



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2019)

**МАТЕРИАЛЫ
XVIII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
26–30 июня 2019 г.**

Часть 2



ТОМСК
«Издательство НТЛ»
2019

УДК 519
ББК 22.17
И74

И74 Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019): Материалы XVIII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова (26–30 июня 2019 г.). – Томск: Изд-во НТЛ, 2019. – Часть 2. – 376 с.

ISBN 978-5-89503-629-7

Сборник содержит избранные материалы XVIII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова по следующим направлениям: теория массового обслуживания и телетрафика, графы и их применение в задачах анализа дискретных автоматов, прикладной вероятностный анализ.

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

УДК 519
ББК 22.17

Редколлегия:

А.А. Назаров, доктор технических наук, профессор;
С.П. Моисеева, доктор физико-математических наук, профессор;
А.Ю. Матророва, доктор технических наук, профессор;
Е.Ю. Лисовская, кандидат физико-математических наук.

ISBN 978-5-89503-629-7

© Авторы. Текст, 2019
© Оформление. Дизайн.
ООО «Издательство НТЛ», 2019

ГРАФЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ДИСКРЕТНЫХ АВТОМАТОВ

О специальных деревьях с наибольшим расстоянием между центром и центроидом

М.Б. Абросимов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Н. Чернышевского, г. Саратов, Россия

Определения и постановка задачи

Напомним, что деревом называется связный граф без циклов. В работе будем рассматривать свободные деревья. Основные определения по теории графов, используемые в работе, можно найти в [1]. Через $d(u, v)$ будем обозначать расстояние между вершинами u и v . Расстояние от вершины u графа до наиболее удаленной от нее вершины называется её *эксцентриситетом*. Вершина с минимальным эксцентриситетом называется *центральной*. *Центр графа* – это множество его центральных вершин. В 1869 г. Жордан [2] доказал, что центр дерева состоит или из одной, или из двух смежных вершин. В первом случае дерево называется *центральной*, а во втором – *бицентральной*.

Ветвь к вершине u дерева T – это максимальное поддерево, содержащее u в качестве листа. Число ветвей к вершине u равно $d(u)$. *Вес вершины u дерева T* определяется как наибольшее число рёбер по всем ветвям к u .

Вершина v называется *центроидной* вершиной дерева T , если она имеет наименьший вес. *Центроид дерева* – это множество его центроидных вершин. В 1869 г. Жордан [2] доказал, что центроид дерева состоит или из одной, или из двух смежных вершин. Также известно, что если в дереве две центроидные вершины, то число вершин в дереве чётно [3].

Количество центральных и бицентральных, центроидных и бицентроидных деревьев известно (последовательности A000676, A000677, A027416 и A102911 соответственно) [4].

Интерес представляет вопрос распределения вершин центра и центроида друг относительно друга. Будем говорить о дереве типа n - m , ес-

ли у него n центральных и m центроидных вершин. Например, дерево типа 1-1 – это дерево с одним центром и одним центроидом. В данной работе рассматривается три вопроса:

- 1) вычисление количества деревьев типа 1-1, 1-2, 2-1 и 2-2;
- 2) у какого числа деревьев центр и центроид совпадают, а если не совпадают, то имеют общую вершину;
- 3) какое расстояние может быть между центром и центроидом.

Для решения первых двух задач был проведён вычислительный эксперимент на кластере высокопроизводительных вычислений ПРЦ НИТ СГУ.

Вычислительный эксперимент

Для генерации деревьев использовалась программа *gentreeg* из пакета *nauty* [5]. В программе реализован алгоритм генерации всех неизоморфных деревьев за линейное время [6]. Чтобы получить все неизоморфные деревья с числом вершин n , нужно выполнить команду:

```
./gentreeg n.
```

Деревья выводятся в формате *sparseb* [7]. Если добавить ключ $-p$, то результатом будет список деревьев, каждое из которых кодируется массивом предков. Программа поддерживает разбиение на подзадачи, что удобно использовать при организации параллельных вычислений. Для запуска 1-й задачи из 40:

```
./gentreeg n 1/40.
```

Выход программы *gentreeg* подавался на вход программы, которая для каждого дерева находила центр, центроид и расстояние между ними. Результаты вычислительного эксперимента приведены в табл. 1. Для наглядности в табл. 2 приведены эти же данные в процентах от общего числа деревьев с соответствующим числом вершин.

Полученные данные по количеству центральных, бицентральных, центроидных и бицентроидных деревьев согласовываются с известными (последовательности A000676, A000677, A027416 и A102911 соответственно) [4].

Из табл. 2 можно заметить, что чаще встречаются центроидные деревья, чем бицентроидные (при чётном числе вершин), а количество центральных и бицентральных деревьев примерно одинаково. Корреляции между числом вершин в центре и центроиде дерева не наблюдается. Более чем у половины деревьев есть пересечение центра и цен-

троида. Под расстоянием между центром и центроидом будем понимать наименьшее из расстояний от вершин центра до вершин центроида. Следующий вопрос, который представляет интерес: в каких деревьях расстояние между центром и центроидом максимально возможное среди деревьев с таким же числом вершин.

Таблица 1

Количество деревьев типа 1-1, 1-2, 2-1 и 2-2 с числом вершин до 30

n	Тип 1-1	Тип 1-2	Тип 2-1	Тип 2-2	Совпадающие множества	Общая вершина
1	1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	1	0
3	1	0	0	0	1	0
4	1	0	0	1	2	0
5	2	0	1	0	2	1
6	2	1	1	2	4	2
7	7	0	4	0	6	4
8	8	4	5	6	12	10
9	27	0	20	0	20	19
10	35	20	26	25	45	51
11	127	0	108	0	84	98
12	184	100	157	110	194	274
13	682	0	619	0	403	535
14	1041	577	942	599	976	1575
15	3979	0	3762	0	2170	3136
16	6517	3306	6133	3364	5411	9414
17	24722	0	23907	0	12536	19190
18	42179	20472	40647	20569	31998	58899
19	160774	0	157221	0	76839	122045
20	285820	129326	278405	129514	199554	379260
21	1081107	0	1063398	0	490962	798862
22	1982699	849031	1943654	848372	1292001	2511999
23	7462542	0	7365532	0	3239846	5367233
24	14081520	5682490	13858616	5677271	8610993	17006368
25	52599053	0	52037837	0	21910228	36822161
26	101578260	39001946	100258849	38954395	58720582	117460188
27	377244482	0	373820978	0	151288737	257281609
28	744056166	271966025	735761015	271659826	408274636	824538658
29	2745783463	0	2723783122	0	1062872188	1825264849
30	5514890622	1928851519	5460551414	1926578247	2885362406	5872820474

Таблица 2

Количество деревьев типа 1-1, 1-2, 2-1 и 2-2 с числом вершин до 30 в процентах

n	Число деревьев	Тип 1-1	Тип 1-2	Тип 2-1	Тип 2-2	Совпадающие множества	Общая вершина
1	1	100.0 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %	100.0 %	0.0 %
2	1	0.0 %	0.0 %	0.0 %	100.0 %	100.0 %	0.0 %
3	1	100.0 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %	100.0 %	0.0 %
4	2	50.0 %	0.0 %	0.0 %	50.0 %	100.0 %	0.0 %
5	3	66.7 %	0.0 %	33.3 %	0.0 %	66.7 %	33.3 %
6	6	33.3 %	16.7 %	16.7 %	33.3 %	66.7 %	33.3 %
7	11	63.6 %	0.0 %	36.4 %	0.0 %	54.5 %	36.4 %
8	23	34.8 %	17.4 %	21.7 %	26.1 %	52.2 %	43.5 %
9	47	57.4 %	0.0 %	42.6 %	0.0 %	42.6 %	40.4 %
10	106	33.0 %	18.9 %	24.5 %	23.6 %	42.5 %	48.1 %
11	235	54.0 %	0.0 %	46.0 %	0.0 %	35.7 %	41.7 %
12	551	33.4 %	18.1 %	28.5 %	20.0 %	35.2 %	49.7 %
13	1301	52.4 %	0.0 %	47.6 %	0.0 %	31.0 %	41.1 %
14	3159	33.0 %	18.3 %	29.8 %	19.0 %	30.9 %	49.9 %
15	7741	51.4 %	0.0 %	48.6 %	0.0 %	28.0 %	40.5 %
16	19320	33.7 %	17.1 %	31.7 %	17.4 %	28.0 %	48.7 %
17	48629	50.8 %	0.0 %	49.2 %	0.0 %	25.8 %	39.5 %
18	123867	34.1 %	16.5 %	32.8 %	16.6 %	25.8 %	47.6 %
19	317995	50.6 %	0.0 %	49.4 %	0.0 %	24.2 %	38.4 %
20	823065	34.7 %	15.7 %	33.8 %	15.7 %	24.2 %	46.1 %
21	2144505	50.4 %	0.0 %	49.6 %	0.0 %	22.9 %	37.3 %
22	5623756	35.3 %	15.1 %	34.6 %	15.1 %	23.0 %	44.7 %
23	14828074	50.3 %	0.0 %	49.7 %	0.0 %	21.8 %	36.2 %
24	39299897	35.8 %	14.5 %	35.3 %	14.4 %	21.9 %	43.3 %
25	104636890	50.3 %	0.0 %	49.7 %	0.0 %	20.9 %	35.2 %
26	279793450	36.3 %	13.9 %	35.8 %	13.9 %	21.0 %	42.0 %
27	751065460	50.2 %	0.0 %	49.8 %	0.0 %	20.1 %	34.3 %
28	2023443032	36.8 %	13.4 %	36.4 %	13.4 %	20.2 %	40.7 %
29	5469566585	50.2 %	0.0 %	49.8 %	0.0 %	19.4 %	33.4 %
30	14830871802	37.2 %	13.0 %	36.8 %	13.0 %	19.5 %	39.6 %

Основной результат

Удалось получить полное аналитическое решение для 3-го из поставленных вопросов. Через d_{cc} будем обозначать расстояние между центром и центроидом дерева.

Теорема 1. В n -вершинном дереве расстояние между центром и центроидом $d_{cc} \geq (n-3)/4$.

Оценка из теоремы достигается на пальмах особого вида. Пальмой называется звездообразное дерево, у которого только одна цепь имеет длину большую 1. Напомним, что *звездообразным* или *сверхстройным* деревом называется дерево, гомеоморфное звезде, то есть полному двудольному графу $K_{1,n}$. При $n > 2$ звездообразные деревья можно кодировать вектором длин цепей, исходящих из вершины степени n . Пальмы будут иметь код вида $(p, 1, \dots, 1)$ или для краткости $(p, 1^m)$.

Теорема 2. Для любого заданного k существует дерево с числом вершин $4k + 3$, такое, что расстояние между центром и центроидом равно k . Такое дерево только одно и им является пальма $(2k + 1, 1^{2k+1})$.

На рис. 1 изображена 11-вершинная пальма $(5, 1^5)$. Расстояние между центром и центроидом этого дерева равно 2. Центроидная вершина закрашена чёрным цветом, а центральная – серым. Пальма из теоремы 2 относится к деревьям типа 1-1. Теорему 1 можно обобщить на случай деревьев остальных типов.

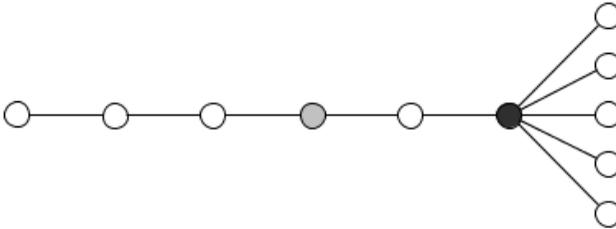


Рис. 1. Пальма $(5, 1^5)$ с $d_{cc} = 2$

Теорема 3. В n -вершинном дереве для расстояния d_{cc} между центром и центроидом в зависимости от типа дерева справедливы следующие утверждения:

- 1) для дерева типа 1-1: $d_{cc} \geq (n-3)/4$;
- 2) для дерева типа 2-1: $d_{cc} \geq (n-4)/4$;
- 3) для дерева типа 1-2: $d_{cc} \geq (n-6)/4$;
- 4) для дерева типа 2-2: $d_{cc} \geq (n-8)/4$.

Оценки из теоремы 3 являются достижимыми на пальмах следующего вида (через k обозначено расстояние между центром и центроидом, как в теореме 2):

- 1) для дерева типа 1-1: пальма $(2k + 1, 1^{2k+1})$;
- 2) для дерева типа 2-1: пальма $(2k + 2, 1^{2k+1})$;
- 3) для дерева типа 1-2: пальма $(2k + 3, 1^{2k+2})$;
- 4) для дерева типа 2-2: пальма $(2k + 4, 1^{2k+3})$.

На рис. 2 показаны минимальные по числу вершин деревья типа 1-1, 1-2, 2-1 и 2-2 с $d_{cc} = 1$: пальмы $(3, 1^3)$, $(5, 1^4)$, $(4, 1^3)$ и $(6, 1^5)$ соответственно.

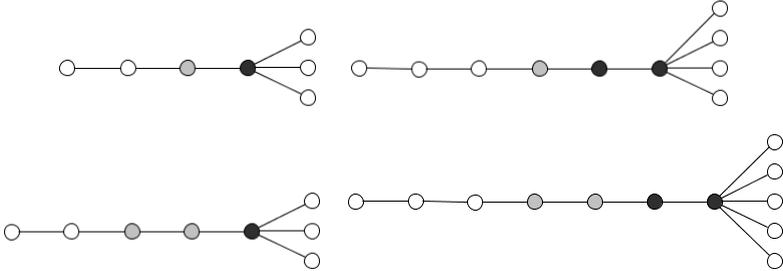


Рис. 2. Минимальные по числу вершин деревья типа 1-1, 1-2, 2-1 и 2-2 с $d_{cc} = 1$

ЛИТЕРАТУРА

1. Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997. 368 с.
2. Jordan C. Sur les assemblages de lignes // J. Reine Angew Math. V. 70. 1869. P. 185–190.
3. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Т. 1. Основные алгоритмы. 3-е изд.: пер. с англ. М.: Вильямс, 2002. 720 с.
4. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: <https://oeis.org>
5. McKay B.D., Piperno, A. Practical Graph Isomorphism, II // J. Symbolic Computation. 2014. V. 60. P. 94–112.
6. Li G., Ruskey F. The Advantages of Forward Thinking in Generating Rooted and Free Trees // 10th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA). 1999. P. S939–940.
7. URL: <http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/formats.txt>

Аппаратная защита цифровых устройств

Л.А. Золоторевич

*Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники, г. Минск, Республика Беларусь*

В последнем десятилетии стала актуальной проблема защиты и дополнительного контроля проектов СБИС, СнК с целью обнаружения последствий несанкционированного стороннего вмешательства в проект с разными основополагающими целями. К ним относится изменение функционального наполнения системы, внедрение механизмов деградации схемных решений с целью нарушения системы синхронизации, нарушения временной согласованности путей распространения сигналов, включение средств для получения конфиденциальной информации. Ущерб от пиратства и других угроз в области производства аппаратного обеспечения составляет около 4 млрд долларов в год, что примерно в 10 раз превышает ущерб от пиратства в области программного обеспечения. Подобные действия являются преднамеренными и тщательно скрываемыми, что осложняет и без того достаточно сложную проблему верификации проектов и препятствует прямому применению существующих методов тестирования и функционального контроля СБИС [1, 2].

Как развитие теории контролепригодного проектирования (Design-for-Testability – DfT) в работе [3] предлагается подход к проектированию Design for-Trust – DfTr, который дополнительно включает средства для контроля и предотвращения аппаратных атак при проектировании и изготовлении СБИС.

В работе [4] проанализированы различные модели процесса злонамеренного искажения проекта, описывающие условия, при которых подобное искажение может внедриться в цифровую систему. В числе возможных источников искажений рассматриваются поставщики базовых функциональных блоков интеллектуальной собственности (IP's), которые приобретаются разработчиками СнК, собственно разработчиками СнК, а также кремниевые фабрики – изготовители СнК.

В работе предлагается алгоритм логической обфускации и кодирования цифровых устройств, представленных на структурном уровне, на основе применения методов и средств тестового контроля.

Обфускация и логическое кодирование цифрового устройства на структурном уровне

Для блокирования попыток внешнего вмешательства в проект цифровой системы на структурном уровне одним из методов является логическое кодирование структурной реализации, которое обеспечивает доступ к объекту только авторизованным пользователям [5]. Метод обеспечивает сокрытие функциональности проекта на основе использования ключа, применение которого вводит систему в область правильного функционирования.

Чтобы защитить комбинационную схему с помощью k -разрядного ключа, предлагается простая процедура, которая требует включения в схему k дополнительных вентилях [5]. Во-первых, выбираются и сопоставляются с битами $\{y\}$ ключа k линий схемы $\{w_i\}$. Каждая выбранная линия w_i отключается от приемников сигнала, а на место обрыва подключается вентиль XOR или вентиль XNOR с выходной линией связи w_i' , на которой формируется сигнал, управляющий соответствующими приемниками сигнала вентиля w_i . При подключении вентиля XOR $w_i' = w_i \text{ XOR } y_i$, где y_i – соответствующий бит ключа. Выбор вентиля XOR или XNOR зависит от выбранного значения бита ключа: если выбранное значение y_i равно 0, то $w_i' = w_i \text{ XOR } y_i$, а при y_i равном 1 $w_i' = w_i \text{ NXOR } y_i$.

На рис. 1, а приведен фрагмент логической схемы, а на рис. 1, б проиллюстрирована основная идея логического кодирования. Выход элемента C_1 отключен от нагрузки (элементы D_1 и D_2) и подключен к одному из входов дополнительного «ключевого» элемента типа XOR CC_1 , на второй вход которого поступает внешний входной сигнал K_1 однобитового ключа. Схема будет работать в требуемом режиме только в том случае, если сигнал на входе K_1 будет равен 0. В противном случае на выходе элемента XOR CC_1 будет формироваться сигнал, инверсный правильному.

Вместо элемента CC_1 типа XOR может быть установлен элемент XNOR. В этом случае однобитовый правильный ключ, поступающий на вход K_1 , равен 1. Заметим, что применение неправильного ключа равносильно появлению неисправности константного типа «const 0» («const 1») на выходе элемента C_1 в зависимости от входного набора и истинного значения сигнала на C_1 равного 1 (0). Этот факт является важным, так как позволяет формализовать задачу обфускации на основе применения методов и средств тестового контроля цифровых устройств.

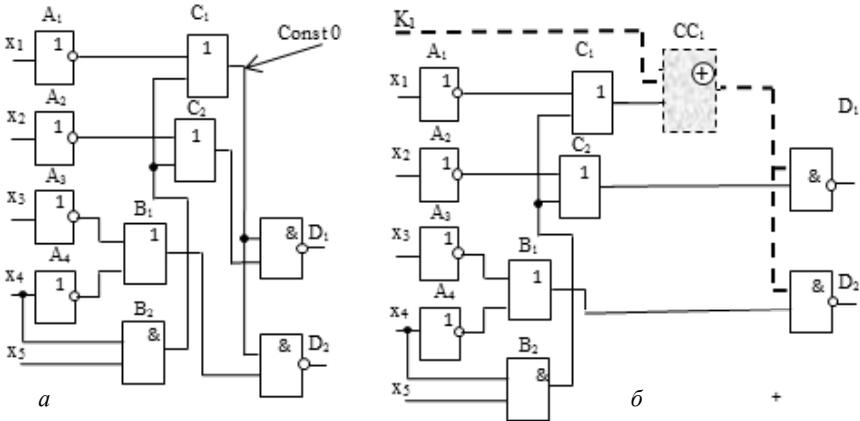


Рис. 1. Фрагмент логической сети: *а* – исходная комбинационная схема; *б* – схема с однобитовым ключом

При воздействии входного набора $X = (00000)$ и неправильного ключа $K_1 = 1$ (рис. 1) на выходах схемы D_1, D_2 формируются сигналы (11), в то время как при правильном ключе $K_1 = 0$ – (00). Так же поведет себя схема (рис. 1) при неисправности «const 0» на выходе элемента C_1 . Таким образом, входной набор $X = (00000)$ является тестом контроля данной неисправности и в то же время при отсутствии неисправности искажает выходное состояние схемы при подаче неправильного ключа.

Таким образом, для сокрытия функциональности схемы необходимо добавить в некоторые линии схемы дополнительные элементы и определить правильный код, искажение которого выводит схему из области правильного функционирования. Заметим, что при воздействии входного набора $X = (01110)$ и неправильного ключа $K_1 = 1$ (рис. 1) на выходах схемы D_1, D_2 появятся сигналы (11), как и при правильном ключе, так как входной набор $X = (01110)$ не является тестом контроля неисправности «const 0» на выходе элемента C_1 .

Основная задача, которая должна быть решена для эффективной практической реализации данной общей идеи, заключаются в том, чтобы определить оптимальное множество внутренних линий схемы и количество ключевых элементов для создания максимальных трудностей для злоумышленника по поиску правильного ключа.

Для определения степени защищенности устройства при его кодировании принимается расстояние Хэмминга (HD), которое позволяет

количественно определить степень отличия правильной реакции устройства от ошибочной. Для того чтобы затруднить восстановление правильного ключа, необходимо обеспечить наименьшую корреляцию между правильными и не правильными выходными векторами, что достигается при $ND = 0.5$.

Применение методов и средств тестового диагностирования для защиты цифровых устройств от вредоносных искажений

Сведем задачу кодирования к поиску неисправностей константного типа кодируемой структуры, обнаруживаемых на большем количестве выходных линий и на максимальном количестве входных векторов. В отличие от решения, принятого в работе [6], рассмотрим более эффективный подход, основанный на применении метода сквозного вычисления неисправностей, покрываемых рассматриваемым входным вектором (конкурентно-дедуктивного моделирования) вместо моделирования каждой неисправной модификации схемы на определенном множестве случайных входных наборов с целью оценки степени влияния неисправностей на выходы схемы [7]. Метод конкурентно-дедуктивного моделирования неисправностей основан на моделировании исправной схемы и позволяет за один проход моделирования определять все неисправности константного типа, обнаруживаемые на моделируемом входном наборе. За счет того, что моделируется только исправная схема, эффективность решения существенно повышается по сравнению с моделированием одиночной неисправности на множестве входных векторов.

Вначале вычисляются неисправности, обнаруживаемые на моделируемом ограниченном множестве случайных входных наборов. Затем по результатам анализа определяются те неисправности, которые обнаруживаются наибольшим числом наборов и указывают преимущественные линии схемы для вставки ключевых вентилях. В то же время численное ограничение количества моделируемых входных воздействий [8] ограничивает возможность поиска наиболее эффективного решения.

В работе предлагается подход, основанный на построении теста в классе неисправностей константного типа [7] и его применении на первом этапе кодирования. В рамках данного подхода вместо использования заранее определенного числа случайных входных воздействий (как, например, 100 в работе [8]) применяются тестовая последовательность входных векторов, которая обеспечивает полное покрытие неисправностей константного типа кодируемой структуры.

По результатам сквозного моделирования неисправностей определяются наиболее подходящие линии для подсоединения ключевых вентилях.

Если ключевой вентиль управляется одним битом ключевого кода, то вероятность того, что данный вентиль будет приведен в действие, $P = 0.5$. Это означает, что только половина ключевых вентилях повлияет на результат функционирования схемы при применении неправильного ключа. Для повышения эффективности кодирования кроме указанных ключевых вентилях добавляются управляющие вентили. Для того чтобы увеличить вероятность P и усилить влияние неправильного бита кодового слова на результат функционирования схемы, применим управляющие вентили, с помощью которых можно объединить биты кодового слова в группы, используя при этом их выходы в качестве входов ключевых вентилях [8]. В таком случае будет реализовано групповое воздействие нескольких битов кодового слова на активизацию ключевого вентиля. Если хотя бы один из ключевых входов, включенных в группу, принимает неправильное значение, ключевой вентиль окажется активированным. Для этого с каждым ключевым вентилях используется управляющий вентиль. При этом, если применяется двухвходовый управляющий вентиль, то вероятность активизации ключевого вентилях возрастает с 0.5 до 0.75, в случае трехвходового вентилях – 0.88, а при пятивходовом – 0.97 (только один ключевой вектор из 32 векторов данной группы является правильным).

При выборе и включении очередного вентилях при кодировании логических устройств необходимо проводить анализ на появление эффекта маскирования неисправностей, который способен блокировать эффект кодирования.

Рассматриваются основные этапы алгоритма двухуровневого кодирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zolotorevich L.A.* Project verification and construction of superchip tests at the RTL level // Automation and Remote Control. USA, N.Y.: Plenum Press, 2013. V. 74. Iss. 1. P. 113–122.
2. *Zolotorevich L.A., Il'inkova A.V.* Development of tests for VLSI circuit testability at the upper design levels // Automation and Remote Control. USA, N.Y.: Plenum Press. September 2010. V. 71. Iss. 9. P. 1888–1898.
3. *Rajendran J., Sam M., Sinanoglu O., Karri R.* Security analysis of integrated circuit camouflaging // ACM SIGSAC conference on Computer & communications security. Germany, Berlin. 04 – 08 November 2013. P. 709–720.

4. *Xiao K., Forte D., Jin Y., Karri R., Bhunia S., Tehranipoor M.* Hardware Trojans: Lessons learned after one decade of research // *ACM Transactions on Design Automation of Electronic System*. 2016. V. 22. No.1.
1. *Roy J., Koushanfar A.F., Markov I.L.* EPIC: Ending Piracy of Integrated Circuits // *IEEE Computer*. 2010. V. 43. No. 10. P. 30–387.
6. *Karousos N., Pexaras K., Karybali I. G., Kalligeros E.* Weighted Logic Locking: A New Approach for IC Piracy Protection // *IEEE 23rd International Symposium on On-Line Testing and Robust System Design (IOLTS)*. 2017. P. 221–226.
7. *Золоторевич Л.А.* Исследование методов и средств верификации проектов и генерации тестов МЭС // *Сб. научных трудов Всерос. науч.-технич. конф. «Проблемы разработки перспективных микроэлектронных систем – МЭС-2006»* / под общ. ред. А.Л. Стемпковского. М.: ИПИМ РАН, 2006. С. 163–168.
8. *Yasin M., Rajendran J., Sinanoglu O., Karri R.* On Improving the Security of Logic Locking // *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. IEEE Transactions on* 2016. V. 35. No. 9. P. 1411–1424.

Сбалансированные знаковые графы и их применение

Э.И. Ибрагимова

Сибирский федеральный университет – СФУ, г. Красноярск, Россия

Знаковым называется граф, в котором каждое ребро имеет положительный или отрицательный знак. Знаковый граф называется сбалансированным, если каждый его простой цикл положительный, где знак цикла определяется как произведение знаков входящих в него ребер. Понятие сбалансированности является обобщением понятия двудольности графа [1]. Знаковые графы были впервые введены Фрэнком Харари при рассмотрении проблем социальной психологии [2].

В настоящее время сбалансированные знаковые графы используются в различных приложениях. Они применяются в топологической теории графов и теории групп, в моделировании социальных сетей и кластеризации медицинских данных. Например, в работе [3] рассматривается использование знаковых графов в теории групп, при этом граф напряжения критической группы двойных покрытий представляется знаковым графом. Такое представление облегчает изучение двойных покрытий. В случае, когда знаковый граф двойного покрытия сбалансирован, он изоморфен беззнаковому графу. В работе [4] описывается применение знаковых графов в медицине при изучении онкологических заболеваний. В этом случае с помощью знаковых графов моделируются процессы распространения раковых клеток внутри организма, а также наследственность онкологических заболеваний. В связи с широким применением сбалансированных знаковых графов актуальны исследования, направленные на разработку алгоритмов вычисления мер сбалансированности знакового графа, и сведение процессов вычисления этих мер к известным оптимизационным задачам.

В работе предлагается алгоритм распознавания сбалансированности знакового графа, сформулирована задача нахождения наибольшего сбалансированного подмножества ребер знакового графа как задача целочисленного программирования. Представлены результаты численных экспериментов, выполненные с помощью пакета программ CPLEX.

Сбалансированный знаковый граф и его свойства

Формально знаковым графом называется пара $\Sigma = (G, \sigma)$, где $G = (V, E)$ является неориентированным графом, на ребрах которого задана функция знака $\sigma: E \rightarrow \{+, -\}$, $n = |V| \geq 2$, $m = |E| \geq 1$. Знак цикла определяется как произведение знаков ребер, образующих этот цикл. Очевидно, что цикл графа положительный, если он содержит четное число отрицательных ребер, и отрицательный, если он содержит нечетное число отрицательных ребер. Знаковый граф $\Sigma = (G, \sigma)$ называется сбалансированным, если любой его простой цикл положительный.

Необходимое и достаточное условие сбалансированности устанавливает следующая теорема.

Теорема 1 (Картрайт–Харари, [2]). Знаковый граф $\Sigma = (G, \sigma)$ сбалансирован тогда и только тогда, когда множество его вершин V можно разбить на две доли A и B , одна из которых может быть пустой, таким образом, что $A \cup B = V$, $A \cap B = \emptyset$ и любое ребро, соединяющее вершины из одной доли, имеет знак «+», а ребра, соединяющие вершины из разных долей – знак «-».

Из данной теоремы вытекают важные свойства знаковых графов:

1. Если в графе $\Sigma = (G, \sigma)$ все ребра положительные, то граф Σ всегда сбалансированный.

2. Если граф $\Sigma = (G, \sigma)$ является двудольным и все его ребра одного знака, то граф Σ сбалансированный.

3. Каждая из долей A и B сбалансированного графа $\Sigma = (G, \sigma)$ порождает подграф, содержащий только положительные ребра, а значит, являющийся сбалансированным.

4. Если ни одна из долей A и B сбалансированного графа $\Sigma = (G, \sigma)$ не является пустой, то множество отрицательных ребер образует разрез (не обязательно минимальный) этого графа.

5. Всякая положительная клика сбалансированного графа $\Sigma = (G, \sigma)$ – клика, содержащая только положительные ребра, – всегда принадлежит одной из его долей A или B .

6. Всякий ациклический знаковый граф $\Sigma = (G, \sigma)$ всегда сбалансированный.

Указанные свойства 1–6 знаковых графов могут быть использованы при решении базовых задач, связанных с этими графами: распознавание сбалансированности знакового графа; выявление в заданном знаковом графе наибольшего по мощности сбалансированного множества ребер.

Распознавание сбалансированности знакового графа

Задача распознавания сбалансированности знакового графа формулируется следующим образом:

Условие. Задан знаковый граф $\Sigma = (G, \sigma)$, где $G = (V, E)$ – простой неориентированный граф, $n = |V| \geq 2$, $m = |E| \geq 1$.

Вопрос. Является ли $\Sigma = (G, \sigma)$ сбалансированным?

На рис. 1 приведен алгоритм Signed_Balance решения данной задачи.

Алгоритм Signed_Balance

Вход: количества вершин и ребер графа, список ребер с указанием знака для каждого ребра.

```
1: begin
2:  $q \leftarrow \emptyset$ 
3:  $q \leftarrow s$ 
4: while  $q \neq \emptyset$ 
5:    $s \leftarrow q^*$ 
6:  $Z[s] \leftarrow Z[y] \cdot I[y][s]$ 
7: delete( $q^*$ )
8:  $q \leftarrow N[s]$ 
9: end while
10: Matching( $Z$ )
```

Выход: ДА / НЕТ (исходный граф сбалансирован / несбалансирован)

Рис. 1. Алгоритм распознавания сбалансированности знакового графа

Напомним, неориентированный граф называется простым, если он не содержит петель и кратных ребер [1]. При описании алгоритма Signed_Balance используются следующие обозначения: s – текущая вершина с окрестностью $N[s]$; y – вершина, предшествующая s ; $Z[s]$, $Z[y]$ – метки вершин s и y соответственно, определяемые значениями $+1$ или -1 ; $I[y][s]$ – знак ребра между s и y ; q – структура данных, задающая очередь просмотра вершин графа; q^* – последняя вершина из q . Процедура Matching(Z) алгоритма Signed_Balance выполняет проверку согласованности ребер. Результатом работы данной процедуры является список несогласованных ребер. Ребро $e = \{s, y\}$ считается согласованным, если знак этого ребра равен произведению знаков меток его конечных вершин s, y .

На выходе алгоритм Signed_Balance выдает сведения о том, сбалансирован исходный граф или нет, и в случае сбалансированности – вариант разделения множества вершин графа на подмножества A и B и список несогласованных ребер. Алгоритм Signed_Balance основан на классическом алгоритме поиска в глубину в графе [1]. Поэтому вычислительная сложность алгоритма Signed_Balance для знакового графа с n вершинами и m ребрами составляет $O(n + m)$. Алгоритм Signed_Balance на практике работает быстрее, если в нем использованы свойства 1, 2, 6 знаковых графов. Вычислительная сложность применения этих свойств сопоставима с $O(n + m)$. Это означает, что задача распознавания сбалансированности знакового графа является полиномиально разрешимой.

Постановка задачи MAX-SET-BALANCED

Сформулируем задачу поиска в знаковом графе наибольшего по мощности сбалансированного множества ребер (далее MAX-SET-BALANCED, или коротко MSB).

Условие. Задан знаковый граф $\Sigma = (G, \sigma)$, где $G = (V, E)$ – простой неориентированный граф, $n = |V| \geq 2$, $m = |E| \geq 1$.

Требуется найти наибольшее по мощности множество ребер $E' \subseteq E$, которое сбалансировано в $\Sigma = (G, \sigma)$.

Множество ребер $E' \subseteq E$ считается сбалансированным в $\Sigma = (G, \sigma)$, если порожденный подграф $\Sigma(E')$ сбалансирован. Задача MSB является NP-трудной. Действительно, в частном случае, когда в графе $\Sigma = (G, \sigma)$, все ребра отрицательные, задача MSB сводится к поиску в G двудольного подграфа с наибольшим числом ребер. Это эквивалентно решению известной задачи комбинаторной оптимизации – задачи о наибольшем разрезе графа (MAX-CUT), для которой доказана NP-трудность [5]. Известно также, что задача MAX-CUT полиномиально разрешима для плоских графов. Вычислительная сложность задачи MSB свидетельствует о том, что для нее вряд ли существует алгоритм с полиномиальным временем работы. Задачу MSB можно сформулировать как задачу целочисленного программирования (ЦП) и решать с помощью пакета программ CPLEX [6].

Обозначим через E^+ множество положительных, а через E^- – множество отрицательных ребер знакового графа $\Sigma = (G, \sigma)$, полагая, что $E^+ \cup E^- = E$, $E^+ \cap E^- = \emptyset$. Припишем каждой вершине $i \in V$ метку $l(i) = +1$ или $l(i) = -1$. Назовем полученный помеченный граф состоянием L знакового графа $\Sigma = (G, \sigma)$. Пусть L – некоторое произвольное со-

стояние знакового графа $\Sigma = (G, \sigma)$. Определим $n = |V|$ булевых переменных:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } i \text{ имеет метку } l(i) = +1, \\ 0, & \text{если вершина } i \text{ имеет метку } l(i) = -1. \end{cases}$$

Введем еще $m = |E|$ булевых переменных:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } (i, j) \text{ согласованно относительно } L, \\ 0, & \text{если ребро } (i, j) \text{ не согласованно относительно } L. \end{cases}$$

Тогда MSB в терминах ЦП имеет вид

$$\sum_{(i,j) \in E} y_{ij} \rightarrow \max \quad (1)$$

при следующих условиях:

$$2y_{ij} - (2x_i - 1)(2x_j - 1) = 1, \quad (i, j) \in E^+; \quad (2)$$

$$2y_{ij} + (2x_i - 1)(2x_j - 1) = 1, \quad (i, j) \in E^-; \quad (3)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in V; \quad (4)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i, j) \in E. \quad (5)$$

Заметим, что целевая функция (1) линейная, а ограничения (2)–(3) квадратичные. В задаче (1)–(5) поиск оптимального решения осуществляется в пространстве 2^{n+m} решений. Из них допустимыми являются те, которые удовлетворяют ограничениям (2) и (3). Целевая функция (1) означает максимизацию количества согласованных ребер, входящих в знаковый граф $\alpha = (G, \sigma)$. Ограничения (2) и (3) обеспечивают условие согласованности положительных и отрицательных ребер соответственно. Решение задачи ЦП (1)–(5) можно находить с помощью пакета прикладных программ CPLEX, а также возможно применение приближенных методов решения, включая эвристики. На основе CPLEX проведены численные эксперименты, цель которых заключалась в проверке правильности алгоритма Signed_Balance и адекватности математической модели рассматриваемой задачи (1) – (5) на тестовых графах. Результаты экспериментов приведены в таблице. Вычислительные эксперименты проводились на персональном компьютере со следующими характеристиками: IntelCore i7-3630QM CPU @ 2.40 GHz, 8 Гб оперативной памяти, 64-разрядная операционная система Windows 8.1.

