 1$ уравнение упрощается:

$$\frac{\partial h(u,t)}{\partial t} + j\mu_2(1-e^{-ju})\frac{\partial h(u,t)}{\partial u} = \alpha(e^{ju}-1)\Big[h(u,t) - h(0,u,t)\Big], \quad (2)$$

где $h(u,t) = h(1,u,t)$ — характеристическая функция числа аномальных заявок, а $h(0,u,t)$ соответствует случаю, когда нормальных заявок в системе нет ($i = 0$).

Поскольку получение точного аналитического решения системы уравнений (1), (2) не представляется возможным, исследование проводится методом асимптотически-диффузионного анализа [2]. Рассматривается предельный режим, соответствующий длительному пребыванию аномальных заявок в системе, что формализуется условием $\mu_2 \to 0$. Введя малый параметр $\varepsilon = \mu_2$ и выполнив масштабирование переменных $u = \varepsilon w$, $\tau = \varepsilon t$, получено предельное уравнение для нормированной характеристической функции. Данное уравнение позволяет вывести асимптотическое распределение числа аномальных заявок и провести количественную оценку влияния параметров системы на её устойчивость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назаров А. А., Терпугов А. Ф.* Теория массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2010. 228 с.
2. *Назаров А. А., Измайлова Я. Е., Исаев А. Т.* Асимптотически-диффузионный анализ бесконечнолинейной системы массового обслуживания с отрицательными заявками и блоком восстановления для искаженных положительных // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35, № 3. С. 380–394.

ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ИЗБИРАТЕЛЬНОГО УЧАСТКА

Д. С. Матусевич[1], Е. В. Матусевич[1]

[1] *Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Россия*
Автор, ответственный за переписку: mds@bgu.ru

Избирательное право Российской Федерации строится на принципах всеобщего избирательного права, равного избирательного права, прямых выборах и тайном голосовании, что определяет алгоритмы проведения голосований на избирательных участках. Рассмотрим организацию процесса голосования на избирательном участке как систему массового обслуживания.

Источниками требований являются избиратели, а избирательные участки формируются из расчета примерно 2000 зарегистрированных избирателей вокруг участка. Входящий поток требований (ВПТ) образуют избиратели, голосующие непосредственно на избирательном участке. ВПТ является групповым, так как избиратели поступают на участок по одиночке, парами и группами, и нестационарным в течение дня голосования. Поступив на участок, избиратель получает бюллетень в заранее определенном месте выдачи бюллетеней, далее проходит в кабинку для тайного голосования. Заполненный бюллетень опускается в урну для голосования или в КОИБ (машинный комплекс обработки избирательных бюллетеней), после чего избиратель покидает избирательный участок (окончание обслуживания).

Исходя из описания система является разомкнутой системой массового обслуживания с групповым потоком требований. Механизм обслуживания состоит из трех фаз обслуживания с ожиданием требованиями обслуживания на каждой фазе обслуживания. Обслуживание выполняется на закрепленном обслуживающем устройстве (фаза «получение бюллетеня») или на ближайшем свободном обслуживающем устройстве (фазы «голосование» и «опускание бюллетеня»). Обслуживание одноканальное, дисциплина обслуживания – FCFS (First Come, First Served). Система с отсутствием последействия, поскольку предполагается разовое посещение участка избирателем.

Учитывая исходные условия, разумным является применение имитационного моделирования. Исходными данными для моделирования будут:

— интенсивность ВПТ, количество избирателей в час. Показатель зависит от численности избирателей, зарегистрированных на участке, планируемой явки избирателей, количества дней голосования (1 или 3), распределения явки избирателей в течение времени работы избирательного участка (12 астрономических часов);
— распределение вероятностей поступления в систему одного требования (избирателя), двух требований одновременно, трех и более требований одновременно;
— количество мест выдачи бюллетеней (обслуживающих устройств первой фазы);
— закон распределения вероятности (ЗРВ) времени обслуживания в местах выдачи бюллетеней;
— количество кабинок для голосования (обслуживающих устройств второй фазы);
— ЗРВ времени обслуживания в момент голосования в кабинках для голосования;
— количество урн для голосования или КОИБ на участке (обслуживающих устройств третьей фазы);
— ЗРВ времени обслуживания помещения бюллетеня в урну для голосования или КОИБ.

Использование аппарата теории массового обслуживания позволяет оценить эффективность функционирования избирательного участка при различных вариантах его организации. Исходя из предназначения данной системы, наиболее информативными будут следующие показатели: среднее количество избирателей, находящихся на участке; среднее время нахождения в очереди к местам выдачи бюллетеней; среднее время нахождения избирателя на избирательном участке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Об основных гарантиях избирательных прав и права на участие в референдуме граждан Российской Федерации : Федеральный закон № 67-ФЗ от 12 июня 2002 года.
2. *Кельтон В.* Имитационное моделирование. Классика CS. СПб.: Питер: Издательская группа BHV, 2004. 847 с.
3. *Советов Б. Я.* Моделирование систем. М.: Высшая школа, 2001. 343 с.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЧИСЛА ЗАЯВОК В RQ-СИСТЕМЕ M/GI/1 С ПОСТУПЛЕНИЕМ ЗАЯВОК ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА НА ОРБИТУ

А. А. Назаров[1], В. А. Жидкова[1], М. А. Шкленник[1]

[1] *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Автор, ответственный за переписку: lerushazhidkova@yandex.ru

В настоящее время с развитием телекоммуникационных систем все большее внимание исследователей уделяется системам массового обслуживания с повторными вызовами (RQ-системам). С начала 1970-х г. по сегодняшний день изучению различных модификаций RQ-систем посвящено большое количество работ. С обзором исследований, посвященных RQ-системам, можно познакомиться, к примеру, в статьях [1, 2]. Однако в большинстве из них заявки попадают на орбиту после обращения к обслуживающему прибору, застав его занятым. Особенностью RQ-системы, исследуемой в данной работе, является тот факт, что все заявки входящего потока поступают на орбиту. Также для расширения возможности применения полученных реультатов время обслуживания заявок на приборе является случайной величиной, заданной произвольной функцией распределения $B(x)$.

Пусть $i(t)$ – число заявок в системе в момент времени t, $k(t)$ – состояние обслуживающего прибора, где $k = 0$ соответствует свободному прибору, а $k = 1$ – занятому, $z(t)$ – случайная величина, равная промежутку времени от текущего момента t до момента завершения обслуживания текущей заявки. Обозначим общую длительность обслуживания заявки как случайную величину S с функцией распределения $B(x) = P\{S < x\}$, тогда если прибор свободен, $z(t) = 0$, а если прибор занят и обслуживание началось в момент $t_0 < t$, то $z(t) = S - (t - t_0)$. Тогда функция распределения принимает вид $P(k, i, z, t) = P\{k(t) = k, i(t) = i, z(t) < z\}$. Ставится задача нахождения распределения вероятностей числа заявок в системе в стационарном режиме.

Введем частичные производящие функции в виде

$$G_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P(0,i)x^i, k = 0;\ G_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(1,i)x^i, k = 1.$$

Тогда для этих функций несложно получить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} -x\sigma G_0'(x) + (x-1)\lambda G_0(x) + \frac{1}{x}\frac{\partial G_1(x)}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial G_1(x,z)}{\partial z} - \frac{\partial G_1(x,0)}{\partial z} - (x-1)\lambda G_1(x,z) + xB(z)\sigma G_0'(x) = 0 \end{cases}$$

с начальными условием $G_0(1) + G_1(1) = 1$.
Решив задачу Коши, получаем $G_0(x)$ и $G_1(x)$:

$$G_0(x) = R_0 exp\left\{-\frac{\lambda}{\sigma}\int_x^1 \frac{y-1}{y - B^*(\lambda - \lambda x)}dy\right\},$$

$$G_1(x) = x \cdot G_0(x)\frac{B^*(\lambda - x\lambda) - 1}{x - B^*(\lambda - x\lambda)},$$

где $R_0 = 1 - \lambda b$, b – математическое ожидание времени обслуживания заявок, $B^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} d_z B(x,z)$, а $\alpha = \lambda - x\lambda$.
Таким образом, производящая функция распределения числа заявок в системе в стационарном режиме будет иметь вид

$$G(x) = G_0(x)\frac{(x-1)B^*(\lambda - x\lambda)}{x - B^*(\lambda - x\lambda)}.$$

Получено аналитическое выражение для производящей функции распределения вероятностей количества заявок в системе в стационарном режиме, описывающее все возможные состояния системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yang T., Templeton J. G. C.* A survey on retrial queue // Queueing Syst. 1987. Vol. 2. P. 201–233.
2. *Моисеева Е. А., Назаров А. А.* Численное исследование RQ-системы M|M|1 в условии большой загрузки // X Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011. С. 160–164.

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПЕТЛЕЙ И ПОРОГАМИ

А. Е. Михалева[1], Е. В. Кудрявцев[1]

[1] *Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия*
Автор, ответственный за переписку: mihaleva1208@gmail.com

В данной работе рассматривается задача управления нециклической моделью перекрестка между двумя конфликтными независимыми пуассоновскими потоками π_1 и π_2 с интенсивностями λ_1 и λ_2.

Обслуживающее устройство принимает значения из множества $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}, \Gamma^{(4)}\}$. В состояниях $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(3)}$ происходит обслуживание заявок по потокам π_1 и π_2 соответственно. В состояниях $\Gamma^{(2)}$ и $\Gamma^{(4)}$ осуществляется переналадка обслуживающего устройства, заявки не принимаются. Параметрами системы являются: a_1, a_2 – максимальное число заявок, которое может обслужиться по первому и второму потоку в состояниях $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(3)}$ соответственно; время обслуживания одной заявки составляет μ_1^{-1} и μ_2^{-1} соответственно. Длительности пребывания в состояниях $\Gamma^{(r)}$ фиксированы и составляют T_r. Будем рассматривать систему массового обслуживания в случайные моменты τ_i смены состояний обслуживающего устройства или на промежутках $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Длина интервала составляет $\Delta\tau_i = \tau_{i+1} - \tau_i$.

Состояние обслуживающего устройства на i-м промежутке времени обозначим Γ_i. Длины первой и второй очереди в момент τ_i обозначим $\varkappa_{1,i}$ и $\varkappa_{2,i}$ соответственно. Число заявок, поступивших на i-м промежутке времени для потоков π_1 и π_2, обозначим $\eta_{1,i}$ и $\eta_{2,i}$. Число заявок, обслуженных за промежуток $[\tau_i, \tau_{i+1})$ для первого и второго потока, обозначим $\xi_{1,i}$ и $\xi_{2,i}$. Для случайных величин Γ_i верны следующие рекуррентные соотношения:

$$\Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma^1, & \Gamma_i = \Gamma^{(4)} \text{ или } \Gamma_i = \Gamma^{(1)}, \varkappa_{1,i} > h_1, \varkappa_{2,i} < h_2; \\ \Gamma^2, & \Gamma_i = \Gamma^{(1)}, \varkappa_{1,i} \le h_1 \text{ или } \varkappa_{2,i} \ge h_2; \\ \Gamma^3, & \Gamma_i = \Gamma^{(2)}; \\ \Gamma^4, & \Gamma_i = \Gamma^{(3)}. \end{cases}$$

Здесь h_1 и h_2 — пороговые значения, определяющие правило продления пребывания в состоянии $\Gamma^{(1)}$.