Эксперименты показали, что нахождение точного решения задачи (1)–(5) на рассматриваемом компьютере с помощью демоверсии пакета CPLEX возможно только для графов небольшой размерности.

Результаты вычислительных экспериментов

Знаковый граф $\alpha = (G, \sigma)$ и его размер	Особенности структуры графа G	Особенности расстановки знаков ребер	Результат алгоритма Signed_Balance	Результат работы CPLEX	Время работы CPLEX, мс
$G_1, n = 5, m = 4$	Дерево	Все ребра одного знака	Сбалансирован	Все ребра дерева	10
$G_2, n = 5, m = 4$	Дерево	Знаки ребер произвольные	Сбалансирован	Все ребра дерева	12
$G_3, n = 4, m = 4$	Двудольный	Все ребра одного знака	Сбалансирован	Все ребра графа	10
$G_4, n = 4, m = 4$	Двудольный	Знаки ребер произвольные	Несбалансирован	3 ребра графа	39
$G_4, n = 6, m = 8$	Произвольный	Знаки ребер произвольные	Несбалансирован	7 ребер графа	34

Заключение

В работе показано, что распознавание сбалансированности знакового графа является полиномиально разрешимой задачей, а нахождение наибольшего сбалансированного подмножества ребер знакового графа – оптимизационной NP-трудной задачей. В связи с широким применением сбалансированных знаковых графов целесообразно продолжить их исследование в направлении создания алгоритмов, приближенного решения задачи MSB. Пакет программ следует применять для оценки точности разработанных приближенных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Емеличев В.А.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
2. *Harary F.* Structural Balance: A Generalization of Heider's Theory // *Psychological Review*. 1956. V. 63 (5). P. 277–293.
3. *Reiner V., Tseng D.* Critical groups of covering, voltage, and signed graphs. URL: <https://arxiv.org/pdf/1301.2977v2.pdf> (дата доступа 22.04.2019).
4. *Pal A., Banerjee D.* Application Of Signed Graph In Decision Making // *Int. J. Computers & Technology*. 2015. V. 14 (6). P. 5824–5833.
5. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи: монография. М.: Мир, 1982.
6. *CPLEX*. URL: <http://www.ilg.com/products/cplex/> (дата доступа 22.04.2019).

Маскирование неисправностей полюсов логических схем с использованием частичных функций

А.Ю. Матросова, В.А. Провкин, В.В. Андреева

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Рассматриваются логические неисправности на полюсах логических элементов комбинационной схемы (комбинационной составляющей схемы с памятью), одиночные и кратные. Такие неисправности, например, могут быть обнаружены в процессе производства схемы на последних этапах ее создания. Активирование различного рода вредоносных подсхем (Trojan Circuits – TCs), выход которых подключен к одной из линий схемы, также проявляется как логическая неисправность входного полюса элемента, инцидентного этой линии. Нередко возникает необходимость в изменении спецификации схемы, которая сводится к изменению логических функций некоторых полюсов элементов схемы. Для обеспечения корректного функционирования схемы во всех перечисленных случаях необходимо маскировать неисправности соответствующих полюсов, одного или нескольких. Рассматривается ситуация, когда корректирующая схема (она может иметь несколько выходов) подключается к входам корректируемой схемы и к ее внутренним полюсам. Такое предположение согласуется с реальными возможностями коррекции схем в рамках ECO (Engineering Change Order) технологий [1, 2]. При получении корректирующей схемы в рамках ECO технологий обычно используются SAT-решатели и квантифицированные (QBS) решатели. Они позволяют находить некоторую реализацию частичной функции (полностью определенную функцию), сопоставляемую полюсу. Частичная функция полюса остается неизвестной. Предлагаемый в работе подход основан на использовании множеств единичных и нулевых наборов частичной функции полюса, компактно представленных двумя ROBDD-графами. Знание частичной функции дает больше возможностей для получения полностью определенной функции, реализующей частичную функцию, например, в виде безызбыточной ДНФ по возможности с низкими рангами конъюнкций этой ДНФ. Это значит, что предлагаемый подход позволяет получать более простое задание на синтез корректирующей схемы и, следовательно, лучшие, в смысле числа вентилей, корректирующие (маскирующие) схемы.

Постановка задачи

Задана комбинационная схема C и множество ее неисправных полюсов. Требуется построить корректирующую (маскирующую) схему из вентиляей, которая реализует систему частичных функций этих полюсов. При этом желательно, чтобы корректирующая схема состояла, по возможности, из меньшего числа вентиляей. Предполагается, что входы маскирующей схемы являются входами корректируемой схемы. Выходы маскирующей схемы сопоставляются неисправным полюсам корректируемой схемы.

Будем иметь в виду, что каждому внутреннему полюсу v схемы C соответствует частично определённая булева функция. Частичная функция полюса задается множествами единичных и нулевых наборов $M_1(f_v)$ и $M_0(f_v)$. Частичная функция, сопоставляемая полюсу v , определяется только на тех входных наборах корректируемой схемы, на которых смена значения в рассматриваемом полюсе изменяет значение хотя бы одного выхода схемы.

Рассмотрим частичную функцию f_1 и полностью определенную функцию f_2 , представленные парами множеств единичных и нулевых наборов значений одних и тех же переменных: $M_1(f_1)$, $M_0(f_1)$; $M_1(f_2)$, $M_0(f_2)$. Будем говорить, что полностью определенная функция f_2 реализует частичную функцию f_1 , если выполняется условие: пересечения множеств $M_1(f_1)$, $M_0(f_2)$ и множеств $M_0(f_1)$, $M_1(f_2)$ пусты. Это значит, что $M_1(f_2)$ содержит $M_1(f_1)$ и $M_0(f_2)$ содержит $M_0(f_1)$.

Если на полюсе v обнаружена некоторая логическая неисправность, это значит, что искажена частичная функция, сопоставляемая этому полюсу. При построении схемы, маскирующей неисправность полюса («схемы-заплатки»), предлагается использовать наборы из области определения частичной функции, чтобы найти, по возможности, более простую полностью определенную функцию, покрывающую частичную функцию рассматриваемого полюса, и, следовательно, более простую логическую схему, маскирующую неисправность рассматриваемого полюса. Предлагается получать представление покрывающей функции в виде безыбыточной ДНФ. Если в схеме C не исправны несколько полюсов: $V = \{v_1, \dots, v_q\}$, то можно находить безыбыточную ДНФ для каждого из неисправных полюсов, а затем строить маскирующую схему, реализующую систему безыбыточных ДНФ. Другой подход заключается в получении безыбыточной системы ДНФ, покрывающей каждую

из частичных функций полюсов множества V , и построении маскирующей схемы по безызбыточной системе ДНФ.

Маскирование неисправностей внутренних полюсов схемы

Для каждого из неисправных полюсов v_i множества V строится частичная функция, представляемая ROBDD-графами $R_1(v_i)$ $R_0(v_i)$ [3]. Далее из графов $R_1(v_i)$, $R_0(v_i)$ получают соответствующие ортогональные ДНФ, представляющие области нулевых и единичных наборов частичных функций этих полюсов, из которых затем извлекается система безызбыточных ДНФ или безызбыточная система ДНФ [4]. Система ДНФ является заданием на синтез маскирующей схемы. Для синтеза предлагается воспользоваться системой логического проектирования ABC. (ABC – система синтеза и верификации логических схем, разработанная в Беркли, США) [5].

Рассмотрим способы включения одновыходной маскирующей схемы. Пусть v – внутренний неисправный полюс схемы, являющийся точкой ветвления. Пусть одновыходная маскирующая схема C_p построена. Используя эту схему, можно замаскировать неисправность полюса v при условии доступности входов корректируемой схемы и некоторых ее внутренних полюсов. Для этого разрываются линии связи, идущие из полюса v , и выход маскирующей схемы C_p соединяется с входами элементов, которые непосредственно связаны с полюсом v . Входы маскирующей схемы подключаются к соответствующим входам схемы S .

Если неисправный полюс не является точкой ветвления, то в этом случае разрывается единственная линия, исходящая из полюса v , и выход маскирующей схемы подключается к входу элемента, непосредственно связанного с этой линией в корректируемой схеме.

Каждый выход многовыходной корректирующей схемы при неисправности нескольких полюсов схемы S подключается к соответствующим внутренним полюсам аналогичным образом.

Экспериментальные результаты

Выполнены эксперименты на контрольных примерах (рассматривались схемы MCNC). Все схемы переводились системой ABC в схемы из вентилях с одним или двумя входами. Для внутренних полюсов полученных схем с низкими вероятностными оценками наблюдаемости строились маскирующие схемы. Оценки наблюдаемости вычислялись с использованием соответствующей полюсу функции наблюдаемости ме-

тодом, предложенным в работе [3]. Если выбранному полюсу сопоставляется достаточно сложная подсхема, выходом которой этот полюс является, то, как правило, предложенный в данной работе подход позволяет существенно сократить размеры маскирующей схемы по сравнению с размерами подсхемы, выход которой является неисправным полюсом (иногда в несколько раз). Результаты экспериментов для маскирования одиночных полюсов представлены в таблице.

Результаты экспериментов для одиночных полюсов

Название схемы	Число элементов схемы	Оценка наблюдаемости полюса	Число элементов подсхемы, выход которой является неисправным полюсом	Число элементов маскирующей схемы	Аппаратурная избыточность, %
9symml_rs	309	0.0820313	35	20	6.47
		0.109375	21	14	4.53
		0.125	25	16	5.18
alu2_rs	543	0.107422	118	22	4.05
		0.109375	97	7	1.29
		0.109375	96	3	0.55
		0.125	93	5	0.92
		0.125	107	17	3.13
		0.130859	154	7	1.29
apex6_rs	856	0.00232697	22	13	1.52
		0.047081	45	38	4.44
count_rs	207	0.125	27	16	7.73
		0.187503	31	20	9.66
term1_ts	252	0.0981865	18	15	5.6
		0.125	35	23	9.09

Для каждой из представленных схем выбрано несколько внутренних полюсов, по возможности удаленных от входов корректируемой схемы. Это условие позволяет выделять более сложные подсхемы, выходы которых сопоставляются этим полюсам. Входы подсхемы совпадают с входами корректируемой схемы. Аппаратурная избыточность определяется отношением элементов маскирующей схемы к числу элементов корректируемой схемы (в процентах). Для кратных неисправностей при оценке сложности маскирующих подсхем можно суммировать числа элементов в маскирующих подсхемах для каждой из одиночных неисправностей, составляющих кратную неисправность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dao A.Q., Lee N.-Z., Chen L.-C., Lin M.P.-H., Jiang J.-H.R., Mishchenko A., and Brayton R.* Efficient computation of ECO patch functions // Proc. DAC. 2018.
2. *Cheng A.-C., Jiang H.-R., and Jou J.-Y.* Resource-aware functional ECO patch generation // Proc. DATE. 2016.
3. *Matrosova A., Ostanin S.* Trojan Circuits Masking and Debugging of Combinational Circuits with LUT Insertion // 2018 IEEE International Conference on Automation, Quality and Testing, Robotics // AQTR 2018 (THETA 21), 24–26 may 2018, Cluj-Napoca, Romania. Cluj-Napoca, 2018. P. 462–467. 1 электрон. опт. диск (CD-R).
4. *Матросова А.Ю., Андреева В.В.* Минимизация систем булевых функций представляющих задание на синтез самопроверяемых дискретных автоматов // Автоматика. 2008. Т. 44. № 5. С. 100–111.
5. *ABC: A System for Sequential Synthesis and Verification.* URL: <https://people.eecs.berkeley.edu/~alanmi/abc/>.

Пример синтеза синхронизирующей последовательности автомата, минимальной по весу

О.В. Мещерякова

Саратовский государственный социально-экономический институт (филиал) РЭУ им. Г.В. Плеханова, г. Саратов, Россия

Одной из актуальных проблем прикладной математической науки является разработка и использование многофакторных моделей в экономике. Последовательная формализация таких ключевых понятий, как «экономический объект», «показатель», «внутренний ресурс» позволяет построить модель функционирования объекта на основе кибернетического понятия конечного автомата. Применение теории автоматов дает возможность выделить определенный класс моделей с некоторыми общими свойствами, пригодных для программной реализации и проверки адекватности на эксперименте. Обобщение дает возможность разработать универсальный механизм для анализа поведения некоторой структуры в заданных условиях.

Теория экспериментов с конечными автоматами [1] базируется на предположении, что входные последовательности, подаваемые в процессе эксперимента на автомат, имеют одинаковую «цену». Под ценой входной последовательности в классической теории понимается ее длина, то есть количество входных символов, входящих в эту последовательность. Если же цену последовательности понимать как затраты на подачу входной последовательности, то предположение об одинаковых затратах на подачу равных по длине, но различных по составу последовательностей оказывается, вообще говоря, неверным. Попытка разработать фрагмент теории экспериментов с взвешенным входным алфавитом была сделана в [2]. Введем необходимые понятия и определения. Под автоматом будем понимать пятерку объектов $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S, X, Y – конечные множества состояний, входной и выходной алфавиты соответственно, δ, λ – функции переходов и выходов, задающие отображения $\delta: S \times X \rightarrow S, \lambda: S \times X \rightarrow Y$. Через S_0 обозначим подмножество множества состояний S , которое назовем множеством допустимых начальных состояний автомата A . Под экспериментом, как и в [1], понимается процесс приложения входных последовательностей к автомату и вывода заключений, основанных на этих наблюдениях. При этом предполагается, что в процессе эксперимента доступны только входные и

выходные каналы автомата. Каждому входному символу $x_i \in X$ поставим в соответствие некоторое положительное число $w(x_i)$, называемое весом символа x_i . Весом входной последовательности p назовем число

$$w(p) = \sum_{j=1}^n w(x_{ij}).$$

Входная последовательность $p = x_{i1}, x_{i2} \dots x_{in}$ называется синхронизирующей для автомата A и множества допустимых начальных состояний S_0 , если $\forall s_1, s_2 \in S_0, \delta(s_1, p) = \delta(s_2, p)$.

Содержательно приведенное определение означает, что независимо от начального состояния автомата после подачи на его вход синхронизирующей последовательности он оказывается в одном и том же конечном состоянии.

Эксперименты, связанные с подачей синхронизирующих последовательностей, называются синхронизирующими. Тогда задача формулируется следующим образом.

Задан конечный автомат A своей таблицей переходов-выходов, каждый символ x_i входного алфавита автомата A имеет вес $w(x_i)$. Требуется построить синхронизирующую последовательность, минимальную по весу.

Задача и формальный метод построения таких последовательностей предложены в [2, 3]. Отдельные свойства входного алфавита, используемые в исследовании, описаны в [4]. Построим синхронизирующую последовательность.

Синтез последовательностей начинается с построения по таблице переходов заданного автомата графа, называемого графом синхронизации автомата. Этот граф представляет собой ориентированный граф, который строится по аналогии с установочным деревом, определенным в [1]. Каждая вершина помечается A -группой σ -множеств; σ -множество представляет собой любое конечное множество состояний автомата, элементы которого необязательно различны; σ -множество, состоящее из одного элемента, называется простым. Если σ -множество содержит два или более одинаковых элементов, оно называется кратным. И σ -множество однородно, если все его элементы одинаковы. Пусть множество допустимых начальных состояний имеет мощность q . A -группа есть множество σ -множеств, причем q есть общее число элементов во всех входящих в A -группу σ -множествах. В графе синхронизации каждая вершина представляет собой некоторую A -группу автомата, которая

используется в качестве имени вершины. Вершина называется простой, если соответствующая A -группа содержит только простые σ -множества. Вершина называется кратной, если соответствующая A -группа содержит кратное σ -множество. Вершина называется однородной, если соответствующая A -группа содержит только однородные σ -множества. При обозначении вершин на рисунке будем придерживаться правила: состояния σ -множества отделяются запятой, а одно σ -множество от другого в пределах A -группы отделяется точкой с запятой.

По аналогии с [1] из каждой вершины графа исходит m дуг, каждая из которых помечена одним из символов входного алфавита $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Конечная вершина дуги, помеченной входным символом x_i , есть A -группа σ -множеств, состоящая из состояний-приемников по сигналу x_i , соответствующих состояний A -группы вершин, из которой дуга исходит. Состояния-преемники находятся из таблицы переходов-выходов автомата.

Будем считать, что вершины графов расположены по уровням. На нулевом уровне всегда располагается вершина S_0 , где S_0 – множество допустимых начальных состояний, затем следуют уровни 1-й, 2-й и т.д. Каждой вершине графа сопоставляется флажок (на рисунке он изображен квадратом), значение которого равно сумме весов входных символов последовательности, соответствующей пути по графу, ведущему из вершины S_0 в вершину S .

В [3] сформулированы правила завершения построения уровней.

Из способа построения графа вытекает, что последовательность входных символов, соответствующая пути по графу из S_0 в одну из вершин S , где $|S| = 1$, является синхронизирующей для заданного автомата. Поиск таких путей представляет собой тривиальную задачу, поскольку граф синхронизации есть дерево и поэтому каждый путь единственен [5].

Покажем процесс построения графа синхронизации для автомата, заданного таблицей, считая, что $S = \{1, 2, 3\}$, $w(\alpha) = 1$, $w(\beta) = 2$, $w(\gamma) = 20$. Этот граф изображен на рис. 1. Так, вершины $\{1, 2, 3\}$ первого уровня, две вершины $\{4, 5\}$ второго уровня, вершины $\{2, 3\}$ и $\{1, 2\}$ третьего уровня и т.д. являются окончательными в силу п. 2 правила завершения [3]. Вершины $\{1\}$ и $\{5\}$ пятого уровня, вершина $\{4\}$ третьего уровня окончательные в силу п. 1. Две вершины $\{4, 5\}$ четвертого уровня, имеющие значение флажка 43, являются окончательными в силу п. 3. Отметим, что они являются таковыми в силу п. 2.

$s \setminus x$	α	β	γ
1	1/0	1/1	5/0
2	3/1	2/0	4/0
3	2/1	4/1	4/0
4	5/1	1/1	5/1
5	3/0	2/0	4/1

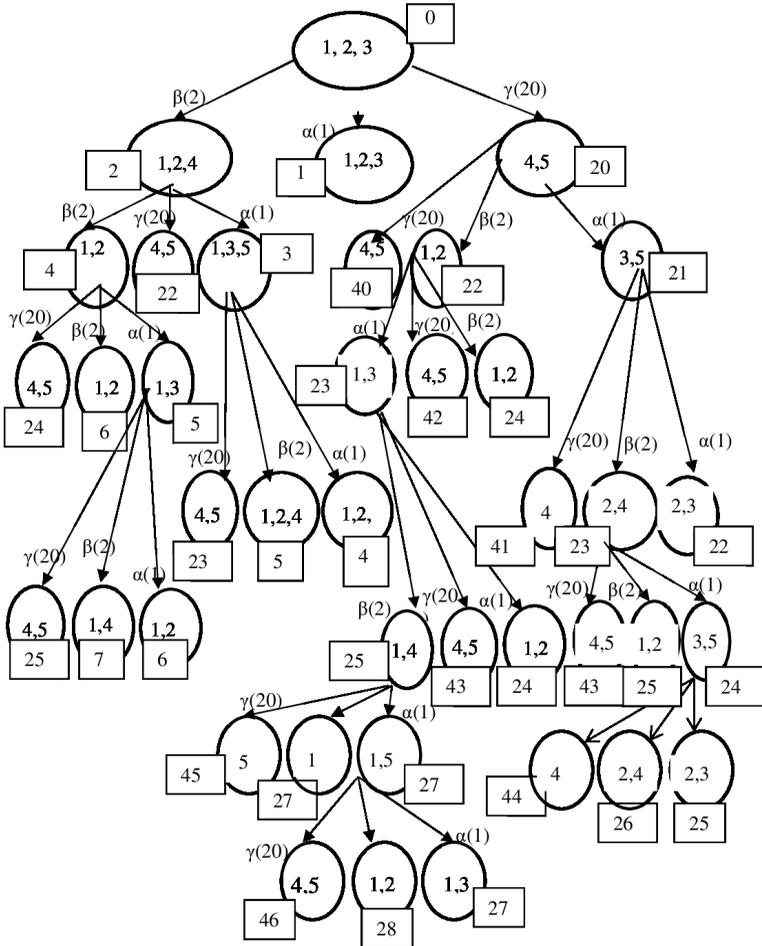


Рис. 1

Построение минимальной по весу синхронизирующей последовательности сводится к следующей процедуре. Среди вершин S графа, у которых $|S|=1$, отыскивается вершина с минимальным значением флажка и в этом графе находится единственный путь из S_0 в нее, которому соответствует определенная последовательность входных символов. Построенная таким образом выходная последовательность и является синхронизирующей последовательностью, минимальной по весу.

На рис. 1 имеется 4 таких вершины, из которых вершина $\{1\}$ имеет минимальное значение флажка, равное 27. Поскольку пути из S_0 в эту вершину соответствует входная последовательность $\gamma\beta\alpha\beta\beta$, то она и является минимальной по весу синхронизирующей последовательностью. Минимальной синхронизирующей последовательностью в классическом понимании для этого автомата является последовательность $\gamma\alpha\gamma$, соответствующая пути по графу из вершины S_0 в вершину $\{4\}$ третьего уровня.

В работе показан пример построения синхронизирующей последовательности, минимальной по весу. Обобщение эксперимента связано с введением взвешенного входного алфавита, что позволяет включать в качестве частного случая классическую теорию экспериментов с автоматами, если веса всех символов входного алфавита положить равными одной и той же положительной константе. Предлагаемый метод синтеза синхронизирующей последовательности весьма незначительно отличается от ранее известных классических методов, что является важным обстоятельством с точки зрения построения модели и *программной* реализации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. М.: Наука, 1964.
2. Мещерякова О.В. Эксперименты с автоматами со взвешенным входным алфавитом. Автоматика и вычислительная техника. 2000. № 1. С. 43–53.
3. Мещерякова О.В. Задача синтеза синхронизирующей последовательности для автомата со взвешенным входным алфавитом // Фундаментальные и прикладные исследования: от теории к практике: Материалы II Междунар. науч.-практич. конф., приуроченной ко Дню Российской науки. 2018. С. 247–250.
4. Акимова С.А. Конкретная характеристика полугруппы входных сигналов универсальных упорядоченных автоматов. Наука и общество. 2011. № 1 (1). С. 35–38.
5. Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1968.

Линейное упорядочивание конечных автоматов

В.А. Молчанов, Р.А. Фарахутдинов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

В теории автоматов особый интерес представляет проблема линейной упорядочиваемости автоматов, так как решение этой задачи позволяет значительно повысить эффективность алгоритмов исследования многих теоретических и прикладных проблем. В данной работе предложен алгоритм поиска с возвратами, который позволяет эффективно решать вопрос о возможности построения линейных порядков на множестве состояний и множестве выходных сигналов конечного автомата, которые устойчивы относительно действия входных сигналов автомата. Для заданного конечного автомата программа линейно упорядочивает его или сообщает о том, что предъявленный автомат не допускает линейного упорядочивания. Программа может применяться в учебных целях, а также в прикладных задачах, связанных с разработкой эффективных алгоритмов, методов анализа структурированных и неструктурированных данных больших объемов и многообразия.

Введение

Пусть X – непустое множество. Бинарное отношение $\omega \in X \times X$ называется отношением порядка на множестве X , если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Порядок ω называется линейным, если для любых $x, y \in X$ либо $(x, y) \in \omega$, либо $(y, x) \in \omega$.

Упорядоченным множеством называется алгебраическая система (X, \leq) , где X – некоторое непустое множество, \leq – отношение порядка на нём. Упорядоченное множество с линейным порядком называется линейно упорядоченным множеством.

Автоматом называется многоосновная алгебраическая система $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$, где X – конечное непустое множество состояний, S – конечное непустое множество входных сигналов, Y – конечное непустое множество выходных сигналов; $\delta: X \times S \rightarrow X$ – функция переходов и $\lambda: X \times S \rightarrow Y$ – функция выходов автомата.

Постановка задачи линейного упорядочивания конечного автомата $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$: построить на множестве состояний X линейный порядок \leq_X и на множестве выходных сигналов Y – линейный порядок \leq_Y , для которых при любом $s \in S$ из условия $x_1 \leq_X x_2$ следует $\delta(x_1, s) \leq_X \delta(x_2, s)$, $\lambda(x_1, s) \leq_Y \lambda(x_2, s)$.

Основные результаты

Введём дополнительные понятия для автомата $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$. Будем считать, что множество состояний автомата $X = \{1, 2, \dots, n\}$ линейно упорядочено отношением $<$ сравнения чисел по величине. Как известно, функция переходов и выходная функции естественно продолжаются на множество S^* всех конечных последовательностей входных сигналов, которые называются входными последовательностями автомата. Орбитой $O(x, y)$ пары различных состояний $(x, y) \in X^2$ называется множество всех пар различных состояний, в которые переходит эта пара под действием всевозможных входных последовательностей, т.е.

$$O(x, y) = \{(x, y) \cup S_\delta(x, y)\} \setminus \{(z, z) \mid z \in X\},$$

где
$$S_\delta(x, y) = \{(u, v) \mid (\exists w \in S^*) (u = \delta(x, w) \wedge v = \delta(y, w))\}.$$

Выходной орбитой $O'(x, y)$ пары различных состояний автомата $(x, y) \in X^2$ называется множество всех пар различных выходных сигналов, которые выводятся автоматом под действием всевозможных последовательностей, т.е.

$$O'(x, y) = S_\lambda(x, y) \setminus \{(z, z) \mid z \in Y\},$$

где
$$S_\lambda(x, y) = \{(u, v) \mid (\exists w \in S^*) (u = \lambda(x, w) \wedge v = \lambda(y, w))\}.$$

Наш алгоритм состоит в следующем: в начальный момент строится множество T всех пар состояний автомата A вида (x, y) , для которых $x < y$ (это необходимо для того, чтобы не рассматривать симметричную для (x, y) пару (y, x)). Для каждой такой пары вычисляется её орбита и выходная орбита, которые проверяются на антисимметричность.

Если какая-либо орбита не удовлетворяет условию антисимметричности, то автомат не допускает линейного упорядочивания.

На следующем шаге отношение ω инициализируется тождественным отношением Δ_X , а отношение ω' – тождественным отношением Δ_Y . Этот шаг даст гарантию того, что отношения ω и ω' будут рефлексивными.

Затем в ω последовательно добавляются ещё не рассмотренные пары $(x, y) \in T$ вместе с их орбитами. Для всех добавленных пар в ω в множество ω' добавляются их выходные орбиты. После этого осуществляется построение транзитивного замыкания отношения $\omega \cup O(x, y)$ и отношения $\omega' \cup O'(O(x, y))$. Если на этом шаге появляется хотя бы одна симметричная пара в ω или в ω' , то необходимо вернуться на шаг назад и рассмотреть обратную для пары (x, y) пару (y, x) , если она еще не была рассмотрена, в противном случае необходимо вернуться на предыдущий шаг перед выбором рассматриваемой пары (x, y) . Если алгоритм возвращается в начальное состояние (т.е. полностью исчерпана возможность выбора пар состояний из множества T), то это значит, что невозможно построить антисимметричное отношение полного квазипорядка на одном из двух базисных множеств автомата, следовательно, автомат не допускает линейного упорядочивания.

Очевидно, что эффективнее на каждой итерации алгоритма выбирать в множестве T очередную пару с наибольшей мощностью орбиты среди еще не рассмотренных пар. Это обеспечивает более эффективный перебор пар состояний автомата при построении линейного порядка.

Когда объединение отношения ω с его обращением ω^{-1} совпадёт с декартовым произведением $X \times X$, значит, построено рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение ω , для которого при всех $x, y \in X$, $x \neq y$ выполняется либо $(x, y) \in \omega$, либо $(y, x) \in \omega$, т.е. построен линейный порядок на множестве X . Отношение ω' будет рефлексивным, антисимметричным и транзитивным, т.е. будет являться отношением порядка на множестве Y . По теореме Шпильрайна [1] любой порядок может быть продолжен до линейного на том же множестве. Применив данную теорему к порядку ω' , построим линейный порядок ω' на множестве Y . Таким образом, будут построены линейные порядки ω и ω' соответственно на множестве состояний X и на мно-

жестве выходных сигналов Y автомата. По построению эти порядки устойчивы относительно действия всех входных последовательностей автомата и, значит, стабильны относительно действия входных сигналов автомата.

Описанные шаги детально представлены в следующем алгоритме 1.

Алгоритм 1. Линейное упорядочивание конечного автомата

Вход: $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ – конечный автомат

Выход: $\omega \subseteq X \times X$ – линейный порядок на X , $\omega' \subseteq Y \times Y$ – линейный порядок на Y / автомат линейно неупорядочиваем

- 1) Сформировать множество $T = \{(x, y) \mid x, y \in X, x < y\}$ всех пар состояний, у которых $x < y$.
 - 2) Для каждой пары $(x, y) \in T$ построить орбиту $O(x, y)$ и выходную орбиту $O'(x, y)$. Для каждой пары $(x, y) \in T$ проверить $O(x, y)$ и $O'(x, y)$ на антисимметричность. Если обнаружена хотя бы одна симметричная пара, то **вернуть ответ** «Автомат не допускает линейного упорядочивания», иначе **перейти к шагу 3**.
 - 3) Отсортировать множество T в порядке невозрастания мощностей орбит его элементов.
 - 4) $\omega = \Delta_X$; $\omega' = \Delta_Y$.
 - 5) $U = \omega \cup \omega^{-1}$. Если $U = X \times X$, то **перейти к шагу 10**, иначе **перейти к шагу 6**.
 - 6) Выбрать пару $(s, t) \in T$, что $(s, t) \notin U$ и мощность орбиты $|O(s, t)|$ наибольшая.
 - 7) $\omega = \omega \cup O(x, y)$; $\omega' = \omega' \cup O'(O(x, y))$. Если хотя бы одно из отношений ω или ω' не удовлетворяет условию антисимметричности, то **вернуться на шаг 6** и рассмотреть обратную пару (t, s) для пары (s, t) , если она ещё не рассматривалась, иначе **вернуться к выбору предыдущей пары**. Если предыдущую пару выбрать невозможно, то **вернуть ответ** «Автомат не допускает линейного упорядочивания».
 - 8) $\omega = \omega^{tr}$, $\omega' = (\omega')^{tr}$ – построить транзитивные замыкания отношений ω и ω' . Если хотя бы одно из отношений ω или ω' не удовлетво-
-

ряет условию антисимметричности, то **вернуться на шаг 6** и рассмотреть обратную пару (t, s) для пары (s, t) , если она ещё не рассматривалась, иначе **вернуться к выбору предыдущей пары**. Если предыдущую пару выбрать невозможно, то **вернуть ответ** «Автомат не допускает линейного упорядочивания».

- 9) Если ω, ω' удовлетворяют условию антисимметричности, то **перейти на шаг 5**.
- 10) Если $\omega' \cup (\omega')^{-1} \neq Y \times Y$, то **продолжить порядок ω' до линейного** (по методу доказательства теоремы Шпильрайна) и **выдать ответ** (ω, ω') – искомые порядки.
-

На основании рассмотренного алгоритма написана реализующая его программа на языке программирования C#. Для тестирования программы были выбраны автоматы вида $A = (X, S, X, \delta, \lambda)$, у которых $X = \{1, 2, \dots, n\}$, функции переходов – преобразования $U_i, i = \overline{1, n-1}, V_k, k = \overline{2, n}$, которые определяются следующими формулами:

$$U_i(j) = \begin{cases} i+1, & \text{если } j = i, \\ j, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$V_k(j) = \begin{cases} k-1, & \text{если } j = k, \\ j, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функции переходов выбирались равные функциям выходов.

Известно [2], что преобразования U_i, V_k порождают всю полугруппу эндоморфизмов линейно упорядоченного множества. Следовательно, такие автоматы являются автоматами с наиболее сложной полугруппой входных сигналов. Ясно, что для таких автоматов точно существуют линейные порядки на множестве состояний и множестве выходных сигналов (например, естественный порядок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$).

Результаты тестирования нашей программы приведены в таблице. Для сравнения была проведена оценка полного перебора состояний автомата, это удалось сделать только для автомата максимум с 14 состояниями. Тестирование проводилось на персональном компьютере, на базе процессора Intel Core i7-6500U 2.50 ГГц. Результаты тестирования представлены в таблице.

Результаты тестирования программы

Количество состояний автомата	Время работы программы, с	Время полного перебора, с
10	0.97	0.84
11	1.67	5.069
12	2.69	67.04
13	4.24	856.01
14	6.12	11846.08
15	9.19	-
20	44.44	-
30	387.77	-
40	1883.93	-
50	6016.67	-
60	9654.89	-
70	32510.47	-

Заключение

Для решения задачи линейного упорядочивания автоматом предложен эффективный алгоритм перебора с возвратами, который для произвольного конечного автомата строит отношения линейных порядков на множестве состояний и выходных сигналов автомата или сообщает о том, что таких порядков не существует. На основе данного алгоритма написана программа, которая была протестирована на автоматах специального вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997. 368 с.
2. Айзенштат А.Я. Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейно упорядоченного множества // Сибирский матем. журнал, 1962. Т. 3. № 2. С. 161–169.

О генерации неизоморфных k -раскрасок графа методом Рида – Фараджева

П.В. Разумовский, М.Б. Абросимов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

На практике часто возникает задача генерации всех вершинных раскрасок заданного графа. Эффективного решения эта задача не имеет. Существуют различные подходы для решения данной задачи, наиболее результативными из которых являются методы с использованием техники *isomorphism rejection*, то есть без непосредственной проверки на изоморфизм. Хороший обзор можно найти в работе [1].

В статье рассматривается подход к решению данной проблемы, основанный на методе Рида – Фараджева.

Задача генерации рёберных раскрасок сводится к задаче построения вершинных раскрасок.

Но в первую очередь сформулируем основные определения, используемые в данной работе.

Основные определения

Определение 1. Путем в графе $G = (V, \alpha)$ называется последовательность вершин и ребер вида $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, v_n$. При этом говорят, что v_0 – начальная вершина пути, а v_n – конечная. Говорят также, что путь соединяет вершины v_0 и v_n и вершина v_n *достижима* из v_0 . Путь в графе можно задавать перечислением входящих в него вершин в порядке их прохождения: v_0, v_1, \dots, v_n . Если начальная и конечная вершины совпадают, то путь называется *циклическим*. Путь, каждая вершина которого принадлежит не более чем двум его ребрам, считается *простым*. Если начальная вершина пути совпадает с конечной, путь называют *циклом*, в противном случае – *цепью*.

Определение 2. Пусть $G = (V, \alpha)$ – граф, $k \in \mathbb{N}$. Функция вида $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ называется *вершинной k -раскраской* G , $f(v)$ – цветом вершины $v \in V$, а граф G , каждой вершине которого сопоставляется ка-

кой-нибудь цвет, называется *цветным* либо *графом с цветными вершинами*. Такие графы обозначаются следующим образом: $G = (V, \alpha, f)$.

Определение 3. *Изоморфизмом цветных графов* $G_1 = (V_1, \alpha_1, f_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2, f_2)$ называется изоморфизм графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$, сохраняющий цвета. Это биекция $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, при которой выполняются два условия:

1. $\forall u, v \in V_1 : (u, v) \in \alpha_1 \rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2$;
2. $\forall v \in V_1 : f_1(v) = f_2(\varphi(v))$.

Изоморфизм цветных графов также называется *цветным изоморфизмом*. Аналогично вводится понятие изоморфизма *графов с цветными рёбрами*.

Определение 4. *Цветной автоморфизм графа* – это изоморфизм цветного графа на себя. Множество всех цветных автоморфизмов, включая и тождественный, образует *группу автоморфизмов графа*.

Определение 5. Две вершины графа называются *подобными*, если существует автоморфизм, отображающий одну вершину на другую. Множество подобных вершин называется *орбитой*.

Определение 6. Пусть S – множество, а $F = \{S_1, \dots, S_p\}$ – семейство его различных непустых подмножеств, объединение которых даёт S . *Граф пересечений* $\Omega(F)$ семейства F определяется множеством $V(\Omega(F)) = F$ и условием « S_i и S_j смежны тогда и только тогда, когда $i \neq j \wedge S_i \cap S_j \neq \emptyset$ » [2].

Определение 7. Рассмотрим множество X всех рёбер графа G как семейство двухвершинных подмножеств множества вершин $V(G)$. *Рёберным графом* $L(G)$ графа G называется граф пересечений $\Omega(X)$. Таким образом, вершинами графа $L(G)$ являются рёбра графа G и две вершины графа $L(G)$ смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие им рёбра графа [2].

Построение неизоморфных графов с цветными рёбрами

Как было отмечено ранее, задача поиска неизоморфных графов с цветными рёбрами сводится к построению рёберного графа $L(G)$ и последующему поиску цветных графов для графа $L(G)$.

Если графы G_1 и G_2 изоморфны, то графы $L(G_1)$ и $L(G_2)$ тоже изоморфны. Уитни установил [2], что обратное справедливо почти всегда, и указал при этом единственную пару различных графов K_3 и $K_{1,3}$, имеющих один и тот же рёберный граф.

Необходимо ввести алгоритм построения рёберного графа для дальнейшего использования в алгоритме генерации раскрасок.

Пусть дан исходный граф $G = (V, \alpha)$.

1. Создается граф $L(G) = (V(L(G)), \alpha(L(G)))$ без рёбер и вершин.

2. Для каждого ребра $(u, v) \in \alpha$ в граф $L(G)$ добавляется новая вершина с меткой (u, v) .

3. Для каждой вершины $(u, v) \in V(L(G))$ перебираются вершины (u', v') из $L(V) \setminus \{(u, v)\}$. Для каждой пары вершин сравниваются метки и в зависимости от количества одинаковых элементов в рёберный граф добавляются одно либо два ребра.

4. На выходе получается рёберный граф $L(G) = (V(L(G)), \alpha(L(G)))$.

Построив граф $L(G)$ и рассмотрев частные случаи, описанные Уитни, можно построить неизоморфные рёберные раскраски.

Метод Риды – Фараджева порождения объектов без проверки на изоморфизм

Одним из наиболее распространенных методов порождения комбинаторных объектов без проверки на изоморфизм является метод канонических представителей. Идея метода в общем виде состоит в следующем:

1. Определяется способ кодирования объектов.

2. Среди всех кодов изоморфных объектов выбирается канонический код.

3. Порождаются все возможные уникальные структуры вместе с их кодами.

4. Порожденная структура принимается, если ее код канонический, в противном случае – исключается.

Такой подход к построению неизоморфных цветных графов использует подход Риды – Фараджева, который и лег в основу алгоритма генерации, описанного в этой работе.

Схема поиска неизоморфных раскрасок методом Рида – Фараджева

Схема поиска базируется на принципе перебора с отсечениями. Каждую итерацию вычисляется множество орбит для заданной раскраски, выбирается по одному представителю из каждой орбиты, и каждый представитель раскрашивается во все цвета выбранным способом. Из набора полученных таким образом раскрасок отсекаются неканоничные. Генерация продолжается до тех пор, пока не останется каноничных раскрасок.

Данная схема предполагает следующий ход генерации: на вход подается вектор цветов (раскраска) вершин графа, инициализированный первым цветом 1. Строится множество орбит, из каждой орбиты выбирается один наибольший ее представитель в виде индекса элемента раскраски. Каждый представитель раскрашивается во все цвета от второго до k -го. Все раскраски, полученные данным образом, проверяются перекрашиванием: если перекрашенная раскраска меньше проверяемой, то проверяемая раскраска отсекается. Далее алгоритм генерации для всех неотсеченных раскрасок строит множество орбит и повторяет предыдущие действия, но с той оговоркой, что выбираются только те представители орбит, чей индекс меньше раскрашенного на предыдущем шаге элемента раскраски. Например, если для раскраски размерности пять предыдущим раскрашиваемым элементом был четвертый элемент, то на текущем шаге генерации будут раскрашены только те представители орбит, чей индекс меньше четырех. Генерация заканчивается, когда на очередном шаге не останется неотсеченных раскрасок.

Оформим данную схему в алгоритм генерации неизоморфных вершинных k -раскрасок без проверки на изоморфизм методом Рида – Фараджева.

Алгоритм генерации неизоморфных раскрасок методом Рида – Фараджева

Для вычисления орбит по заданному разбиению будет использоваться программа *naivy* [3], реализованная по разработанному Бренданом МакКеем алгоритму [4].

Пусть задан граф $G = (V, \alpha)$ и количество цветов k , $k \in [1; |V|]$.

Алгоритм строит все неизоморфные раскраски для заданного графа:

1. задается последовательность $clr = (1, \dots, 1)$, $|clr| = |V|$, инициализирующая последовательность цветов заданного графа, где clr_i является цветом i -й вершины.

2. По заданной clr вычисляются орбиты при помощи программы *nauty*.

3. Из каждой орбиты берется по одному наибольшему представителю o .

4. Каждый выбранный представитель последовательно раскрашивается clr_o в цвета от 2 до k , получая раскраски с раскрашенными вершинами clr_o .

5. Каждая clr , полученная перекрашиванием o -й вершины в какой-нибудь цвет, проверяется на каноничность ее родителя путем перекрашивания по следующим правилам. Раскраска перекрашивается следующим образом: инициализируем переменную l первым цветом; циклически проходимся по всем вершинам; если текущая вершина ранее не встречалась в раскраске, присваиваем ей цвет l и увеличиваем l на единицу; если же вершина уже присутствовала в раскраске, раскрашиваем ее в присвоенный ей цвет. Если перекрашенная раскраска получилась лексикографически меньше проверяемой, то проверяемая раскраска отсекается.

6. Если не осталось ни одной неотсеченной раскраски, то алгоритм заканчивается.

7. Для каждой неотсеченной раскраски снова строится множество орбит, из каждой орбиты выбирается по одному наибольшему представителю o с той оговоркой, что индекс представителя должен быть меньше индекса раскрашенной на предыдущем шаге генерации вершине, производится переход на шаг 4.

Полученные раскраски удовлетворяют условию лексикографической минимальности и неизоморфности. Проверка на изоморфизм не используется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brinkmann G.* Isomorphism rejection in structure generation programs // *Discrete Mathematical Chemistry, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science.* 2000. V. 51. P. 25–38.
2. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973. 296 с.
3. *McKay B.D.* *nauty and Traces: Graph canonical labeling and automorphism group computation.* 2017. <http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/nauty/nug26.pdf>.
4. *McKay B.D., Piperno A.* Practical Graph Isomorphism // *J. Symbolic Computation.* 2013. V. 2. No. 60. P. 94–112.

Минимальные примитивные расширения неособых графов

А.А. Рипинен

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия*

Постановка задачи

Ориентированный граф – пара $G = (V, \alpha)$, где V – конечное непустое множество и $\alpha \subseteq V \times V$ – отношение на нем. Элементы $v \subseteq V \times V$, $v \in V$, называются вершинами графа, а пары $(u, v) \in \alpha$ – дугами графа.

Вершина v достижима из вершины u за k шагов, если в графе существует маршрут $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)$, где $v_0 = u$, $v_k = v$, $(v_i, v_{i+1}) \in \alpha$ при $i = 0, \dots, k-1$.

Ориентированный граф $G = (V, \alpha)$ называется сильно связным, если каждая вершина графа достижима из любой вершины.

Ориентированный граф $G = (V, \alpha)$ называется примитивным, если существует число $r \in \mathbb{N}$ такое, что каждая вершина графа достижима из любой вершины ровно за r шагов.

Из определения примитивного графа следует необходимое условие примитивности графа: если граф является примитивным, то он сильно связный. Однако обратное утверждение неверно. Простым примером является контур: контур является сильно связным, но не является примитивным.

Примитивным расширением ориентированного графа $G = (V, \alpha)$ называется ориентированный граф $G' = (V, \alpha')$, $\alpha \subseteq \alpha'$, являющийся примитивным.

Примитивное расширение называется минимальным, если оно получено добавлением минимального количества дуг.

Пусть $G = (V, \alpha)$ – произвольный ориентированный граф. Задача состоит в том, чтобы найти его произвольное минимальное примитивное расширение. Простым решением данной задачи является перебор сильно связных расширений. Но асимптотическая сложность такого подхода будет экспоненциальна, вследствие чего он неприменим к графам с большим количеством вершин. Поэтому требуется найти полиномиаль-

ный алгоритм поиска произвольного минимального примитивного расширения графа G .

Частным тривиальным случаем является граф, имеющий петлю, поэтому будут рассматриваться только беспетельные графы. Ни один из двухвершинных беспетельных графов не имеет примитивного расширения, поэтому все рассматриваемые графы будут иметь число вершин не меньше 3.

В решении задачи основным инструментом будет следующий критерий примитивности графа: граф является примитивным тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель (НОД) всех его контуров равен 1.

Конденсацией ориентированного графа G называется факторграф G/ε , где ε – отношение эквивалентности на множестве вершин графа G , каждый класс которого представляет собой сильно связную компоненту графа G .

Пусть C_{si} – количество стоков в графе G , C_{so} – количество источников в графе G , c_{si} – количество стоков в конденсации графа G , c_{so} – количество источников в конденсации графа G .

Ориентированный граф G будет называться особым, если $C_{si} = C_{so} = c_{si} = c_{so}$, и неособым – в противном случае.

В статье будет рассмотрено решение для неособых графов [1–10].

Алгоритм нахождения минимального сильно связного расширения графа

Вход. Ориентированный не сильно связный граф G .

Выход. Граф G_s – минимальное сильно связное расширение графа G .

Алгоритм.

1. Построение графа H – конденсации графа G . Пусть ε – соответствующее отношение эквивалентности.

2. Для каждой компоненты сильной связности c_i , $1 \leq i \leq m$, где m – количество компонент сильной связности графа G и количество вершин в графе H соответственно, выделить произвольную вершину v_i в графе G такую, что $\varepsilon(v_i) = c_i$.

3. Выделение в графе H всех стоков s_1, s_2, \dots, s_k и источников u_1, u_2, \dots, u_t .

4. Если в графе H $k > t$, то поменять ориентацию всех дуг в графах G и H , сделать все стоки источниками, а все источники – стоками, поменять k и t . После этого гарантируется, что $t \geq k$.

5. Добавить в H все дуги вида $(s_i, u_i), 1 \leq i \leq k$ и $(s_1, u_i), k < i \leq t$.
 6. Для каждой компоненты сильной связности графа H запомнить добавленную дугу, если такая есть.
 7. Пока в H более одной компоненты сильной связности, находить пару компонент, в которых есть добавленные дуги. Пусть в первой добавлена дуга (s_1, u_1) , а во второй (s_2, u_2) . Тогда поменять эти дуги на дуги (s_1, u_2) и (s_2, u_1) .
 8. Добавить в G все дуги, соответствующие добавленным дугам в H , используя для этого вершины из п. 2. Полученный граф обозначить G_s .
 9. Если в п. 4 производилась переориентация дуг, то переориентировать все дуги в графе G_s .
- Асимптотическая сложность алгоритма: $O(n)$.

Алгоритм нахождения минимального примитивного расширения неособого графа

Вход: ориентированный граф G с количеством стоков не равным количеству источников.

Выход: граф G_p – минимальное примитивное расширение графа G .

Алгоритм.

1–3 пункты алгоритма совпадают с первыми пунктами алгоритма нахождения минимального сильно связного расширения графа.

4. Если $k = t$, то переход в п. 5, иначе переход в п. 9.

5. Найти такой сток w в H , что в G существуют попарно различные $w_1, w_2, \dots, w_L, L > 1$ такие, что $\varepsilon(w_i) = w$ для $1 \leq i \leq L$, и она образует контур. Если такого w в H не существует, то поменять ориентацию всех дуг в G и H , сделать все стоки источниками, а все источники – стоками, поменять k и t . Найти сток w , удовлетворяющий требованию.

6. Построить G_s – минимальное сильно связное расширение графа G .

7. Пусть в G_s одна из добавленных дуг выходит из вершины w_k в некоторую вершину u (это всегда возможно). Обходом в глубину нужно найти длину маршрута от вершины u до одной из вершин $w_i, 1 \leq i \leq L$.

Пусть длина маршрута равна r .

8. При движении по контуру w_1, w_2, \dots, w_L от вершины из п. 7 ищется такая вершина, что $r + d$ кратно L , где d – пройденное количество дуг по контуру. Пусть на вершине w_q условие выполнилось (это означает,

что НОД $(r + d + 1, L)$ стал равным 1. Тогда из G_s убирается дуга (w_k, u) и добавляется дуга (w_q, u) . Получается граф G_p . Выполняется переход в п. 16.

9. Если в графе H $k > t$, то поменять ориентацию всех дуг в графах G и H , сделать все стоки источниками, а все источники – стоками, поменять k и t . После этого гарантируется, что $t > k$.

10. В H ищется такой источник u , что каждый сток в H достижим хотя бы из одного источника, не совпадающего с u .

11. Из H вырезается подграф H_{cut} , состоящий только из вершин, достижимых, по крайней мере, из одного источника, не совпадающего с u .

12. Строится минимальное сильно связанное расширение графа H_{cut} . В H и в G добавляются все дуги, которые должны быть добавлены в H_{cut} . Полученный из G граф обозначается G_s .

13. В графе H ищется произвольный контур w_1, w_2, \dots, w_L . Пусть в графе G_s вершина контура соответствует вершине с теми же обозначениями. Вершине u в G_s также будет соответствовать вершина u .

14. Обходом в глубину в G_s нужно найти длину маршрута от вершины u до одной из вершин $w_i, 1 \leq i \leq L$. Пусть длина маршрута равна r .

15. Идя по контуру w_1, w_2, \dots, w_L от вершины из п. 14, ищется такая вершина, что $r + d$ кратно L , где d – пройденное количество дуг по контуру. Пусть на вершине w_q условие выполнилось (это означает, что НОД $(r + d + 1, L)$ стал равным 1. Тогда в G_s добавляется дуга (w_q, u) .

Получается граф G_p .

16. Если в п. 5 или 9 была изменена ориентация дуг, то изменить ориентацию всех дуг в G_p .

Асимптотическая сложность алгоритма: $O(n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фомичев В.М. Оценки экспонентов примитивных графов // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2(12). URL: <http://sun.tsu.ru/mminfo/000349342/12/image/12-101.pdf> (дата обращения 16.12.2016).
2. Фомичев В.М. Свойства минимальных примитивных орграфов // Прикладная дискретная математика. 2015. № 2(28). URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/svoystva-minimalnyh-primitivnyh-orgrafov> (дата обращения 16.12.2016).
3. Фомичев В.М. О степенной структуре графов // Прикладная дискретная математика. 2015. № 8. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/o-stepennoy-strukture-grafov> (дата обращения 16.12.2016).

4. *Кяжин С.Н., Фомичев В.М.* Теоретические основы прикладной дискретной математики [Электронный ресурс] // Прикладная дискретная математика. 2012. № 2(16). URL: <http://www.mathnet.ru/links/1a7b5ae471264fbfa3ba1d7a74fb3b0e/pdm364.pdf> (дата обращения 16.12.2016).
5. *Бар-Гнар Р.И., Фомичев В.М.* О минимальных примитивных матрицах // Прикладная дискретная математика. 2014. Вып. 7. URL: <http://www.mathnet.ru/links/7299307237dcc438b3d359f6f741ffcd/pdma133.pdf> (дата обращения 16.12.2016).
6. *Beasley Le Roy B., Kirkland S.* A note on k-primitive directed graphs // Linear Algebra and Appl. 2003. P. 67–74.
7. *Салий В.Н.* Минимальные примитивные расширения ориентированных графов // Прикладная дискретная математика. 2008. С. 116–119.
8. *Богомолов А.М., Салий В.Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997. 368 с.
9. *Рипинен А.А.* Минимальные примитивные расширения многоугольных и линейных графов // Компьютерные науки и информационные технологии: материалы Междунар. науч. конф. Саратов: Издат. центр «Наука», 2016. С. 338–342.
10. *Рипинен А.А.* Минимальные примитивные расширения многоугольных графов // Научные исследования студентов Саратовского государственного университета: материалы итоговой студенческой научной конференции. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2015. С. 29–30.

Верхнее оценивание стоимости оптимального маршрута в сети с ограничением

А.А. Солдатенко

*Институт математики и фундаментальной информатики,
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия*

Исследуется NP-трудная задача RCSP (Resource Constrained Shortest Path). Задача RCSP является расширением задачи о кратчайшем пути в ориентированном графе $G = (V, E)$, когда для каждой дуги $e \in E$ кроме основной весовой функции $w(e)$ дополнительно задаются функции $r_i(e)$, $i = 1, \dots, k$, численно отражающие потребности в ресурсах, которые необходимы для передвижения по этой дуге. Задача RCSP возникает при проектировании и эксплуатации компьютерных и мультисервисных сетей. Задача RCSP традиционно формулируется в терминах теории графов и целочисленного линейного программирования. В теоретико-графовой формулировке рассматриваемая сеть представляется ориентированным графом, вершины которого соответствуют узлам сети, а дуги – каналам связи. Предполагается, что всякая дуга обладает основным весом, например стоимостью, а также некоторыми дополнительными весами, отражающими потребности в ресурсах, которые нужны для передвижения по этой дуге. Требуется найти между двумя заданными узлами сети кратчайший путь, удовлетворяющий заданным ограничениям на итоговые ресурсные затраты, которые необходимы для прохождения этого пути. Известно, что даже при одном ограничении задача RCSP является NP-трудной [1].

В настоящее время выделяют три класса методов и соответствующих им алгоритмов, способных находить точное или приближенное решение задачи RCSP: методы ранжирования путей [2], методы маркировки вершин [3], методы лагранжевой релаксации [4]. Первые два класса методов основаны на теоретико-графовой постановке задачи, в то время как методы третьего класса исходят из постановки задачи RCSP на языке целочисленного линейного программирования. К сожалению, большинство существующих алгоритмов решения задачи RCSP медленно работают на сетях большой размерности. Однако для многих современных приложений неприемлемы временные характеристики

данных алгоритмов и их многочисленных усовершенствованных версий [2, 3]. Поэтому остается актуальной разработка приближенных алгоритмов решения задачи RCSP, способных быстро находить решение на сетях большой размерности.

Теоретико-графовая постановка задачи

Пусть сеть описана взвешенным ориентированным графом (далее – просто графом) $G = (V, E)$ без кратных дуг и петель, в котором каждая вершина $v \in V$ представляет узел сети, а каждая дуга $e \in E$ – канал связи между соответствующими узлами сети, при этом $n = |V|$ и $m = |E|$. Считаем, что на множестве дуг графа $G = (V, E)$ задана функция $w(e): E \rightarrow R^+$, ставящая в соответствие каждой дуге $e \in E$ ее вес или стоимость $w(e) > 0$. Пусть для $s, d \in V$ в графе $G = (V, E)$ существует путь P , идущий от вершины s к вершине d . Полагаем, что вес этого (s, d) -пути P вычисляется как сумма весов всех входящих в него дуг:

$$w(P) = \sum_{e \in P} w(e), \quad (1)$$

т.е. функция $w(e)$ является аддитивной. Пусть для каждой дуги графа $G = (V, E)$ также заданы функции $r_i(e): E \rightarrow R^+$, $i = 1, \dots, k$, отражающие ресурсные потребности, которые необходимы для передвижения по этой дуге, и всегда $r_i(e) > 0$. Предполагается, что все эти функции аддитивные, т. е. для любого (s, d) -пути P верны равенства

$$r_i(P) = \sum_{e \in P} r_i(e), i = 1, \dots, k. \quad (2)$$

Кроме того, определены величины $R_i \in R^+$, $i = 1, \dots, k$, определяющие ресурсные ограничения рассматриваемой мультисервисной сети. Всякий (s, d) -путь P называется допустимым, если он удовлетворяет ресурсным ограничениям:

$$r_i(P) \leq R_i, i = 1, \dots, k. \quad (3)$$

Требуется найти (s, d) -путь P , который минимизирует стоимость $w(P)$ в (1) и удовлетворяет ограничениям (3). Такой путь определяет оптимальное решение задачи RCSP. Стоимость этого пути обозначим через OPT . Всякий допустимый (s, d) -путь можно рассматривать в качестве приближенного решения данной задачи. Очевидно, что если множество допустимых (s, d) -путей пустое, то задача RSCP не имеет решения.

Алгоритм RevTree и оценка точности решения

Здесь и далее под размерностью задачи RCSP понимаются значения n и m , характеризующие число вершин и дуг графа $G = (V, E)$ соответственно, а параметрами – значения функций $w(e)$, $r_i(e)$. Для краткости вместо $r_i(e)$ и R_i будем писать $r(e)$ и R . Опишем алгоритм RevTree для случая, когда имеется только один ресурс R_i и $w(e)$, $r_i(e)$ – положительные вещественнозначные функции.

Алгоритм RevTree состоит из двух фаз, на каждой из которых однократно выполняется известный алгоритм Дейкстры [5]. На первой фазе, исходя из функций $r(e)$, $e \in E$, вычисляется дерево путей минимального веса с корнем в вершине d . Это дерево определяет для каждой вершины $u \in V$ такой (u, d) -путь, вес которого указывает минимальный ресурс для прохождения (u, d) -пути. Обозначим (u, d) -путь через P_2 .

Пусть P_1 – путь из стартовой вершины s в текущую вершину v , найденный как некоторое допустимое решение задачи RCSP для вершин s и v . Согласно формуле (2), для прохождения этого (s, v) -пути был затрачен ресурс величины $r(P_1)$. Множество $\Gamma(v)$ определяет возможные направления дальнейшего движения по дугам графа $G = (V, E)$ из вершины v . Тогда для перемещения из вершины v в вершину $u \in \Gamma(v)$ необходимо выполнение условия

$$r(P_1) + r(v, u) + \pi(u) \leq R, \quad (4)$$

где $\pi(u) = \sum_{e \in P_2} r(e)$. Условие (4) гарантирует, что путь (P_1, e, P_2) , где $e = (v, u) \in E$, является допустимым решением задачи RCSP.

На второй фазе вновь выполняется алгоритм Дейкстры, но только с усеченными окрестностями вершин. Усечение окрестности $\Gamma(v)$ для текущей вершины $v \in V$ осуществляется по условию (4): если для вершины $u \in \Gamma(v)$ нарушается условие (4), то она удаляется из $\Gamma(v)$. Таким образом, алгоритм RevTree уменьшает мощность множеств $\Gamma(v)$ с учетом ресурсного ограничения R , что позволяет находить допустимое решение задачи RCSP, если оно существует.

Поскольку RevTree сводится к выполнению конечного числа раз алгоритма Дейкстры, его сложность по времени составляет $O(n^2)$.

Оценим точность приближенного решения, формируемого алгоритмом RevTree. Для этого вычислим величины

$$\lambda_{\min} = \min_{e \in E} \frac{r(e)}{w(e)}, \lambda_{\max} = \max_{e \in E} \frac{r(e)}{w(e)}.$$

Функции λ_{\min} , λ_{\max} определены для любой дуги $e \in E$, поскольку в формулировке задачи RCSP предполагается, что $w(e) > 0$, $r(e) > 0$, $e \in E$.

Пусть с помощью RevTree на некотором шаге найден оптимальный (s, v) -путь P_1 . Если вершина v совпадает с целевой вершиной d , то найдено оптимальное решение исходной задачи. В общем случае вершина v определяет начало еще не пройденной части искомого (s, d) -пути. Рассмотрим не усеченную окрестность $\Gamma(v)$ текущей вершины v . Пусть $x \in \Gamma(v)$ есть вершина, для которой

$$w(v, x) = \min_{u \in \Gamma(v)} w(v, u),$$

но не выполняется условие (4), т.е. верно соотношение

$$r(P_1) + r(v, x) + \pi(x) > R. \quad (5)$$

В этом случае именно эту вершину выбирает алгоритм Дейкстры, если окрестность $\Gamma(v)$ не подверглась усечению. При выборе вершины $u \in \Gamma(v)$, удовлетворяющей условию (4), алгоритм RevTree отклоняется от кратчайшего пути в смысле (1) без учета ресурсного ограничения (3). Обозначим (v, d) -путь, найденный с помощью не усеченных окрестностей как P_{rest}^* , а с помощью усеченных окрестностей – через P_{rest} . Очевидно, что для путей (P_1, P_{rest}) и (P_1, P_{rest}^*) справедливы следующие неравенства:

$$w(P_1) + w(P_{\text{rest}}^*) \leq OPT \leq w(P_1) + w(P_{\text{rest}}). \quad (6)$$

В соотношениях (6) величина $w(P_1) + w(P_{\text{rest}}^*)$ определяет значение целевой функции для кратчайшего пути без учета ресурсных ограничений, а $w(P_1) + w(P_{\text{rest}})$ – значение целевой функции пути, найденного алгоритмом RevTree. Предполагается, что допустимое решение задачи RCSP существует. Следовательно, найдется хотя бы один допустимый (s, d) -путь. Для прохождения (v, d) -пути доступен также ресурс $R_{\text{rest}} = R - r(P_1)$. Согласно (4), справедливо неравенство $R_{\text{rest}} \geq \pi(v)$.

Исходя из определения функции λ_{\min} и λ_{\max} , для всякой дуги $e \in E$ имеют место следующие соотношения:

$$0 < \lambda_{\min} w(e) \leq r(e) \leq \lambda_{\max} w(e).$$

В силу аддитивности функций $w(e)$ и $r(e)$ получим

$$0 < \lambda_{\min} w(P_{\text{rest}}^*) \leq r(P_{\text{rest}}^*) \leq \lambda_{\max} w(P_{\text{rest}}^*); \quad (7)$$

$$0 < \lambda_{\min} w(P_{\text{rest}}) \leq r(P_{\text{rest}}) \leq \lambda_{\max} w(P_{\text{rest}}). \quad (8)$$

Поскольку путь P_{rest}^* по построению проходит через вершину x , то с учетом (5) верны соотношения:

$$r(P_{\text{rest}}^*) \geq r(v, x) + \pi(x) > R - r(P_1) = R_{\text{rest}}.$$

Здесь $\pi(x)$ – минимально необходимый ресурс для передвижения из вершины x в вершину d . Следовательно, $r(P_{\text{rest}}^*) > R_{\text{rest}}$. Отсюда с учетом (7) имеем

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} R_{\text{rest}} < w(P_{\text{rest}}^*). \quad (9)$$

Из соотношений (8) имеем неравенство $w(P_{\text{rest}}) \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} r(P_{\text{rest}})$. Поскольку всегда $w(P_{\text{rest}}^*) \leq w(P_{\text{rest}})$ и $r(P_{\text{rest}}) \leq R_{\text{rest}}$, тогда

$$w(P_{\text{rest}}^*) \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} r(P_{\text{rest}}) \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} R_{\text{rest}}. \quad (10)$$

Из (9) и (10) следуют неравенства

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} R_{\text{rest}} < w(P_{\text{rest}}^*) \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} R_{\text{rest}}. \quad (11)$$

Принимая во внимание (6), получим

$$\frac{w(P_1) + w(P_{\text{rest}}) - OPT}{OPT} \leq \frac{w(P_{\text{rest}}) - w(P_{\text{rest}}^*)}{w(P_1) + w(P_{\text{rest}}^*)}. \quad (12)$$

Наибольшее отклонение найденного алгоритмом RevTree решения от оптимального решения достигается при

$$v = s, \quad w(P_{\text{rest}}) = \frac{1}{\lambda_{\min}} R_{\text{rest}}.$$

Тогда неравенство (12) принимает следующий вид:

$$\frac{\frac{1}{\lambda_{\min}} R_{\text{rest}} - OPT}{OPT} \leq \frac{\frac{1}{\lambda_{\min}} R_{\text{rest}} - w(P_{\text{rest}}^*)}{w(P_{\text{rest}}^*)}.$$

Согласно (11), справедливо соотношение

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} R_{\text{rest}} < w(P_{\text{rest}}^*).$$

Отсюда

$$\frac{\frac{1}{\lambda_{\min}} R_{\text{rest}} - OPT}{OPT} \leq \frac{\frac{1}{\lambda_{\min}} R_{\text{rest}} - \frac{1}{\lambda_{\max}} R_{\text{rest}}}{\frac{1}{\lambda_{\max}} R_{\text{rest}}} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} - 1 = \varepsilon.$$

Таким образом, полученное решение отклоняется от оптимального решения задачи RCSP не более чем на величину ε .

Заключение

В работе рассмотрена NP-трудная задача RCSP, возникающая при проектировании и эксплуатации мультисервисных сетей. Предложен полиномиальный по времени приближенный алгоритм RevTree решения задачи RCSP. Для RevTree определена верхняя оценка точности найденного решения, которая зависит от параметров задачи. В дальнейшем предполагается совершенствование предложенного алгоритмов с целью использования их на этапе эксплуатации мультисервисных сетей с учетом требований современных протоколов маршрутизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
2. Di Puglia Pugliese L., Guerriero F. A Survey of Resource Constrained Shortest Path Problems: Exact Solution Approaches // NETWORKS. 2013. P. 183–200.
3. Zhu X., Wilhelm W.E. A three-stage approach for the resource-constrained shortest path as a sub-problem in column generation // Computers & Operations Research. 2012. V. 39. Iss. 2. P. 164–178.
4. Horvath M., Kis T. Solving resource constrained shortest path problems with LP-based methods // Computers. 2016. V. 73. P. 150–164.
5. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2012. 390 с.

Диагностические эксперименты на алгоритмических моделях цифровых устройств ISCAS

В.М. Соловьев¹, Д.В. Сперанский²

¹ *Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского – СГУ, г. Саратов, Россия*

² *Российский университет транспорта – МИИТ, г. Москва, Россия*

В настоящее время интенсивно идет процесс внедрения электронных изделий во все области человеческой деятельности, которые являются основой цифровизации общества. Эти электронные изделия (цифровые устройства – ЦУ) нужно проектировать, изготавливать и эксплуатировать, поддерживая их в рабочем состоянии. На каждом этапе жизненного цикла ЦУ требуется знать их техническое состояние, что обеспечивается контролем и диагностированием, подачей воздействия (теста) и анализом реакции изделия на него. Создание эффективных тестов является одной из актуальных задач современной диагностики. Эффективность тестов зависит от используемых алгоритмов их создания, поэтому это направление технической диагностики бурно развивается. Появляется большое количество таких алгоритмов, контрольно-диагностические свойства которых требуют анализа и оценки качества. Для такого объективного анализа и оценки алгоритмов экспертами разработаны тестовые схемы ЦУ, стандартизированные международным симпозиумом IEEE по схемам и системам ISCAS [1]. Используя эти тестовые схемы, можно в среде автоматизированного проектирования электронных устройств (Electronic Design Automation, EDA) создавать алгоритмические модели ЦУ ISCAS, почти не отличающиеся от их реальных физических моделей. Современные EDA, как правило, позволяют создавать алгоритмические модели на языках описания электронных схем Verilog или VHDL. Язык Verilog ближе к ЦУ, быстрее и современнее VHDL. В то же время ранее созданные модели на VHDL могут транслироваться в Verilog, с последующей компиляцией, что и обеспечивает их совместимость. При этом появляется возможность эффективно исследовать различные подходы и идеи, лежащие в основе алгоритмов синтеза тестов для сложных ЦУ. Кроме того, такой подход позволяет оценить техническое состояние ЦУ, создать удобный аппарат для получения, хранения и анализа результатов диагностических экспериментов, и, что особенно важно, эти результаты (scientific data) представить в различной

удобной для исследователя форме (битовым массивом, бинарным вектором, графическими изображениями и т. д.). Все это делает EDA базой для разработки новой перспективной методики, решающей широкий круг задач технического диагностирования сложных ЦУ. Демонстрировать возможности такой методики можно на стандартных тестовых схемах ISCAS. Для них предлагаемая методика может содержать следующие этапы: выбор тестовой схемы из состава ISCAS; ввод исходных данных (принципиальная схема или описание ЦУ на языках Verilog, VHDL) и параметров в среде моделирования (например, Quartus II [2], ModelSim [3], Icarus Verilog (Iverilog) [4] и т. д.); разработка на основе анализируемых алгоритмов контрольных и диагностических тестов (testbench) в среде моделирования; компиляция и отладка созданной модели ЦУ и testbench; диагностические эксперименты (simulation) с отлаженной моделью ЦУ и тестами в среде моделирования, а также визуализация результатов диагностического эксперимента; анализ полученных результатов и размещение результатов в открытом доступе (например, GitHub), для обеспечения возможности их проверки и повторения [5].

Подготовка и проведение диагностических экспериментов

Использование тестовых цифровых устройств, рекомендованных IEEE (ISCAS-85, ISCAS-89, ISCAS-99) [1], позволяет создавать одинаковые транспарентные условия для проведения диагностических экспериментов. Это обеспечивает объективную оценку эффективности контрольных и диагностических тестов, создаваемых на основе предлагаемых алгоритмов. Кроме того, такой подход решает и целый ряд других задач диагностирования. Например, облегчает (формализует) построение входных тестовых последовательностей в среде автоматизированного проектирования электронных устройств (EDA) и их отладку. Не секрет, что автоматизированная генерация диагностической среды (testbench) в EDA до сих пор не решена. Разработчики ЦУ вынуждены их создавать в «ручном» режиме, используя для построения, например, языки программирования высокого уровня и вводить затем тесты в EDA практически руками. Для небольших ЦУ, содержащих до 100 элементов (вентилей, комбинационных схем), это ещё как-то оправдано. Однако при большом количестве входов-выходов и элементов в ЦУ (а именно такие тестовые схемы и входят в ISCAS) создание и ввод диагностических последовательностей, ориентированных даже на кон-

стантные дефекты, уже трудоемкая задача. Поэтому, чаще всего, исследователи используют свои «закрытые» методики, представляя в публикациях результаты моделирования таблицами, которые проверить не представляется возможным.

Моделирование в среде EDA – это, практически, создание алгоритмической модели с высокой степенью адекватности реальному (физическому) ЦУ, что подтверждается многолетним опытом применения такого подхода при создании заказных схем на основе FPGA [6]. В качестве среды моделирования могут использоваться как проприетарные системы (proprietary system) EDA, например Quartus II или ModelSim, так и программы с открытым исходным кодом (open source), например пакет программ Iverilog. В первом случае – это системы автоматизированного проектирования (САПР), ориентированные на разработку заказных микросхем на основе программируемых матриц. Производители этих САПР (Intel, Altera, Mentor Graphics, Xilinx и т.д.) предусматривают в них, как правило, три этапа проектирования: создание алгоритмической (электронной) модели будущей микросхемы; трассировка соединений элементов в FPGA; программирование логической матрицы (перенос программы трассировки в FPGA с помощью программатора, подключенного к EDA). Каждый этап проектирования сопровождается своим поведенческим контролем (simulation) и отладкой. Для задач диагностических экспериментов вполне достаточно первого функционального контроля, остальные два нужны для выпуска готовой микросхемы. Аналогичный этап содержится и в проектировании микросхем на основе Silicon IP [7], для подготовки документации и передачи ее кремниевой фабрике для производства микросхем. Упомянутые выше EDA имеют предпочтение перед последними САПР, так как имеют «облегченные» (студенческие) лицензии, которые предоставляют для диагностических экспериментов практически все функции. Кроме того, большинство форматов данных в современных EDA совместимы и дополняют друг друга, и, в случае необходимости, недоступные функции можно реализовать open source программами, например входящими в комплект программ Iverilog. Вводить исходные данные в среде EDA можно с помощью традиционных эпюр, используя графический редактор САПР или программируя на языках Verilog, VHDL. Первый язык предпочтительней, так как Verilog более компактен и лучше адаптирован к EDA. После ввода элементов архитектуры и параметров ЦУ (для большинства ЦУ из ISCAS в свободном доступе уже имеется описание на языке Verilog, VHDL) программа компилируется и при положитель-

ном результате формируется файл, отображающий ЦУ на уровне регистровых передач – RTL (Register Transfer Level). Вызвав этот файл в среде EDA, можно графически проконтролировать схему ЦУ, она должна соответствовать требованиям ISCAS. Кроме контроля она еще является и подтверждением успешного завершения этого этапа.

Создание testbench на языке Verilog в среде EDA, по мнению некоторых авторов [6], является «самой интеллектуальной работой» и даже сравнимой с искусством. Эта работа трудно поддается автоматизации и ее трудоемкость сильно зависит от требований к тестовым наборам. Проще всего задать псевдослучайные или периодически повторяющиеся регулярные наборы (САПР их сама генерирует по задаваемым параметрам), сложнее сформировать функциональные контрольные тесты, так как не для всех тестовых схем ISCAS можно найти подробное описание их работы. Самые сложные тесты – диагностические, ориентированные на модели неисправностей. Как правило, EDA testbench оформляют в виде второго файла (первый – это модель ЦУ). Например, в EDA Quartus II – это VWF файлы, в Iverilog – V файлы (Verilog файлы). Современные EDA в testbench могут включать не только тестовые наборы, но и средства анализа и визуализации (программный вариант логического анализатора), управляемые графически или программно (Quartus II). Кроме того, EDA могут кроме функционального анализа (Functional Simulation) выполнять и временной анализ (Timing Simulation), а это уже охватывает не только логические дефекты (одиночные константные или кратные, но и динамические). Все это требует тестовых наборов, обеспечивающих выявление «симптомов» такого рода дефектов. Создание сложных диагностических тестов и является одной из целей современной диагностики, предполагающей наряду с использованием традиционных и новые алгоритмы (эволюционные, нейроморфные, квантовые и т. д.). Поэтому и нужны современные автоматизированные средства оценки качества этих и вновь разрабатываемых алгоритмов построения эффективных тестов.