Уравнения баланса для каждой из очередей имеют вид

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}, \quad j = 1, 2.$$

Условные распределения числа поступивших заявок задаются формулой $q_j(T,k) = \mathbf{P}(\eta_{j,i} = k \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)}) = \frac{(\lambda_j T_r)^k}{k!} e^{-\lambda_j T_r}, \quad j = 1, 2.$

Функция числа обслуженных заявок по первому потоку имеет вид

$$\xi_{1,i} = \begin{cases} \min(\varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}, a_1), & \Gamma_i = \Gamma^{(1)}; \\ 0, & \Gamma_i \neq \Gamma^{(1)}. \end{cases}$$

Для второй очереди функция числа обслуженных заявок будет выглядеть аналогично.

Состоянием системы на i-м шаге будет вектор $(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i})$. Функционирование системы массового обслуживания описывается последовательностью $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}); i \geq 0\}$. Пусть вероятность того, что в состоянии $\Gamma^{(r)}$ в первой очереди будет ровно k_1 требований, а во второй очереди будет ровно k_2, обозначается $Q_i^{(r)}(k_1, k_2)$. Для одномерных распределений последовательности выведены рекуррентные соотношения. Получены формулы для производящих функций. Для последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}); i \geq 0\}$ доказаны утверждения.

Теорема 1. Случайная последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}); i \geq 0\}$ с начальным состоянием $(\Gamma_0, \varkappa_{1,0}, \varkappa_{2,0})$ является марковской.

Лемма 1. Множества состояний $\{(\Gamma^{(r)}, k, l)\colon \Gamma^{(r)} \in \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(3)}, \Gamma^{(4)}, k, l = 0, 1, \ldots\}$ и состояния $\{(\Gamma^{(2)}, k, l)\colon k \leq h_1$ или $l \geq h_2\}$ образуют класс существенных состояний. Состояния $\{(\Gamma^{(2)}, k, l)\colon k > h_1$ и $l < h_2\}$ являются несущественными состояниями.

Теорема 2. Необходимым условием существования предельного распределения для цепи Маркова является выполнение неравенств

$$\alpha a_1 > \lambda_1(\alpha T_1 + T_2 + T_3 + T_4),$$
$$a_2 > \lambda_2(\alpha T_1 + T_2 + T_3 + T_4),$$

где α — среднее количество поочередных заходов в первое состояние.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хинчин А. Я.* Работы по теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963. 98 с.

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПУАССОНОВСКИМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЯВКАМИ

В. М. Монгуш[1], С. П. Моисеева[1]

[1] *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Автор, ответственный за переписку: aysulu.mongush.2000@mail.ru

В данной работе рассматривается марковская система массового обслуживания (рис. 1), на вход которой поступают два потока заявок: неординарный пуассоновский поток положительных заявок с интенсивностью $N\lambda$ и простейший поток отрицательных с интенсивностью $N\alpha$. Особенностью модели является тот факт, что положительные заявки начинают свое обслуживание, если в системе нет отрицательных. Поступившие отрицательные не реагируют на присутствующие в системе положительные, а ждут поступления новых положительных заявок, после поступления которых они вместе покидают систему. Обслуживание заявок из очереди происходит с экспоненциальным распределением времени обслуживания. Для описания системы построена система уравнений Колмогорова, учитывающая переходы состояний цепи Маркова, поступление и обслуживание заявок.

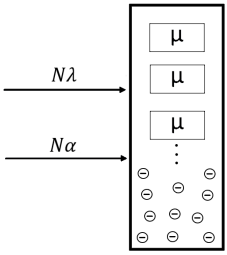


Рис. 1. Система с накопленными отрицательными заявками

Ставится задачу исследования марковского двумерного процесса $i_1(t)$ — число положительных заявок в системе в момент времени t, $i_2(t)$– число отрицательных заявок в системе. Так как этот процесс

является цепью Маркова, то для распределения вероятностей

$$P(i_1, i_2, t) = P\{i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2\}, \quad i = \overline{0, \infty}$$

записана система дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(i_1, 0, t)}{\partial t} = -(N\lambda + N\alpha + i_1\mu)P(i_1, 0, t) + N\lambda P(i_1 - 1, 0, t) + \quad (1)$$
$$+N\lambda P(i_1, 1, t) + (i+1)\mu P(i_1, 0, t),$$
$$\frac{\partial P(i_1, i_2, t)}{\partial t} = -(N\lambda + N\alpha + i_1\mu)P(i_1, i_2, t) + N\alpha P(i_1, i_2 - 1, t) + \quad (2)$$
$$+N\lambda P(i_1, i_2 + 1, t) + (i_1 + 1)\mu P(i_1 + 1, i_2, t).$$

Следуя работе [1], перейдём к частичным характеристическим функциям, для которых получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{1}{N}\frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial t} = -[(e^{ju} - 1)\lambda + \alpha]H(u, 0, t) + \lambda H(u, 1, t) + \quad (3)$$
$$+(1 - e^{-ju})j\frac{\mu}{N}\frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial u},$$
$$\frac{1}{N}\frac{\partial H(u, i_2, t)}{\partial t} = -(\lambda + \alpha)H(u, i_2, t) + \alpha H(u, i_2 - 1, t) + \lambda H(u, i_2 + 1, t) + \quad (4)$$
$$+(1 - e^{-ju})j\frac{\mu}{N}\frac{\partial H(u, i_2, t)}{\partial u},$$

$$\frac{1}{N}\frac{\partial H(u, t)}{\partial t} = (e^{ju} - 1)\left\{\lambda H(u, 0, t) + e^{-ju}j\frac{\mu}{N}\frac{\partial H(u, t)}{\partial u}\right\}. \quad (5)$$

Далее применяется метод асимптотически диффузионного анализа [2] при условии большой интенсивности входящих потоков ($N \to \infty$). Получены выражения, описывающие вид распределений исследуемых процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назаров А. А., Моисеева С. П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 109 с.
2. *Nazarov A., Phung-Duc Tuan, Paul S., Lizyura O.* Diffusion limit for single-server retrial queues with renewal input and outgoing calls // Mathematics. 2022. Vol. 10, Is. 6. P. 948. DOI: 10.3390/math10060948

РЕСУРСНАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА НАРЕЗКИ РАДИОЧАСТОТНОГО СПЕКТРА СЕТИ 5G/6G С РАВНОЙ СКОРОСТЬЮ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

И. Е. З. Гебриал[1], И. А. Кочеткова[1, 2]

[1] *Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, г. Москва, Россия*

[2] *Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: gebrial-ie@rudn.ru

Нарезка сети (network slicing) является ключевой технологией стандартов 5G/6G, позволяющей базовому оператору разделить единую радиосеть доступа на изолированные логические слайсы, каждый из которых управляется в соответствии с индивидуальным соглашением об уровне обслуживания [1, 2]. В такой конфигурации оператор одновременно обслуживает собственных абонентов и предоставляет остаточный спектр виртуальному оператору, что порождает задачу совместного управления радиоресурсами и экономической эффективностью. Для аналитической оценки показателей качества обслуживания в таких системах применяются ресурсные системы массового обслуживания [3].

Рассматривается базовая станция, совместно используемая базовым оператором (слайс 1) и виртуальным оператором (слайс 2). Суммарный радиочастотный спектр $F = M\Delta f$ делится на M ресурсных блоков шириной Δf. Базовому оператору выделено m блоков ($F_1(m) = m\Delta f$) виртуальному – оставшиеся $M - m$ блоков ($F_2(m) = (M - m)\Delta f$), при ограничении $M_1 \leq m \leq M - M_2$. Сессии пользователей в слайсе i поступают по пуассоновскому потоку с интенсивностью λ_i, объем данных сессии экспоненциально распределен со средним $1/\mu_i$ бит.

Используется схема планирования с равной скоростью: базовая станция перераспределяет доли временного кадра так, чтобы каждый активный пользователь в слайсе i получал одинаковую мгновенную скорость передачи данных вне зависимости от местоположения. Пользователи размещены по двумерному пуассоновскому то-

чечному процессу на кольце $[R_{\min}, R_{\max}]$, спектральная эффективность $r(\mathrm{PL})$ определяется формулой Шеннона – Хартли. Общая равная скорость при n_i пользователях $\xi_i^{\mathrm{b}}(m, n_i) = F_i(m)/\sum_{j=1}^{n_i} \xi_j^{\mathrm{ISE}}$, где $\xi_j^{\mathrm{ISE}} = 1/r(\xi_j^{\mathrm{PL}})$ – обратная спектральная эффективность пользователей.

Система описывается марковским случайным процессом с состояниями (m, n_1, n_2), где m – текущее число блоков базового оператора, $n_i \geq 0$ – число активных пользователей в слайсе i, максимально допустимая загрузка при наилучшем положении пользователей $N_i(m) = \lfloor F_i(m) \cdot r(\mathrm{PL}_{\min})/b_i^{\min} \rfloor$. Пространство состояний:

$$\big\{(m, n_1, n_2) :\ \ 0 \leq n_1 \leq N_1(m),\ 0 \leq n_2 \leq N_2(m),\ M_1 \leq m \leq M - M_2\big\}.$$

Сигнал перераспределения спектра с интенсивностью δ инициирует переход $m \to a \in \mathcal{A}(m, n_1, n_2)$, где допустимое множество $\mathcal{A}$ построено с учетом порогов изоляции $b_i^{\mathrm{is}} > b_i^{\min}$.

Для аппроксимации функции распределения скорости $\xi_i^{\mathrm{b}}(m, n_i)$ применяется центральная предельная теорема: сумма n_i независимых ξ_j^{ISE} аппроксимируется нормальным законом $\mathcal{N}(n_i\mu_{\mathrm{ISE}},\ n_i\sigma^2_{\mathrm{ISE}})$, что позволяет получить явные выражения для вероятности принятия $p_i(m, n_i)$ и вероятности успешного перераспределения $p(m, n_1, n_2, a)$.