При использовании графических средств, построения testbench и генерации тестовых наборов, средствами EDA, анализируется модель ЦУ. Визуализатор, при этом, может выводить шаблон логического анализа (горизонтальные оси и соответствующие им, обнаруженные входы и выходы). Используя этот шаблон, можно графически задать, как бы «начертить», входные наборы, тем самым сформировать testbench. После создания модели ЦУ и testbench, как правило, оформленных в виде двух файлов, наступает этап компиляции и отладки, это итерационный

процесс, устранения ошибок в поведении модели ЦУ и тестах. Так как ошибки модели обычно устраняются на втором этапе, то на этом этапе, в основном, выявляются ошибки testbench, описание которых выводится сообщениями EDA. Реакция на эти сообщения и изменение testbench является основной целью этапа отладки, затрагивающего как валидность самой модели, так и особенности анализируемого алгоритма, построения теста. В результате такого итерационного процесса, когда сообщения об ошибках при компиляции не возникают, генерируются файлы внутреннего формата EDA (в некоторых EDA они доступны в каталоге модели) и выводят результаты моделирования, если в меню визуализатора указывались соответствующие панели отображения.

Диагностические эксперименты заключаются в задании временных параметров работы симулятора, получении массива данных (data set) сгенерированного EDA и отображения их в заданном формате. Так, в EDA Quartus II в панели Simulation Waveform Editor, где графически создается и testbench, можно задать временную шкалу моделирования и вызвать в меню процедуру функционального моделирования (Run Functional Simulation), выведя результаты на соответствующие оси. Причем в подкаталог Simulation рабочего каталога модели ЦУ будет выведен файл результата диагностического эксперимента, который можно в дальнейшем проанализировать и опубликовать. В пакете программ Iverilog процесс моделирования запускается отдельной моделирующей программой, которая вызывает откомпилированный файл и выводит результат на экран или в указанный файл. При необходимости можно создать и графический файл визуализации, который будет открываться в отдельной программе визуализатора. Причем в Iverilog все параметры моделирования указываются в testbench. Полученные данные (data set) и являются целью диагностического эксперимента, так как по ним можно судить о качестве тестов, созданных на основе анализируемого алгоритма. Сама среда EDA в такой диагностический эксперимент ничего от себя не вносит, она только позволяет создать адекватную модель ЦУ и тест на основе исследуемого алгоритма. При необходимости тест можно создать и другими средствами, а EDA использовать для его подачи. Причем упоминавшиеся выше EDA имеют возможность тестировать и физические объекты (ЦУ), подключаемые к ним через порты компьютера.

Завершающим этапом в диагностическом эксперименте является анализ полученных результатов и публикация их в открытом доступе. Для этого можно использовать как публичные облачные сервисы, так и

сервисы контроля версий типа GitHub. Это позволит в дальнейшем неоднократно обращаться к ним в процессе работы над алгоритмом и представить конечный результат на суд экспертам.

Заключение

Предложенная методика оценки качества контрольных и диагностических тестов позволяет объективно оценить качество алгоритмов построения тестов и автоматизировать диагностический эксперимент, проводимый на алгоритмических моделях тестовых схем ISCAS. Кроме того, результаты диагностического эксперимента, представленные как scientific data, имеют широко распространенные форматы, что облегчает их анализ и публикацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *ISCAS*. 2019. URL: <http://www.pld.ttu.ee/~maksim/benchmarks/>.
2. *Quartus II Introduction for Verilog Users*. Altera Corporation. 2009. 30 p.
3. *ModelSim*. Руководство пользователя. Model Technology Incorporated. 2002. 540 p.
4. *Icarus Verilog*. 2019. URL: <http://iverilog.icarus.com/>.
5. *Эксперименты с тестовыми схемами*. 2019. URL: <https://github.com/Vlad51/ISCAS>.
6. *Соловьев В.В.* Основы языка проектирования цифровой аппаратуры Verilog. М.: Горячая линия – Телеком, 2014. 206 с. ISBN 978-5-9912-0353-1.
7. *Заказные блоки в микросхемах (Silicon IP): как это работает*. 2019. URL: <https://habr.com/ru/post/414215/>.

Об одном эволюционном алгоритме синтеза тестов для цифровых устройств

В.М. Соловьев¹, Д.В.Сперанский²

¹ *Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского – СГУ, г. Саратов, Россия*

² *Российский университет транспорта – МИИТ, г. Москва, Россия*

Проблемы контроля и диагностирования цифровых устройств (ЦУ) относятся к числу актуальных, поскольку обеспечение высокой надежности функционирования ЦУ невозможно без их эффективного решения. Жесткие требования к надежности ЦУ диктуются постоянно возрастающей ответственностью функций, которые на них возлагаются. Это в полной мере относится, например к ЦУ, используемым в системах управления опасными промышленными производствами (изготовление токсичных и взрывчатых веществ и т.п.), в системах обеспечения безопасности транспортных средств (авиация, железные дороги, морские суда) и т.д. Важным этапом обеспечения высокой надежности ЦУ является эффективная организация их тестового и функционального диагностирования [1].

Предлагаемая статья посвящена задаче синтеза тестов для ЦУ. Методы синтеза тестов можно условно разделить на две группы. К первой относятся методы, сравнительно просто реализуемые, но вместе с тем получаемые ими тесты обнаруживают, как правило, сравнительно большую часть возможных неисправностей ЦУ, однако не все их множество. Примером может служить метод псевдослучайного синтеза тестов [1]. Ко второй группе относятся методы более трудоемкие в реализации, но синтезируемые ими тесты способны обнаруживать не только «простые», но и «трудные» неисправности. Примером могут служить методы различающей функции и булевых производных [1]. Предлагаемый в статье метод относится именно к этой группе.

В последние два-три десятилетия получили широкое распространение так называемые эволюционные алгоритмы [2, 3], оказавшиеся эффективными для решения многих практических проблем. В статье описан метод синтеза тестов, базирующийся на идее одного из таких алгоритмов, муравьином алгоритме (МА), разработанного М. Дориго [4, 5] и детально описанного в [6, 7].

Постановка задачи

Пусть задано ЦУ в виде структурной схемы и множество F его возможных неисправностей. Для простоты изложения далее предполагается, что ЦУ является комбинационным, а рассматриваемые неисправности – одиночными константными. Требуется разработать МА для синтеза тестов, позволяющий обнаруживать все неисправности из множества F . Далее эту задачу будем именовать задачей синтеза тестов (ЗСТ).

Рассматриваемая задача наиболее близка к классической задаче коммивояжера (ЗК) [6] и аналогия с ней будет использована нами.

В ЗСТ моделью ЦУ является неориентированный граф $G = (V, E)$, где V – множество вершин, каждая из которых соответствует некоторому входному набору ЦУ. В множество V включаются только те входные наборы ЦУ, которые обнаруживают неисправности из F . Если p – число входов, то $|F|$ может быть существенно меньше 2^p . Множество E образуют ребра между любой парой вершин графа G . Понятно, что граф является полным [8].

Каждому ребру ставится в соответствие число, называемое весом, о содержательном смысле которого будет сказано ниже. В терминах описанного графа решением ЗСТ является минимальный по длине путь в нем (сумма весов всех его ребер), которому соответствует тест, обнаруживающий все неисправности из F .

Понятно, что в отличие от ЗК этот путь может и не проходить через все вершины графа. При этом, как и в ЗК, каждая вершина «тестового» пути должна посещаться только один раз.

Описание алгоритма

Процесс построения теста каждым k -м муравьем (их число выбирается заранее) является пошаговым. Он начинается с включения в тест некоторого входного набора с последующим добавлением к «текущему» тесту $T_{\text{тек}}$ нового набора на каждом очередном шаге. С помощью $T_{\text{тек}}$ обнаруживается некоторое множество неисправностей ЦУ, которое исключается из первоначально заданного множества неисправностей F и в результате остается множество F_k^H еще не обнаруженных неисправностей. Добавление к «текущему» тесту $T_{\text{тек}}$ нового набора продолжается до тех пор, пока множество F_k^H не окажется пустым.

Далее используем следующие обозначения:

$F(w)$ – множество неисправностей из F , обнаруживаемых с использованием входного слова w ;

$F_{k,t}^H(T_{\text{тек}})$ – множество еще не обнаруженных тестом $T_{\text{тек}}$ k -м муравьем неисправностей из F на итерации t ;

$d_{ij}(k,t) = |F_{k,t}^H(T_{\text{тек}}, i) \cap F_{k,t}^H(T_{\text{тек}}, j)|$ – число неисправностей, обнаруживаемых k -м муравьем на итерации t как входным набором i , так и следующим за ним в текущем тесте входным набором j ;

$$D_{ij} = \begin{cases} |F(i) \cap F(j)|, & \text{если } F(i) \neq F(j), \\ C - \text{большая константа}, & \text{если } F(i) = F(j). \end{cases}$$

D_{ij} – это вес (длина) дуги (i, j) графа G .

Поясним содержательный смысл D_{ij} : чем больше множество «общих» неисправностей, обнаруживаемых наборами i и j , тем менее «привлекателен» для включения в тест после набора i входной набор j . Понятно, что вклад набора j в распознавание неисправностей из F в этом случае будет уменьшаться с ростом величины D_{ij} . Это хорошо согласуется с используемым в МА для ЗК понятием видимости вершин графа [6]: чем больше значение D_{ij} , тем «дальше» вершина j от вершины i , т.е. тем хуже ее «видимость».

$\eta_{ij} = 1/D_{ij}$ – видимость, являющаяся локальной статической информацией, которая выражает естественное желание включить в качестве очередного элемента искомого теста входной набор с наибольшим вкладом в обнаружение неисправностей множества F .

Отметим, что значения элементов D_{ij} матрицы D находятся применением логического моделирования ЦУ при наличии в нем всех неисправностей множества F .

Самоорганизация в колонии муравьев [6] есть результат взаимодействия четырех компонентов – случайности, многократности, а также положительной и отрицательной обратных связей. Что касается многократности, в МА для ЗСТ она реализуется за счет итерационного процесса поиска теста, осуществляемого не одним, а группой муравьев. При этом каждый муравей этой группы решает ЗСТ независимо от других. В процессе выполнения итерации каждый муравей группы решает задачу синтеза теста до конца.

Упомянутый выше принцип положительной обратной связи в МА реализуется в виде имитации предпочтения муравьем при выборе очередного ребра (входного набора) графа при построении тестового пути. Муравей может отдать предпочтение такому из альтернативных ребер, на котором концентрация феромона максимальна. Большая привлекательность для муравья такого ребра в качестве очередного звена тестового маршрута интуитивно связана с тем, что этот след феромона «укреплен» за счет перемещения по ребру многих муравьев, задействованных для решения той же задачи.

Условимся далее концентрацию (количество) феромона на ребре (i, j) на итерации t обозначать как $\tau_{ij}(t)$. Откладываемый на ребрах феромон позволяет «хорошим» тестовым маршрутам сохраняться в глобальной памяти колонии муравьев. Последующие итерации МА могут привести к улучшению таких тестовых путей. Заметим, что концентрация феромона на ребрах должна изменяться после каждой итерации МА, что отражает приобретение муравьями опыта в поиске теста.

Однако применение только положительной обратной связи может привести к ситуации, когда все муравьи двигаются одним и тем же субоптимальным (близким к оптимальному, но не оптимальным) путем. По аналогии с МА для ЗК в нашем алгоритме будет использоваться отрицательная обратная связь, вызываемая испарением феромона. Этот процесс приводит к тому, что группа муравьев, решающая ЗСТ, одновременно исследует разные точки пространства решений и передает свой опыт через изменение ячеек глобальной памяти колонии муравьев. Такая память представляет собой совокупность значений концентрации феромона на ребрах графа G , накопленных в результате итераций МА.

Компонент случайности в нашем МА реализуется при переходе от одного набора синтезируемого теста к следующему. По аналогии с ЗК вероятность перехода k -го муравья из вершины i в вершину j на t -й итерации имеет следующий вид:

$$P_{ij,k}(t) = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta]^\beta}{\sum_{i \in J_{i,k}} [\tau_{ii}(t)]^\alpha [\eta_{ii}(t)]^\beta}, & \text{если } j \in J_{i,k}, \\ 0, & \text{если } j \notin J_{i,k}, \end{cases} \quad (1)$$

где $J_{i,k}$ – множество еще не использованных входных наборов ЦУ в синтезируемом тесте k -м муравьем; α и β – регулируемые параметры, задающие веса следа феромона и видимости при построении теста.

Понятно, что при $\alpha = 0$ концентрация феромона при выборе ребра не используется, т.е. выбор осуществляется только на основе видимости вершины j . Если же $\beta = 0$, то для выбора используется только концентрация феромона, что может привести к сваливанию тестовых путей к одному из субоптимальных.

Как и в МА для ЗК, выбор очередного входного набора должен осуществляться по правилу рулетки. При этом каждый входной набор имеет в секторе рулетки площадь, пропорциональную вероятности (1).

По аналогии с ЗК формула корректировки концентрации феромона на ребре графа за счет его испарения (с параметром $\rho \in [0,1]$) имеет следующий вид:

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-\rho)\tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t), \quad (2)$$

где $\Delta\tau_{ij}(t) = \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij,k}(t)$, m – количество муравьев в группе (колонии), синтезирующей тест (m является регулируемым параметром).

Итак, в предложенном МА для ЗСТ самоорганизация в колонии муравьев базируется на взаимодействии компонентов случайности, многократности, положительной и отрицательной обратных связей.

Заключение

Предложенный алгоритм расширяет область приложений эволюционных вычислений на решение важного класса задач контроля и диагностирования ЦУ. Качество получаемых с применением МА результатов во многих других проблемах дает основание рассчитывать на аналогичные итоги и в рассмотренной нами области.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сперанский Д.В., Скобцов Ю.А., Скобцов В.Ю.* Моделирование, тестирование и диагностика цифровых устройств. 2-е изд. М.: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016. 535 с.
2. *Курейчик В.В., Курейчик В.М., Родзин С.И.* Теория эволюционных вычислений. М.: Физматлит, 2012. 260 с.
3. *Скобцов Ю.А., Сперанский Д.В.* Эволюционные вычисления: учеб. пособие. М.: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2015. 326 с.
4. *Dorigo M., Maniezzo V., Colorni A.* The Ant System: Optimization by a colony of cooperating objects // IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics. 1996. Part B. No. 26(1). P. 29–41.

5. *Dorigo M., Gambardella M.A.* Ant colony systems: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem objects // IEEE Trans. on evolutionary computation. 1997. No. 1(1). P. 53–66.
6. *Штовба С.Д.* Муравьиные алгоритмы // Экспонента Про. Математика в приложениях. 2003. № 4. С. 70–75.
7. *Ермолаев С.Ю.* Муравьиные алгоритмы оптимизации // Инфокоммуникационные технологии. 2008. Т. 6. № 1. С. 23–29.
8. *Новиков Ф.А.* Дискретная математика. 3-е изд. СПб.: Питер, 2017. 497 с.

Реализация модифицированного алгоритма Fuzzy ELECTRE II для многокритериальных задач принятия решений

Г.Ю. Чернышова, Е.И. Пиунова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

В социально-экономических системах процесс принятия решений связан с необходимостью анализа различных факторов при отсутствии единственного показателя, характеризующего все аспекты исследуемого объекта. При этом системный подход предполагает исследование как финансовых, так и нефинансовых показателей. Наличие слабоструктурированных и плохо формализуемых задач в условиях неопределенности, неточности и неполноты исходных данных, связанных с использованием количественных и качественных значений, существенно усложняют процесс принятия решений. В этом случае применение нечетко-множественного подхода обеспечивает возможность многокритериальной оценки сложных объектов [1, 2].

Многокритериальные методы принятия решений представляют собой набор алгоритмов, которые позволяют учитывать многочисленные (часто конфликтующие) критерии для оценки альтернатив. Для комплексной оценки инвестиционных проектов предлагается использовать метод Fuzzy ELECTRE II на основе нечетко-логического подхода. Данный алгоритм позволяет выделить не только наиболее подходящую альтернативу, но и проранжировать все их множество. Метод оценки Fuzzy ELECTRE II может применяться для анализа с использованием как качественных, так и количественных критериев [3].

Предлагаемое web-приложение реализует модифицированный алгоритм Fuzzy ELECTRE II и предназначено для интегрированной оценки инвестиционных проектов с целью выбора наилучшей альтернативы. Подобное приложение может быть актуально для большого количества организаций и предприятий, которые являются потенциальными инвесторами.

Модифицированный метод Fuzzy ELECTRE II

ELECTRE является одним из многокритериальных методов принятия решений для осуществления ранжирования альтернатив [4]. В данном методе не определяется количественная оценка каждой альтерна-

тивы, а устанавливается лишь условие превосходства одной альтернативы над другой [5]. Данный подход совершенствуется в целом семействе методов. ELECTRE II позволяет осуществлять ранжирование с помощью процедуры отбора альтернатив: решающее правило строится в результате формирования бинарных отношений доминирования на множестве альтернатив, используя индексы согласованности и несогласованности [6].

На рис. 1 изображена общая схема модифицированного алгоритма.

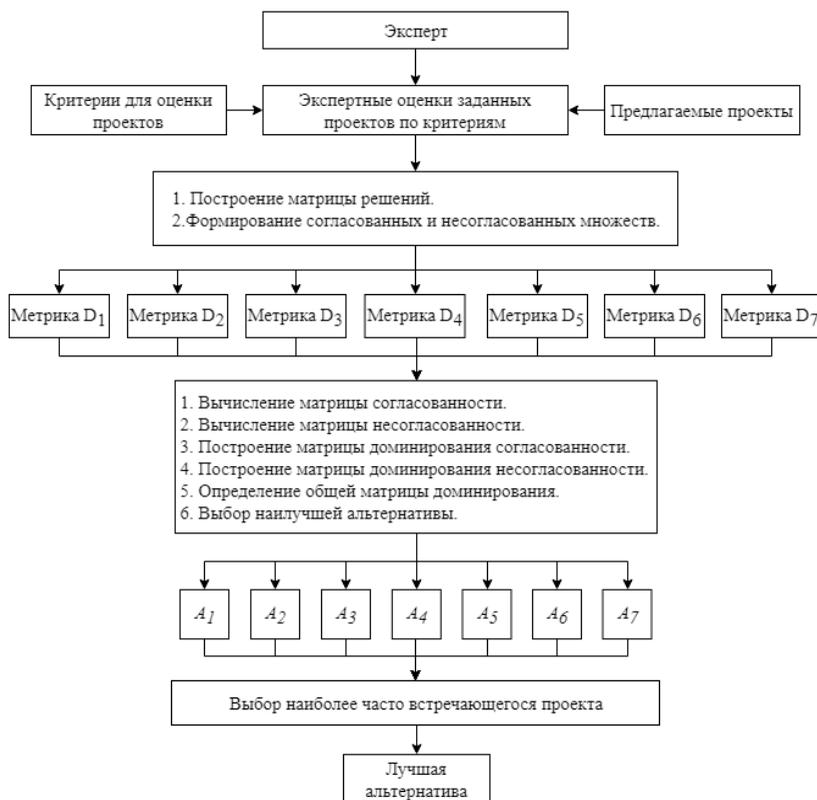


Рис. 1. Общая схема модифицированного алгоритма

Для алгоритма Fuzzy ELECTRE II применялись Евклидова метрика (D_1) или расстояние Хемминга (D_2) [7, 8]. В модифицированном алгоритме предложено вычислять следующие метрики: нормальная Евкли-

дова (D_3), Хемминга (D_4), Хаусдорфа (D_5), Тонимото – Жаккара (D_6), Журавлева (D_7), Манхэттенская и Брея – Кертиса (D_8) [9]. На основе этих расстояний будут ранжироваться альтернативы. Таким образом, после получения результата, используя все предложенные метрики, будет получено несколько лучших проектов. После этого будет выбираться наиболее часто встречающийся проект среди полученных вариантов (A_1, \dots, A_7), который будет представлен в качестве лучшей альтернативы.

Модифицированный алгоритм Fuzzy ELECTRE II позволяет провести дополнительный анализ предложенных альтернатив при помощи расширенного набора метрик, что позволяет более объективно отобрать лучший проект среди предложенных.

Реализация web-приложения с применением метода Fuzzy ELECTRE II

Для реализации модифицированного алгоритма разработано web-приложение, позволяющее получить интегрированную оценку инвестиционных проектов с целью поддержки принятия решений при оценке привлекательности инвестиционного проекта. При этом необходимо ранжировать проекты по степени экономической привлекательности [10].

Приложение разработано на платформе Python с использованием расширенного набора библиотек. В качестве СУБД применена PostgreSQL. Используемый фреймворк Django обеспечивает разработку масштабируемого приложения.

Функциональные возможности web-приложения включают формирование списка альтернатив и критериев оценки, ранжирования альтернатив модифицированным методом Fuzzy ELECTRE II, представление результата в виде ранжированного списка проектов и выбор лучшей альтернативы.

Для оценки были выбраны проекты, представленные на электронной бирже инвестиционных проектов INPROEX [11]. Данный инвестиционный портал ориентирован на поиск и привлечение инвесторов, предназначен как для презентации самих инвестиционных проектов, так и для популяризации инвестиционной привлекательности регионов и муниципальных образований.

Для оценки инвестиционных проектов использовались следующие количественные и качественные критерии: x_1 – необходимый объем привлекаемого капитала (руб.), x_2 – срок окупаемости (годы), x_3 – собственный капитал (руб.), x_4 – состояние реализации проекта, x_5 – наличие

имущества для проекта, x_6 – стадия разработки, x_7 – ожидаемый спрос на услуги.

Для сравнения были отобраны восемь интернет-проектов (a_1, \dots, a_8), которые предлагаются для реализации в Москве. В таблице приведены экспертные оценки заданных проектов.

Экспертные оценки заданных проектов

Проект	Критерий						
	x_1 (млн руб.)	x_2 (лет)	x_3 (млн руб.)	x_4	x_5	x_6	x_7
a_1	$1 < x_1 < 25$	$1 \geq x_2$	$1 \geq x_3$	Действующий	Да	Используется	Высокий
a_2	$1 < x_1 < 25$	$1 \geq x_2$	$1 < x_3 < 10$	Стартап	Да	Разработка	Средний
a_3	$1 \geq x_1$	$1 < x_2 \leq 5$	Не указано	Стартап	Нет	Разработка	Высокий
a_4	$1 < x_1 < 25$	$1 < x_2 \leq 5$	Не указано	Стартап	Нет	Используется	Низкий
a_5	$1 < x_1 < 25$	$1 < x_2 \leq 5$	Не указано	Стартап	Да	Тестирование	Низкий
a_6	$1 < x_1 < 25$	$1 < x_2 \leq 5$	$1 < x_3 < 10$	Стартап	Да	Разработка	Высокий
a_7	$25 \leq x_1$	$5 < x_2 \leq 10$	$1 < x_3 < 10$	Действующий	Нет	Используется	Средний
a_8	$1 \geq x_1$	$1 \geq x_2$	Не указано	Действующий	Да	Используется	Средний

На рис. 2 представлен интерфейс приложения с выбранными критериями для данного примера.

Выберете критерии для оценки проектов

1. Критерий: ▾
2. Критерий: ▾
3. Критерий: ▾
4. Критерий: ▾
5. Критерий: ▾
6. Критерий: ▾
7. Критерий: ▾

+ Добавить критерий
Перейти к вводу информации о проектах

Рис. 2. Формирование набора критериев

На рис. 3 представлены результат работы алгоритма – проранжированный список проектов и лучший из них для примера из таблицы. Лучшей альтернативой будет проект a_6 – «Организация телевизионного вещания высокого качества по протоколу P2P по всему миру» – на рис. 3 он выделен.

Таблица проранжированных проектов

Проект	Необходимый об...	Срок окупаемости...	Наличие собственного ка...	Состояние реализаци...	Имеется ли имущество...	Стадия разработ...	Ожидаемый спрос...
Организация телевизионного вещания высокого качества по протоколу P2P по всему миру	Более миллио... ◯	От года до 5 лет ◯	Более миллиона и ме... ◯	Стартап	Да	Разработка ◯	Высокий ◯
Инвестиционный проект по внедрению инновационной разработки – противоугонной системы	Более миллио... ◯	От года до 5 лет ◯	Не указано	Стартап	Нет	Разработка ◯	Высокий ◯
Инвестиционный проект по созданию и продвижению интернет-сайтов и разработке мобильных	Более миллио... ◯	Год и меньше ◯	Миллион и меньше ◯	Действующий биз... ◯	Да	Используется ◯	Высокий ◯
Инвестиционный проект по созданию программно-аппаратного комплекса искусственного интеллекта	Более миллио... ◯	Год и меньше ◯	Более миллиона и ме... ◯	Стартап	Да	Разработка ◯	Средний ◯
Разработка программного обеспечения для автоматизации действий в социальных сетях	Более миллио... ◯	От года до 5 лет ◯	Не указано	Стартап	Нет	Используется ◯	Низкий ◯
Создание интернет-сервиса по поиску тендеров	Более миллио... ◯	От года до 5 лет ◯	Не указано	Стартап	Да	Тестирование ◯	Низкий ◯
Проект по развитию действующего интернет портала о здоровье питания	Более 25 млн ◯	От 5 лет до 10 ◯	Более миллиона и ме... ◯	Действующий биз... ◯	Нет	Используется ◯	Средний ◯
Развитие действующей структуры по реализации товаров на рынке медицинской техники,	Более миллио... ◯	Год и меньше ◯	Не указано	Действующий биз... ◯	Да	Используется ◯	Средний ◯

Рис. 3. Проранжированный список проектов

Приложение на основе данного алгоритма обеспечивает возможность сравнения некоммерческих проектов с точки зрения качественных характеристик за счет нечетких лингвистических оценок. Модифицированный метод оценки Fuzzy ELECTRE II помогает анализировать потенциальные эффекты, вызванные рассогласованием в оценке.

Заключение

Системы поддержки принятия решений в настоящее время активно развиваются, что обусловлено возможностью их использования для решения слабоструктурированных задач в условиях неопределенности, неполноты исходных данных, использования количественных и качественных значений. Решение практических задач менеджмента подобного типа, в том числе связанных с оценкой инвестиционных проектов, тре-

бует разработки и применения специальных методов многокритериального оценивания альтернатив.

Реализация современных подходов к многокритериальному оцениванию в виде web-приложения представляет интерес для широкого круга частных инвесторов. В процессе выбора наиболее привлекательного инвестиционного проекта с использованием предлагаемой методики обеспечивается возможность использования расширенного набора критериев, применение качественных оценок социально-экономических факторов. При этом не предъявляются особые требования к уровню квалификации пользователя в области ИТ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чернышова Г.Ю.* Результаты применения методов искусственного интеллекта в задаче оценки конкурентоспособности промышленного предприятия // Вестник Саратовского государственного социально-экономического университета. 2009. № 5. С. 159–161.
2. *Чернышова Г.Ю.* Методика оценки конкурентоспособности промышленного предприятия с использованием моделей искусственного интеллекта // Вестник Саратовского государственного социально-экономического университета. 2009. № 4 (28). С. 178–180.
3. *Чернышова, Г.Ю., Пиунова, Е. И.* Применение модифицированного алгоритма fuzzy ELECTRE для многокритериальных задач принятия решений // Компьютерные науки и информационные технологии. 2018. С. 432–436.
4. *Ramalingam M.* Vertical Handoff Target Selection in a Heterogeneous Wireless Network Using Fuzzy ELECTRE // Florida International University FIU Digital Commons. 2015. No. 7.
5. *Рогозин О.В.* Сравнительная оценка алгоритмов поддержки принятия решений на основе качественных характеристик // Образовательные технологии. 2010. № 4. С. 84–105.
6. *Roy B., Bertier P.* La methode ELECTRE II: Une methode de classement en presence de criteres multiples //SEMA (Metra International) Paris. 1971. P. 142.
7. *Victor A. Devadoss, Rekha M.* A New Intuitionistic Fuzzy ELECTRE II approach to study the Inequality of women in the society // Global J. Pure and Applied Mathematics. 2017. No. 9. P. 6583–6594.
8. *Rezaei J., Vana C.* Embedding carbon impact assessment in multi-criteria supplier segmentation using ELECTRE TRI-rC // Ann Oper Res. 2017.
9. *Хачумов М.В.* Расстояния, метрики и кластерный анализ // Искусственный интеллект и принятие решений. 2012. № 1. С. 81–89.
10. *Коротеев М.В., Терелянский П.В.* Нечетко-множественная модель оценки рисков инвестиционных проектов // Известия Волгоградского государственного технического университета. 2011. С. 189–193.
11. *INPROEX – Биржа Инвестиционных Проектов* // <https://www.inproex.ru/search/project> (дата обращения: 03.07.2018). Загл. с экрана. Яз. рус.

Анализ сложных сетевых структур на примере социальной сети «Twitter»

К.С. Шапошников, И.Д. Сагаева, С.П. Сидоров

*Саратовский государственный национальный исследовательский университет
им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия*

В статье рассматривается метод построения и анализа социального графа на примере отношений между пользователями сети «Twitter». Приводится описание программы, обходящей сеть пользователей «Twitter» на заданную глубину, а также программы, позволяющей анализировать полученный граф и использовать его в качестве исходных данных для решения задачи классификации моделей генерации случайных графов. Также приводятся характеристики собранного сложного графа.

Метод построения графа

Граф предполагается хранить в виде списка смежности, где в качестве ключа используется идентификатор пользователя, а список содержит идентификаторы тех, на кого подписан текущий пользователь. Для получения такого графа используется Twitter API, которое работает посредством обычных HTTP-запросов и возвращает результат в формате JSON. Для сбора данных была написана программа на языке Go, которая обходит граф, начиная с заданного пользователя, и собирает данные на указанную глубину, это ограничение необходимо из-за того, что только ежедневная аудитория «Twitter» составляет порядка 335 миллионов пользователей. Кроме того, при использовании бесплатного аккаунта Twitter API имеет ограничения по количеству запросов в промежуток времени: лимит запросов на эндпоинт GET friends/list ограничен 15 запросами в течение 15 мин. Таким образом мы можем получать информацию о подписках одного пользователя раз в минуту [1]. Такие ограничения делают бессмысленным распараллеливание программы для ее ускорения, напротив, необходимо предусмотреть задержку, чтобы не выйти за пределы отведенного интервала. Каждая строка списка сохраняется в базу данных для возможности дальнейшего анализа, такой способ хранения графа имеет большое преимущество по скорости чтения по сравнению с CSV-файлами.

Анализ графа

Для анализа собранного графа используются библиотеки `networkit` и `powerlaw`. `Networkit` является высокопроизводительной библиотекой, которая позволяет удобно работать с графами, но, к сожалению, в `networkit` нет возможности назначить собственные имена узлам графа. Все узлы нумеруются по порядку по мере их добавления, поэтому при загрузке графа из базы данных необходимо иметь словарь, хранящий соответствия между порядковым номером узла и реальным идентификатором пользователя. Ниже приведен код функции на языке Python, реализующий описанный функционал [2].

```
def convert(self, source: Cursor, storage):
    existing_nodes = dict()
    for node in source:
        if node['id'] in existing_nodes:
            start_number = existing_nodes[node['id']]
        else:
            start_number = len(existing_nodes)
            existing_nodes[node['id']] = start_number
        leafs = list()
        for leaf in node['associatednodes']:
            if leaf in existing_nodes:
                leafs.append(existing_nodes[leaf])
            else:
                tmp = len(existing_nodes)
                existing_nodes[leaf] = tmp
                leafs.append(tmp)
        new_node = {
            'id': start_number,
            'associatednodescount': node['associatednodescount'],
            'associatednodes': leafs
        }
        storage.store(new_node)
```

После загрузки графа по нему собираются следующие характеристики:

1. Диаметр.
2. Кластерный коэффициент.
3. Экспонента степенной закон.
4. Центральность по посредничеству.
5. Центральность по близости.
6. Центральность по Кацу.
7. Пейджранк центральность.
8. Количество треугольников.

Данный граф планируется использовать в качестве исходных данных для решения задачи классификации моделей генерации графов, поэтому программа позволяет разбить граф на набор подграфов с заданными параметрами: количество подграфов, число хабов. При этом некоторые характеристики, такие, как центральность по посредничеству, требуют связный граф. Поэтому если подграф получился несвязным, то из него выделяется наибольшая компонента связности.

В таблице приведены некоторые параметры собранного графа. Значения всех перечисленных выше характеристик привести невозможно в силу нехватки вычислительных ресурсов. Полный же список характеристик будет использоваться при классификации моделей.

Характеристики графа

Наименование характеристики	Результат
Узлы, ребра	13544931, 34885363
Изолированные вершины	0
Петли	0
Плотность	0.00000038
Кластерный коэффициент	0.084986
Минимальная, максимальная, средняя степени	1, 15476, 5.151058
Коэффициент ассортативности	-0.236831
Количество компонент связности	2
Размер гигантской компоненты связности	13544800 (100 %)
Экспонента степенного закона	2.255

Видно, что граф является по большей части связным, в нем есть небольшая компонента связности из 131-го узла, которая отделилась от основного графа. Так же стоит обратить внимание на степенной закон, $\alpha = 2.255$, то есть граф является безмасштабным, поскольку $2 < \alpha < 3$ [3].

Заключение

В результате проделанной работы был разработан набор программ, призванный помочь в разработке собственной модели для генерации графов, имеющих схожие характеристики с реальным графом пользователей сети «Twitter» и решении задачи классификации моделей для проверки качества разрабатываемой модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rate Limits* // Twitter Developer Docs. URL: <https://developer.twitter.com/en/docs/basics/rate-limits> (дата обращения: 25.10.2018).
2. *Staudt C.L., Sazonovs A., Meyerhenke H.* NetworKit: a tool suite for large-scale complex network analysis // *Netw. Sci.* 4(4), 508–530 (2016).
3. *Alstott J., Bullmore E., Plenz D.* (2014) powerlaw: A Python Package for Analysis of Heavy-Tailed Distributions. *PLoS ONE* 9(1): e85777. doi:10.1371/journal.pone.0085777.

Генерация сложных сетевых структур на основе оптимизированной модели с предпочтительным присоединением

К.С. Шапошников, И.Д. Сагаева, С.П. Сидоров

*Саратовский государственный национальный исследовательский университет
им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия*

В настоящее время существует большое количество различных моделей генераторов случайных графов, обладающих свойствами, близкими к свойствам реальных веб-графов, в которых вершинами являются сайты или отдельные страницы, а ребрами – ссылки между ними. Такие модели подвергаются всестороннему изучению, а также модификации для достижения лучших показателей при генерации графов в рассматриваемой области. К числу таких методов относятся модель Боллобаша-Риордана и ее известное уточнение – модель Бакли – Остгуса. В настоящей статье предлагается модификация модели Бакли – Остгуса, а также проводится ее сравнительный анализ с другими моделями и показывается, что графы, построенные с использованием предложенной модели, обладают характеристиками, близкими к характеристикам реальных графов пользователей социальной сети «Твиттер».

Модель Боллобаша – Риордана

Метод Боллобаша – Риордана для генерации графа G_m^n , где n – число вершин, а m – параметр, отвечающий за отношение числа ребер к числу вершин, при этом $n, m \in \mathbb{N}$, состоит из двух стадий. На первой стадии строится граф G_1^n посредством индукции, где предполагается, что граф G^{n-1} уже построен и к нему добавляется вершина n с ребром, проводимым по определенному правилу. Предположим, что у нас есть граф $G_1^1 = (\{1\}, \{(1,1)\})$. Затем к этому графу мы добавляем вторую вершину и проводим ребро из добавляемой вершины в существующую с вероятностью $\frac{\deg v}{2n-1}$, где $\deg v$ – степень i -й вершины, при $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

или же строим петлю в добавляемой вершине с вероятностью $\frac{1}{2n-1}$.

В знаменателе находится $2n - 1$ по той причине, что сумма всех вероятностей должна быть равна единице [1]. При этом построенная последовательность графов является случайной. На рис. 1 показана возможная конфигурация графа для $n = 3$.

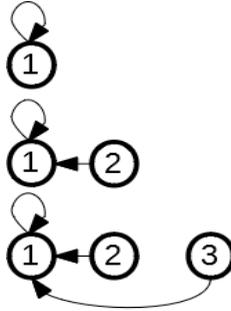


Рис. 1. Пример возможного графа для $n = 3$

В общем виде распределение вероятностей можно записать как

$$P(i = s) = \begin{cases} \frac{d_{G_1^{n-1}}(s)}{2n-1}, & \text{если } 1 \leq s \leq n-1, \\ \frac{1}{2n-1}, & \text{если } s = n. \end{cases} \quad (1)$$

После того как был получен граф G_1^n , осуществляется переход ко второму этапу, на котором необходимо «схлопнуть» его вершины. Для этого объединяются вершины в группы по m вершин и каждой такой группе даются собственные обозначения v_i , где $i \in \{1, \dots, n\}$, например вершина $v_1 = \{1, \dots, m\}$, а вершина $v_2 = \{m+1, \dots, 2m\}$. В каждой вершине v_i построим столько петель, сколько ребер было между вершинами соответствующей группы исходного графа. Аналогично построим ребра между вершинами v_i , будем проводить ребро, в случае, если есть ребро между соответствующими группами исходного графа. На выходе из графа G_1^{mn} получается граф G_m^n [2].

Модель Бакли – Остгуса

Модель Боллобаша – Риордана хорошо моделирует реальные графы, удовлетворяющие закону степенного распределения степеней вершин, то есть число вершин со степенью d аппроксимируется величиной $d^{-\gamma}$, где показатель $\gamma = 3$. Однако это несколько расходится с показателями реальных веб-графов, для которых $\gamma = 2.1 \pm 0.1$. Таким образом, данная модель требует усовершенствований. Один из предложенных способов состоит в использовании модели Бакли – Остгуса. Данный метод вводит в модель Боллобаша – Риордана положительный коэффициент a , не зависящий от степени и называемый начальной привлекательностью вершины. При этом способ добавления новых вершин и ребер в генерируемый граф не изменяется, лишь вероятности проведения ребра в новую вершину начинают вычисляться [3] с учетом коэффициента a по формуле (2)

$$P(i = s) = \begin{cases} \frac{d_{H_{a,1}^{n-1}}(s) + a - 1}{(a + 1)n - 1}, & \text{если } 1 \leq s \leq n - 1, \\ \frac{a}{(a + 1)n - 1}, & \text{если } s = n. \end{cases} \quad (2)$$

Эксперимент

Результаты сравнения графов, генерируемых по модели Бакли – Остгуса, описаны в статье [3], где в качестве эталонного графа использовался веб-граф. В данной работе приводится попытка применить модель для генерации графов, схожих по характеристикам с характеристиками графов пользователей социальной сети «Твиттер». В табл. 1 приведены значения характеристик реального веб-графа, который использовался в нашем анализе. Для получения данных для построения этого графа нами была написана программа-crawler на языке Go, которая получает на вход идентификатор пользователя, с которого нужно начать обход, а также число определяющее глубину обхода.

Эмпирическим путем было выяснено, что лучше всего подходит коэффициент $a = 0.47$, при этом использовался генератор, описанный в статье [4]. Но в модели, предложенной в [3], используется статический коэффициент, и характеристики сетей, полученных в результате генерации с использованием этой модели, отличаются от показателей реальных социальных сетей.

Характеристики эталонного графа

Наименование характеристики	Результат
Узлы, ребра	13544931, 34885363
Изолированные вершины	0
Петли	0
Плотность	0.00000038
Кластерный коэффициент	0.084986
Минимальная, максимальная, средняя степени	1, 15476, 5.151058
Коэффициент ассортативности	-0.236831
Количество компонент связности	2
Размер гигантской компоненты связности	13544800 (100 %)
Экспонента степенного закона	2.255

Мы полагаем, что для лучшего моделирования поведения пользователей сети «Твиттер» необходимо использовать динамический коэффициент, который также будет независим от степени вершины. Это позволит, в случае с «Твиттер», реализовать уменьшение качества публикаций пользователя после набора некоторой массы читателей. Таким образом в модель Бакли – Остгуса вводятся три новых параметра: l , r , k – где l , r – границы отрезка, в пределах которых изменяется параметр начальной предпочтительности a ; k – шаг с которым уменьшается a , который участвует в моделировании уменьшения количества публикаций.

В нашем эксперименте a изменялся на отрезке $[1, 0.47]$ с шагом 0.01, при этом $n = 30000$, а $m = 1$, для увеличения количества обособленных вершин.

В целях сравнения результатов обновленной модели с исходной применялся следующий подход:

1. С помощью каждой модели генерировалось 10 графов, по которым собирался набор характеристик (диаметр, центральность по посредничеству, центральность по близости, центральность по Кацу, пейджранк центральность, количество треугольников, экспонента степенного закона), при этом бралась гигантская компонента связности.

2. На графах, сгенерированных по двум моделям, обучался SVM-классификатор, которому на вход для классификации подавался аналогичный набор характеристик, собранный по подграфам графа пользователей «Твиттер».

3. Классификатор возвращал вероятность, с которой тестовый набор характеристик относится к обучающему классу характеристик.

Также для оценки качества предложенной нами модели был проведен ее сравнительный анализ с другими известными моделями (Эрдеша – Реньи, Барабаши – Альберт, Чунг-Лу). Вычислительный эксперимент показал, что лучшие показатели были продемонстрированы с использованием модели Чунг-Лу, поскольку в качестве исходных параметров на вход подается вектор весов, являющихся степенями вершин исходного графа. Результаты попарных сравнений моделей приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты сравнения моделей

Пара моделей	Результат
Эрдеша – Реньи – Чунг-Лу	0.29013239 – 0.70986761
Барабаши – Альберт – Чунг-Лу	0.2379145 – 0.7620855
Барабаши – Альберт – Эрдеша – Реньи	0.64091414 – 0.35908586
Боллобаша – Риордана – Чунг-Лу	0.36762177 – 0.63237823
Бакли – Остгуса – Чунг-Лу	0.25536262 – 0.74463738
Обновленная модель – Чунг-Лу	0.49410841 – 0.50589159
Обновленная модель – Бакли – Остгуса	0.62056023 – 0.37943977

Заключение

Предложенная в работе модель показала большее сходство с реальным графом, чем исходная модель Бакли – Остгуса и близка по показателям близости к модели Чунг-Лу. Отметим, что применение динамического параметра вместо статического требует дополнительного изучения в контексте моделирования социальных сетей, а именно способов выбора границ изменения коэффициента a и шага его уменьшения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Райгородский А.М.* Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2011. 136 с.
2. *Bollobas B.* Random Graphs, Second Edition. Cambridge Univ. Press, 2011.
3. *Zhukovskiy, Maxim & Vinogradov, Dmitry & Pritykin, Yuri & Ostroumova Prokhorenkova, Liudmila & Grechnikov, E & Gusev, Gleb & Serdyukov, Pavel & Raigorodskii, Andrei.* (2012). Empirical Validation of the Buckley-Osthus Model for the Web Host Graph: Degree and Edge Distributions. ACM International Conference Proceeding Series. 10.1145/2396761.2398476.
4. *Шапошников К.С., Сагаева И.Д., Сидоров С.П.* Реализация асинхронного генератора графов методом Боллобаша – Риордана // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы междунар. науч. конф. Саратов: Издат. центр «Наука», 2018. 464 с.

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ТЕЛЕТРАФИКА

On the Total Amount of the Occupied Resources in the Multi-resource QS with Renewal Arrival Process

Anastasia Galileyskaya

Tomsk State University, Tomsk, Russia

The methods of queuing theory are widely used to describe different economic problems, to process large data in technical systems, as well as cloud computing. Modern computer networks are characterized by the integration of heterogeneous streams, including phone calls, text messages, video sources, etc., which require the use of a more complex flow model [1–3]. To study such models, it is necessary to take into account different kinds of resources needed for the transmission and processing of the transmitted information. Thus, the development of computer and mobile communication networks has led to the need of developing new “resource” models that would allow us to estimate the amount of the occupied resource [6, 7].

Most often the analysis is limited to systems with incoming stationary Poisson flow and exponential service time. But the fact is that the Poisson flow does not always accurately describe real flows and the service time is not always exponential [8, 9]. Therefore, it is very relevant in practice to consider a system with an incoming non-Poisson (for example, renewal arrival process) flow and an arbitrary service time.

Mathematical Model

Consider a queuing system with infinite number of servers and arbitrary service time. Renewal arrival process is determined by the distribution function $A(z)$ of the interarrival times. Each arriving customer instantly occupies the first free server, with service time distribution $B(\tau)$ and different resources ($i = 1, \dots, n$) with distribution $G_i(y)$ depending on the type i of the resource. When the service is completed, the customer leaves the system. Resource amounts and service times are mutually independent and do not depend on the epochs of customer arrivals.

Denote by $V_i(t)$ the total amount of i -th type resources ($i = 1, \dots, n$) occupied at time t . Our goal is to derive the probabilistic characterization of the n -dimensional process $V(t) = [V_1(t), \dots, V_n(t)]$. This process is, in general, not Markovian and, therefore, we use the dynamic screening method for its investigation. Consider two time axes that are numbered as 0 and 1 (see Fig.1). Let axis 0 show the epochs of customers' arrivals, while axis 1 corresponds to the screened process.

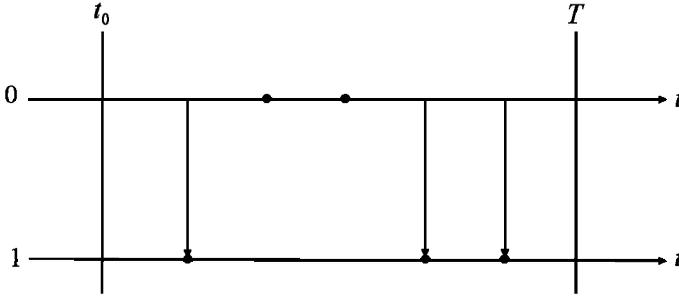


Fig. 1. Screening of the customers arrivals

We introduce the function (dynamic probability) $S(t)$ that satisfies the condition $0 \leq S(t) \leq 1$. The incoming flow event can be screened on the axis 1 with probability $S(t)$ and not screened with probability $1 - S(t)$. Let the system be empty at moment t_0 , and let us fix some arbitrary moment T in the future. $S(t)$ represents the probability that a customer arriving at the time t will be serviced in the system by moment T . It is easy to show that $S(t) = 1 - B(T - t)$ for $t_0 \leq t \leq T$.

Denote by $W_i(t)$ the total amount of i -th type resource screened on axis i . It is easy to prove that

$$P\{\mathbf{V}(t) < \mathbf{x}\} = P\{\mathbf{W}(t) < \mathbf{x}\}, \tag{1}$$

for all $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$, where the inequalities $\mathbf{V}(T) < \mathbf{x}$ and $\mathbf{W}(T) < \mathbf{x}$ mean that $V_1(T) < x_1, \dots, V_n(T) < x_n$ and $W_1(T) < x_1, \dots, W_n(T) < x_n$, respectively. We use (1) to investigate the process $\{\mathbf{V}(t)\}$ via the analysis of the process $\{\mathbf{W}(t)\}$.

Integro-Differential Equations

Let us consider the $n + 1$ – dimensional Markovian process $\{z(t), \mathbf{W}(t)\}$, where $z(t)$ is the residual time from t to the next arrival. Denoting the probability distribution of this process by

$$P\{z(t) < z, \mathbf{W}(t) < \mathbf{w}\} = P(z, \mathbf{w}, t)$$

and taking into account the formula of total probability, we can write the following system of Kolmogorov integro-differential equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(z, \mathbf{w}, t)}{\partial t} = & \frac{\partial P(z, \mathbf{w}, t)}{\partial z} + \frac{\partial P(0, \mathbf{w}, t)}{\partial z} (A(z) - 1) + \\ & + A(z)S(t) \left[\int_0^{w_1} \dots \int_0^{w_n} \frac{\partial P(0, \mathbf{w} - \mathbf{y}, t)}{\partial z} dG_n(y_n) \dots dG_1(y_1) - \frac{\partial P(0, \mathbf{w}, t)}{\partial z} \right], \end{aligned}$$

where $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$, with the initial conditions

$$P(z, \mathbf{w}, t_0) = \begin{cases} R(z), & \mathbf{w} = \mathbf{0}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $R(z)$ denotes the stationary probability distribution of the random variable, which is determined by equality

$$R(z) = \lambda \int_0^z (1 - A(x)) dx,$$

where

$$\lambda = \frac{1}{\int_0^{\infty} (1 - A(x)) dx}.$$

We introduce the partial characteristic function

$$h(z, \mathbf{v}, t) = \int_0^{\infty} e^{jv_1 w_1} \dots \int_0^{\infty} e^{jv_n w_n} P(z, d\mathbf{w}, t),$$

where $j = \sqrt{-1}$ is the imaginary unit. Then, we can write

$$\frac{\partial h(z, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = \frac{\partial h(0, \mathbf{v}, t)}{\partial z} [A(z) - 1 + A(z)S(t)(G^*(\mathbf{v}) - 1)] + \frac{\partial h(z, \mathbf{v}, t)}{\partial z}, \quad (2)$$

where

$$G^*(\mathbf{v}) = \int_0^\infty e^{jv_1 y_1} dG_1(y_1) \dots \int_0^\infty e^{jv_n y_n} dG_n(y_n),$$

with the initial condition

$$h(z, \mathbf{v}, t_0) = R(z). \quad (3)$$

Gaussian Approximation

In general, the exact solution of equation (2) is not available, but it may be found under asymptotic conditions. In this paper, we consider the case of infinitely growing arrival rate. Let us write the distribution function of the interarrival times as $A(Nz)$, where N is some parameter used for the asymptotic analysis ($N \rightarrow \infty$ in theoretical analysis [4, 5]).

Then, the equation (2) takes the form

$$\frac{1}{N} \frac{\partial h(z, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = \frac{\partial h(z, \mathbf{v}, t)}{\partial z} + \frac{\partial h(0, \mathbf{v}, t)}{\partial z} [A(z) - 1 + A(z)S(t)(G^*(\mathbf{v}) - 1)].$$

Theorem. Asymptotic joint stationary n -dimensional probability distribution of the total resource amount in the system $GI^{(v)}/GI/\infty$ is asymptotically n -dimensional Gaussian with mean:

$$\mathbf{a} = N\lambda [a_1^{(1)} \quad a_1^{(2)} \quad \dots \quad a_1^{(n)}] b, \quad b = \int_0^\infty (1 - B(\tau)) d\tau,$$

and covariance matrix:

$$\mathbf{K} = N(\lambda \mathbf{K}^{(1)} b + \kappa \mathbf{K}^{(2)} \beta),$$

where

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} a_2^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_2^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} (a_1^{(1)})^2 & a_1^{(1)} a_1^{(2)} & \dots & a_1^{(1)} a_1^{(n)} \\ a_1^{(2)} a_1^{(1)} & (a_1^{(2)})^2 & \dots & a_1^{(2)} a_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(n)} a_1^{(1)} & a_1^{(n)} a_1^{(2)} & \dots & (a_1^{(n)})^2 \end{bmatrix},$$

$$\beta = \int_0^\infty (1 - B(\tau))^2 d\tau.$$

Numerical Example

We assume that the input renewal process is characterized by the following distribution function

$$A(z) = \begin{cases} 0, & z < 0.5, \\ z - 0.5, & z \in [0.5, 1.5], \\ 1, & z > 1.5. \end{cases}$$

Hence, the fundamental rate of arrivals is $\lambda = 1$ customers per time unit. Moreover, each arriving customer occupies 2 types of resources and the corresponding customer capacities have uniform distribution in the range $[0; 1]$ and $[0; 2]$, respectively. Service time has gamma distribution with parameters $\alpha = \beta = 0.5$ and so the fundamental rate of arrivals is N times the service rate.

In the Table 1 report the values of the Kolmogorov distance for bidimensional distributions for the two types of resource, highlighting that the goodness of the approximation depends not only on N , but also on the different statistical features of the considered types of customer.

Table 1

N	1	3	5	7	10	20	50	100
Δ	0.304	0.085	0.04	0.026	0.019	0.013	0.008	0.006

By Fig. 2 compared the asymptotic approximations with the empirical results for the total resource amount of each type for two different values of N .

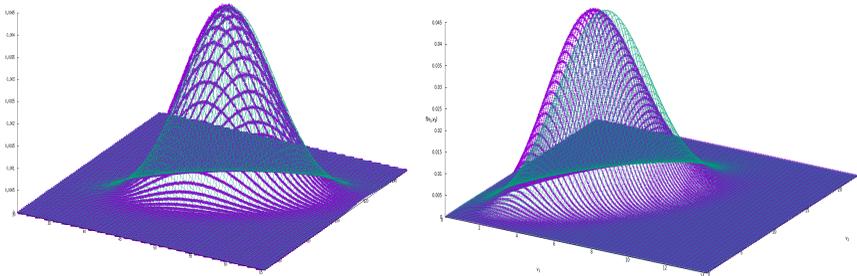


Fig. 2. Distributions of the total resource amount first and second type

Conclusions

In this paper we presented the analysis of Multi-resource $GI^{(v)}/GI/\infty$ queueing system with renewal arrival process and arbitrary service time. We applied dynamic screening method to obtain asymptotic expression for the stationary probability distribution of the process describing the total volume of the occupied resource in the system. We showed that the n -dimensional probability distribution of the total resource amount is asymptotically n -dimensional Gaussian. Numerical experiments and simulations allow us to determine the applicability area of the asymptotic result for different classes of users.

REFERENCES

1. *Baskett F., Chandy K.M., Muntz R.R., Palacios F.G.* Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers // J. ACM. 1975. P. 248–260.
2. *Brown L., Gans N., Mandelbaum A., Sakov A.* Statistical Analysis of a Telephone Call Center. A Queueing-Science Perspective // J. American Statistical Association. 2005. P. 36–50.
3. *Lisovskaya E., Moiseeva S., Pagano M.* Multiclass $GI/GI/\infty$ Queueing Systems with Random Resource Requirements // CCIS. 2018. P. 129–142.
1. *Moiseev A., Nazarov A.* Asymptotic analysis of the infinite-server queueing system with high-rate semi-markov arrivals // 2014 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). 2014 P. 507–513
5. *Moiseev A., Nazarov A.* Queueing network with high-rate arrivals // European J. Operational Research. 2016. P. 161–168.
6. *Naumov V., Samouylov K., Sopin E., Andreev S.* Two approaches to analysis of queueing systems with limited resources // Ultra-Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops Proceedings. 2014. P. 485–489.
7. *Pankratova E., Moiseeva S.* Queueing system $GI/GI/\infty$ with n types of customers // Communications in Computer and Information Science. 2015. P. 216–225.
8. *Tikhonenko O., Kempa W.* Queue-size Distribution in $M/G/1$ -type System with Bounded Capacity and Packet Dropping // Comm. Comp. Inf. Sci., 2013. P. 177–186.
9. *Tikhonenko O., Kempa W.* The Generalization of AQM Algorithms for Queueing Systems with Bounded Capacity // Lect. Notes Comput. Sci. 2012. P. 242–251.

The nonpreemptive and preemptive priority queues $M_k|G_k|1$ with k classes of customers and catastrophes

Khanik Kerobyan¹, Ruben Kerobyan², Richard Covington¹

¹ California State University Northridge, CSUN, Northridge, USA

² University of California San Diego, UCSD, San Diego, USA

In this paper we consider the single-server nonpreemptive, preemptive priority queues $M_k|G_k|1$ with k classes of customers and Poisson stream of catastrophes. The joint probability generating functions (PGF) of queue length of different priority customers in transient and steady-state are obtained by using supplementary variable method. The Laplace Stieltjes Transformation (LST) of busy period for non-preemptive and preemptive priority queues are found by using supplementary events method. For preemptive priority queues we consider two different policies: preemptive repeat-service, and preemptive loss-priority. For more details see [1–4].

The first single-server priority queue with catastrophes have been considered in [5]. The preemptive resume priority queue $BM_2|M_2|1$ with two classes of customers and an unreliable server is studied. The failures of the server have a catastrophe effect. For Poisson occurrence of catastrophes and general distribution of server repair time, by means of Semi-Markov Process (SMP), the PGF of high and low priority queue lengths, the system throughput for each priority class, the distribution of number of customers, which removed due to the catastrophes obtained.

The transient and steady-state behavior of the single server $M_k|G_k|1$ queuing model with k priority classes of preemptive and nonpreemptive customers and catastrophes considered in [6, 7]. The steady-state joint PGF of queue length distribution for different priority classes, and the LST of distribution of busy period are obtained by using the supplementary variable method and supplementary event method.

Description of the model

Let us consider a model $M_r|G_r|1$ with independent Poisson arrivals of r classes of customers and occurrence of catastrophes with rates a_1, a_2, \dots, a_r and ν , respectively. The service of customers of various classes is carried out in accordance with priorities. Further, we assume that the customers of i^{th} class (i^{th} priority customers) have a higher priority than the customers

of j^{th} class, if $i < j$, $i, j = \overline{1, r}$. Within one priority class the customers serve by one according to the discipline FCFS. The service times of i^{th} priority customers are mutually independent, identically distributed (i.i.d.) random variables B_i (r.v.), with distribution function (DF) $B_i(x) = P(B_i < x)$, density $b_i(x)$, and have finite first two moments $\beta_{1i} < \infty$, $\beta_{2i} < \infty$, $i = \overline{1, r}$. The catastrophes are not store and serve. We assume that when a catastrophe occurs and the model is busy, it instantaneously removes all customers in the model, including the customer in service. Otherwise, if the model is empty, the catastrophe disappears without any influences on the model. After the catastrophes the model continues its work from an empty state.

Basic notations

Afterward we will use the following notations and definitions [8]. Let us denote by $\mathbf{L}(t) = (L_1(t), L_2(t), \dots, L_r(t))$ a vector which describes numbers of customers in the model at moment t , where $L_i(t)$ – is the number of i^{th} priority customers in the model at moment t , $L_i(t) = \overline{0, \infty}$, $i = \overline{1, r}$. Set:

$$\begin{aligned} \sigma &= a_1 + a_2 + \dots + a_r, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{z}) = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_r z_r, \\ (\mathbf{a}, \mathbf{z})^i &= a_{i+1} z_{i+1} + a_{i+2} z_{i+2} + \dots + a_r z_r, \quad i = \overline{0, r-1}, \\ (\mathbf{a}, \mathbf{z})_i &= a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_i z_i, \quad i = \overline{1, r}. \end{aligned}$$

$P(\mathbf{n}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{L}(t) = \mathbf{n}) = \mathbf{P}(L_1(t) = n_1, L_2(t) = n_2, \dots, L_r(t) = n_r)$ – is the probability that in the model at moment t there are n_1 customers of first priority, n_2 customers of second priority, and n_r customers of r priority, respectively, where $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r)$.

$\mathbf{1}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ – is a $1 \times r$ vector whose i^{th} element is 1, and all others are zero; $\mathbf{n} - \mathbf{1}_i = (n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \dots, n_r)$.

Define the PGF of $P(\mathbf{n}, t)$

$$P(\mathbf{z}, t) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \mathbf{z}^{\mathbf{n}} P(\mathbf{n}, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_r=0}^{\infty} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_r^{n_r} P(n_1, n_2, \dots, n_r, t),$$

$$\eta_i(x) = \frac{b_i(x)}{1 - B_i(x)}, \quad B_i(x) = 1 - e^{-\int_0^x \eta_i(t) dt},$$

$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_r)$, $\eta_i(x)$ – is the failure rate (hazard) function of a service time PDF $B_i(x)$ of i^{th} priority customers.

Assume that all random variables defined above are mutually independent. For an $F(x)$ function, we write $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, and denote its LST and Laplace transform (LT) as

$$\tilde{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x) \text{ and } f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx .$$

Busy period of the model

Note that the PDF of busy period of the model can be found via different methods: by supplementary variable method [1, 4], by supplementary event method [2], embedded Markov chains or SMP [2, 3, 8]. Through this article we will use the first and second methods to determine some characteristics of queuing models. Let, α_v , α , and χ are i.i.d. r.v.s which describe: the length of busy period of the model with catastrophes, the length of busy period of the standard model without catastrophes, and the length of time between two consecutive occurrences of catastrophes, respectively. Let $\pi_v(t) = P(\alpha_v \leq t)$ be a PDF of the busy period of a model with catastrophes and $\tilde{\pi}_v(s)$ and $\bar{\pi}_v$ are its LST and mean value respectively. Also, $\tilde{\pi}(s)$ and $\bar{\pi}$ are the LST of the PDF of the busy period of the standard model without catastrophes and its mean value, respectively. The r.v. α_v is defined by following stochastic equality, $\alpha_v = \min(\alpha, \chi)$. By using this equality for the PDF of a busy period $\pi_v(t)$ and its LST $\tilde{\pi}_v(s)$ we find

$$\pi_v(t) = P(\min(\alpha, \chi) \leq t) = \int_0^t e^{-vx} d\pi(x) + \int_0^t [1 - \pi(x)] d(1 - e^{-vx}) . \quad (1)$$

Lemma 1. The LST of DF of the busy period of the model with catastrophes $\tilde{\pi}_v(s)$ and its mean value $\bar{\pi}_v$ are defined by

$$\tilde{\pi}_v(s) = \frac{v + s\tilde{\pi}(s + v)}{v + s}, \quad \bar{\pi}_v = \frac{1 - \tilde{\pi}(v)}{v} .$$

In queue theory, it is well known (see [25–32]) that the LST of DF of the busy period $\tilde{\pi}(s)$ of a standard M|G|1 queue is the unique solution of func-

tional equation

$$\tilde{\pi}(s) = \tilde{B}(s + \sigma - \sigma\tilde{\pi}(s)). \quad (2)$$

Also, for the standard $M_r|G_r|1|_\infty$ model with priorities the LST of DF of the busy period of each priority class of customers $\tilde{\pi}_i(s)$, $i = \overline{1, r}$ are defined from the following system of functional equations

$$\tilde{\pi}(s) = \tilde{\pi}_r(s), \quad \sigma_n \tilde{\pi}_n(s) = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{B}_i(s + \sigma_n - \sigma_n \tilde{\pi}_n(s)), \quad n = \overline{1, r}. \quad (3)$$

The mean value and second moment of the length of a busy period $\bar{\pi}_v$ and $\bar{\pi}_v^{(2)}$ are determined as follows

$$\bar{\pi}_v = -\tilde{\pi}'_v(s) \Big|_{s=0} = \frac{1 - \tilde{\pi}(v)}{v}, \quad \bar{\pi}_v^{(2)} = \frac{\bar{\pi}_v + \tilde{\pi}'(v)}{v}.$$

Let, $\tilde{p}_0(s)$ denotes the LST of the probability that at moment t the model is empty, $\tilde{p}_0(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_0(t) dt$.

Lemma 2. For $M|G|1$ and $M_r|G_r|1$ queue models the LST of idle state $\tilde{p}_0(s)$ and the stationary probability p_0 of idle state are defined by

$$\tilde{p}_0(s) = \frac{1}{s + \sigma - \sigma\tilde{\pi}_v(s)}, \quad p_0 = \frac{v}{v + \sigma(1 - \tilde{\pi}(v))}. \quad (4)$$

The model $M_r|G_r|1$ with priorities

To define the queue length distribution we use the supplementary variable method. Let's consider a random process $(\mathbf{L}(t), x(t), i(t))$, where $\mathbf{L}(t)$ is the queue length vector, $x(t)$ denotes the elapsed service time of the customer in service, otherwise $x(t) = 0$;

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{if the server is free at time } t, \\ i & \text{if an } i^{\text{th}} \text{ priority customer is served at time } t. \end{cases}$$

The triple $(\mathbf{L}(t), x(t), i(t))$ describes the Markov process with the set of states

$$\Omega = \{(\mathbf{0}, 0, 0)\} \cup \{i(t) = i, x(t) \geq 0, 0 \leq L_j(t), 1 \leq j, i \leq r\}, t \geq 0.$$

Considering the transitions of $(\mathbf{L}(t), x(t), i(t))$ in the infinitesimal interval of time $(t, t + \Delta)$ we can set up the equations for the following probability density functions

$$P_i(\mathbf{n}, x, t) = \frac{\partial}{\partial t} P_i(\mathbf{L}(t) = \mathbf{n}, x(t) < x, i(t) = i).$$

Theorem 1. For the transient PGF of queue length $\tilde{p}(\mathbf{z}, s)$ of the model with nonpreemptive priorities are defined by

$$\tilde{p}(\mathbf{z}, s) = \tilde{p}_0(s) + \sum_{i=1}^r \frac{1 - \tilde{B}_i(s + \sigma + \nu - (\mathbf{a}, \mathbf{z}))}{s + \sigma + \nu - (\mathbf{a}, \mathbf{z})} \tilde{p}_i(\mathbf{z}, 0, s), \quad (5)$$

where $\tilde{p}_i(\mathbf{z}, 0, s)$ are determined from the recurrence relations

$$\begin{aligned} \sum_{i=j+1}^r [1 - z_i^{-1} \tilde{B}_i(s + \sigma + \nu - \sigma_j \tilde{\pi}_j(s + \sigma^j + \nu - (\mathbf{a}, \mathbf{z})^j) - (\mathbf{a}, \mathbf{z})^j) \tilde{p}_i(\mathbf{z}, +0, s) = \\ = 1 + \frac{\nu}{s} - (s + \sigma + \nu - \sigma_j \tilde{\pi}_j(s + \sigma^j + \nu - (\mathbf{a}, \mathbf{z})^j) - (\mathbf{a}, \mathbf{z})^j) \tilde{p}_0(s), \end{aligned}$$

where $\tilde{\pi}_{ij}(s)$ are analytical functions, $|\tilde{\pi}_{ij}(s + \sigma^j + \nu - (\mathbf{a}, \mathbf{z})^j)| \leq 1$, $j = \overline{1, i}$, and satisfy the system of functional equations

$$\tilde{\pi}_{ij}(s + \nu) = \tilde{B}_i(s + \sigma_i + \nu - \sum_{n=1}^i a_n \tilde{\pi}_{in}(s + \nu)), \quad j = \overline{1, i},$$

$$\sigma_i \tilde{\pi}_i(s + \nu) = \sum_{n=1}^i a_n \tilde{\pi}_{in}(s + \nu), \quad j = \overline{1, i}.$$

Theorem 2. For the transient PGF of queue length $\tilde{p}(\mathbf{z}, s)$ of the model with preemptive priorities are defined by

$$p(\mathbf{z}, s) = p_0(s) + \sum_{i=1}^r \frac{1 - \tilde{B}_i(s + \sigma + \nu - (\mathbf{a}, \mathbf{z})^{i-1})}{s + \sigma + \nu - (\mathbf{a}, \mathbf{z})^{i-1}} \tilde{p}_i(\mathbf{z}, +0, s), \quad (6)$$

where $\tilde{p}_0(s)$ is determined from (6), and $\tilde{p}_i(\mathbf{z}, +0, s)$ – are satisfy the following recurrent relations

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=j+1}^r \left\{ 1 - z_i^{-1} \tilde{B}_i(s + \sigma + \nu - (\mathbf{a}, \mathbf{z})^{i-1}) - \frac{1 - \tilde{B}_i(s + \sigma + \nu - (\mathbf{a}, \mathbf{z})^{i-1})}{s + \sigma + \nu - (\mathbf{a}, \mathbf{z})^{i-1}} \times \right. \\
& \quad \left. \times [\sigma_j \tilde{\pi}_j(s + \sigma^j + \nu - (\mathbf{a}, \mathbf{z})^j) + (\mathbf{a}, \mathbf{z})^{i-1}] z_i^{-\delta} \right\} p_i(\mathbf{z}, +0, s) = \\
& = 1 + \frac{\nu}{s} - (s + \sigma + \nu + \sigma_j \tilde{\pi}_j(s + \sigma^j + \nu - (\mathbf{a}, \mathbf{z})^j) - (\mathbf{a}, \mathbf{z})^j) p_0(s).
\end{aligned} \tag{7}$$

where $\delta = 0$ for preemptive repeat-service, and $\delta = 1$ for preemptive loss-priority. $\tilde{\pi}_i(s)$ are solutions of corresponding functional equations.

We also consider the distribution of unfinished work for nonpreemptive and preemptive priority models.

Conclusion

In this paper, we considered the $M_r|G_r|1$ queuing model with priorities and catastrophes. Based on the supplementary variable method and supplementary event method, we derived the distribution of busy period of the model, the transient and steady state probability of empty state of the model, and the PGF of queue length distribution for different priority classes of customers.

REFERENCES

1. *Jaiswal N.K.* Priority Queues. New York: Academic Press, 1968.
2. *Gnedenko B.V., Danielyan E.A., et al.* Priority Queueing Systems. Moscow: Moscow State University Press, 1973. P. 447.
3. *Takagi H.* Queueing Analysis: A Foundation of Performance evaluation, vacation and priority systems. Part 1. Amsterdam: North-Holland, 1991.
4. *Gnedenko B.V., Kovalenko I.N.* Introduction to Queueing theory. M.: Nauka, 1987.
5. *Towsley D., Tripathi S.K.* A Single Server Priority Queue with Server Failures and Queue Flushing, Technical Report: UM-CS-1989-016.
6. *Kerobyan K.* The $M_r|G_r|1|_\infty$ queuing model with the priorities and "negative" customers // Bulletin of Russian-Armenian University. Series: Physics-Mathematics and Natural Sciences. 2007. No. 2. P. 6–18.
7. *Kerobyan K.* The model $M/G/1$ with unreliable server and «negative» customers // Proc. of the Yerevan State University. 2007. No. 3. P. 11–19.
8. *Matveev V.F., Ushakov V.G.* Queueing systems. M.: MSU, 1984. 239 p.

Infinite-server queue model $\text{MMAp}_k(t)|G_k|\infty$ with time varying marked MAP arrivals and catastrophes

Ruben Kerobyan¹, Khanik Kerobyan², Richard Covington²

¹University of California San Diego, UCSD, San Diego, USA

²California State University Northridge, CSUN, Northridge, USA

In this paper we consider the infinite-server (IS) queue $\text{MMAp}_k(t)|G_k|\infty$ with transient marked MAP random environment and nonhomogeneous, time varying marked MAP arrivals of customers and catastrophes. The joint probability generating functions (PGF) of the number of different types of customers present in the model at moment t and the number of different types of customers departing from the system in the time interval $(0,t)$ are studied. The basic differential equations for the joint PGF of queue sizes of different types of customers present in the model at moment t and number of different types of customers departing from the system in the time interval $(0,t)$ are found as well.

The infinite-server (IS) queues $M(t)|G|\infty$ and $BM(t)|G|\infty$ with time varying arrival rate of customers and general distributed service times have been considered by a number of authors [1–5], and references therein.

The IS models with homogeneous and time-varying non-Markovian arrival and general service time have been studied by [5–11] and reference therein.

We consider some generalizations of [5, 11, 13] results as well.

Model Description

The model consists of infinity number of identical servers; the batches of K types of customers arrive according to the non-homogeneous marked Markovian arrival process (MMAP) $\xi_0(t)$. The service of an arriving customer starts immediately. Service times of i th type customers are independent and identically distributed (i.i.d) random variables (r.v.) γ_i , which do not depend on input process or model state, and have general distribution $G_i(t)$ with finite mean value $\bar{\gamma}_i$. The catastrophes occurrence process is a non-homogeneous MMAP $\xi_c(t)$ as well. When catastrophes occur, all cus-

tomers in the model are destroyed instantaneously and the model becomes empty. Then the model continues working from the empty state. Assume that the MMAP $\xi_0(t)$ (respectively $\xi_c(t)$) is given by underlying Markov process (phase process (PP)) $\{J_0(t); t \geq 0\}$ ($\{J_c(t); t \geq 0\}$) with finite set of states $E_0 = \{1, 2, \dots, m_0\}$ ($E_c = \{1, 2, \dots, m_c\}$) and sequence of time-varying characteristic matrices $\{D_{00}(t), D_{0h}(t); \mathbf{h} \in C_0^0\}$ ($\{D_{c0}(t), D_{ch}(t); \mathbf{h} \in C_c^0\}$) of $m_0 \times m_0$ ($m_c \times m_c$) size respectively, where $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_K)$ is an arriving batch, $h_r = 0, 1, \dots$, $r = 1, \dots, K$, C_0^0 and C_c^0 are counting sets of non-negative integers $\mathbf{h} \in C_0^0$, $\mathbf{h} \in C_c^0$, and $C_0^{0+} = C_0^0 - \{\mathbf{0}\}$, $C_c^{0+} = C_c^0 - \{\mathbf{0}\}$.