На основе стационарного распределения $\pi(m, n_1, n_2)$ вычисляются следующие показатели: вероятность блокировки запроса в слайсе i, средняя скорость передачи данных на пользователя, среднее число активных пользователей, средняя занятость радиоресурсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ghebrial I. E. Z., Leonteva K. A., Kochetkova I. A., Shorgin S.* Markov Decision Process and Artificial Neural Network for Resource Capacity Planning in 5G Network Slicing // Communications in Computer and Information Science. 2024. Vol. 2163. P. 33–47.
2. *Kochetkova I. A., Leonteva K. A., Ghebrial I. E. Z., Vlaskina A., Burtseva S., Kushchazli A., Samouylov K.* Controllable Queuing System with Elastic Traffic and Signals for Resource Capacity Planning in 5G Network Slicing // Future Internet. 2024. Vol. 16, № 1. P. 18.
3. *Kochetkova I. A., Leonteva K. A., Ghebrial I. E. Z., Khakimov A.* Dynamic Spectrum Management for 5G NR Network Slicing: Frequency Reallocation Ensuring Slice Isolation and Revenue Maximization // IEEE Access. 2025. Vol. 13. P. 208414–208438.

РЕСУРСНАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ЗАНЯТОСТИ УЧАСТНИКОВ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ СО СЛУЧАЙНОЙ СЛОЖНОСТЬЮ ЗАДАЧ

Ж. Абрамян[1], К. М. Терентьев[1], И. А. Кочеткова[1, 2]

[1] *Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, г. Москва, Россия*

[2] *Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: 1132249726@rudn.ru

В современных организациях бизнес-процессы порождают поток задач, выполнение каждой из которых требует одновременного участия сотрудников из нескольких функциональных групп [2, 3]. Трудоемкость задачи для каждой группы участников является случайной величиной, определяемой сложностью задачи – скрытой переменной, значение которой не известно заранее. Аппарат ресурсных систем массового обслуживания [3] позволяет аналитически оценить среднюю занятость участников и оптимальную численность групп.

Рассматривается организация с M группами участников бизнес-процессов. Группа m располагает бюджетом C_m рабочего времени в единицу планирования. В систему поступают задачи K классов: задачи класса k поступают по пуассоновскому потоку с интенсивностью λ_k, время выполнения – экспоненциально с параметром μ_k. При поступлении задача одновременно занимает рабочее время всех задействованных групп: вектор занятости $\boldsymbol{\eta}_k = (\eta_{k1}, \ldots, \eta_{kM})$, где η_{km} – объем рабочего времени, требуемый от группы m.

Особенностью модели является введение скрытой переменной сложности ζ_k, принимающей значения из дискретного множества $\{1, \ldots, L\}$ с вероятностями q_ℓ. Трудоемкость задачи для группы m определяется отображением $\eta_{km} = d_m(\zeta_k)$, что порождает зависимость между занятостью разных групп: более сложная задача загружает всех участников сильнее.

Состояние системы описывается вектором $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_K)$, где n_k – число задач класса k, находящихся в работе. При наилучшем случае – минимальном уровне сложности $\zeta_k = 1$ – максимально допустимое число задач класса k в группе m равно $N_m = \lfloor C_m / d_m(1) \rfloor$.

Пространство состояний:

$$\mathcal{X} = \big\{\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_K) : \quad \textstyle\sum_{k=1}^{K} n_k \le N_m, \;\; m = 1, \ldots, M\big\}.$$

Условная вероятность выделения ресурса $p_k(\mathbf{n})$ определяется вероятностью того, что суммарная занятость группы m в состоянии $\mathbf{n}$, равная $\xi_m(\mathbf{n}) = \sum_{k=1}^{K} \eta_{km}(n_k)$, где $\eta_{km}(n_k) = \sum_{j=1}^{n_k} \eta_{km}^{(j)}$ – занятость от n_k задач класса k, не превысит C_m ни в одной группе.

Для вычисления $p_k(\mathbf{n})$ рассматриваются два уровня упрощений. На первом уровне – свертки: распределение $\eta_{km}(n_k)$ находится как n_k-кратная свертка распределения одной задачи η_{km}, а распределение суммарной занятости $\xi_m(\mathbf{n})$ по всем классам – как свертка между классами. На втором уровне – центральная предельная теорема (ЦПТ): если задачи класса k в группе m одинаково распределены (independent and identically-distributed, i.i.d.), то $\eta_{km}(n_k) \approx \mathcal{N}(n_k\mu_{km}, n_k\sigma_{km}^2)$, что дает явное выражение для вероятности $\Pr\big(\eta_{km}(n_k) \le C_m\big)$ без явных сверток. Если i.i.d. дополнительно выполнено на уровне классов, то $\xi_m(\mathbf{n}) = \sum_{k=1}^{K} \eta_{km}(n_k)$ также аппроксимируется нормальным законом. Таким образом, реализуются три режима вычислений: (1) точные свертки на обоих уровнях; (2) ЦПТ на уровне задач класса, свертка между классами; (3) ЦПТ на обоих уровнях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yarkina N., Popovskaya N., Khalina V., Gaidamaka A., Samouylov K.* Modeling end-to-end business processes of a telecom company with a BCMP queueing network // Communications in Computer and Information Science. 2017. Vol. 800. P. 279–296.
2. *Terentyev K. M., Abuzyarova L. D., Kochetkova I. A., Samouylov K. E.* Business process analysis of university admissions: Combining TM Forum's eTOM framework, discrete-event simulation, and queuing theory // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 2025. Vol. 33, № 2. P. 157–171.
3. *Naumov V., Gaidamaka Yu., Yarkina N., Samouylov K.* Matrix and Analytical Methods for Performance Analysis of Telecommunication Systems. Springer, 2022.

АНАЛИЗ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С МЕХАНИЗМОМ ОТЛОЖЕННОГО ОБОБЩЕННОГО ОБНОВЛЕНИЯ

Е. П. Канева[1]

[1] *Российский университет дружбы народов имю Патриса Лумумбы, г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: 1132222004@rudn.ru

В современных телекоммуникационных сетях и облачных вычислениях критически важен баланс между актуальностью данных о состоянии системы и накладными расходами на их синхронизацию. Классические модели СМО предполагают мгновенную доступность информации [1], что не отражает специфику распределенных сред. Рассматривается механизм отложенного обобщенного обновления, снижающий нагрузку на каналы управления за счет временной задержки и агрегации сигналов. В отличие от периодического или порогового обновления, он сочетает накопление k событий с ограничением задержки $\bar{\tau}$ (принцип «первого сработавшего условия»), адаптируясь к интенсивности потока. Цель — анализ эффективности СМО с данным механизмом. Метрика «возраст информации» (Age of Information, AoI) [2] в контексте агрегации данных изучена недостаточно.

Рассматривается одноканальная СМО с бесконечной очередью и дисциплиной FIFO. Входной поток заявок — пуассоновский с интенсивностью λ, время обслуживания — экспоненциальное с параметром μ. Ключевой особенностью является наличие оператора отложенного обобщенного обновления, характеризующегося средней задержкой синхронизации $\bar{\tau}$ и коэффициентом агрегации событий k. Агрегация событий осуществляется по принципу «первого сработавшего условия»: сигнал передается при накоплении k событий или истечении задержки $\bar{\tau}$. Состояние системы описывается вектором $S(t) = \{N(t), I(t)\}$, где $N(t)$ — число заявок, а $I(t)$ — индикатор актуальности данных. Для анализа использован метод производящих функций [3], позволивший получить аналитические выражения для стационарных вероятностей и ключевых показателей эффективности.

Разработана имитационная модель на языке Python. При фиксированной нагрузке $\rho = \lambda/\mu = 0.8$ увеличение задержки $\bar{\tau}$ приводит

к экспоненциальному росту времени ожидания W при превышении порога $\bar{\tau} > 1.5$. Для коэффициента агрегации k выявлен компромиссный характер: увеличение k от 1 до 5 снижает нагрузку на канал управления на 70%, но увеличивает W на 30%.

Анализ условий устойчивости показывает, что классический критерий эргодичности $\rho < 1$ модифицируется: $\rho_{\text{eff}} = \rho/\eta < 1$, где $\eta = \exp(-\lambda\bar{\tau}) \cdot (1 - 1/k)$ — коэффициент эффективности обновления, отражающий долю времени, в течение которого управляющий контур располагает актуальными данными. При $\bar{\tau} \to 0$ или $k \to 1$ имеем $\eta \to 1$ (классический случай), при увеличении параметров η убывает, сужая область устойчивости.

Таблица 1
Рекомендуемые параметры механизма обновления

Нагрузка	$\bar{\tau}$ (ед. времени)	k
Низкая ($\rho \leq 0.4$)	≤ 2.0	$4 - 7$
Средняя ($0.4 < \rho \leq 0.7$)	≤ 1.5	$3 - 5$
Высокая ($\rho > 0.7$)	≤ 1.0	$2 - 4$

Разработана имитационная модель на языке Python. При фиксированной нагрузке $\rho = \lambda/\mu = 0.8$ (средний режим), базовом значении задержки $\bar{\tau} = 1.0$ и варьировании коэффициента агрегации k от 1 до 5 получено снижение нагрузки на канал управления примерно в 3 раза при увеличении среднего времени ожидания W на треть. Увеличение задержки $\bar{\tau}$ при $k = 3$ и той же нагрузке $\rho = 0.8$ приводит к экспоненциальному росту W при превышении порога $\bar{\tau} > 1.5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 2017. 432 с.
2. *Sun Y., Cyrulnik I.* Age of Information: A New Metric for Information Freshness // Synthesis Lectures on Communication Networks. 2022. Т. 12, № 2. 224 с.
3. *Вишневский В. М., Семенова Н. В.* Методы анализа производительности сетей. М.: Техносфера, 2020. 340 с.

НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТКРЫТЫХ СЕТЕЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ С КОНТРОЛЬНЫМИ ОЧЕРЕДЯМИ И КАРАНТИННЫМ УЗЛОМ

С. Ю. Евмененко[1]

[1] *Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, г. Гомель, Беларусь*

Автор, ответственный за переписку: stas.evmenenko@yandex.ru

В открытую сеть массового обслуживания, состоящую из N однолинейных узлов с контрольными очередями и $(N+1)$-го узла, который назовем карантинным. В сеть поступает простейший поток заявок с параметром λ. Каждая заявка независимо от других заявок направляется в i-й узел с контрольной очередью с вероятностью $p_{0,i}$ $\left(\sum_{i=1}^{N} p_{0,i} = 1, i = \overline{1,N}\right)$. Каждая заявка, поступающая в i-й узел с контрольной очередью, присоединяется к контрольной очереди, где проверяется на стандартность. Времена проверки независимы, не зависят от процессов поступления, обслуживания и имеют показательное распределение с параметром ν_i, ν_i – некоторая положительная постоянная $(i = \overline{1,N})$. Каждая заявка после окончания проверки в i-м узле с вероятностью p_i признается нестандартной и независимо от других заявок мгновенно направляется в очередь $(N+1)$-го узла, а с вероятностью $1-p_i$ присоединяется к очереди стандартных заявок в i-м узле. Каждая стандартная заявка после завершения обслуживания в i-м узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j-й узел с вероятностью $p_{i,j}$, а с вероятностью $p_{i,0}$ покидает сеть $\left(\sum_{j=1}^{N} p_{i,j} + p_{i,0} = 1, i = \overline{1,N}\right)$.