As shown in [12] the superposition of a finite number of MMAPs is still a MMAP, so instead of using $\xi_0(t)$ and $\xi_c(t)$ MMAPs for arrival of customers and occurrence of catastrophes we will consider a superposition MMAP $\xi(t)$. The phase PP $\{J(t); t \geq 0\}$ of superposition MMAP $\xi(t)$ is defined on finite set of states $E = \{1, 2, \dots, m\}$, $m = m_0 m_c$, and sequence of time-varying characteristic matrices $\{D_0(t), D_c(t), D_h(t); \mathbf{h} \in C^0\}$ of $m \times m$ size, where C^0 is a finite or counting set of nonnegative integers, $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_K)$, $\mathbf{h} \in C^0$, $C^{0+} = C^0 - \{\mathbf{0}\}$ and h_r is a number of type r customers in a batch, $1 \leq r \leq K$. $D_0(t) = D_{00}(t) \oplus D_{0c}(t)$ is a non-singular matrix with negative diagonal and non-negative extra-diagonal elements, the column-wise sum of which is less than or equal to zero. $D_0(t)$ manages $PP J(t)$ transitions, that are not accompanied with customer generation or occurrence of catastrophes. Non-negative matrices $D_h(t) = D_h(t) \oplus I_{m_c}$ govern the transitions of the PP $J(t)$ with a mark $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_K)$ which are accompanied with generation of batches of customers. A non-negative matrix $D_c(t) = I_{m_0} \otimes \sum_{\mathbf{h} \in C_c^{0+}} D_{ch}(t)$ governs the transitions of the PP $J(t)$ which are accompanied with occurrence of catastrophes. Here \oplus and \otimes denote the Kronecker sum and product [12]. Further we assume that PP $J(t)$ is an irreducible Markov process with generating matrix $D(t)$, with a set E of states, and with distribution vector $\boldsymbol{\pi}(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t), \dots, \pi_m(t))$. Here $D(t)$ is the matrix of size $m \times m$:

$$D(t) = D_0(t) + D_c(t) + \sum_{\mathbf{h} \in C^{0+}} D_{\mathbf{h}}(t),$$

$$\boldsymbol{\pi}'(t) = \boldsymbol{\pi}(t)D(t), \quad D(t)\mathbf{e} = 0, \quad \boldsymbol{\pi}(t)\mathbf{e} = 1,$$

where \mathbf{e} is a unit column vector.

The arrival rate of customers $\lambda(t)$ and occurrence rate of catastrophes $\lambda_c(t)$ are defined as

$$\lambda(t) = \boldsymbol{\pi}(t) \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{\mathbf{h} \in C^0, h_1+h_2+\dots+h_K=n} D_{\mathbf{h}}(t)\mathbf{e}, \quad \lambda_c(t) = \boldsymbol{\pi}(t)D_c(t)\mathbf{e}.$$

Let the random vector $\mathbf{N}(t) = (N_1(t), N_2(t), \dots, N_K(t))$ be the number of K types of customers in the model at moment t , where $N_r(t)$ represents the number of r th type of customers in the model at moment t , $1 \leq r \leq K$.

Model Analysis

Let us suppose that the model is observed during the time interval $[u, t]$, $0 \leq u \leq t$. Denote by $\mathbf{N}(u, t)$ the number of customers arrived at moment u and in service at moment t , with $0 \leq u \leq t$, $\mathbf{N}(t) = \mathbf{N}(0, t)$, $\mathbf{N}(0) = \mathbf{0}$, where $\mathbf{0}$ is a vector with 0 elements. Correspondingly denote by $\mathbf{M}(u, t)$ the number of customers arrived at moment u and finished service up to moment t , with $0 \leq u \leq t$, $\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}(0, t)$, $\mathbf{M}(0) = \mathbf{0}$.

Let $R_{jk}(\mathbf{n}, u, t)$ be the probability that from the customers arrived at moment u , $0 \leq u \leq t$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_K)$ are still in service at moment t , and $PP J(u)$ is in phase j under the condition that at initial moment $u = 0$ the system was empty, and $PP J(u)$ was in phase k

$$R_{jk}(\mathbf{n}, u, t) = P(\mathbf{N}^s(u, t) = \mathbf{n}, J(u) = j \mid \mathbf{N}^s(0) = \mathbf{0}, J(0) = k).$$

$\mathbf{R}(\mathbf{n}, u, t)$ are $m \times m$ size matrices with elements $R_{jk}(\mathbf{n}, u, t)$. Assume also $\mathbf{R}(u, t) = (\mathbf{R}(\mathbf{n}, u, t), \mathbf{n} \geq \mathbf{0})$, $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(0, t)$.

Let us suppose that the model is observed at a fixed moment of time t . Then a mark \mathbf{h} of customers arrives during infinitesimal time interval du , $(u, u + du)$, $u \in [0, t)$ with the rate of $D_{\mathbf{h}}(u)$ according to the MMAP arrival

process $\xi(t)$. It is well known that for a given mark $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_K)$ the probability of $n_r = (0, 1, \dots, h_r)$ customers of type r being served at time t is distributed binomially by

$$b_{h_r}(n_r, t-u) = \binom{h_r}{n_r} (1 - G_r(t-u))^{n_r} G_r(t-u)^{h_r - n_r}, \quad 0 \leq n_r \leq h_r. \quad (1)$$

Conditioning upon the size of marks arrival (1), the total rate of \mathbf{n} customers which arrived during the time interval du and still being served at time t is

$$K_{\mathbf{n}}(u, t) = \sum_{\mathbf{h}=\mathbf{n}}^{\infty} D_{\mathbf{h}}(u) \prod_{r=1}^K \binom{h_r}{n_r} (1 - G_r(t-u))^{n_r} G_r(t-u)^{h_r - n_r}. \quad (2)$$

The probabilities $R(\mathbf{n}, u, t)$ satisfy the system of differential equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} R(\mathbf{0}, u, t) &= [D_0(u) + K_0(u, t)]R(\mathbf{0}, u, t) + D_c(u) \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\infty} R(\mathbf{k}, u, t), \\ \frac{\partial}{\partial u} R(\mathbf{n}, u, t) &= [D_0(u) + K_0(u, t)]R(\mathbf{n}, u, t) + \sum_{\mathbf{k} \in C^{0+}}^{\mathbf{n}} R(\mathbf{n} - \mathbf{k}, u, t) K_{\mathbf{k}}(u, t), \end{aligned} \quad (3)$$

with initial conditions $R(\mathbf{0}, 0, t) = \mathbf{1}$, $R(\mathbf{n}, u, t) = \mathbf{0}$.

Denote by $\tilde{R}(\mathbf{z}, u, t)$ the generating functions (GF) of $R(\mathbf{n}, u, t)$

$$\tilde{R}(\mathbf{z}, u, t) = \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{\infty} \mathbf{z}^{\mathbf{n}} R(\mathbf{n}, u, t), \quad |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1, \dots, |z_K| \leq 1,$$

where $\mathbf{z}^{\mathbf{n}} = z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_K^{n_K}$.

The GFs $\tilde{R}(\mathbf{z}, u, t)$ satisfy the following basic differential equation

$$\frac{\partial}{\partial u} \tilde{R}(\mathbf{z}, u, t) = [D_0(u) + \tilde{K}(\mathbf{z}, u, t)]\tilde{R}(\mathbf{z}, u, t) + D_c(u)\tilde{R}(\mathbf{1}, u, t), \quad (4)$$

with initial conditions $\tilde{R}(\mathbf{z}, 0, t) = \mathbf{I}$.

Here

$$\tilde{K}(\mathbf{z}, u, t) = \sum_{\mathbf{h} \in C^{0+}}^{\infty} D_{\mathbf{h}}(u) \prod_{r=1}^K [z_r (1 - G_r(t-u)) + G_r(t-u)]^{h_r}. \quad (5)$$

The solution of equations (4) can be presented in matrix-exponential form

$$\tilde{R}(\mathbf{z}, u, t) = e^{\int_0^u [D_0(x) + \tilde{K}(\mathbf{z}, x, t)] dx} + \int_0^u e^x \int_0^x [D_0(y) + \tilde{K}(\mathbf{z}, y, t)] dy D_c(x) \tilde{R}(\mathbf{1}, x, t) dx.$$

Where $\tilde{R}(\mathbf{1}, u, t)$ satisfy the differential equation

$$\frac{\partial}{\partial u} \tilde{R}(\mathbf{1}, u, t) = [D_0(u) + D_c(u) + \tilde{K}(\mathbf{1}, u, t)] \tilde{R}(\mathbf{1}, u, t), \quad (6)$$

with initial condition $\tilde{R}(\mathbf{1}, 0, t) = \mathbf{I}$.

$$\tilde{R}(\mathbf{1}, u, t) = e^{\int_0^u D(x) dx}. \quad (7)$$

From (4) it follows that for a homogeneous model when $D_n(u) = D_n$, $u < t$, the rates $\tilde{K}(\mathbf{z}, u, t)$ are independent of $t > u$, $\tilde{K}(\mathbf{z}, u) = \tilde{K}(\mathbf{z}, t - u, t)$. Hence the solutions of equations (4) can be presented in matrix-exponential form

$$\tilde{R}(\mathbf{z}, t) = e^{\int_0^t [D_0(x) + \tilde{K}(\mathbf{z}, x)] dx} + \int_0^t e^x \int_0^x [D_0(x) + \tilde{K}(\mathbf{z}, x)] dx D_c(x) \tilde{R}(\mathbf{1}, x) dx. \quad (8)$$

If we suppose that at time $t = 0$, there are $\mathbf{h}_0 = (h_{01}, h_{02}, \dots, h_{0K})$ initial customers in the model, then for $\tilde{R}(\mathbf{z}, t)$ we get

$$\tilde{R}_{\mathbf{h}_0}(\mathbf{z}, t) = \prod_{r=1}^K [z_r (1 - G_r(t)) + G_r(t)]^{h_r} e^{\int_0^t [D_0(u) + \tilde{K}(\mathbf{z}, u)] du}, \quad |\mathbf{z}| \leq 1.$$

Conclusion

We studied the number of busy servers by different types of customers in the model $\text{MMA}P_k(t)|G_k|_{\infty}$ with time-varying arrivals and catastrophes. The joint PGF of the distribution of number of busy servers at moment t and number of served customers in the interval $(0, t)$ was obtained.

REFERENCES

1. *Breuer L.* Introduction to stochastic processes. Univ. Kent, 2014.
2. *Shanbhag D.N.* On infinite-server queues with batch arrivals // *J. Appl. Prob.* 1966. V. 9. P. 208–213.
3. *Brown M., Ross Sh.* Some results for infinite server Poisson queues // *J. Appl. Prob.* 1969. No. 6. P. 604–611.
4. *Eick S.G., Massey W.A., Whitt W.* The physics of the $M(t)|G|_{\infty}$ queue // *Operations Research*. 1993. No. 41. P. 731–742.
5. *Kerobyan K., Kerobyan R.* Transient analysis of IS queue $MMAPk(t)|Gk|_{\infty}$ with MMAP arrival and disasters // *Proc. of 7th Int. Conf. “HET-NETs 2013”*, 11–13 Nov. 2013, Ilkley, UK.
6. *Latouche G., Ramaswami V.* Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling. SIAM, 1999. 321 p.
7. *Moiseev A., Nazarov A.* Infinite-server queueing systems and networks. Tomsk: NTL Publ., 2015. 240 p.
1. *Lisovskaya E., Moiseeva S., Pagano M.* Multiclass $GI/GI|_{\infty}$ Queueing Systems with Random Resource Requirements // *CCIS*. 2018. V. 91. P. 129–142.
9. *Masuyama H.* Studies on algorithmic analysis of queues with batch Markovian arrival streams: PhD Thesis. Kyoto University, 2003. 146 p.
10. *Nazarov A., Moiseeva S.* Asymptotic analysis method in queueing theory. Tomsk: NTL Publ., 2006.
11. *Linton D., Purdue P.* An $M|G|_{\infty}$ queue with m customer types subject to periodic clearing // *Opsearch*. 1979. V. 16. P. 80–88.
12. *Pacheco A., Tang C.H.L., Prabhu N.U.* Markov-additive processes and semi-regenerative phenomena. World Scientific, 2009.
13. *Kerobyan K., Covington R., Kerobyan R.* An IS Queueing $MMAPk|Gk|_{\infty}$ model in semi-Markov random environment subject to catastrophes // *Dudin A., Nazarov A., Moiseev A.* (eds). *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2018, WRQ 2018. Com. in Comp. and Inform. Science*, vol 912. Springer, Cham, 2018, P. 195–212.

The output process of the M/G/1 non-preemptive LIFO resampling queue*

L.A. Meykhanadzhyan¹, A.V. Bakhareva², R.V. Razumchik^{3,2}

¹Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia

²Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia,

³Institute of Informatics Problems of the FRC CSC RAS, Moscow, Russia

Introduction

In this short note one gives the preview of some new results concerning the departure process of the queueing system with resampling, which may be used to study the impact of the distributional uncertainties** on the quality of service of the arriving customers. Distributional uncertainties may be of different nature. For example, the distribution of the service times available to the scheduler in the queueing system may contain errors and thus, being based on the inaccurate service time information, scheduling may lead to poor system performance. For further discussions on this topic and possible applications the reader is kindly referred to [1–3] and references therein.

Consider the queueing system with a single server, a buffer of infinite capacity with LIFO policy and resampling. Jobs arrive at the system according to a Poisson arrival process with rate λ and the service time distribution is $B(x) = P\{S < x\}$. Resampling means that arriving customers resample the service time of the customer under service (if any) from distribution $B(x)$. That is, if the remaining service time of the customer under service is θ at the arrival of a new customer then after the arrival the remaining service time is going to be S with distribution $B(x)$ (independent of any other elements of the model, including θ). The Laplace-Stieltjes transform of $B(x)$ is further denoted by $b^*(s)$. Clearly, $b^*(\lambda)$ is the probability that an inter-arrival period is larger than the service time.

The question which is being asked is: what are the properties of the departure process of this system when it is in the stationary regime? Intuitively, the adopted scheduling policy (non-preemptive LIFO with resampling) makes the departures depend on arrivals. Are there conditions under which the output process is Poisson? The answers to these questions, obtained using the methodology from [4], are given below.

* The reported study was funded by RFBR according to the research project 18-37-00283.

** Notion as given in [1].

The dependence of the system size on the interdeparture interval

Denote by τ_n the service completion epoch of the n -th customer and by ν_n – the number of customers left in the system on the n -th departure (i.e. at the instant immediately after τ_n). Under the condition that the system is stable¹, the stationary probabilities $p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\nu_n = i\}$, $i \geq 0$, exist and have the geometric distribution with the success probability $2-1/b^*(\lambda)$. In order to study the dependency of the system size on the interdeparture interval, one needs the expression for the frequency function $H(t,j) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(t,j)$, where

$$H_{n+1}(t, j)dt = P\{\nu_{n+1} = j, t < l_n < t + dt\}, j \geq 0,$$

and l_n is the time interval between the n -th and the $(n+1)$ -st departures. Using the law of total probability it can be shown that

$$H(t, j)dt = p_0 \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} g_j(t-x) dx + \sum_{m=1}^{j+1} p_m g_{j+1-m}(t), j \geq 0,$$

where $g_j(t)$ is the probability density of the fact that the customer will leave the server after t units of time and during these t time units exactly j new customers have arrived at the system. The total number of customers in the system left by a departure will be independent of the time interval between the current departure and the previous one if and only if $H(t,j) = H(t)p_j$ for all t and all j , where $H(t) = \sum_{j \geq 0} H(t,j)$. Direct analysis of the expressions for $H(t,j)$, $H(t)$ and p_j shows, that $H(t,j) = H(t)p_j$ cannot be the case unless the service time distribution $B(x)$ is exponential². However the mean time between consecutive departures is always equal to $1/\lambda$ i.e. to the mean time between arrivals; higher moments are, of course, different.

The dependence of successive interdeparture intervals

If successive departure intervals are independent, one must have that $H(t|\tau) = H(t)$ for all t , where $H(t|\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(t|\tau)$ and

$$H_{n+2}(t|\tau)dt = P\{t < l_{n+1} < t + dt | l_n = t\}.$$

The analysis of the expression for $H(t|\tau)$ and $H(t)$ shows, that, except for exponential service times, the successive interdeparture intervals are dependent and the joint distribution of the two successive departure intervals can be expressed in terms of the Laplace-Stieltjes transform (LST) as

¹ It can be shown, that the system is stable whenever $\frac{1}{2} < b^*(\lambda) < 1$. See, for example, [2].

² To be specific, with the rate equal to $b^*(0)$.

$$h^*(s_1, s_2) = \gamma^*(s_2) \left(\gamma^*(s_1) - \frac{p_0 s_1}{\lambda + s_1} \left(\gamma^*(s_1) + \frac{\lambda s_2 b^*(s_1 + \lambda)}{s_1(\lambda + s_2)} \right) - \frac{p_1 s_2 b^*(s_1 + \lambda)}{\lambda + s_2} \right).$$

Here $\gamma(s)$ is the LST of $g(t) = \sum_{j \geq 0} g_j(t)$. One of the facts that follows from the expression for $h^*(s_1, s_2)$ is that under the high system's load successful inter-departure intervals are almost uncorrelated with the mean $1/\lambda$.

REFERENCES

1. *Chen Y., Hasenbein J.J.* Staffing large-scale service systems with distributional uncertainty // *Queueing Syst. Theory Appl.* 2017. V. 87. No. 1-2. P. 55–79.
2. *Meykhanadzhyan L., Razumchik R.* New Scheduling Policy For Estimation Of Stationary Performance Characteristics In Single Server Queues With Inaccurate Job Size Information // *Proceedings 30th European Conference on Modelling and Simulation.* 2016. P. 710–716.
3. *Horvath I.S., Razumchik R., Telek M.* Estimating mean sojourn time in the processor sharing M/G/1 queue with inaccurate job size information // *Proceedings of the International Scientific Conference Analytical And Computational Methods In Probability Theory And Its Applications.* Moscow, Russia. 2017. P. 741–744.
4. *Finch P.D.* The Output Process of the Queueing System M/G/1 // *J. the Royal Statistical Society. Series B (Methodological).* 1959. V. 21. No. 2. P. 375–380.

Artificial Regeneration Based Regenerative Estimation of Multiserver Systems Performance*

Alexander Rumyantsev¹, Irina Peshkova²

¹*Institute of Applied Mathematical Research, KarRC RAS, Petrozavodsk, Russia*

²*Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russia*

Multiserver systems are standard models of computing and communications systems. At the same time, performance analysis of multiserver is challenging. The workload of such a system is multi-dimensional, and internal dependence structure of the servers dramatically complicates the analysis. In particular, stable multiserver system may not possess the so-called classical regeneration points, which are the time epochs of customer arrivals into an empty system. Instead, more sophisticated regeneration structure should be used, e.g. the so-called Harris recurrence [1], renovation [2], or regenerative envelopes [3]. Note that regenerative structure may be used to apply confidence estimation of the performance measures of a system [3].

Additional knowledge of the service time distribution may be used to introduce the so-called artificial regeneration with the help of the so-called splitting technique [4]. In such a case, the system artificially possesses classical regeneration epochs. In the present paper we adopt the technique suggested in [4] to the multiserver queueing system. Specifically, we consider a system with the so-called multiple vacations policy, where servers enter energy preserving *sleep* state at departure epochs leaving the queue empty. We illustrate the technique with numerical simulations.

Multiserver model

We consider m-server queueing system with arbitrary distributions of interarrival and service times. Customers arriving into a system with all servers busy are occupying an unbounded queue in the order of arrival. A server that completes customer service and observes an empty queue initiates an uninterrupted sleep period with generally distributed sleep time. All the driving sequences are assumed to be iid.

* The publication was financially supported by RFBR according to the research projects No.18-07-00147, 18-07-00156, 18-37-00094, 19-07-00303.

We are interested in the average number of active servers as a performance measure of the system. Note that such a performance measure is directly related to the energy consumption of a system. To perform estimation of this performance measure, we use the regenerative estimation technique based on the artificial regeneration points. To define these points, we assume that the distributions of interarrival, service and sleep times possess the exponential splitting which we define below.

To study the system we use the discrete-event simulation technique which is based on the so-called piecewise deterministic Markov processes (PDMP). As such, we study the process $\{X(t), T(t)\}$, $t \geq 0$, where the discrete component, $X(t)$, contains the queue size and mode (active/sleep) of the servers, and continuous component, $T(t)$, contains the residual interarrival time and residual service/sleep times, respectively.

Artificial regeneration based on exponential splitting

The density f of continuous random variable T can be split [5] if there exists some $0 < p < 1$ and density f_0 , such that $f \geq p f_0$. With the help of *splitting indicator* I s.t. $P(I=1) = p$ we construct a split r.v. T' as $T' = IT_0 + (1-I)T_1$, where T_0 has density f_0 , and T_1 has density $f_1 = (f - pf_0)/(1-p)$. The purpose of such a transformation is to let the r.v. T' have the desired properties of the distribution f_0 with probability not less than p . In particular, f_0 can be (shifted) exponential that allows T' to be memoryless.

To apply this technique to PDMP model, we need to perform splitting of the continuous component, $T(t)$, of the process, each time the event occurs, that is, one of the components of the vector becomes zero, and simultaneously the discrete component is in some specific state $X(t) = x^*$. Then we have to wait for such an epoch when all the components of the continuous part of PDMP, $T(t)$, are split, and are in some specific phase, say, exponential, which means that the prehistory of the process at this specific time epoch is lost.

Numerical simulation

To illustrate the results we applied numerical simulation. A 3-server system was studied, with the interarrival, service and sleep times distribution taken as the so-called Gamma distribution $f(x) = a(ax)^{b-1} e^{-ax}/\Gamma(b)$ with $a = b = 1.5$. We performed discrete-event simulation of the model to obtain 100 artificial regeneration epochs, accumulating the per-cycle estimates and

performing pointwise estimation of the number of active servers. We performed 5 such simulation runs giving 5 trajectories of the system, and obtained confidence estimators as well. The results of simulation are depicted on Fig. 1. It can be seen that the interval adopts over time, becoming more narrow as the number of regenerations increases.

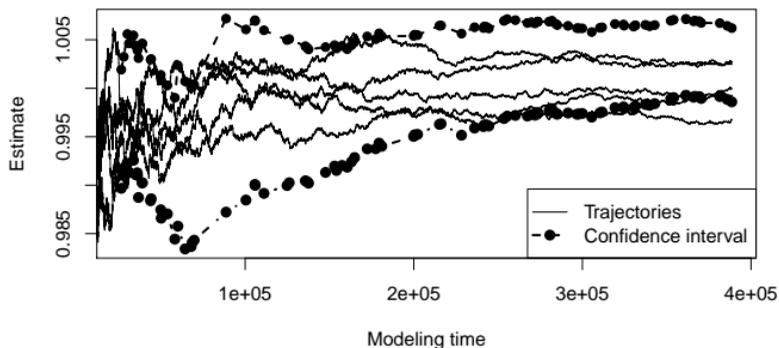


Fig. 1. Confidence interval based on artificial regeneration points for 3-server system with Gamma-distributed interarrival, service and sleep times

REFERENCES

1. *Sigman K.* Queues as Harris recurrent Markov chains // *Queueing Systems*. 1988. V. 3. No. 2. P. 179–198.
2. *Foss S.G., Kalashnikov V.V.* Regeneration and renovation in queues // *Queueing Systems*. 1991. V. 8. No. 1. P. 211–223.
3. *Morozov E., Peshkova I., Rumyantsev A.* On Regenerative Envelopes for Cluster Model Simulation // *Communications in Computer and Information Science*. 2016. V. 678. P. 222–230.
4. *Andronov A.* Artificial regeneration points for stochastic simulation of complex systems // *Simulation Technology: Science and Art. 10th European Simulation Symposium ESS'98*. SCS, Delft, The Netherlands, 1998. P. 34–40.
5. *Thorrison H.* Coupling, stationarity, and regeneration. New York: Springer Verlag, 2000.

come. Otherwise this outgoing call will be canceled. Papers dealing with two-way communication systems by the help of retrial queues, where the source is infinite, are found in [3, 5, 7, 8, 17, 18, 19, 21].

Our aim is to study the operation of the system where the service unit is reliable and can perform outgoing call from the orbit. The novelty of this paper is to compare this system with the common finite source retrial system using various distribution of service on performance measures like mean waiting time of an incoming call or utilization of the server. We are mainly interested in how the different distributions modify the characteristics of the system. To achieve this goal a simulation program has been developed using the base of SimPack [12] which contains a number of C/C++ libraries and executable programs. One of the main reasons for its usage is that the user has the freedom what performance measure are calculated and how the model is built up. SimPack toolkit also provides a set of utilities that demonstrate how to build a working simulation from a model description.

System model

We consider a retrial queuing system of type M/G/1//N with a reliable server which is capable to produce outgoing calls to the customers residing in the orbit. N customers are located in the source, where all of them can generate incoming, primary calls towards the server. The distribution of the inter-request times is exponential with rate λ/N . In default of waiting queue an incoming customer either from the source or orbit finds the server in an idle state then its service begins instantly. The service times of incoming customers are assumed to be gamma, hypo-exponentially, hyper-exponentially, Pareto and lognormal distributed with different parameters but with the same mean value. Customers return to the source after their service is terminated. If the server is busy, meaning that a request is under service, an incoming customer remains in the system and enters into the orbit. Customers located in the orbit are able to attempt to access the server again after an exponentially distributed time with parameter σ/N .

In the other hand, when the server becomes idle it can make outgoing call towards the customers in the orbit. It is performed after an exponentially distributed time with parameter ν . The service time of these outgoing customers follows gamma distribution with parameters α_1 and β_1 . In a consecutive paper we aim to investigate the same system by the help of asymptotic methods when N tends to infinity and that is the reason we use λ/N and σ/N parameters. All the random variables involved in the model construction are assumed to be totally independent of each other.

Simulation results

The values of the input parameters are shown in Table 1. In this section these results are in connection with the effect of different service time distributions of incoming customers where the mean and variance are equal. We use hyper-exponential distribution if the squared coefficient of variation is greater than one, Table 2 shows the exact values of parameters of service time of incoming customers.

Table 1

Numerical values of model parameters

N	σ/N	v	α_1	β_1
100	0.01	0.02	1	0.5

Table 2

Parameters of service time of incoming customers

Distribution	Gamma	Hyper-exponential	Pareto	Lognormal
Parameters	$\alpha = 0.04$ $\beta = 0.04$	$p = 0.48$ $\lambda_1 = 0.961$ $\lambda_2 = 1.04$	$\alpha = 2.02$ $k = 0.505$	$m = -1.629$ $\sigma = 1.805$
Mean	1			
Variance	25			
Squared coefficient of variation	25			

Besides hyper-exponential, gamma, lognormal and Pareto distributions are also used for comparison. The case when the squared coefficient of variation is less than one was also investigated and will be published in the extended version of the paper. But this case is less interesting that is why we present the former one.

Figure 1 shows the mean waiting time in function of arrival intensity of incoming customers. For these values of parameters regardless of the applied distribution a maximum value of the mean waiting time can be seen. This maximum feature occurs for finite-source retrial queues, see for example [4, 9, 10, 16]. Differences can be observed among the values of mean waiting time especially in the case of using gamma and Pareto distribution, despite the fact that the mean and variance are the same. On this figure the effect of different distributions is clearly observable.

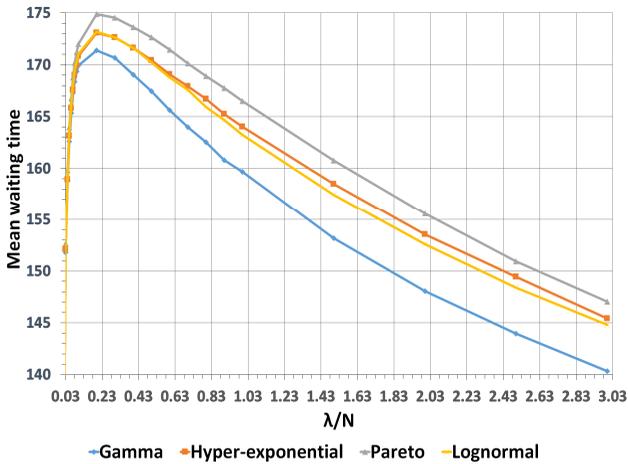


Fig. 1. Mean waiting time vs. arrival intensity using various distributions

Figure 2 illustrates how the utilization of the server grows with the increment of the arrival intensity of incoming customers. The highest values can be found at gamma distribution but the differences of the applied distributions are not as much as in case of Fig. 1.

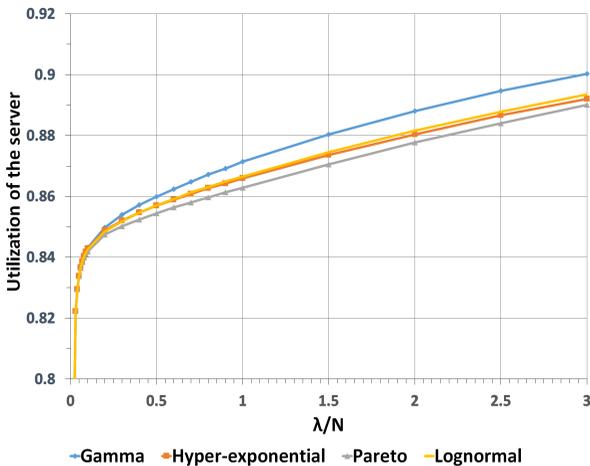


Fig. 2. Utilization of server vs. arrival intensity using various distributions

Conclusion

A finite-source retrial queueing system is introduced where the server can produce outgoing calls towards the customers of the orbit. Several figures present the effect of the applied distributions on the mean waiting time and on the utilization of the server. Using stochastic simulation method results clearly indicate that when the squared coefficient of variation is greater than one then the contrast of the values of the performance measures is quite high having the same mean and variance.

REFERENCES

1. Aguir S., Karaesmen F., Ak, sin O.Z., Chauvet F. The impact of retrials on call center performance // *OR Spectrum*. 2004. V. 26. No. 3. P. 353–376.
2. Aksin Z., Armony M., Mehrotra V. The modern call center: A multi-disciplinary perspective on operations management research // *Production and Operations Management*. 2007. V. 16. No. 6. P. 665–688.
3. Artalejo J.R., Phung-Duc T. Markovian retrial queues with two way communication // *J. Industrial and Management Optimization*. 2012. V. 8. No. 4. P. 781–806.
4. Artalejo J., Corral A.G. *Retrial Queueing Systems: A Computational Approach*. Springer, 2008.
5. Artalejo J., Phung-Duc T. Single server retrial queues with two way communication // *Applied Mathematical Modelling*. 2013. V. 37. No. 4. P. 1811–1822.
6. Brown L., Gans N., Mandelbaum A., Sakov A., Shen H., Zeltyn S., Zhao L. Statistical analysis of a telephone call center: A queueing-science perspective // *J. American Statistical Association*. 2005. V. 100. No. 469. P. 36–50.
7. Dimitriou I. A retrial queue to model a two-relay cooperative wireless system with simultaneous packet reception // *International Conference on Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications*. Springer, 2016. P. 123–139.
8. Dragieva V., Phung-Duc T. Two-way communication M/M/1 retrial queue with server-orbit interaction // *Proceedings of the 11th International Conference on Queueing Theory and Network Applications, ACM*, 2016. P. 11.
9. Dragieva V., Phung-Duc T. Two-way communication M/M/1/N retrial queue // *International Conference on Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications*. Springer, 2017. P. 81–94.
10. Falin G., Artalejo J. A finite source retrial queue // *European J. Operational Research*. 1998. V. 108. P. 409–424.
11. Fiems D., Phung-Duc T. Light-traffic analysis of random access systems without collisions // *Annals of Operations Research*. 2017. P. 1–17.
12. Fishwick P.A. Simpack: getting started with simulation programming in C and C++ // *WSC '92 Proceedings of the 24th conference on Winter simulation, ACM*, 1992. P. 154–162.
13. Gans N., Koole G., Mandelbaum A. Telephone call centers: Tutorial, review, and research prospects // *Manufacturing & Service Operations Management*. 2003. V. 5. No. 2. P. 79–141.

14. *G'omez-Corral A., Phung-Duc T.* Retrial queues and related models // *Annals of Operations Research*. 2016. V. 247. No. 1. P. 1–2.
15. *Kim J., Kim B.* A survey of retrial queueing systems // *Annals of Operations Research*. 2016. V. 247. No. 1. P. 3–36.
16. *Kuki A., Sztrik J., Bérczes T., Tóth Á.* A contribution to modeling two-way communication with retrial queueing systems // *Communications in Computer and Information Science*. Springer, 2018. V. 912. P. 236–247.
17. *Nazarov A., Phung-Duc T., Paul S.* Heavy outgoing call asymptotics for MMPP/M/1/1 retrial queue with two-way communication // *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications: 16th International Conference, ITMM 2017*. Springer, 2017. V. 800. P. 28.
18. *Nazarov A.A., Paul S., Gudkova I., et al.* Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition // *Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation*. 2017.
19. *Phung-Duc T., Rogiest W.* Two way communication retrial queues with balanced call blending // *International Conference on Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications*. Springer, 2012. P. 16–31.
20. *Pustova S.* Investigation of call centers as retrial queueing systems // *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. V. 46. No. 3. P. 494–499.
21. *Sakurai H., Phung-Duc T.* Two-way communication retrial queues with multiple types of outgoing calls // *Top*. 2015. V. 23. No. 2. P. 466–492.
22. *Wolf T.* System and method for improving call center communications // *US Patent App*, 2017. 15/604,068.

Reliability Analysis of Cognitive Radio Networks

Mohamed Hedi Zaghouani¹, János Sztrik¹ and Arban Uka²

¹Faculty of Informatics, University of Debrecen Debrecen, Hungary

²Epoka University, Tirana, Albania

In the current paper we investigate the queuing model in order to evaluate the performance of a cognitive radio network and its reliability. We are taking into consideration two subsystems in this queuing system. The first subsystem is built for the primary users (PU) requests. The number of sources is finite, moreover, each exponentially distributed interval of time the source generates a primary request for the PU, these tasks should be sent with a preemptive discipline to a single server which is called the Primary Channel Service (PCS), to get served based on an exponentially distributed time as well. The second part of the model is dedicated to the secondary unit requests, which is finite also, supposing that the service and the inter-request times of the secondary server are exponentially distributed. Every generated primary request is headed to the primary server in order to check its accessibility, in case that the service unit is free, the service starts instantly. However, if the primary unit is already busy with another primary request, the packet joins a FIFO queue. However, if the primary unit is busy by treating a service for a secondary user, this latter service disconnects right away and should be sent back to the Secondary Channel Service (SCS), based on the availability of the secondary server this postponed task either starts the service again, or joins the orbit.

In the other hand, the secondary requests are sent to the secondary server to verify its availability, if the aimed server is available, the request starts instantly, otherwise these unlicensed requests need to give a try in order to join the Primary Service Unit (PSU) if it is free the low priority tasks begin. If not, they must join the orbit automatically. Canceled requests in the orbit retry to be served after a random interval of time exponentially distributed, more details can be found in [1–3].

In this investigation we assumed that both service units are subject to some random breakdowns, in such case the suspended requests are respectively sent to the queue or to the orbit.

It is assumed that the server failure and repair times are generally distributed (Hypo-Exponential, Hyper-Exponential, Gamma, Pareto and Lognormal). All the random times concerned in this model are supposed to be inde-

pendent of each other. [4] considered that the network has a single server however, the only server is subject to breakdown and repair. This type of network suffers from difficulty with processing the requests, as the breakdown of the only server of the network effects the whole system, if the server is down then the whole network is down. Some other papers investigated further the retrial queuing model, by modeling a cognitive radio network using two service channels (Primary and Secondary) both are subject to breakdowns and repair. For example, the authors of [8] assumed that both servers are unreliable and used different distributions for the inter-event times. Hypo and Hyper Exponential for the failure and repair times, however, Exponential distributed was used for the rest of the inter-event times (arrival, service and retrial).

In brief, the main aim of this work is to add Lognormal, Pareto and Gamma distributions to Hypo-Exponential, Hyper-Exponential, which were studied in mentioned above work, in order to investigate the effect of the mean and variance of these several distributions on the server breakdown and repair times. It allows us as well, to visualize the behavior of the whole system while using different distributions and parameters by the help of a simulation program.

Simulation Results

The values of the input parameters for the distributions are given in Table 1. In this Section we are showing two figures which are in connection with the effect of the distribution's parameters on the operating time of the primary server. We have chosen the means and the variances for all the distributions following two scenarios. Since the squared coefficient of Hypo-Exponential distribution should be less than 1, as a first scenario we ran our simulation program respecting this condition to generate Fig. 1, where the Means and the Variances of the other distributions (Gamma, Pareto and lognormal) were equals to Hypo's as well. Similar to Hypo-Exponential, in Fig. 2, we followed the condition that the squared coefficient of variation of Hyper-Exponential should be greater than 1, furthermore, all the Means and Variances of the rest of the distributions were the same as the mean and the variance of Hyper-Exponential. In such a way we will be able to see the effect of the variance of each distribution on the primary operating time.

The following set of parameters explained the parameters used in the simulation program: Number of primary sources: N_1 , Number of secondary sources: N_2 , Primary arrival rate: λ_1 , Secondary arrival rate: λ_2 , Primary

service rate: μ_1 , Secondary service rate: μ_2 Primary failure rate: γ_1 , Secondary failure rate: γ_2 , Repair rate of the primary server: σ_1 , Repair rate of the secondary server: σ_2 (Table 2).

Table 1

Values of the distribution's parameters

Distribution		Hyper	Hypo	Gamma	Pareto	Lognormal
Fig. 1	Mean	N/A	0.2	0.2	0.2	0.2
	Variance	N/A	0.03	0.03	0.03	0.03
	Parameters	N/A	$\lambda_1 = 0.0292$ $\lambda_2 = 0.1707$	$\alpha = 1.333$ $\beta = 6667$	$\alpha = 2.5275$ $k = 0.6043$	$m = -1.889$ $\sigma = 0.74807$
Fig. 2	Mean	0.2	N/A	0.2	0.2	0.2
	Variance	0.4	N/A	0.4	0.4	0.4
	Parameters	$\lambda_1 = 0.2$ $\lambda_2 = 0.632$	N/A	$\alpha = 0.1$ $\beta = 0.5$	$\alpha = 2.04880$ $k = 0.51191$	$m = -1.657$ $\sigma = 1.5485$

Table 2

Numerical values of model parameters

No.	N1	N2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	σ_1	σ_2	γ_1	γ_2
Fig. 1	6	10	0.6	0.1	1.5	1	x-axis	0.5	5	4
Fig. 2	6	10	0.6	0.1	1.5	1	x-axis	0.5	5	4

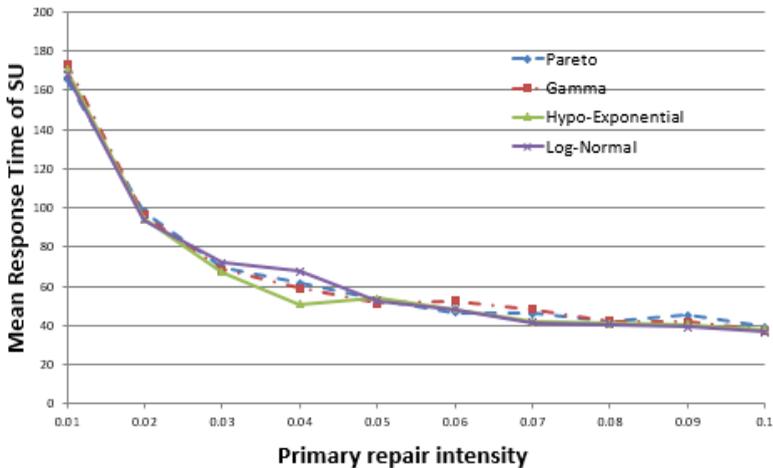


Fig. 1. The effect of the primary repair intensity on the mean response time of the Secondary Users

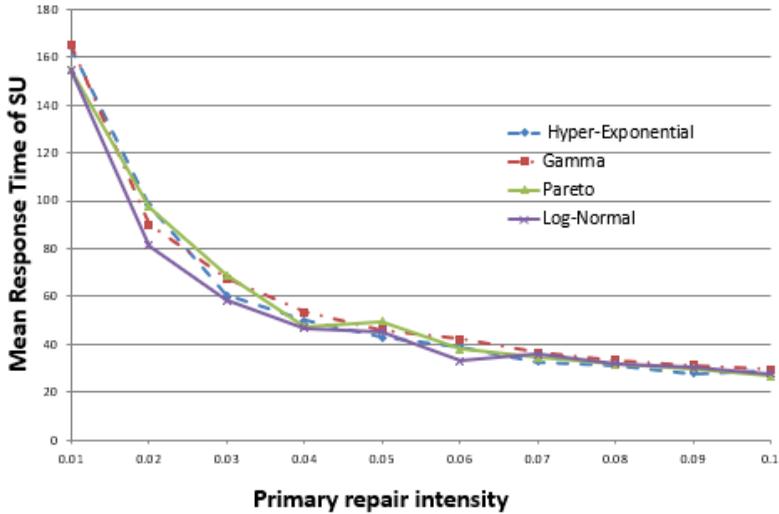


Fig. 2. The effect of the primary repair intensity on the mean response time of the Secondary Users

Both Figs. 1 and 2 show the mean response time of secondary users in function of the primary repair intensity using different distributions (Hypo, Hyper, Gamma, Pareto and Lognormal) for the primary operating time, knowing that the Exponential distribution was used for the rest of the inter-event times (arrival, service, retrial and failure).

As expected, the mean response time of the users decreases with the increment of the repair intensity. In Fig. 1 the highest values can be found at gamma distribution during the growing of the repair rate expect two values (0.04 and 0.09), however, the differences of the distributions are not significant as much as in Fig. 2, where the squared coefficient of variation is greater than one, more differences between the distributions can be observed.

Acknowledgement

The work of Dr. János Sztrik is supported by the EFOP-3.6.1-16-2016-00022 project. The project is co-financed by the European Union and the European Social Fund. The work of Mohamed Hedi Zaghouani is financed by the Stipendium Hungaricum Scholarship.

REFERENCES

1. *Wong E.W., Foch C.H. and Adachi F.* Analysis of cognitive radio spectrum decision for cognitive radio networks // *IEEE J. Select. Areas Commun.* 2011. V. 29. P. 757–769.
2. *Devroye N., Vu and V. Tarock M.* Cognitive radio networks // *IEEE Signal Process. Mag.* 2008. V. 25. P. 12–23.
3. *Gunawardena S. and Zhuang W.* Modeling and Analysis of Voice and Data in Cognitive Radio Networks. Berlin: Springer, 2014. 2191–5768.
4. *Kuki A., Bérczes T., Almási B., and Sztrik J.* Heterogeneous finite-source retrial queues with server subject to breakdowns and repairs // *J. Math. Sci.* 2006. V. 132. P. 677–685.
5. *Sztrik J., Bérczes T., Almási B., Kuki A., and Wang J.* Performance modeling of finite-source cognitive radio networks // *J. Acta Cybern.* 2016. V. 22. No. 3. P. 617–631.
6. *Sztrik J., Bérczes T., Nemouchi H., and Melikov A.Z.* Performance modeling of finite-source cognitive radio networks using simulation // *Com. Comput. Inform. Sci.* 2016. V. 678. P. 64–73.
7. *Nemouchi H. and Sztrik J.* Performance evaluation of finite-source cognitive radio networks with collision using simulation // *IEEE Inter. Conf. on Cognitive Inform. Commun.* 2018. V. 49. P. 109–122.
8. *Nemouchi H. and Sztrik J.* Performance simulation of finite source cognitive radio with servers subjects to breakdowns and repairs // *J. Mathematical Sciences.* 2019. V. 37. P. 1072–3374.
9. *White A.J., Schmidt J.W., and Bennett G.K.* Analysis of Queueing Systems. New York: Academic Press, 1975. V. 2. P. 393–398.
10. *Gunther N.J.* Analyzing Computer System Performance. Berlin: Springer, 2011.
11. *Paluncic F., Alfa A.S., Mahraj B.T. and Simba H.M.* Queueing Models for Cognitive Radio Networks: A survey // *IEE Access.* 2018. V. 6. P. 10–1109.
12. *Van Do T., Nam Do H., Horvath A. and Jinting W.* Modelling opportunistic spectrum renting in mobile cellular networks // *J. Network and Computer Applications.* Elsevier, 2015. V. 52. P. 129–138.
13. *Zhao Y. and Bai L.* Performance Analysis and Optimization for Cognitive Radio Networks with Classified Secondary Users and Impatient Packets // *Mobile Information Systems*, Hindawi 2017, Article ID 3613496 (2017).
14. *Tijms Henk C.* A First Course in Stochastic Models. Jhon Wiley and Sons Ltd, 200. 30–471–49880–7.

Расчет характеристик системы обслуживания-запасания с разнотипными заявками и конечной орбитой для повторных заявок

И.А. Алиев

*Бакинский государственный университет,
г. Баку, Азербайджанская Республика*

В последние годы интенсивно изучаются модели систем обслуживания-запасания (Queuing-Inventory Systems, QIS) с разнотипными заявками [1–10]. Достаточно подробный обзор работ, посвященных QIS, можно найти в [10]. Большой интерес к изучению QIS объясняется тем, что в реальных системах заявки отличаются друг от друга по различным показателям, например по объему покупаемого запаса, по важности и т.д. В зависимости от специфической особенности в QIS применяются различные схемы введения приоритетов для входящих заявок. Наиболее часто используется следующая схема: вводится некоторый критический уровень запасов, и когда уровень запасов выше этой величины, обслуживаются заявки всех типов, а когда уровень запасов опускается ниже указанной величины, то обслуживаются лишь приоритетные заявки. При этом критический уровень запасов определяется исходя из принятой политики пополнения запасов. Так, если в системе принята классическая политика двух уровней (s, S), то в качестве критического уровня запасов зачастую выбирается точка заказов s .

Настоящая работа идейно близка к работе [9]. Здесь, как и в [9], изучается модель QIS с двумя типами заявок и с мгновенным обслуживанием. Предполагается, что заявки высокого приоритета обслуживаются всегда, если имеется хотя бы запас единичного размера, в то время как заявки низкого приоритета обслуживаются лишь тогда, когда уровень запасов выше определенной величины; иначе они уходят в орбиту. Однако, в отличие от [9], здесь считается, что размер орбиты является конечным. Другие отличия изучаемой здесь модели от аналогичной модели [9] указаны ниже.

Описание модели постановка задачи

В системе используется известная (s, S) политика, т.е. заказ для поставки запасов делается тогда, когда их уровень опускается до величины $s, s < S/2$, при этом объем заказа равен $S - s$. Она обслуживает пуассоновские потоки заявок двух типов: обычные и приоритетные. Интенсивность обычных заявок (поток заявок первого типа) равна λ_1 , а интенсивность приоритетных заявок (поток заявок второго типа) равна λ_2 . После завершения обслуживания заявки любого типа уровень запасов системы уменьшается на единицу, т.е. заявки являются идентичными по их размеру.

Время обслуживания заявок обоих типов равно нулю, т.е. заявки обслуживаются мгновенно. Считается, что если в момент поступления заявки второго типа уровень запасов больше нуля, то она мгновенно получает запас и покидает систему. Если в момент поступления заявки первого типа уровень запасов больше критического уровня s , то она также мгновенно получает запас и покидает систему; иначе, т.е. если уровень запасов системы в этот момент меньше или равно s , то эта заявка, согласно схеме Бернулли, либо с вероятностью α уходит в орбиту в целях повторения запроса для получения запаса, либо с дополнительной вероятностью $1 - \alpha$ не получает запас и покидает систему. Здесь предполагается, что орбита имеет ограниченный размер, т.е. максимальное число повторных заявок в орбите не превышает $R, R < \infty$. Это означает, что если в момент поступления заявки в орбиту тут уже имеются R заявок, то она теряется с вероятностью единица.

Заявки с орбиты повторяют запросы для получения запаса через случайные моменты времени, которые имеют общее показательное распределение с параметром $\eta, 0 < \eta < \infty$. При этом если в момент поступления повторной заявки уровень запасов больше критического уровня s , то она мгновенно получает запас и покидает орбиту; иначе, т.е. если уровень запасов системы в этот момент меньше или равно s , то эта заявка, согласно схеме Бернулли, либо с вероятностью β уходит с орбиты, либо с дополнительной вероятностью $1 - \beta$ остается в орбите.

Заказы выполняются с некоторыми случайными задержками. Считается, что эти задержки зависят от числа n повторных заявок в орбите и имеют показательное распределение с параметром $v(n) > 0$.

Задача заключается в нахождении совместного распределения уровня запасов системы и число заявок в орбите. Требуется также найти усредненные характеристики системы: средний уровень запасов (S_{av}); среднюю интенсивность заказов (RR); вероятности потери заявок каждого типа (PB_1, PB_2), среднее число заявок в орбите (L_o), среднюю интенсивность успешного повторения (RSR) и среднюю интенсивность безуспешного повторения ($RuSR$).

Решение задачи

Работа системы описывается двумерной цепью Маркова с состояниями вида (m, n) , где m – уровень запасов системы, n – число заявок в орбите. Пространство состояний определяется как декартово произведение двух множеств, т.е. $E = \{0, 1, \dots, S\} \times \{0, 1, \dots, R\}$.

Рассмотрим задачу построения производящей матрицы данной цепи. Переход из состояния $(m, n) \in E$ в состояние $(m', n') \in E$ обозначим через $(m, n) \rightarrow (m', n')$.

С учетом механизмов обслуживания разнотипных заявок заключаем, что искомые интенсивности определяются так:

- интенсивность перехода $(m, n) \rightarrow (m - 1, n)$ при выполнении условия $m > s$ равна λ , где $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$;
- интенсивность перехода $(m, n) \rightarrow (m - 1, n)$ при выполнении условия $m \leq s$ равна λ_2 ;
- интенсивность перехода $(m, n) \rightarrow (m, n + 1)$ при выполнении условия $m \leq s$ равна $\lambda_1 \alpha$;
- интенсивность перехода $(m, n) \rightarrow (m - 1, n - 1)$ при выполнении условий $m > s, n > 0$ равна $m\eta$;
- интенсивность перехода $(m, n) \rightarrow (m, n - 1)$ при выполнении условий $m \leq s, n > 0$ равна $m\eta\beta$;
- интенсивность перехода $(m, n) \rightarrow (m + S - s, n)$ при выполнении условия $m \leq s$ равна $v(n)$.

В изучаемой цепи существует стационарный режим, так как она является конечномерной и неприводимой. Стационарную вероятность со-

стояния $(m, n) \in E$ обозначим через $p(m, n)$. Они удовлетворяют следующую систему уравнений равновесия (СУР):

- с л у ч а й $s < m \leq S$:

$$(\lambda + m\eta)p(m, n) = \lambda p(m+1, n) + (n+1)\eta p(m+1, n+1) + v(n)p(m-S+s, n); \quad (1)$$

- с л у ч а й $0 \leq m \leq s$:

$$\begin{aligned} (\lambda_2 I(m > 0) + \lambda_1 \alpha I(n < R) + m\eta\beta + v(n))p(m, n) = \\ = \lambda p(s+1, n)I(m=s) + \lambda_2 p(m+1, n)I(m < s) + \\ + \lambda_1 \alpha p(m, n-1)I(n > 0) + (n+1)\eta\beta p(m, n+1). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $I(A)$ обозначает индикаторную функцию события A .

К этой СУР (1), (2) добавляется следующее условие нормировки:

$$\sum_{(m, n) \in E} p(m, n) = 1. \quad (3)$$

Усредненные характеристики системы вычисляются с помощью стационарных вероятностей состояний. Так, средний уровень запасов системы определяется таким образом:

$$S_{av} = \sum_{m=1}^S m \sum_{n=0}^R p(m, n). \quad (4)$$

Средняя интенсивность заказов определяется как

$$RR = \lambda \sum_{n=0}^R p(s+1, n). \quad (5)$$

Заявки первого типа теряются в следующих случаях: 1) если в момент поступления заявки уровень запасов системы меньше $s+1$ (тогда она теряется с вероятностью $1 - \alpha$); 2) если в момент генерации запроса в орбите уровень запасов системы меньше $s+1$ (тогда она теряется с вероятностью β). Отсюда находим, что вероятность потери заявок первого типа (PB_1) вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} PB_1 = (1 - \alpha) \sum_{m=0}^s \sum_{n=0}^{R-1} p(m, n) + \sum_{m=0}^s p(m, R) + \\ + \sum_{m=0}^s \sum_{n=1}^R \frac{n\eta\beta}{n\eta\beta + \lambda_1 \alpha I(n < R) + \lambda_2 I(m > 0) + v(n)} p(m, n). \end{aligned} \quad (6)$$

Заявки второго типа теряются лишь тогда, когда уровень запасов системы равен нулю, т.е. вероятность потери заявок второго типа (PB_2) определяется так:

$$PB_2 = \sum_{n=0}^R p(0, n). \quad (7)$$

Среднее число заявок в орбите (L_o) находится следующим образом:

$$L_o = \sum_{m=0}^S \sum_{n=1}^R np(m, n). \quad (8)$$

Средняя интенсивность успешного (RSR) и безуспешного повторения ($RuSR$) вычисляются формулами

$$RSR = \eta \sum_{m=s+1}^S \sum_{n=1}^R np(m, n); \quad (9)$$

$$RuSR = \eta\beta \sum_{m=0}^s \sum_{n=1}^R np(m, n). \quad (10)$$

Для решения СУР (1) – (3) могут быть использованы известные пакеты прикладных программ. Далее вычисляются усредненные характеристики системы (4) – (10).

Этот подход является точным и позволяет выполнить численные эксперименты для изучения поведения характеристик (4) – (10) относительно изменения нагрузочных и структурных параметров системы. Он является эффективным для моделей умеренной размерности. Для изучения моделей QIS большой размерности можно использовать метод фазового укрупнения состояний двумерных цепей Маркова [10].

Заключение

Предложенный подход может быть применен и для изучения моделей QIS, в которых используются другие политики пополнения запасов, например политика переменного объема запасов, ($S-1, S$)-политика и др. Эти задачи являются предметами специальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dekker R., Hill R.M., Kleijn M.J. On the $(S-1, S)$ lost sales inventory model with priority demand classes // *Naval Research Logistics*. 2002. V. 49. P. 593–610.
2. Kranenburg A.A., van Houtum G.J. Cost optimization in the $(S-1, S)$ lost sales inventory model with multiple demand classes // *Operations Research Letters*. 2007. V. 35. P. 493–502.
3. Zhao N., Lian Z. A queuing-inventory system with two classes of customers // *Int. J. Production Economics*. 2011. V. 129. P. 225–231.
4. Isotupa K.P.S. Cost analysis of an $(S-1, S)$ inventory system with two demand classes and rationing // *Annals of Operations Research*. 2015. V. 233. P. 411–421.
5. Isotupa K.P.S. An (S, Q) inventory system with two demand classes of customers // *Int. J. Operational Research*. 2011. V. 12. P. 12–19.
6. Isotupa K.P.S. An (S, Q) Markovian inventory system with lost sales and two demand classes // *Mathematical and Computer Modeling*. 2006. V. 43. P. 687–694.
7. Isotupa K.P.S., Samanta S.K. A continuous review (s, Q) inventory system with priority customers and arbitrary distributed lead times // *Mathematical and Computer Modeling*. 2013. V. 57. P. 1259–1269.
8. Sivakumar B., Arivarignan G. A modified lost sales inventory system with two types of customers // *Quality Technology and Quantitative Management*. 2008. V. 5. P. 339–349.
9. Karthick T., Sivakumar B., Arivarignan G. An inventory system with two types of customers and retrial demands // *Int. J. Systems Science: Operations & Logistics*. 2015. V. 2. P. 90–112.
10. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Aliyev I.A. Markov models of systems with two types of customers and different replenishment policies // *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. V. 54. P. 900–917.

Свойство связности всепроникающих сенсорных сетей*

Т.Н. Астахова¹, Н.А. Верзун^{2,3},
М.О. Колбанев^{2,3}, А.А. Шамин¹

¹ Нижегородский государственный инженерно-экономический университет,
г. Княгинино, Россия

² Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина),
г. Санкт-Петербург, Россия

³ Санкт-Петербургский государственный экономический университет
г. Санкт-Петербург, Россия

В настоящее время широкое распространение интернета вещей и других технологий третьей платформы информатизации [1] привело к появлению большого числа публикаций, посвященных исследованию всепроникающих сенсорных сетей, объединяющих сенсорные устройства, которые контролируют те или иные параметры физического пространства, свободно перемещаются в этом пространстве и имеют автономное питание.

Ключевым направлением исследований беспроводных сенсорных сетей является изучение способов экономии энергии отдельными устройствами для увеличения времени их функционирования без перезарядки батареи [2–6]. Исследования такого рода имеют и ярко выраженный экологический аспект, поскольку объем энергии, потребляемой инфокоммуникационными системами и сетями, достиг трети от всей электроэнергии, генерируемой в мире, так что сети оказывают все большее негативное влияние на окружающую среду [7, 8].

Постановка задачи

Для оценки связности беспроводной сенсорной сети и ее жизнеспособности целесообразно использовать показатели, учитывающие вероятностную и переменную (т.е. изменяющуюся во времени) топологию подобных сетей.

Вероятностью связности сенсорных устройств – P_S – будем называть вероятность того, что передача данных от сенсорного узла к головному кластерному узлу возможна. Будем считать беспроводную сенсорную

* Исследование выполнено в рамках госзадания № 10/01-41.

сеть работоспособной (жизнеспособной), если вероятность связности сенсорных устройств больше некоторого допустимого значения – $P_{сд}$, т.е. когда выполняется условие $P_s > P_{сд}$.

Предположим, во-первых, что сенсорные устройства образуют сенсорное поле точек, распределенных на плоскости по закону Пуассона; во-вторых, сенсорные узлы собирают данные о каких-либо физических параметрах окружающей их среды и передают их в виде блоков данных с некоторой периодичностью; в-третьих, существует возможность передавать блоки данных от сенсорных устройств к головному узлу многоинтервальным способом, т.е. через дополнительные транзитные узлы. Положим также, что в фиксированный момент времени известны географические координаты головного и каждого сенсорного узла сети, что позволяет сенсорному устройству вычислить расстояние от себя до головного узла (обозначим через $R[m]$), а также определить направление передачи для транзита.

По формуле Фрииса (Harald Friis) [19] используемую для передачи мощность $P_{пер}$ с известной степенью приближения можно пересчитать в радиус круга – $r [m]$, в пределах которого может быть выбран сенсорный узел для транзита блока данных:

$$r = \frac{\gamma}{4\pi\sqrt{P_{пр}}} \sqrt{C_{пер} C_{пр} P_{пер}}, \quad (1)$$

где $C_{пер}$ – коэффициент усиления передающей антенны; $C_{пр}$ – коэффициент усиления приёмной антенны; $P_{пер}$ – мощность радиосигнала на передающей антенне [Вт]; $P_{пр}$ – мощность радиосигнала на принимаемой антенне [Вт] – будем считать заданной константой; γ – длина волны [м] передаваемого радиосигнала. Будем предполагать, что мощность, которую использует сенсорный узел при передаче данных, ограничена величиной $P_{пер}$.

Выше мы предположили, что каждое сенсорное устройство знает направление для передачи блока данных к головному узлу. Если дополнительно предположить, что сенсорное устройство расположено в центре круга, то в этом круге можно выделить сектор – обозначим его как Q – ориентированный в направлении головного кластерного узла (см. рис. 1). Сенсорные устройства, попавшие в сектор Q , можно использовать как транзитные для передачи блока данных к головному кластерному узлу.

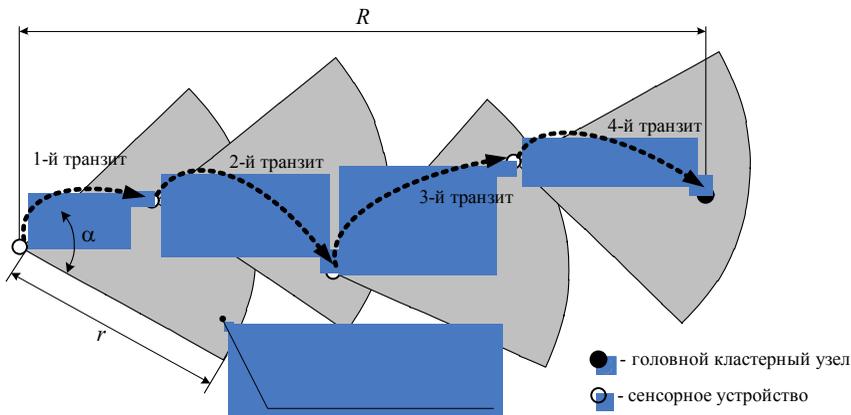


Рис. 1. Передача блока данных от сенсорного устройства к головному кластерному узлу через транзитные сенсорные узлы

Площадь сектора Q вычисляется по формуле

$$S_Q = \frac{1}{2} r^2 \alpha,$$

где α – угол сектора в радианах; r – радиус круга (определяется из (1)), в пределах которого может вестись продуктивная передача блока данных от сенсорного устройства транзитному узлу либо головному. Вероятность того, что в этом секторе будет обнаружен сенсорный узел (или головной узел кластера), который можно использовать для передачи ему блока данных в случае, когда узлы образуют пуассоновское поле точек, определяется по следующему закону:

$$F(r) = 1 - e^{-\frac{1}{2} r^2 \alpha \lambda}, \quad (2)$$

где λ – плотность размещения сенсорных узлов на поле точек.

Если фактическое расстояние от сенсорного узла до головного кластерного узла равно R , то количество транзитов (хопов) при передаче одного блока данных будет не меньше чем $\lceil R/r \rceil$. Существует вероятность того, что таких хопов потребуется большее количество чем $\lceil R/r \rceil$. Более того, существует вероятность, что сообщение вообще не будет доставлено из-за того, что в радиусе r , в нужном секторе, отсутствует

сенсорный узел, и поэтому ретрансляция блока данных невозможна, т. е. нарушается связность сенсорных устройств с головным узлом кластера.

Плотность вероятности того, что при ограниченной мощности сигнала $P_{\text{пер}}$ блок данных будет доставлен от сенсорного к головному узлу кластера, определяется формулой

$$f_{\xi_1 + \dots + \xi_X}(x_1, \dots, x_X) = f_{\xi_1}(x_1) * f_{\xi_2}(x_2) * \dots * f_{\xi_X}(x_X), \quad (3)$$

где $f_{\xi_1}(x_1), f_{\xi_2}(x_2), \dots, f_{\xi_X}(x_X)$ – плотности распределений случайных независимых непрерывных величин ξ_1, \dots, ξ_X соответственно, а $X = \left\lceil \frac{R}{r} \right\rceil$ – количество хопов; «*» – операция свертки распределений случайных величин [20].

Зная (3), мы можем определить вероятность связности сенсорных устройств – P_S – это вероятность доставки блока данных от произвольного сенсорного до головного кластерного узла при ограниченной мощности передатчиков всех сенсорных устройств.

В работе рассмотрен случай, когда имеется два переприема при передаче блока от сенсорного узла к головному узлу. Вероятность того, что в секторе Q будет обнаружен сенсорный узел (или головной узел кластера) задается формулой (2) как для первого, так и для второго переприема. Предположим, что радиус действия каждого сенсорного устройства идентичен и равен r . Тогда из (3) можно написать

$$f_{\xi_1 + \xi_2}(r) = \frac{\sqrt{\alpha\lambda}}{4} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}r\sqrt{\alpha\lambda}\right) \sqrt{\pi}(\alpha\lambda r^2 - 2) + 2r\sqrt{\alpha\lambda} e^{-\frac{1}{4}\alpha\lambda r^2} \right) e^{-\frac{1}{4}\alpha\lambda r^2},$$

где $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ – функция ошибок.

В явном виде зависимость вероятности связности сенсорных устройств от мощности передатчика принимает следующий вид:

$$P_S(P_{\text{пер}}) = -\frac{1}{2} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}A\sqrt{\alpha\lambda}\sqrt{P_{\text{пер}}}\right) \sqrt{\pi}\sqrt{\alpha\lambda}e^{\frac{1}{2}A^2P_{\text{пер}}\alpha\lambda} A\sqrt{P_{\text{пер}}} - 2e^{\frac{1}{2}A^2P_{\text{пер}}\alpha\lambda} + 2 \right) \times \\ \times e^{\frac{1}{2}A^2P_{\text{пер}}\alpha\lambda}, \text{ где } A = \frac{\gamma}{4\pi\sqrt{P_{\text{пр}}}} \sqrt{C_{\text{пер}}C_{\text{пр}}}.$$

Заключение

В представленной работе предложена новая вероятностно-энергетическая характеристика качества функционирования беспроводных сенсорных сетей – связность, которая отражает в совокупности пространственные, временные и энергетические характеристики сети. Введены стохастические показатели связности беспроводных сенсорных сетей, которые, в отличие от известных, описывают сеть как целое, а не свойства ее отдельных элементов, что позволяет исследовать процессы задержки и блокировки информационного обмена с учетом размера сенсорного поля и мощности, потребляемой отдельными устройствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Верзун Н.А., Колбанев М.О., Татарникова Т.М.* Технологическая платформа четвертой промышленной революции // Геополитика и безопасность. 2016. № 2 (34). С. 73–78.
2. *Шостко И.С., Куля Ю.Э.* Метод увеличения времени жизни автономной беспроводной сенсорной сети за счёт применения энергоэффективных режимов работы передатчика // Проблемы телекоммуникаций. 2015. № 1 (16). С. 3–15. URL: http://pt.journal.kh.ua/2015/1/1/151_shostko_ttl.pdf.
3. *Воробьев А.И., Колбанев А.М., Колбанев М.О.* Модель оптимизации энергопотребления умными вещами // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2015. № 7. С. 46–49.
4. *Астахова Т.Н., Колбанев М.О., Шамин А.А.* Обеспечение энергоэффективности интернета вещей // Региональная информатика и информационная безопасность: сборник научных трудов. Санкт-Петербургское Общество информатики, вычислительной техники, систем связи и управления. Санкт-Петербург, 2018. С. 203–204.
5. *Верзун Н.А., Колбанёв М.О., Шамин А.А.* Энергетическая эффективность взаимодействия в беспроводных сенсорных сетях // Информационные технологии и телекоммуникации. 2017. Т. 5. № 1. С. 88–96.
6. *Богатырев В.А., Богатырев С.В.* Надежность мультикластерных систем с перераспределением потоков запросов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2017. Т. 60. № 2. С. 171–177.
7. *Воробьев А.И., Колбанёв А.М., Колбанёв М.О.* Зеленые информационные технологии // Ученые записки Международного банковского института. СПб.: Изд-во МБИ, 2015. Вып. 12. С. 153–165.
8. *Воробьев А.И., Колбанёв А.М., Колбанёв М.О.* Экологическая безопасность информационных технологий // Геополитика и безопасность. 2015. № 4 (32). С. 90–99.

Об оптимальном выборе параметров для систем с повторными вызовами

И. Атенсия¹, Е.А. Лебедев²,
В.Д. Пономарев², А.В. Ливинская²

¹ *Университет Малаги, г. Малага, Испания*

² *Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, г. Киев, Украина*

Системы массового обслуживания с повторными вызовами представляют собой особый класс стохастических моделей, которые позволяют учитывать важную особенность процесса обслуживания. Вызов, который в момент прихода застаёт все приборы занятыми, становится источником повторных вызовов. С ним связан процесс повторов, который продолжается до тех пор, пока вызов обнаружит свободный прибор и получит обслуживание. Модели такого типа нашли широкое применение при проектировании и эксплуатации компьютерных и телекоммуникационных сетей, call-центров, при управлении процессом посадки самолетов.

Анализ систем с повторными вызовами имеет свои особенности. Учет повторов приводит к многомерности процесса обслуживания, свойственного стохастическим сетям, и, как следствие, усложняет теорию. Основные модели систем с повторными вызовами, круг проблем и первые результаты, связанные с ними, можно найти в монографии [1].

В предлагаемой работе рассматривается особый класс марковских систем с повторными вызовами, которые имеют две особенности. Во-первых, допускается, что интенсивность входного потока зависит от числа источников повторных вызовов, которые имеются в наличии в текущий момент времени. Наиболее подробно изучен случай, когда эта зависимость представлена кусочно-постоянной функцией или пороговой стратегией. В классе пороговых стратегий можно ставить и решать задачи оптимального выбора параметров модели. Пример решения задачи такого типа приведен в конце работы.

Во-вторых, в отличие от традиционных моделей систем с повторными вызовами предполагается, что интенсивность повторов не зависит от числа источников повторных вызовов. В работах [2, 3] системы с постоянной интенсивностью повторов применялись для моделирования протоколов множественного доступа (CSMA/CD, ALOHA). Другие

применения при моделировании информационных потоков в INTERNET можно найти в работе [4].

Математическая модель процесса обслуживания

Для того чтобы строго задать процесс обслуживания в системе с повторными вызовами, рассмотрим двумерную цепь Маркова с непрерывным временем $X(t) = (X_1(t), X_2(t))'$, $X_1(t) \in \{0, 1, \dots, c\}$, $X_2(t) \in \{0, 1, \dots\}$, которая определяется своими локальными параметрами $\alpha_{(i,j)(i',j')}$, $(i, j), (i', j') \in S(X) = \{0, 1, \dots, c\} \times \{0, 1, \dots\}$ следующим образом.

1) Для $0 \leq i \leq c - 1$

$$\alpha_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j, & \text{если } (i', j') = (i + 1, j), \\ \nu, & \text{если } (i', j') = (i - 1, j), \\ \mu, & \text{если } (i', j') = (i + 1, j - 1), \\ -(\lambda_j + \nu + \mu), & \text{если } (i', j') = (i, j), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

2) Для $i = c$

$$\alpha_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j, & \text{если } (i', j') = (c, j + 1), \\ c\nu, & \text{если } (i', j') = (c - 1, j), \\ -(\lambda_j + c\nu), & \text{если } (i', j') = (c, j), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Двумерную цепь Маркова, матрица локальных параметров которой имеет описанную выше структуру, можно интерпретировать как процесс обслуживания в системе с повторными вызовами, которая состоит из c идентичных обслуживающих приборов. Интенсивность обслуживания на каждом приборе равна $\nu > 0$, $\mu > 0$ – интенсивность повторов, $\lambda_j > 0$ – интенсивность входного потока при условии, что в системе j источников повторных вызовов. Первая компонента $X_1(t) \in \{0, 1, \dots, c\}$ указывает на число занятых приборов в момент времени $t \geq 0$, а вторая $X_2(t) \in \{0, 1, \dots\}$ равна числу источников повторных вызовов. В дальнейшем процесс $X(t) = (X_1(t), X_2(t))'$ является основным объектом исследования.

$X(t)$ является процессом квазирождения и гибели (QBD-процессом), у которого блоки зависят от номера уровня (см., например, [5, с. 189]). При $\lambda_j = \lambda$ на входе системы мы имеем обычный пуассоновский процесс интенсивности λ и $X(t)$ становится независимым от уровня QBD-процессом.

Для процесса $X(t)$ можно доказать такой результат.

Лемма 1. *Если для процесса $X(t)$ с повторными вызовами и постоянной интенсивностью повторов выполнены условия*

$$\lambda_j > 0, \quad j = 0, 1, \dots; \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \lambda; \quad (1)$$

$$\frac{\lambda(\lambda + \mu)^c}{c! \mu \sum_{i=0}^{c-1} \frac{(\lambda + \mu)^i}{i! \nu^{i-c}}} < 1, \quad (2)$$

то процесс эргодичен.

В дальнейшем будем предполагать, что зависимость интенсивности входного потока от числа источников повторных вызовов задана пороговой стратегией. Это означает, что для некоторого целого $l \geq 2$ фиксированы пороги $0 = H_0 < H_1 < \dots < H_{l-1} < H_l = \infty$, $H' = (H_1, \dots, H_{l-1})$. Если в момент времени $t \geq 0$ число источников повторных вызовов $X_2(t) \in [H_{i-1}, H_i)$, то система функционирует в i -м режиме и интенсивность входного потока равна $\lambda(i)$. Таким образом, λ_j является кусочно-постоянной функцией вида $\lambda_j = \lambda(i)$, $j \in [H_{i-1}, H_i)$, $i = 1, \dots, l$.

Если $\lambda(i) > 0$, $i = 1, \dots, l$ и выполнено условие (2), то для процесса $X(t)$ существует стационарный режим и наша цель – найти его стационарные вероятности.