В $(N+1)$-м узле, который назовем карантинным, осуществляется восстановление качеств (лечение) нестандартных заявок или их обезвреживание. Каждая заявка после обслуживания в $(N+1)$-м узле независимо от других заявок мгновенно направляется в очередь j-го узла с вероятностью $p_{N+1,j}$, т.е. «вылечивается» и продолжает движение по сети, а с вероятностью $p_{N+1,0}$ обезвреживается, т.е. покидает сеть $\left(\sum_{j=1}^{N} p_{N+1,j} + p_{N+1,0} = 1,\right)$.

Стандартные заявки, а также заявки, проходящие «лечение» в карантинном узле, обслуживаются единственным прибором i-го узла,

времена обслуживания заявок независимы, не зависят от процесса поступления, процесса проверки заявок на стандартность и имеют произвольную функцию распределения $B_i(t)$, для которой верно равенство

$$\mu_i^{-1} = \int_0^{+\infty} [1 - B_i(t)]dt, i = \overline{1, N+1}, \quad (1)$$

где μ_i – скорость обслуживания заявок i-м прибором.

Дисциплина обслуживания стандартных заявок, а также заявок, находящихся в карантинном узле, LCFS PR.

Стационарный режим функционирования данной сети массового обслуживания при $B_i(t) = 1 - \exp\{-\mu_i t\}, t > 0, i = \overline{1, N+1}$ был исследован в [1]. Теперь будем предполагать, что $B_i(t)$ – произвольная функция распределения неотрицательной случайной величины, в таком случае процесс x_t не является марковским.

Теорема. Случайный процесс, описывающий число заявок в открытой сети обслуживания в момент времени t, при выполнении условий $\frac{\lambda\varepsilon_i}{\nu_i} < 1$, $\frac{\lambda\varepsilon_i(1-p_i)}{\mu_i} < 1$ $(i = \overline{1, N})$, $\frac{\lambda\varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}} < 1$ и (1), имеет финальное строго положительное распределение вида $p(\mathbf{x}) = p_1(x_1)p_2(x_2)\cdots p_{N+1}(x_{N+1})$, $x \in X$, с множителями $p_i(x_i) = \left(\frac{\lambda\varepsilon_i}{\nu_i}\right)^{m_i}\left(\frac{\lambda\varepsilon_i(1-p_i)}{\mu_i}\right)^{n_i}\left(1 - \frac{\lambda\varepsilon_i}{\nu_i}\right)\left(1 - \frac{\lambda\varepsilon_i(1-p_i)}{\mu_i}\right)$, $i = \overline{1, N}$, $p_{N+1}(x_{N+1}) = \left(\frac{\lambda\varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}}\right)^{n_{N+1}}\left(1 - \frac{\lambda\varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}}\right)$. Здесь $\lambda\varepsilon_i$ — интенсивность потока заявок, выходящего из i-го узла $(i = \overline{1, N+1})$.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Ю. В. Малинковскому за постоянное внимание к работе и неоценимую помощь, оказанную в подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Летунович Ю. Е., Якбович О. В.* Открытые марковские сети массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом// Вестник Томского государственного университета. 2017. Т. 41, № 41. С. 32–38.

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ ДЛЯ АНАЛИЗА СПУТНИКОВОГО ДОСТУПА В СЕТИ 6G С ДВУМЯ ОРБИТАМИ LEO И MEO

К. А. Леонтьева[1], И. А. Кочеткова[1, 2]

[1] *Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, г. Москва, Россия*

[2] *Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: leontyeva-ka@rudn.ru

Спутниковый доступ является ключевым компонентом архитектуры сетей 6G, обеспечивающим глобальное покрытие в гибридных наземно-спутниковых системах [1]. Многоуровневые спутниковые группировки, сочетающие орбиты LEO (low earth orbit, низкая околоземная орбита) и MEO (medium earth orbit, средняя околоземная орбита), позволяют совместить малые задержки на LEO с расширенным покрытием MEO [2]. Для аналитической оценки характеристик качества обслуживания в таких системах можно применить системы массового обслуживания (СМО) с повторными вызовами (retrial queueing systems, RQ-systems).

Рассматривается спутниковая система доступа, охватывающая фиксированный географический регион с неподвижными наземными пользователями. В качестве упрощающего предположения число доступных каналов каждого уровня считается фиксированным, что соответствует режиму плотных группировок с квазипостоянным числом видимых спутников над регионом. Система включает два уровня: созвездие из N_{LEO} спутников на орбите LEO с c_{LEO} каналами каждый и созвездие из N_{MEO} спутников на орбите MEO с c_{MEO} каналами каждый; суммарное число доступных каналов $N = c_{\mathrm{LEO}}N_{\mathrm{LEO}} + c_{\mathrm{MEO}}N_{\mathrm{MEO}}$. Уровень LEO является основным, уровень MEO – вторичным и принимает трафик, который не может быть немедленно обслужен на LEO. Запросы, заставшие все N каналов занятыми, направляются на орбиту повторных вызовов конечной емкости M и через случайное время совершают повторную попытку доступа.

Входящий поток запросов описывается пуассоновским процессом с интенсивностью λ. Время обслуживания экспоненциально: с параметром μ_{LEO} для каналов LEO и μ_{MEO} для каналов MEO, причем

$\mu_{\text{LEO}} \geq \mu_{\text{MEO}}$. Время ожидания на орбите повторных вызовов экспоненциально с параметром γ.

Система описывается двумерным марковским случайным процессом $\big(N(t), M(t)\big)$, $t \geq 0$, где $N(t)$ число активных сеансов связи в момент t, $M(t)$ число запросов на орбите повторных вызовов. Пространство состояний:

$$\mathcal{X} = \big\{(n,m): \quad n = 0,1,\ldots,N, \;\; m = 0,1,\ldots,M\big\}.$$

Ненулевые элементы матрицы интенсивностей переходов имеют вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Q}[(n,m),(n+1,m)] = \lambda, && n < N, \;\; m \geq 0,\\
&\mathbf{Q}[(n,m),(n,m+1)] = \lambda, && n = N, \;\; m < M,\\
&\mathbf{Q}[(n,m),(n-1,m)] = \mu(n), && n > 0, \;\; m \geq 0,\\
&\mathbf{Q}[(n,m),(n+1,m-1)] = m\,\gamma, && n < N, \;\; m > 0,
\end{aligned}$$

где суммарная интенсивность завершения сеансов при n активных соединениях $\mu(n) = \min(n, C_{\text{LEO}})\mu_{\text{LEO}} + \max(0, n - C_{\text{LEO}})\mu_{\text{MEO}}$, где $C_{\text{LEO}} = c_{\text{LEO}} N_{\text{LEO}}$ суммарное число LEO-каналов. При $n = N$ и $m > 0$ повторный вызов застает систему полностью занятой и остается на орбите, не порождая перехода.

На основе стационарного распределения $\pi(n,m)$, находимого из системы уравнений равновесия $\boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, $\sum_{(n,m)\in\mathcal{X}} \pi(n,m) = 1$, вычисляются основные показатели качества обслуживания: вероятность блокировки поступающего запроса, среднее число запросов на орбите повторных вызовов, загрузка каналов каждого орбитального уровня. Учет переменной видимости спутников и нестационарности входящего потока в зависимости от геометрии орбит представляет задачу дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mahboob S., Liu L.* Revolutionizing future connectivity: A contemporary survey on AI-empowered satellite-based non-terrestrial networks in 6G // IEEE Communications Surveys & Tutorials. 2024. Vol. 26, № 2. P. 1279–1321.
2. *Le T. T. T., Hassan S. A., Kaleem Z., Moinuddin M., Al-Naffouri T. Y., Jung M.* A survey on random access protocols in direct-access LEO satellite-based IoT communication // IEEE Communications Surveys & Tutorials. 2025. Vol. 27, № 1. P. 426–462.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОБЩИМ БУФЕРОМ ПРИ ЛИНЕЙНОМ ИЗМЕНЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ПРИБЛИЖЕННЫМ МЕТОДОМ

К. А. Вытовтов[1], Е. В. Шабанова[1]

[1] *Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: shabanova0927@gmail.com

Рассматривается трехфазная система массового обслуживания с одним однолинейным обслуживающим устройством, общим буфером, пуассоновским входным потоком, экспоненциальным распределнием времени обслуживания на фазах. Заявка, поступающая в систему, проходит обработку в фазах последовательно. Если фаза, в которую поступает заявка, уже занята, заявка переходит в буфер и ожидает освобождения фазы. После освобождения фазы заявка покидает буфер и проходит обработку, затем передается в следующую фазу. Интенсивности обслуживания μ_i в i-й фазе изменяются линейно в период времени $t \in (0, T)$: $\mu_i(t) = \mu_i^0 + \mu_i^{ch} t$.

Система уравнений Колмогорова, описывающая процесс обслуживания заявок, является неавтономной. Для получения ее приближенного решения используется аппроксимация интенсивностей обработки заявок кусочно-постоянными функциями:

$$\mu_i(t) = \begin{cases} \mu_i^0, & t \in [0, t_0); \\ \mu_i^1, & t \in [t_0, t_1); \\ \dots & \\ \mu_i^k, & t \in [t_{k-1}, T). \end{cases}$$

Для каждого отрезка времени $(t_{i-1}, t_i]$ отдельно находится матрица преобразования вероятности M_i. Вероятности состояний системы в момент $t \in [t_{p-1}, t_p]$ можно вычислить по формуле

$$P(t) = M_p(t - \sum_{i=1}^{p-1} \Delta t_i) \prod_{i=p-1}^{0} M_i(\Delta t_i) P(0). \tag{1}$$

Для иллюстрации рассмотрена система с буфером размера $N = 3$, для которой изменяется только интенсивность обслуживания в первой

фазе в период от 0 до $t = 5 \cdot 10^{-7}$: $\mu_1(0) = 12 \cdot 10^6$, $\mu_1(5 \cdot 10^{-7}) = 6 \cdot 10^6$. Далее μ_1 остается постоянной. Интенсивности обслуживания во второй и третьей фазах постоянны и равны $\mu_2 = 15 \cdot 10^6$ и $\mu_3 = 9 \cdot 10^6$. Результаты, полученные описанным методом, были сравнены с полученными с помощью функций библиотеки SciPy языка Python. Выборочная дисперсия ошибки при $k = 50$ имеет порядок 10^{-6} и уменьшается при увеличении k. На рис. 1 представлен график зависимости дисперсии от количества отрезков k. При $k > 500$ дисперсия имеет порядок 10^{-8}.

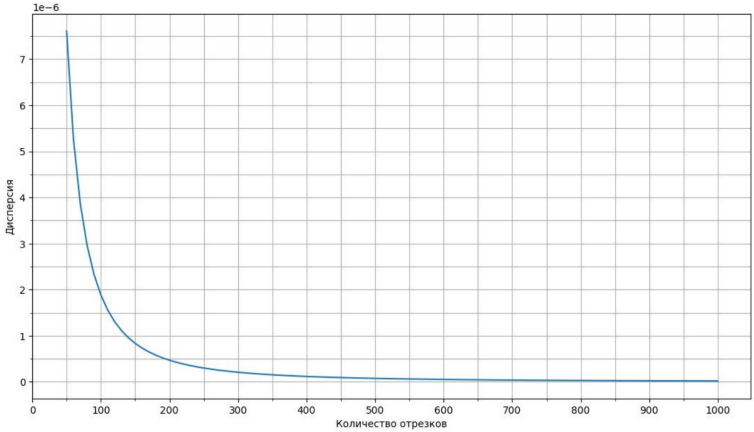


Рис. 1. График вероятностей состояний системы

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вытовтов К. А., Барабанова Е. А., Шабанова Е. В.* Исследование переходного режима работы трехфазной системы массового обслуживания с общим буфером // Управление большими системами. 2025. № 117. С. 52–73.
2. *Vytovtov K. A., Barabanova E. A.* An Analytical Method for the Analysis of Inhomogeneous Continuous Markov Processes with Piecewise Constant Transition Intensities // Stochastic systems. 2021. T. 82. P. 2112–2124.

ЗАДАЧА АНАЛИЗА БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ ОРГАНИЗАЦИИ В ВИДЕ УПРАВЛЯЕМОЙ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Л. Д. Абузярова[1], И. А. Кочеткова[1,2]

[1] *Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, г. Москва, Россия*

[2] *Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: 1042250137@rudn.ru

Бизнес-процессы организации представляют собой последовательности действий – этапов обработки заявок, выполняемых сотрудниками различных подразделений. Такая структура естественно описывается в виде сети массового обслуживания (СеМО): каждый этап или подразделение является узлом сети, а маршрут обработки заявки задается матрицей переходов между узлами [1]. Сети типа BCMP (Baskett–Chandy–Muntz–Palacios) допускают несколько классов заявок и различные дисциплины обслуживания, что позволяет моделировать разнородные типы задач и параллельно выполняемые процессы в рамках единой аналитической модели [2].

Уровень детализации модели определяется выбором классов заявок. На детальном уровне класс соответствует конкретному состоянию заявки в процессе – результату выполнения очередного этапа, что порождает большое число классов. На укрупненном уровне классы объединяются по признаку схожести маршрутизации или независимости времен обслуживания от предыстории, что существенно сокращает размерность вектора состояний. Промежуточный уровень детализации отвечает числу различных маршрутов в процессе [3]. Выбор уровня детализации определяет точность модели и вычислительную сложность анализа.

Для управления бизнес-процессами через параметры СеМО рассматриваются следующие инструменты. Во-первых, матрица маршрутизации $\mathbf{P} = \{P_{ij}^{(k)}\}$, где $P_{ij}^{(k)}$ – вероятность перехода заявки класса k из узла i в узел j после завершения обслуживания: управление маршрутизацией позволяет перераспределять нагрузку между подразделениями и менять порядок выполнения этапов. Во-вторых, интенсивности обслуживания $\mu_m^{(k)}$ – скорость обслуживания заявок класса k

в узле m, соответствующая штатной численности подразделения: изменение числа сотрудников регулирует пропускную способность узла. В-третьих, управление доступом (admission control): принятие или отклонение новой заявки в зависимости от текущего состояния сети $\mathbf{n}$, что позволяет предотвращать перегрузку. В-четвертых, дисциплина обслуживания в узле – переключение между FCFS (first come – first served), приоритетным и вытесняющим обслуживанием в зависимости от класса заявки и загрузки узла.

Состояние CeMO описывается вектором $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_M)$, где $\mathbf{n}_m = (n_{m1}, \ldots, n_{mK})$, n_{mk} – число заявок класса k в узле m, M – число узлов (подразделений), K – число классов заявок. Управляемая CeMO задается выбором управляющего воздействия $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbf{n})$. Задача формулируется как минимизация целевого функционала – например, среднего времени выполнения процесса или вероятности нарушения соглашения об уровне обслуживания – по допустимым политикам управления. При пуассоновских входящих потоках с интенсивностями λ_k и экспоненциальных временах обслуживания управляемая CeMO допускает постановку в рамках марковского процесса принятия решений, для которого существуют эффективные алгоритмы нахождения оптимальной стратегии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Samouylov K., Gaidamaka Yu., Zaripova E.* Analysis of business process execution time with queueing theory models // Communications in Computer and Information Science. 2016. Vol. 638. P. 315–326.
2. *Yarkina N., Popovskaya N., Khalina V., Gaidamaka A., Samouylov K.* Modeling end-to-end business processes of a telecom company with a BCMP queueing network // Communications in Computer and Information Science. 2017. Vol. 800. P. 279–296.
3. *Terentyev K. M., Abuzyarova L. D., Kochetkova I. A., Samouylov K. E.* Business process analysis of university admissions: Combining TM Forum's eTOM framework, discrete-event simulation, and queuing theory // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 2025. Vol. 33, № 2. P. 157–171.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОБЪЕКТА ИНФОРМАЦИОННОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ СМО С НЕНАДЕЖНЫМ ПРИБОРОМ

Е. А. Барабанова[1], М. А. Филонова[1]

[1] *Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия*

Автор, ответственный за переписку: zvezdfilonova@yandex.ru

Методы теории массового обслуживания (СМО) находят широкое применение при оценке производительности и устойчивости телекоммуникационных систем к негативным воздействиям [1]. Опишем поведение коммутатора сети передачи данных в условиях кибератак с использованием модели M/PH/1/N с ненадёжным прибором. Сеть считается устойчивой, если пропускная способность коммутатора остаётся выше порогового значения, достаточного для обслуживания всех абонентов с требуемым качеством. Таким образом, задача сводится к оценке пропускной способности коммутатора в зависимости от интенсивности трафика, скорости обработки пакетов, частоты сбоев и интенсивности восстановления.

В рассматриваемой СМО время обслуживания пакетов имеет распределение фазового типа, описываемое m фазами и задаваемое интенсивностями переходов β_j, τ_j, s_{ij} между состояниями системы, где $i = \overline{0, N+1}$, $j = \overline{0, m}$. Граф состояний СМО представлен на рис. 1. Интенсивности переходов между состояниями обозначают следующие параметры системы: λ — интенсивность поступления пакетов, α — интенсивность отказа обслуживающего прибора, вызванного кибератакой или другим негативным воздействием, η — интенсивность восстановления работоспособности обслуживающего прибора.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова, составленная по графу 1, решается операторным методом. На основе нестационарных вероятностей состояний системы получены вероятности потери пакетов, нахождения системы в состоянии восстановления и пропускной способности системы.

Для примера представлены графики пропускной способности коммутатора при различных входных параметрах. На рис. 2 слева $\alpha = 3.5$, $\eta_1 = 2.0$ (синяя кривая), $\eta_2 = 5.0$ (красная кривая), справа $\alpha = 1.5$,

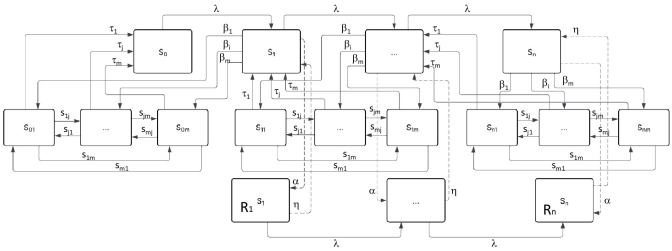


Рис. 1. Граф состояний системы M/PH/1/N

$\eta_1 = 2.0$, $\eta_2 = 5.0$. Желтая линия – пороговый уровень пропускной способности.

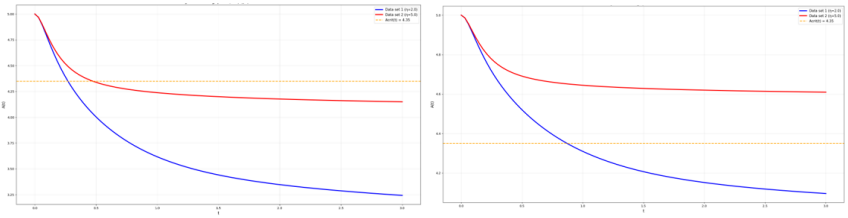


Рис. 2. Графики пропускной способности системы M/PH/1/N

Таким образом, при увеличении интенсивности восстановления системы возрастает пропускная способность коммутатора. Изменение интенсивности отказа прибора не так существенно влияет на устойчивость системы, как интенсивность восстановления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barabanova E. A., Filonova M. A., Varuyeu A. B.* Resilience Analysis of an Information Infrastructure Object Using a Queuing System Model with an Unreliable Device / Proceedings of 9th International Conference on Information, Control, and Communication Technologies (ICCT 2025). Gomel: IEEE, 2025. https://ieeexplore.ieee.org/document/11427799.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СМО M/M/1/N С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ ПРИБОРА ПОСЛЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ ФИКСИРОВАННОГО ЧИСЛА ЗАЯВОК

А. А. Варакина[1], Е. А. Фёдорова[1]

[1] *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Автор, ответственный за переписку: varakina05@list.ru

Системы массового обслуживания с очередью являются классическими моделями, широко применяемыми для анализа работы call-центров, производственных линий, торгово-экономических и других систем. Характерной чертой таких систем является наличие очереди (буфера), в котором заявки ожидают освобождения прибора [1, 2]. В классической постановке предполагается, что прибор абсолютно надёжен и не требует восстановления. Однако на практике многие технические и экономические системы обладают ограниченным ресурсом: после обслуживания определённого числа заявок прибор изнашивается, теряет работоспособность и нуждается в восстановлении (ремонте, замене расходных материалов, профилактике). Примерами могут служить принтер с ограниченным ресурсом картриджа, производственный станок, требующий замены инструмента после обработки заданного числа деталей; или оператор call-центра, нуждающийся в перерыве после выполнения нормы вызовов. Некоторые исследования таких систем представлены в работах [3, 4].

В настоящей работе рассматривается однолинейная система массового обслуживания $M/M/1/N$ с восстановлением прибора после обслуживания фиксированного числа заявок. На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Время обслуживания каждой заявки распределено экспоненциально с параметром μ. Если в момент поступления заявки прибор свободен, заявка немедленно поступает на обслуживание. Если прибор занят или находится на восстановлении, заявка становится в очередь, ограниченную числом мест N. Прибор обладает некоторым ресурсом, т.е. он может обслужить не более K заявок с момента последнего восстановления. После обслуживания K-й заявки прибор мгновенно переходит в состояние восстановления. Длительность восстановления распределена по экспоненциальному закону с параметром μ_K. В состоянии восстановления прибор

не обслуживает заявки; новые заявки накапливаются в очереди. По завершении восстановления прибор возвращается в рабочее состояние с счётчиком $k = 0$ обслуженных заявок. Если в очереди есть заявки, он немедленно начинает обслуживание первой из них.

Для описанной математической модели была составлена система дифференциальных уравнений Колмогорова и получены уравнения баланса в стационарном режиме. Также разработан алгоритм численного решения стационарных уравнений, реализованный на языке программирования Python. Проведён численный анализ характеристик системы и их чувствительности к параметрам модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kleinrock L.* Queueing Systems, Vol. 1: Theory. New York: John Wiley & Sons, 1975. 417 p.
2. *Gross D., Shortle J. F., Thompson J. M., Harris C. M.* Fundamentals of Queueing Theory. Hoboken: John Wiley & Sons, 2008. 500 p.
3. *Kumar N. S.* Threshold-Based Recovery in Queue Theory: Addressing Server Breakdowns, Catastrophic Events, and Customer Reneging.// Journal of Reliability and Statistical Studies. 2025. Vol. 17, No. 02. P. 435–452.
4. *Efrosinin D., Sztrik J.* Performance Analysis and Statistical Modeling of the Single-Server Non-reliable Retrial Queueing System with a Threshold-Based Recovery. // Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM 2015), CCIS. Vol. 564. Cham: Springer, 2015. P. 15–28.

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПУАССОНОВСКИЙ ПОТОК ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СУТОЧНОГО ЭЛЕКТРОПОТРЕБЛЕНИЯ

В. В. Чураков[1], Е. А. Фёдорова[1]

[1] *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Автор, ответственный за переписку: churakovvaler@yandex.ru

Для обеспечения надёжности электроэнергетических сетей необходимо учитывать динамику электропотребления в течение суток. Методы математического моделирования и статистического анализа позволяют оценить график суточной нагрузки в заданных условиях и оптимизировать работу энергоснабжающих предприятий, а также прогнозировать отклик системы на возможные изменения спроса, тем самым минимизируя риски аварийных ситуаций.

Реальные профили нагрузки носят нестационарный характер: интенсивность потребления изменяется в течение суток, отражая поведение пользователей и режимы работы оборудования [1, 2], которые могут зависить от сезона, климатических или экономико-политических событий.

В работе предлагается применить нестационарный пуассоновский поток событий [3] для моделирования объемов электропотребления. Предполагается, что интенсивность потока задается периодической функцией $\lambda(t)$ с периодом $\tau = 24$ ч и имеет такое количество пиков нагрузки, которое характерно для заданной сети, а также соответствует рекомендациям по расчету электрических нагрузок [4].

Моделирование выполнено на примере графика суточной нагрузки жилых помещений, который имеет трёхмодальную структуру (пики утреннего, полуденного и вечернего потребления), интенсивность нестационарный пуассоновский поток которого записана в виде

$$\lambda(t) = \Big[a_1 \sin(w_1\tau) + a_2 \sin(w_2\tau) + a_3 \sin(w_3\tau)\Big] \cdot a + d, \qquad (1)$$

параметры которой определяются из статистических данных.

Разработана программа имитационного моделирования и численного анализа электронагрузки на основе предложенного подхода.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-71-00022, https://rscf.ru/project/24-71-00022/

Практическая значимость работы заключается в возможности применения для решения задач краткосрочного прогнозирования электропотребления, оценки вероятности возникновения пиковых нагрузок и анализа режимов функционирования энергосистем. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании электросетей для повышения эффективности распределения ресурсов и надежности работы энергетической инфраструктуры в целом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демиденко А. С., Шведов Г. В.* Суточные графики электрических нагрузок многоквартирных домов в системах электроснабжения городов // Энергосбережение: теория и практика: труды Десятой Международной школы-семинара молодых ученых и специалистов. Москва, 19–23 октября 2020 г. Курск: «Университетская книга», 2020. С. 123–127.
2. *Хомичев В. А., Шведов Г. В.* Суточные графики электрической нагрузки отдельной квартиры многоквартирного дома в системах электроснабжения мегаполисов // Энергосбережение: теория и практика: труды Одиннадцатой Всерос. конф. с междунар. участием. Москва, 10–14 октября 2022 г. Москва: Центр полиграфических услуг «РАДУГА», 2022. С. 42–48.
3. *Назаров А. А., Терпугов А. Ф.* Теория массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2004. 228 с.
4. Министерство строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации. Методические рекомендации по определению потребности в электрической мощности жилых зданий. М., 2019. 48 с.

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СМО С ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК И ПРОИЗВОЛЬНЫМ ВРЕМЕНЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Д. А. Королев[1]

[1] *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Автор, ответственный за переписку: danilkorolev9999@gmail.com

На вход бесконечнолинейной системы поступают два простейших потока заявок. Положительная заявка, приходящая в систему с параметром λ, начинает обслуживание, продолжительность которого имеет произвольную функцию распределения $B(x)$. Отрицательная заявка, приходящая в систему с параметром α, не взаимодействуя с обслуживающимися положительными заявками, ожидает прихода новой положительной заявки, «уничтожает» её, и обе покидают систему. В системе исследуется процесс $\{n(t), l(t)\}$, где $n(t)$ – число положительных и $l(t)$ – число отрицательных заявок в системе в момент времени t.

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(0,0,t)}{\partial t} = -P(0,0,t)(\alpha + \lambda S(t)) + P(0,1,t)\lambda, \\ \dfrac{\partial P(0,l,t)}{\partial t} = -P(0,l,t)(\alpha + \lambda) + P(0,l+1,t)\lambda + P(0,l-1,t)\alpha, \\ \dfrac{\partial P(n,0,t)}{\partial t} = -P(n,0,t)(\alpha + \lambda S(t)) + P(n-1,0,t)\lambda S(t) + P(n,1,t)\lambda, \\ \dfrac{\partial P(n,l,t)}{\partial t} = -P(n,l,t)(\alpha + \lambda) + P(n,l+1,t)\lambda + P(n,l-1,t)\alpha. \end{cases} \tag{1}$$

Используя метод частичных характеристических функций, систему (1) перепишем в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h(u,0,t)}{\partial t} = (\lambda S(t)(e^{ju} - 1) - \alpha)h(u,0,t) + \lambda h(u,1,t), \\ \dfrac{\partial h(u,l,t)}{\partial t} = -(\lambda + \alpha)h(u,l,t) + \alpha h(u,l-1,t) + \lambda h(u,l+1,t). \end{cases} \tag{2}$$

Поскольку прямое решение полученной системы не представляется возможным, применим для её решения метод асимптотического

анализа [1] в предельном условии эквивалентно высокой интенсивности входящих потоков.

В результате асимптотического анализа была получена характеристическая функция совместного распределения числа положительных и отрицательных заявок:

$$h(u,l) = \exp\left\{juN\varkappa_1 + (ju)^2 N\varkappa_2\right\}\left(1-\frac{\alpha}{\lambda}\right)\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^l,$$

$$\varkappa_1 = (\lambda-\alpha)\int_0^\infty S(u)\,du, \qquad \varkappa_2 = 2\alpha\int_0^\infty S^2(u)\,du + \varkappa_1.$$

Была проведена серия численных экспериментов, в которых асимптотическое распределение сравнивалось с эмпирическим, полученным по результатам имитационного моделирования. Для экспериментов были выбраны следующие значения параметров: $\lambda = 3$, $\alpha = 1$, а также несколько распределений для произвольного времени обслуживания. На рис. 1 представлены асимптотические и имитационные распределения числа положительных заявок для различных распределений времени обслуживания (гамма-, логнормального и равномерного соответственно).

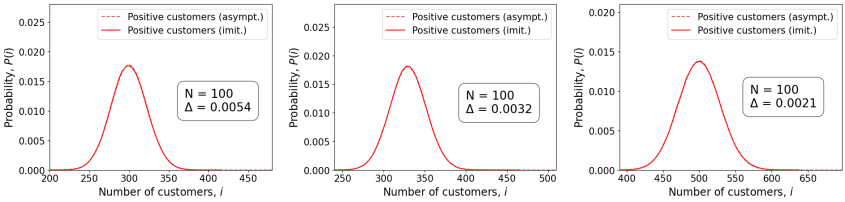


Рис. 1. Сравнение эмпирических и асимптотических распределений вероятностей числа положительных заявок

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назаров А. А., Моисеева А. А.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕТЕЙ СВЯЗИ С ПРИОРИТЕТНЫМ ПОТОКОМ ЭКСТРЕННЫХ СООБЩЕНИЙ

Е. С. Булгакова[1], Е. А. Фёдорова[1]

[1] *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Автор, ответственный за переписку: bulgakova.es@outlook.com

Современные телекоммуникационные системы часто обрабатывают трафик с несколькими типами передаваемой информации (голос, видео, данные IoT) с различными требованиями к качеству обслуживания [1]. Критически важные данные (экстренные вызовы, сигналы управления) требуют минимальных задержек, в то время как фоновый трафик может ожидать обслуживания больше времени [2]. Для моделирования таких сетей часто используют системы массового обслуживания с приоритетными заявками.

RQ-системы (Retrial Queue) – системы массового обслуживания с повторными вызовами. Характерной чертой таких систем является наличие повторных обращений заявок к обслуживающему прибору спустя некоторое случайное время после неудачной попытки обслуживания [3].

В работе исследуется RQ-система $M_2|M_2|1$ с двумя орбитами. На вход системы поступают два простейших потока заявок с параметрами λ_1 и λ_2. Будем считать первый поток заявок приоритетным. Время обслуживания заявок распределено по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. Если прибор свободен, то поступающая заявка его занимает. Если поступает заявка приоритетного потока и прибор обслуживает заявку неприритетного потока, то приоритетная заявка занимает прибор, вытесняя неприоритетную завку на орбиту ожидания. Заявки приоритетного потока не прерывают обслуживание друг друга, а отправляются на соответствующую орбиту, где осуществляет случайную задержку. Продолжительность задержки заявок на орбитах имеет экспоненциальное распределение с параметрами σ_1 и σ_2 соответственно. Доступ заявок с каждой орбиты описывается политикой FIFO.

Для описанной математической модели была составлена система дифференциальных уравнений Колмогорова и получены уравнения

баланса в стационарном режиме. Методом характеристических функций были получены условия стационарного функционирования системы. Выполнен асимптотический анализ числа заявок на орбите первого класса в условии большой загрузки заявками второго класса, а также асимптотический анализ числа заявок на орбите второго класса в условии большой загрузки заявками первого класса. В результате получены выражения для маргинального асимптотического распределения вероятностей числа заявок первого и второго классов на орбите.

Для верификации полученных теоретических результатов и анализа чувствительности модели к входным параметрам был проведён ряд численных экспериментов в программном пакете Mathcad. В качестве исходных данных использованы сценарии, характерные для современных сетей интернета вещей, где трафик разделяется на высокоприоритетные сообщения («активные» действия, аварийные сигналы, команды управления) и «фоновую» передачу (плановые отчеты датчиков).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mehrnoush M., Sathya V., Roy S., Ghosh M.* Analytical Modeling of Wi-Fi and LTE-LAA Coexistence: Throughput and Impact of Energy Detection Threshold. IEEE/ACM Transactions on Networking. 2018. Vol. 26, № 4. P. 1990–2003.
2. *Hirzallah M., Krunz M., Xiao Y.* Harmonious Cross-Technology Coexistence With Heterogeneous Traffic in Unlicensed Bands: Analysis and Approximations. IEEE Transactions on Cognitive Communications and Networking. 2019. Vol. 5, № 3. P. 690–701.
3. *Artalejo J. R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems. A Computational Approach. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. 267 p.

THE ANALYSIS OF SCHEDULING ALGORITHMS FOR A QUANTUM SWITCH MODEL

I. Zubko[1], R. Nekrasova[1, 2]

[1] *Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russian Federation*
[2] *IAMR Karelian Research Centre RAS, Petrozavodsk, Russian Federation*
Corresponding author: rhgfhuf.fhh@gmail.com

Quantum computing is a relevant and trending field for research [1, 2]. With a growing number of quantum networks the need for its performance analysis arises. The quantum switching technology is a key feature of modern quantum networks. Thus the investigation of optimal quantum switch schedules is an important task.

We deal with a stochastic model of a quantum switch first arisen in [3]. The switch is connected to a set of end nodes through L quantum links. Each link independently generates entangled pairs of qubits so called Link-Level Entanglements (LLE) stored in a quantum memory with limited capacity B. New LLEs are generated with corresponding rates α_l, $l = 1, \ldots, L$. The system includes R type of requests inputs arriving with corresponding rates λ_r, $r = 1, \ldots, R$. The particular case of a model under consideration with three types LLE and four types of requests is presented on Figure 1.

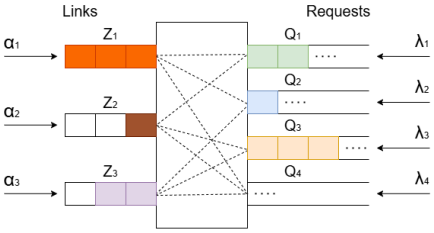


Figure 1. A quantum switch model, $L = 3$, $R = 4$, $B = 3$.

The requests join the system for establishing multi-qubit entanglement between remote nodes. Each request needs the entanglement swapping

operation before the service. The swapping of r-type request combines several LLEs (the set L_r) into a multi-node entangled state. The main idea from [3] used in a current research is that the quantum switch can be interpreted as a two-sided queueing system: on the one hand, the number of quantum resources Z_l are generated, and on the other hand, the queues Q_r of requests for their use arrive.

At each time moment the switch must choose a service schedule. The schedule determines vector $n(t) = (n_1(t), \ldots, n_R(t))$ – the numbers of requests of each type to be served in the current time slot $t = 1, 2, \ldots$. A feasible schedule must satisfy the constraints

$$n_r(t) \le Q_r(t), \quad \sum_{r \in R: l \in L_r} n_r(t) \le Z_l(t), \quad r \in R,\, l \in L.$$

Our goal was to apply several algorithms for optimal schedule and analyze the simulation results.

The first *greedy* strategy aims to maximize the number of served requests in the current time slot $\sum_{r \in R} n_r(t) \to \max$. This policy is simple to implement, however it does not take into account the queue structure.

The *Max-Weight* policy uses weights depending on the current queue sizes. The schedule demands $\sum_{r \in R} Q_r(t) n_r(t) \to \max$.

Finally we investigated *ARE (Average Reward Entanglement)* policy that aims at a more efficient use of quantum resources. When selecting a schedule, both the queue sizes and the probability of successful entanglement swapping are taken into account $\sum_{r \in R} \gamma_r Q_r(t) n_r(t) \to \max$, where γ_r denotes the probability of successful entanglement swapping for requests of type r.

The simulation results had shown that the choice of the appropriate algorithm depends on the system configuration, at the same time in the majority of obtained experiments ARE gives the better results.

REFERENCES

1. *Wehner S., Elkouss D., Hanson R.* Quantum internet: A vision for the road ahead // Science. 2018. Vol. 362, № 6412. Art. num. eaam9288.
2. *Azuma K. et al.* Quantum repeaters: From quantum networks to the quantum internet // Rev. Mod. Phys. 2023. Vol. 95. Art. num. 045006.
3. *Bhambay S., Vasantam T., Walton N.* Optimal Scheduling in a Quantum Switch // arXiv:2501.05380. 2025.

HIGH-INTENSITY ASYMPTOTICS FOR SYNCMAP/M/∞ QUEUES

Syalam A. Wira Dinata.[1, 2], A. Moiseev[1]

[1] *Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*
[2] *Statistics Study Program, Department of Science and Data Analytics, Faculty of Science and Information Technology, Kalimantan Institute of Technology, Indonesia*
Corresponding author: syalam_ali_wira_dinata@lecturer.itk.ac.id

Markovian Arrival Processes (MAP) are widely used in queueing theory and applied probability. The synchronous MAP (syncMAP) [1] is a subclass of MAPs with practical relevance. In this work, we study its properties within the syncMAP/M/∞ queueing system.

We consider an infinite-server queue with a synchronous Markovian arrival process (syncMAP) that has K phases. Let $k(t) \in \{1, \dots, K\}$ be the state of an underlying Markov chain with transition matrix $\mathbf{R} = (r_{kv})$. In state k, arrivals occur according to a Poisson process with rate $\lambda_k > 0$, and we collect these rates in the diagonal matrix $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_K)$. Service times are exponentially distributed with rate $\mu > 0$ and are independent of the arrival process [2].

The system state at time t is described by the pair $(k(t), i(t))$, where $i(t)$ is the number of customers in the system. The probability distribution is given by $P_k(i,t) = \Pr\{k(t) = k,\ i(t) = i\}$, $k = 1, \dots, K$, $i \in \mathbb{N}_0$ and the corresponding probability vector at level i is $\mathbf{P}_i(t) = (P_1(i,t), \dots, P_K(i,t))$. Introduce the service intensity matrices $\mathbf{M}_i = i\mu\mathbf{I}$, $i \geq 0$. The Kolmogorov equations then take the compact form

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}_0(t) = -\mathbf{P}_0(t)\mathbf{\Lambda} + \mu\mathbf{P}_1(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}_i(t) = -\mathbf{P}_i(t)(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{M}_i) + \mathbf{P}_{i+1}(t)\mathbf{M}_{i+1} + \mathbf{P}_{i-1}(t)\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}, \quad i \geq 1. \quad (1)$$

Define the vector characteristic function $\mathbf{h}(u,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun}\mathbf{P}_n(t)$, $j = \sqrt{-1}$, where $\mathbf{P}_n(t)$ satisfies (1). It satisfies the partial differential equation

$$\frac{\partial \mathbf{h}(u,t)}{\partial t} = j\mu(1 - e^{-ju})\frac{\partial \mathbf{h}(u,t)}{\partial u} + \mathbf{h}(u,t)\big[\mathbf{\Lambda}(e^{ju}\mathbf{R} - \mathbf{I})\big], \quad (2)$$

with initial condition $\mathbf{h}(u,0) = \mathbf{g}(u)$, where $\mathbf{g}(u)$ corresponds to the initial distribution $\mathbf{P}_n(0)$ via $\mathbf{g}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun}\mathbf{P}_n(0)$. Kolmogorov equations (1) describing the syncMAP/M/∞ system cannot be solved explicitly due to the non-commutative nature of the differential operator and matrix terms. Therefore, asymptotic methods are employed under the high-intensity condition $N \to \infty$.

Introducing the scaling $\varepsilon = 1/N$, $u = \varepsilon w$, and then the refined scaling $\varepsilon = 1/N^2$, $u = \varepsilon w$, we obtain the Gaussian approximation

$$\mathbf{F}_2(w,t) = \boldsymbol{\pi} \exp\left(jw\varkappa_1(t) - \frac{w^2}{2}\sigma^2(t) \right), \tag{3}$$

where the variance is given by

$$\sigma^2(t) = \frac{\lambda_{\text{fund}}}{\mu}(1 - e^{-2\mu t}) + \frac{2}{\mu}\int_0^t e^{-2\mu(t-s)} \left[\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R}\mathbf{a}(s) - \lambda_{\text{fund}}^2 \right] ds, \tag{4}$$

and $\mathbf{a}(t)$ satisfies the auxiliary equation

$$\mathbf{a}(t)\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{R} - \mathbf{I}) = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R} - \lambda_{\text{fund}}\boldsymbol{\pi}. \tag{5}$$

Thus, the number of customers $i(t)$ is approximately Gaussian

$$i(t) \sim \mathcal{N}\big(N\varkappa_1(t),\ N\varkappa_2(t)\big), \qquad \varkappa_1(t) = \frac{\lambda_{\text{fund}}}{\mu}(1 - e^{-\mu t}), \quad \varkappa_2(t) = \sigma^2(t). \tag{6}$$

The first-order approximation captures only the mean ($O(N^{-1/2})$ error), while the second-order approximation (3) adds variance ($O(N^{-1})$ error).

REFERENCES

1. *Gortsev A. M., Nezhelskaya L. A.* On the relationship between MC-flows and MAP-flows of events // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika. 2011. № 1 (14). P. 13–21.
2. *Wira D. S. A., Moiseev A. N., Nazarov A. A.* Synchronous MAP under condition of high intensity // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika. 2026. (In press)

RELIABILITY OF DISTRIBUTED SYSTEMS: BYZANTINE FAULT TOLERANCE AND QUEUEING THEORY

A.A. Chudinova[1]

[1] *ITMO University, Saint-Petersburg, Russian Federation*
Corresponding author: alexandra.chudinova.official@gmail.com

Reliability in distributed systems represents one of the main challenges of modern computing, as these systems operate in environments characterized by a lack of central control, network latency, and potential node failures. The consensus problem [1] can be formalized: nodes must agree on a common state even in the presence of faulty or malicious components. The classic Byzantine Generals' Problem [2] formalizes this difficulty, demonstrating that reaching consensus is possible only under specific fault-tolerance conditions and with a majority of correct nodes. Queuing theory [3] provides mathematical tools to model the dynamic behavior of distributed systems, particularly with regard to request management, waiting times, and performance degradation. Recent studies show how quality of service and reliability can directly depend on queue length and traffic patterns, affecting the system's ability to process information correctly. The integration of Byzantine consensus models and queuing models allows us to analyze reliability [4] not only in logical terms (consensus correctness) but also in performance terms (latency, throughput, and congestion). This unified approach allows us to describe realistic distributed systems, in which communication delays and workload directly influence the probability of failure and consensus maintenance.

Consider an asynchronous distributed system with N total nodes and f Byzantine nodes. If each node is modeled as an $M/M/1$ queue with arrival rate λ and service rate μ, the global reliability R subject to a consensus timeout T is given by:

$$R(N, f, \lambda, \mu, T) = \begin{cases} 1 - e^{-(\mu-\lambda)T} & \text{if } N \geq 3f + 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

It follows that the system reliability collapses, $\lim\limits_{\rho \to 1^-} R = 0$, regardless of the Byzantine tolerance condition. The proof follows from the intersection of distributed logic and queueing theory.

1) **Logic Constraint.** By the Byzantine Fault Tolerance (BFT) limit, consensus is only reachable if $N \geq 3f + 1$. Let $P_{correct}$ be the probability of logical correctness, which is 1 if the condition holds and 0 otherwise.
2) **Temporal Constraint.** In an $M/M/1$ model, the probability that the message response time W exceeds timeout T (the timeout probability) is $P_{timeout} = e^{-(\mu-\lambda)T}$. The probability of successful completion is $P_{success} = 1 - P_{timeout}$.
3) **Joint Reliability.** Global reliability R is the product of logical correctness and temporal success: $R = P_{correct} \cdot P_{success}$.
4) **Asymptotic Analysis.** As utilization $\rho = \frac{\lambda}{\mu} \to 1$, the service margin $(\mu - \lambda) \to 0$. Substituting this into the reliability function:

$$\lim_{\rho \to 1}(1 - e^{-(\mu-\lambda)T}) = 1 - e^0 = 0. \tag{2}$$

This demonstrates that congestion-induced latency is a sufficient condition for consensus failure even in BFT-compliant systems. The model rigorously demonstrates that:

$\boxed{\text{Reliability} \neq \text{fault tolerance alone,}}$ but $\boxed{\text{Reliability} = f(\text{consensus, performance}).}$

The proposed approach overcomes the limitations of traditional models by showing that consensus correctness depends not only on logical conditions, but also on performance constraints related to system load and communication latency. The main result demonstrates that, even with a sufficient number of correct nodes, increasing congestion (i.e., when (is: $\rho \to 1$) inevitably leads to reliability degradation, ultimately leading to consensus collapse. This highlights a fundamental property: reliability in distributed systems is an emergent phenomenon, determined by the interaction between stochastic dynamics and consensus protocols.

REFERENCES

1. *Kshemkalyani A. D., Singhal M.* Distributed computing principles, algorithms, and systems. Cambridge University Press, 2008. 756 p.
2. *Castro M., Liskov B.* Practical Byzantine Fault Tolerance // Name of the conference or volume. Massachusetts Institute of Technology, 2001. 172 p.
3. *Kleinrock L.* Queueing Systems // Journal of the American Statistical Association. 1976. Vol. 1. P. 1–21.
4. *Bogatyrev V. A.* Information Systems and Technologies. Reliability Theory: A Textbook for Universities. Moscow: Yurait Publishing House, 2024. 317 p.

СОДЕРЖАНИЕ

Пленарные доклады 5
Цициашвили Г. Ш. Оценка детерминированного мертвого времени по наблюдениям за случайными потоками 6
Зорин А. В. Анализ времени жизни на основе модели $M/GI/\infty$ 8
Рыков В. В., Иванова Н. М. Управляемые марковские цепи (Учебное пособие) 10
Секционные доклады 12
Вытовтов К. А., Барабанова Е. А., Иванов М. Г. Физические аспекты построения моделей систем связи на основе СМО 13
Лю М. Многолинейные системы массового обслуживания с повторными вызовами и неоднородными приборами 15
Барабанова Е. А., Вытовтов К. А., Корнеев А. Д. СМО с аномальными заявками для анализа влияния помех на устойчивость узлов беспроводной сети 17
Вытовтов К. А., Барабанова Е. А., Новочадова А. В. Модели и алгоритмы оценки устойчивости экосистемы в период распространения массовых заболеваний живых организмов 19
Жарков М. Л., Казаков А. Л., Лемперт А. А. Применение полуоткрытой сети массового обслуживания с делением и слиянием заявок для моделирования железнодорожного участка..... 21
Паращенко А. Д. Анализ сквозной задержки в сетях интегрированного доступа и транзита..... 23
Иванова А. С. Моделирование одномерного «On / Off» процесса с MMPP управляющим потоком..... 25
Измайлова Я. Е., Канылбай З. Асимптотический анализ орбиты ожидания в RQ-системе $M/G/1$ с отрицательными заявками и восстановлением искаженных положительных заявок 27
Нетесов И. Ф. Марковские цепи с дискретным временем для SIR-моделей 29
Лапатин И. Л., Луценко Н. А. Программный инструмент для подбора параметров модели коррелированного потока по реальным данным 31

Малков К. Г., Лапатин И. Л. Имитационное моделирование вычислительного узла на базе закрытой двухфазной СМО в условиях ограниченного числа пользователей и конкуренции за ресурс 33
Жамсап Д. Д., Лапатин И. Л. Оптимизация потребления энергии вычислительного узла при ограниченном числе пользователей 35
Бабаева Б. Э., Назаров А. А. Бесконечнолинейная система с интенсивностью входящего потока, зависящей от числа занятых приборов в системе 37
Мухин А. В., Семенова Д. В. О задаче построения рекомендательной системы для B2B-торговли 38
Гайдамака Е. А. К анализу системы массового обслуживания с ограничением на обслуживание заявок 40
Горбунова А. В., Лебедев А. В. Об оценке характеристик split-merge систем с зависимыми приборами 42
Дворецкий А. Г. Имитационная модель для анализа переходного режима СМО с нетерпеливыми заявками и марковским входным потоком 44
Ковалев А. Л. СМО с разнородным входным потоком для оценки устойчивости объекта транспортной инфраструктуры 46
Кувыкина Е. В., Кузнецова В. А. Исследование системы регулирования перекрёстка с выделенным пешеходным потоком 48
Вытовтов К. А., Казаков С. Э. СМО с групповым марковским входным потоком для анализа производительности сервера при воздействии кибератак 50
Лысов И. М. Кудрявцев Е. В Исследование системы массового обслуживания с нециклическим управлением 52
Даренский П. А. Имитационная модель сети передачи данных между центром управления и летательными аппаратами 54
Сергеева Н. В., Васильева Е. А. Оптимизации времени реакции сети массового обслуживания 56
Журавель Н. В., Семёнова О. В. Аппроксимация межузловых потоков в многофазной стохастической системе с потерями 58
Хитяев Е. А., Зарядов И. С. Двухочередная JSQ–SLQ система с прерываемым обслуживанием и переключением прибора: матрично-геометрический подход 60

Ахметова Е. Т., Моисеева С. П. Асимптотически-диффузионный анализ системы массового обслуживания с аномальными заявками 62
Матусевич Д. С., Матусевич Е. В. Имитационная модель избирательного участка 64
Назаров А. А., Жидкова В. А., Шкленник М. А. Распределение вероятностей числа заявок в RQ-системе M/GI/1 с поступлением заявок входящего потока на орбиту 66
Михалева А. Е., Кудрявцев Е. В. Построение и исследование системы массового обслуживания с петлей и порогами 68
Монгуш В. М, Моисеева С. П. Система массового обслуживания с пуассоновскими положительными и отрицательными заявками 70
Гебриал И. Е. З., Кочеткова И. А. Ресурсная система массового обслуживания для анализа нарезки радиочастотного спектра сети 5G/6G с равной скоростью передачи данных 72
Абрамян Ж., Терентьев К. М., Кочеткова И. А. Ресурсная система массового обслуживания для анализа занятости участников бизнес-процессов со случайной сложностью задач 74
Канева Е. П. Анализ системы массового обслуживания с механизмом отложенного обобщенного обновления 76
Евмененко С. Ю. Нечувствительность стационарного распределения открытых сетей обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом 78
Леонтьева К. А., Кочеткова И. А. Система массового обслуживания с повторными вызовами для анализа спутникового доступа в сети 6G с двумя орбитами LEO и MEO 80
Вытовтов К. А., Шабанова Е. В. Исследование трехфазной системы массового обслуживания с общим буфером при линейном изменении параметров приближенным методом 82
Абузярова Л. Д., Кочеткова И. А. Задача анализа бизнес-процессов организации в виде управляемой сети массового обслуживания 84
Барабанова Е. А., Филонова М. А. Анализ устойчивости объекта информационной инфраструктуры на основе модели СМО с ненадежным прибором 86
Варакина А. А., Фёдорова Е. А. Численный анализ СМО M/M/1/N с восстановлением прибора после обслуживания фиксированного числа заявок 88

Чураков В. В., Фёдорова Е. А. Нестационарный пуассоновский поток для моделирования суточного электропотребления 90
Королев Д. А. Имитационное моделирование системы массового обслуживания с простейшим входящим потоком отрицательных заявок и произвольным временем обслуживания 92
Булгакова Е. С., Фёдорова Е. А. Математическое моделирование сетей связи с приоритетным потоком экстренных сообщений 94
Zubko I., Nekrasova R. The analysis of scheduling algorithms for a quantum switch model 96
Wira D.S.A., Moiseev A. High-Intensity Asymptotics for SynchrMAP/M/∞ Queues 98
Chudinova A. A. Reliability of Distributed Systems: Byzantine Fault Tolerance and Queueing Theory 100

Научное издание

ШКОЛА ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ (ШТМО-2026)

Тезисы
II Международной конференции
20–25 апреля 2026 г.

Редактор *Ю.П. Готфрид*
Компьютерная верстка *О.Д. Лизюра, А.В. Старовойтова*
Дизайн обложки *Л.Д. Кривцовой*

Отпечатано на оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.
Тел. 8+(382-2)–52-98-49
Сайт: http://publish.tsu.ru
E-mail: rio.tsu@mail.ru

Подписано к печати 13.10.2026 г.
Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Бумага для офисной техники. Гарнитура «Times». Печ. л. 6,63. Усл. печ. л. 6,2. Тираж 500 экз. Заказ № 6914.

ISBN 978-5-908040-97-6