Вычисление стационарных вероятностей и решение оптимизационных задач

Основной результат, который в полном виде содержит явные векторно-матричные формулы для стационарных вероятностей системы через ее параметры ν , μ , и $\lambda(1), \dots, \lambda(l)$, кратко можно сформулировать так: если для процесса $X(t)$, у которого интенсивность входного потока управляется пороговой стратегией, выполнены условия леммы 1,

то его стационарные вероятности выписываются в явном виде через параметры системы. Отметим также, что для произвольного управления предложен эффективный алгоритм вычисления стационарных вероятностей.

В качестве примера использования полученных результатов рассмотрим задачу оптимизации прибыли от работы системы.

Пусть $f_i(t, H)$ – прибыль от работы системы в i -м режиме, $i = 1, \dots, l$, за время t ; $f_{l+1}(t, H)$ – число заявок, которые получили отказ в обслуживании и стали источниками повторных вызовов за время t ; $f_{l+2}(t, H)$ – число переключений интенсивности входящего потока требований за время t . При выполнении условий леммы 1 пределы $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} f_i(t, H)$, $i = 1, \dots, l + 2$, существуют. Обозначим их через $f_i(H)$, $i = 1, \dots, l + 2$.

Задача максимизации прибыли от работы системы заключается в нахождении таких значений порогов H_i , $i = 1, \dots, l - 1$, которые являются решением многокритериальной задачи:

$$\begin{aligned} f_i(H) &\rightarrow \max, \quad i = 1, \dots, l, \\ f_{l+1}(H) &\rightarrow \min, \quad f_{l+2}(H) \rightarrow \min, \\ H_i &\in \{0, 1, \dots\}, \quad i = 1, \dots, l - 1, \\ H_i &< H_j, \quad i < j. \end{aligned}$$

На практике наиболее распространенным методом решения этой задачи является метод линейной свертки критериев. Предельные функционалы $f_i(H)$, $i = 1, \dots, l + 2$ можно выписать через стационарное распределение системы, что вместе с полученными явными формулами дает алгоритм решения оптимизационной задачи.

В заключение рассмотрим пример решения задачи выбора оптимальной пороговой стратегии управления для системы с параметрами: $l = 2$, $\lambda(1) = 13$, $\lambda(2) = 8$, $\nu = 8.1$, $\mu = 1$. Описанную задачу оптимизации мы решаем методом линейной свертки критериев с коэффициентами $C_1 = 10$, $C_2 = 300$, $C_3 = 30$, $C_4 = 100$.

На рис. 1 приведен график зависимости целевой функции от значения порога. Как видно из графика, наибольшее значение функционала 146.87 достигается при $H = 23$.

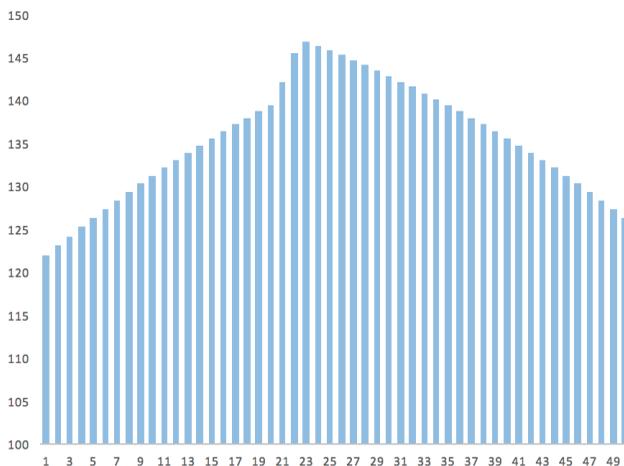


Рис. 1. Зависимость целевой функции от значения порога

Заключение

В работе проведено исследование стационарного режима для систем с повторными вызовами постоянной интенсивности, входной поток заявок в которых управляется при помощи многопороговых стратегий. Получены явные формулы векторно-матричного типа для стационарных вероятностей через параметры системы. Полученное представление стационарных вероятностей дает возможность проведения дальнейшего анализа систем, вычисления характеристик их функционирования, а также решения оптимизационных задач. В качестве примера была поставлена и решена многокритериальная задача оптимизации прибыли от работы системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial queues. Chapman & Hall, 1997. 329 p.
2. *Choi B.D., Shin Y.W., Ahn W.C.*, Retrial queues with collision arising from unsoltted CSMA/CD protocol // *Queueing Systems.* 1992. No. 11. P. 335–356.
3. *Choi B.D., Park K.K., Pearce C.E.M.* An M/M/1 retrial queue with control policy and general retrial times // *Queueing Systems.* 1993. No. 14. P. 275–292.
4. *Avrachenkov K., Yechiali U.*, Retrial networks with finite buffers and their application to internet data traffic // *Probab. Eng. Inf. Sci.* 2008. No. 22. P. 519–536.
5. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Retrial queueing systems. A computational approach. Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 2008. 317 p.

Анализ СМО ММРР/М/∞ в различных предельных условиях

**О.С. Бобкова, Е.В. Жукова,
С.П. Моисеева, А.С. Шкуркин**

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Огромное множество исследований реальных потоков в различных предметных областях, например телекоммуникационных потоков, потоков в экономических системах, показали неадекватность классических моделей потоков (пуассоновских и рекуррентных) реальным данным. Системы же, в которых наблюдаются эффекты повторных обращений заявок к обслуживающему прибору, конфликты заявок, требуют рассмотрения моделей, выходящих за рамки множества классических систем массового обслуживания.

Исследование таких моделей выполняется, как правило, численными методами, либо имитационным моделированием, со всеми недостатками, вытекающими из этих методов. Альтернативным подходом является применение метода асимптотического анализа для исследования таких систем [1 – 3].

Методом асимптотического анализа в теории массового обслуживания (в теории потоков) будем называть исследование уравнений, определяющих какие-либо характеристики системы (потока) при выполнении некоторого асимптотического (предельного) условия, вид которого будет конкретизирован для различных моделей и поставленных задач исследования.

В работе рассмотрены СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов, характеристики которых исследуются при различных вариантах асимптотических условий: растущего времени обслуживания, большой интенсивности, предельно редких изменений состояний входящего потока в системах с неограниченным числом приборов. Рассмотрим бесконечнолинейную систему массового обслуживания, на вход которой поступает ММРР-поток, определяемый эргодической цепью Маркова $k(t)$ заданной матрицей \mathbf{Q} – её инфинитезимальных характеристик $q_{k_1 k_2}$, набором неотрицательных величин $\lambda_k \geq 0$ и

набором вероятностей $d_{k_1 k_2}$ при всех $k_1 \neq k_2$. Время обслуживания на приборах случайное с экспоненциальной функцией распределения вероятностей с параметром μ . Пусть $i(t)$ – число занятых приборов в системе, занятых в момент времени t .

Так как для рассматриваемой системы процесс $\{k(t), i(t)\}$ является двумерной цепью Маркова, то для стационарного распределения $P(k, i)$ можно записать систему уравнений Колмогорова

$$-P(k, i)\lambda_k - P(k, i)\mu + P(k, i-1)\lambda_k + P(k, i+1)(i+1)\mu + \sum_v P(v, i)q_{vk} = 0.$$

Тогда для частичных характеристических функций

$$H(k, i) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} P(k, i),$$

получим систему уравнений

$$j\mu(e^{-ju} - 1) \frac{\partial H(k, u)}{\partial u} = (e^{ju} - 1)H(k, u)\lambda_k + \sum_v H(v, u)q_{vk} \{1 + (e^{ju} - 1)d_{vk}\}.$$

Эту систему запишем в виде матричного уравнения

$$j\mu(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{h}(u)}{\partial u} = \mathbf{h}(u) \{ \mathbf{Q} + (e^{ju} - 1)\mathbf{\Lambda} \}, \quad \mathbf{h}(0) = \mathbf{r}, \quad (1)$$

где $\mathbf{h}(u) = [h(1, u), \dots, h(K, u)]$, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_k]$, \mathbf{r} – вектор стационарного распределения, определяемый системой алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{r}\mathbf{Q} = 0, \\ \mathbf{r}\mathbf{e} = 1. \end{cases}$$

Дифференцируя по u уравнение (1), нетрудно получить аналитические выражения для начальных моментов числа занятых приборов в системе. Так, первый и второй моменты определяются выражениями

$$M\{i\} = \frac{1}{\mu} \mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} = \frac{\lambda}{\mu},$$

$$M\{i^2\} = \frac{1}{2\mu} \mathbf{r}\mathbf{\Lambda} \{ -(\mathbf{Q} - \mu\mathbf{I})^{-1} (2\mathbf{\Lambda} + \mu\mathbf{I})\mathbf{e} + \mathbf{e} \} = \kappa_2.$$

Полученные точные характеристики позволяют построить аппроксимации распределений вероятностей числа занятых приборов, подставляя их значения для нахождения параметров известных распределений.

На численных примерах показано, что наиболее удачным является применение отрицательного биномиального распределения

$$\Pi_i = P\{i = k\} = \frac{\Gamma(r+k)}{k!\Gamma(r)} p^r (1-p)^k,$$

для которого параметры r и p определяются выражениями

$$p = \frac{\lambda}{\mu(\kappa_2 - \lambda^2)}, \quad r = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{1}{(\kappa_2 - \lambda^2)\mu - \lambda}.$$

В работе приводятся результаты исследований асимптотических характеристик при предельных условиях: растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменениях состояний управляющей Цепи Маркова (ПЧИС), растущего времени обслуживания и предельно редких изменениях состояний (ПРИС) управляющей цепи Маркова.

Асимптотический анализа системы ММРР | М | ∞ в условии растущей интенсивности и ПЧИС

Под условием предельно частых изменений состояния потока будем понимать такие значения параметров потока, при которых время пребывания управляющей цепи Маркова в каждом состоянии достаточно малое, то есть стремится к нулю.

Длина интервала времени, когда цепь Маркова находится в k -м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром: $-q_{kk}$, то есть среднее время пребывания равно $M\{\tau\} = -1/q_{kk}$. Таким образом, условие предельно частых изменений состояния потока можно записать как $q_{kk} \rightarrow \infty$.

Условие растущей интенсивности и ПЧИС определим следующими заменами: $\mathbf{Q} = N\mathbf{Q}_1$ $\mathbf{\Lambda} = N\mathbf{\Lambda}_1$, где $N \rightarrow \infty$, тогда (1) запишется в виде

$$j\mu(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{h}(u)}{\partial u} = \mathbf{h}(u) \{N\mathbf{Q}_1 + (e^{ju} - 1)N\mathbf{\Lambda}_1\}, \mathbf{h}(0) = \mathbf{r}.$$

Для построения гауссовской аппроксимации будем искать решение в виде $\mathbf{h}(u) = \mathbf{h}_2(u) \exp\{ju \lambda/\mu\}$, тогда для $\mathbf{h}_2(u)$ получим систему дифференциальных уравнений:

$$j\mu(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{h}_2(u)}{\partial u} = \mathbf{h}_2(u) \{N\mathbf{Q}_1 + (e^{ju} - 1)N\mathbf{\Lambda}_1 + \lambda(e^{-ju} - 1)\mathbf{I}\}.$$

Для нахождения асимптотического решения введем замены

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{N}, \quad u = \varepsilon w, \quad h_2(u) = f_2(w, \varepsilon) = \Phi(w)\{\mathbf{r} + j\varepsilon w \mathbf{f}\} + O(\varepsilon^2),$$

где \mathbf{g} – некоторая вектор-строка, а $\Phi(w)$ – скалярная функция;

$$\begin{aligned} j\mu(e^{-j\varepsilon w} - 1)\varepsilon \frac{\partial(\Phi(w)\{\mathbf{r} + j\varepsilon w \mathbf{f}\})}{\partial w} = \\ = \Phi(w)\{\mathbf{r} + j\varepsilon w \mathbf{f}\} \{\mathbf{Q}_1 + (e^{j\varepsilon w} - 1)\mathbf{\Lambda}_1 + \lambda(e^{-j\varepsilon w} - 1)\mathbf{I}\}. \end{aligned}$$

Отсюда, раскладывая экспоненты в ряд и приравнявая слагаемые при одинаковых степенях ε , получаем систему алгебраических уравнений для \mathbf{g} :

$$\begin{cases} \mathbf{g}\mathbf{Q} + \mathbf{r}(\mathbf{\Lambda} - \lambda\mathbf{I}) = 0, \\ \mathbf{g}\mathbf{e} = 0. \end{cases}$$

Решая дифференциальное уравнение для $\Phi(w)$ с начальным условием $\Phi_2(0) = 1$, получаем

$$\Phi_2(w) = \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}(\lambda + \mathbf{f}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e})\right\}.$$

В силу обратных замен асимптотическая характеристическая функция принимает следующий вид:

$$\mathbf{h}(u) = \mathbf{h}_2(u) \exp\{ju\lambda/\mu\} = \exp\left\{ju\frac{\lambda}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2} \frac{(\lambda + \mathbf{f}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e})}{\mu}\right\}.$$

Асимптотический анализ в условии растущего времени обслуживания

Для асимптотического условия растущего времени обслуживания, то есть при $\mu \rightarrow 0$, получены аналогичные результаты, то есть доказано, что стационарное распределение вероятностей числа приборов, занятых в системе обслуживания, можно аппроксимировать гауссовским распределением с параметрами

$$a = Mi(t) = \lambda/\mu, \quad \sigma^2 = M\{(i(t) - a)^2\} = \kappa_2/\mu.$$

Асимптотический анализ в условии предельно редких изменений состояний управляющей потоком цепи Маркова

Под условием предельно редких изменений состояния потока будем понимать такие значения параметров потока, при которых время пребывания управляющей цепи Маркова в каждом состоянии достаточно большое, то есть стремится к бесконечности. Таким образом, условие предельно частых изменений состояния потока можно записать как $q_{kk} \rightarrow 0$.

Условие ПРИС определим следующими заменами: $\mathbf{Q} = \varepsilon \mathbf{Q}_1$, где ε – некоторый малый положительный параметр, тогда (1) запишется в виде

$$j\mu(e^{-j\mu} - 1) \frac{\partial \mathbf{h}(u)}{\partial u} = \mathbf{h}(u) \{ \varepsilon \mathbf{Q}_1 + (e^{j\mu} - 1) \mathbf{\Lambda}_1 \}, \mathbf{h}(0) = \mathbf{r}.$$

Перепишем системы уравнений в виде

$$j\mu(e^{-j\mu} - 1) \frac{\partial h(k, u)}{\partial u} = \sum_v h(v, u) q_{vk}^{(1)} \varepsilon + h(k, u) \lambda_k.$$

Выполнив предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$h(k, u) = r(k) \exp \left\{ (e^{j\mu} - 1) \frac{\lambda_k}{\mu} \right\},$$

откуда характеристическая функция числа занятых приборов в системе имеет вид

$$h(u) = \sum_k r(k) \exp \left\{ (e^{j\mu} - 1) \frac{\lambda_k}{\mu} \right\}.$$

Переходя к производящим функциям, имеем

$$\begin{aligned} M \{ z^i \} &= \sum_k r(k) \exp \left\{ (z - 1) \frac{\lambda_k}{\mu} \right\} = \sum_k r(k) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} \left(\frac{\lambda_k}{\mu} \right)^i e^{-\frac{\lambda_k}{\mu}} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} \sum_k r(k) \left(\frac{\lambda_k}{\mu} \right)^i e^{-\frac{\lambda_k}{\mu}}. \end{aligned}$$

Таким образом, асимптотическое стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов является взвешенной суммой пуассоновских распределений:

$$\Pi(i) = \sum_k r(k) \frac{\rho_k^i}{i!} e^{-\rho_k}, \quad \rho_k = \lambda_k / \mu.$$

Заключение

В работе выполнено исследование характеристик числа занятых приборов в системе массового обслуживания $MMPR|M|_{\infty}$ при различных асимптотических условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев А.Н.* Асимптотический анализ системы массового обслуживания $MAP/GI/\infty$ с высокоинтенсивным входящим потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3. С. 56–65.
2. *Моисеев А.Н., Назаров А.А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2015. 236 с.
3. *Моисеева С.П., Назаров А.А.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

Исследование функционирующей в случайной среде RQ-системы с вызываемыми и возвратными заявками

В.А. Вавилов

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Периодичность развития экономических систем требует от управления банков своевременного реагирования на изменения экономической конъюнктуры. Методы диагностики финансового состояния банков основаны на анализе большого объёма информации, при этом алгоритмы вычисления показателей эффективности финансовой деятельности сложны и не всегда очевидны. Это приводит к тому, что результаты анализа не отражают в полной мере реальную ситуацию и не достаточно наглядно характеризуют устойчивость кредитной организации.

Математическое моделирование банковской деятельности позволяет выявить определённые закономерности и увеличить скорость управленческой реакции на изменения внешней среды. В силу стохастического характера изучаемых процессов, в данной работе представим деятельность банка в виде модели функционирования RQ-системы (Retrial Queuing System – системы с повторными вызовами) [1, 2]. В рассматриваемой модели учтём работу call-центра – важного элемента структуры банковской организации, призванного рекламировать и продвигать банковские продукты и услуги, привлекать клиентов и сокращать так называемое время простоя. Немаловажным фактором успешной финансовой деятельности является наличие постоянных клиентов, поэтому учтём тот факт, что по завершении успешного обслуживания клиент может покинуть систему навсегда или через некоторый промежуток времени вернуться для повторного обслуживания. Например, выплативший кредит клиент может повторно обратиться за новым кредитом или другой банковской услугой или продуктом. Также учтём влияние на эффективность работы банка неконтролируемых внешних экономических, социальных и иных факторов, в совокупности называемых случайной средой. Проведём асимптотическое исследование предложенной модели и найдём основные вероятностно-временные характеристики.

Математическая модель

Рассмотрим RQ-систему, на вход которой поступает простейший с параметром λ поток заявок (клиентов). Заявка, заставшая в момент поступления прибор свободным, начинает обслуживаться в течение экспоненциально распределённого промежутка времени с параметром μ_1 . Свободный прибор может вызывать для обслуживания дополнительные заявки из внешней среды с интенсивностью α . Вызываемая заявка занимает прибор для обслуживания, длительность которого имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_2 . По завершении обслуживания заявка с вероятностью β переходит на орбиту или покидает систему с вероятностью $1-\beta$. Если в течение обслуживания одной заявки поступает другая, то поступившая заявка переходит на орбиту. Повторное обращение заявок к прибору из орбиты происходит после случайной задержки, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром γ . Количество заявок на орбите обозначим i . Таким образом, прибор RQ-системы может находиться в одном из трёх состояний: $k=0$, если он свободен; $k=1$, если он занят обслуживанием заявки; $k=2$, если на приборе реализуется обслуживание вызываемой заявки.

RQ-система функционирует в случайной среде, моделируемой однородной цепью Маркова $s(t)$ [3] с конечным множеством состояний $s=1,2,\dots,S$ и непрерывным временем, для которой заданы её инфинитезимальные характеристики $q_{s_1 s_2}$. Очевидно, что

$$\sum_{s_2=1}^S q_{s_1 s_2} = 0, \quad s_1 = 1, 2, \dots, S. \quad (1)$$

Влияние случайной среды на функционирование RQ-системы определяется зависимостью интенсивностей μ_1 и μ_2 обслуживания заявок от состояний $s(t) = s$ случайной среды, то есть $\mu_1 = \mu_1(s)$, $\mu_2 = \mu_2(s)$. Вероятности окончания обслуживания заявки и вызываемой заявки на приборе за бесконечно малый промежуток времени Δt соответственно равны: $\mu_1(s)\Delta t + o(\Delta t)$ и $\mu_2(s)\Delta t + o(\Delta t)$.

В силу свойств описанной модели случайный процесс $\{k(t), i(t), s(t)\}$ изменения во времени состояний $\{k(t), i(t)\}$ RQ-системы и состояний $\{s(t)\}$ математической модели случайной среды является цепью Маркова с непрерывным временем.

Для распределения $P_k(i, s, t) = P(k(t) = k, i(t) = i, s(t) = s)$ можно составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова [4]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial P_0(i, s, t)}{\partial t} + (\alpha + \lambda + i\gamma)P_0(i, s, t) = (1 - \beta)\mu_1(s)P_1(i, s, t) + \\
 & \quad + \beta\mu_1(s)P_1(i - 1, s, t) + (1 - \beta)\mu_2(s)P_2(i, s, t) + \\
 & \quad + \beta\mu_2(s)P_2(i - 1, s, t) + \sum_{s_1=1}^S q_{s_1 s} P_0(i, s_1, t), \\
 & \frac{\partial P_1(i, s, t)}{\partial t} + (\lambda + \mu_1(s))P_1(i, s, t) = \lambda P_0(i, s, t) + \\
 & \quad + (i + 1)\gamma P_0(i + 1, s, t) + \lambda P_1(i - 1, s, t) + \sum_{s_1=1}^S q_{s_1 s} P_1(i, s_1, t), \\
 & \frac{\partial P_2(i, s, t)}{\partial t} + (\lambda + \mu_2(s))P_2(i, s, t) = \alpha P_0(i, s, t) + \\
 & \quad + \lambda P_2(i - 1, s, t) + \sum_{s_1=1}^S P_2(i, s_1, t) q_{s_1 s}. \tag{2}
 \end{aligned}$$

В любой момент времени должно выполняться условие нормировки:

$$\sum_{k=0}^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=1}^S P_k(i, s, t) = 1.$$

Асимптотический анализ

Исследуем систему (2) методом асимптотического анализа [5] в условии $\gamma \rightarrow 0$. Для этого рассмотрим предельный процесс

$$x(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 i(\tau / \varepsilon^2)),$$

характеризующий асимптотическое среднее нормированного числа заявок на орбите, покажем, что он является детерминированной функцией, а также процесс

$$y(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((\varepsilon^2 i(\tau / \varepsilon^2) - x(\tau)) / \varepsilon),$$

характеризующий изменение величин отклонения нормированного

числа заявок на орбите от среднего и покажем, что он является диффузионным процессом авторегрессии [3].

Согласно метода [5], обозначим $\gamma = \varepsilon^2$, $\varepsilon^2 t = \tau$ и выполним замены $\varepsilon^2 i = x + \varepsilon y$, $P_k(i, s, t) / \varepsilon = H_k(y, s, \tau, \varepsilon)$ в системе (2), в результате получим

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^2 \frac{\partial H_0(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_0(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \\
 & + (\alpha + \lambda + x + \varepsilon y) H_0(y, s, \tau, \varepsilon) = (1 - \beta) \mu_1(s) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + \\
 & + \beta \mu_1(s) H_1(y - \varepsilon, s, \tau, \varepsilon) + (1 - \beta) \mu_2(s) H_2(y, s, \tau, \varepsilon) + \\
 & + \beta \mu_2(s) H_2(y - \varepsilon, s, \tau, \varepsilon) + \sum_{s_1=1}^S q_{s_1 s} H_0(y, s_1, \tau, \varepsilon), \\
 & \varepsilon^2 \frac{\partial H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + (\lambda + \mu_1(s)) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) = \\
 & = \lambda H_1(y - \varepsilon, s, \tau, \varepsilon) + (x + \varepsilon(y + \varepsilon)) H_0(y + \varepsilon, s, \tau, \varepsilon) + \\
 & + \lambda H_0(y, s, \tau, \varepsilon) + \sum_{s_1=1}^S H_1(y, s_1, \tau, \varepsilon) q_{s_1 s}, \\
 & \varepsilon^2 \frac{\partial H_2(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_2(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + (\lambda + \mu_2(s)) H_2(y, s, \tau, \varepsilon) = \\
 & = \alpha H_0(y, s, \tau, \varepsilon) + \lambda H_2(y - \varepsilon, s, \tau, \varepsilon) + \sum_{s_1=1}^S H_2(y, s_1, \tau, \varepsilon) q_{s_1 s}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

На первом этапе асимптотического при $\gamma \rightarrow 0$ исследования системы (3) можно показать, что распределение вероятностей $R_k(x)$ состояний k канала имеет вид

$$R_0(x) = \psi \varphi / G(x), \quad R_1(x) = (\lambda + x) \varphi / G(x), \quad R_2(x) = \alpha \psi / G(x), \quad (4)$$

где $G(x) = \alpha \psi + (\lambda + x) \varphi + \psi \varphi$, $x = x(\tau)$ – детерминированная функция, определяемая обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x'(\tau) = -x R_0(x) + (\lambda + \beta \psi) R_1(x) + (\lambda + \beta \varphi) R_2(x), \quad (5)$$

где величины ψ и φ определяются равенствами вида

$$\sum_{s=1}^S \mu_1(s) Q_1(x, s) = \psi R_1(x), \quad \sum_{s=1}^S \mu_2(s) Q_2(x, s) = \phi R_2(x),$$

а функции $Q_k(x, s)$, $k = 0, 1$ – решением системы уравнений

$$(\alpha + \lambda + x) Q_0(x, s) = \mu_1(s) Q_1(x, s) + \mu_2(s) Q_2(x, s) + \sum_{s_1=1}^S q_{s_1 s} Q_0(x, s_1),$$

$$\mu_1(s) Q_1(x, s) = (\lambda + x) Q_0(x, s) + \sum_{s_1=1}^S q_{s_1 s} Q_1(x, s_1),$$

$$\mu_2(s) Q_2(x, s) = \alpha Q_0(x, s) + \sum_{s_1=1}^S q_{s_1 s} Q_2(x, s_1)$$

и условием нормировки

$$\sum_{k=0}^2 \sum_{s=1}^S Q_k(x, s) = 1.$$

Обозначим:

$$A(x) = -xR_0(x) + (\lambda + \beta\psi)R_1(x) + (\lambda + \beta\phi)R_2(x). \quad (6)$$

На втором этапе исследования можно показать, что асимптотически при $\gamma \rightarrow 0$ случайный процесс $y(\tau)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$dy(\tau) = A'_x(x)y(\tau)d\tau + B(x)dw(\tau), \quad (7)$$

где $w(\tau)$ есть стандартный процесс Винера [3], функция $A(x)$ определяется обозначением (6), функция $B(x)$ – равенством

$$B^2(x) = (1 + 2h^{(1)}(x))(-xR_0(x) + (\lambda + \beta\psi)R_1(x) + (\lambda + \beta\phi)R_2(x) + 2x(R_0(x) + h_0^{(1)}(x)) - 2\lambda(h_1^{(1)}(x) + h_2^{(1)}(x)) - 2\beta(\eta_1 h_1^{(1)}(x) + \eta_2 h_2^{(1)}(x))), \quad (8)$$

где η_k , $k = 1, 2$, $h_k^{(1)}(x)$, $k = \overline{0, 2}$, $h^{(1)}(x)$ определяются обозначениями

$$\sum_{s=1}^S h_k^{(1)}(x, s) = h_k^{(1)}(x), \quad k = \overline{0, 2}, \quad \sum_{k=0}^2 h_k^{(1)}(x) = h^{(1)}(x),$$

$$\sum_{s=1}^S \mu_k(s) h_k^{(1)}(x, s) = \eta_k h_k^{(1)}(x), \quad k = 1, 2,$$

а функции $h_k^{(1)}(x, s)$, $k = \overline{0, 2}$ – решением системы:

$$\begin{aligned}
 & -(\alpha + \lambda + x)h_0^{(1)}(x, s) + \mu_1(s)h_1^{(1)}(x, s) + \mu_2(s)h_2^{(1)}(x, s) + \sum_{s_1=1}^S h_0^{(1)}(x, s_1)q_{s_1, s} = \\
 & \quad = -x'(\tau)Q_0(x, s) + \beta\mu_1(s)Q_1(x, s) + \beta\mu_2(s)Q_2(x, s), \\
 & -\mu_1(s)h_1^{(1)}(x, s) + (\lambda + x)h_0^{(1)}(x, s) + \sum_{s_1=1}^S h_1^{(1)}(x, s_1)q_{s_1, s} = \\
 & \quad = -(x'(\tau) - \lambda)Q_1(x, s) - xQ_0(x, s), \\
 & -\mu_2(s)h_2^{(1)}(x, s) + \alpha h_1^{(1)}(x, s) + \sum_{s_1=1}^S h_2^{(1)}(x, s_1)q_{s_1, s} = -(x'(\tau) - \lambda)Q_2(x, s).
 \end{aligned}$$

Таким образом, в работе предложена модель функционирующих в случайной среде RQ-систем с вызываемыми и возвратными заявками. Асимптотическим методом [4] получено обыкновенное дифференциальное уравнение (5), определяющее среднее $x = x(\tau)$ нормированного числа заявок на орбите. Представлено распределение $R_k(x)$, $k = \overline{0, 1}$ вероятностей состояний k прибора в виде (4). Показано, что процесс $y(\tau)$, характеризующий изменение величин отклонения от среднего, является диффузионным процессом авторегрессии и определяется стохастическим дифференциальным уравнением (7). Полученные результаты могут быть использованы при анализе эффективности деятельности банковских отделений и кредитных организаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Retrial Queuing Systems: A Computational Approach. Berlin: Springer, Heidelberg, 2008. 318 p.
2. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial Queues. London: Chapman and Hall, 1997. 328 p.
3. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. М.: Мир, 1971. 536 с.
4. *Эльсгольц Л.Е.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
5. *Назаров А.А., Мусеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

Оптимизация смены режимов обслуживания двух конфликтных потоков по циклическому алгоритму с однократным продлением

А.Д. Глуздов, А.В. Зорин

*Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, г. Н. Новгород, Россия*

Входные потоки многих реальных систем массового обслуживания являются конфликтными. Для управления конфликтными транспортными потоками на регулируемых перекрестках во многих странах мира используются целые компьютеризированные комплексы. Такой комплекс способен как осуществлять мониторинг текущей ситуации на дорогах, так и выбирать один из нескольких возможных режимов управления, наиболее подходящий к текущей дорожной ситуации. Возникает интересная математическая задача об определении оптимального алгоритма переключения режимов. В теории случайных процессов известен метод построения оптимальных алгоритмов управления для марковского процесса с доходами и конечным числом состояний, принадлежащий Р. Ховарду [3]. Данный метод применялся, например, в работе [2] для оптимизации автомата с обратной связью, управляющего уличным движением на перекрестке, а также в работе [1] к оптимизации управления перекрестком с помощью светофора-автомата с тремя циклическими режимами работы. В настоящей работе рассматривается модель управления двумя конфликтными потоками светофором-автоматом с несколькими режимами, допускающими однократное продления обслуживания одного из потоков.

Постановка задачи

Пусть в систему массового обслуживания с потерями поступают два независимых конфликтных входных потока Π_1, Π_2 . Поступление требований по каждому из потоков происходит в дискретной временной шкале $\{0, \Delta, 2\Delta, \dots\}$. На интервале $(i\Delta, (i+1)\Delta]$ по потоку Π_j с вероятностью λ_j , $0 < \lambda_j < 1$, поступает одно требование, а с вероятностью $1 - \lambda_j$ требование не поступает, $j = 1, 2$. Непосредственный момент поступления требования не наблюдается. Требования потока Π_j помещаются в накопитель O_j конечной емкости $N < \infty$. Обслуживающее устройство

имеет конечное множество состояний $\Gamma = \{\Gamma^{(s,r)}; s = 1, 2, \dots, 6, r = 1, 2, 3\}$. Символ r будем называть номером режима. В состояниях $\Gamma^{(2j-1,r)}$, $\Gamma^{(4+j,r)}$ обслуживаются только требования потока Π_j , что и означает конфликтность, причем состояния $\Gamma^{(4+j,r)}$ есть состояния продления обслуживания потока Π_j ; в состоянии $\Gamma^{(2j,r)}$ требования этого потока не обслуживаются и осуществляется переналадка. За промежуток времени Δ в состояниях $\Gamma^{(2j-1,r)}$, $\Gamma^{(4+j,r)}$ завершается обслуживание одного требования из очереди O_j с вероятностью β_j , $0 < \beta_j < 1$ и обслуженное требование покидает систему, причем момент окончания обслуживания тоже не наблюдается непосредственно либо с вероятностью $1 - \beta_j$ обслуживание не завершается. Длительность пребывания прибора в состоянии $\Gamma^{(s,r)}$, $s = 1, 2, \dots, 6$, не случайна и равна $T_{(s,r)}\Delta$. В первом режиме продлений не допускается и прибор проходит последовательно состояния $\Gamma^{(1,1)} \rightarrow \Gamma^{(2,1)} \rightarrow \Gamma^{(3,1)} \rightarrow \Gamma^{(4,1)}$. Во втором режиме, по сравнению с первым, допускается продление обслуживания первого потока: после состояния $\Gamma^{(1,2)}$ включается $\Gamma^{(5,2)}$, если длина первой очереди больше либо равна заданному порогу $N_1 < \infty$, в противном случае включается состояние $\Gamma^{(2,2)}$. После состояния $\Gamma^{(5,2)}$ обязательно включается состояние $\Gamma^{(2,2)}$. Далее $\Gamma^{(2,2)} \rightarrow \Gamma^{(3,2)} \rightarrow \Gamma^{(4,2)}$. В третьем режиме, по сравнению с первым, допускается продление обслуживания второго потока: после состояния $\Gamma^{(3,3)}$ включается $\Gamma^{(6,4)}$, если длина второй очереди больше либо равна заданному порогу $N_2 < \infty$, в противном случае $\Gamma^{(4,3)}$. После состояния $\Gamma^{(6,3)}$ обязательно включается состояние $\Gamma^{(4,3)}$. Промежуток времени, в течение которого обслуживающее устройство последовательно проходит от $\Gamma^{(1,r)}$ до $\Gamma^{(4,r)}$ включительно, называется циклом. Новый режим выбирается в начале цикла, то есть в момент времени 0 и в момент окончания пребывания в состоянии $\Gamma^{(4,r)}$. Правило выбора нового режима r' определяется отображением $h(\cdot)$ целочисленной решетки $X = \{0, 1, \dots, N\} \times \{0, 1, \dots, N\}$ во множество $\{1, 2, 3\}$. Если длины очередей представлены вектором $x = (x_1, x_2) \in X$, то выбирается режим номер $r' = h(x)$ и прибор переходит в состояние $\Gamma^{(1,r')}$.

Данную систему можно представить как абстрактную управляющую систему Ляпунова – Яблонского [4]. Введем дискретную временную шкалу моментов наблюдения над системой $\{0, \Delta, 2\Delta, \dots\}$. Обозначим $\eta_{j,i}$ число требований, поступивших на полузамкнутом интервале $(i\Delta, (i+1)\Delta]$, а элемент $\Gamma_i \in \Gamma$ – состояние обслуживающего устройства на промежутке $((i-1)\Delta, i\Delta]$. Введем также векторы

$$\kappa_i = (\kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}), \xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}).$$

Пусть используется экстремальная стратегия обслуживания, тогда рекуррентные соотношения длин очередей будут иметь следующий вид:

$$\kappa_{j,i+1} = \min\{N, \max\{0, \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} + \xi_{j,i}\}\}.$$

Введем отображение $u(\cdot, \cdot): \Gamma \times X \rightarrow \Gamma$ соотношением

$$u(\Gamma^{(s,r)}, x) = \begin{cases} \Gamma^{(s+1,r)} & \text{при } s < 2m \vee [r = 2 \wedge s = 1 \wedge x_1 < N_1] \vee \\ & \vee [r = 3 \wedge s = 3 \wedge x_2 < N_2], \\ \Gamma^{(5,r)} & \text{при } r = 2 \wedge s = 1 \wedge x_1 \geq N_1, \\ \Gamma^{(6,r)} & \text{при } r = 3 \wedge s = 3 \wedge x_2 \geq N_2, \\ \Gamma^{(1,\tilde{r})} & s = 2m \wedge \tilde{r} = h(x). \end{cases}$$

Пусть τ_1, τ_2, \dots – моменты смены состояний обслуживающего устройства. Тогда работа устройства по переработке информации внутренней памяти определяется рекуррентными соотношениями

$$\Gamma_{\tau_i+1} = u(\Gamma_{\tau_i}, \kappa_{\tau_i}).$$

Теорема 1. Последовательность

$$\{(\Gamma_{\tau_i(\omega)}(\omega), \kappa_{\tau_i(\omega)}(\omega)); i = 0, 1, \dots\} \quad (1)$$

является однородной цепью Маркова.

Построение матрицы переходной вероятности

Введем необходимые в дальнейшем величины

$$q_{k,l}^{(j)} = \begin{cases} 1 - \lambda_j & \text{при } k = l = 0, 1, \dots, N-1, \\ \lambda_j & \text{при } k+1 = l = 1, 2, \dots, N, \\ 1 & \text{при } k = l = N, \\ 0 & \text{при } k \neq l \vee k \neq l-1; \end{cases}$$

$$p_{k,l}^{(j)} = \begin{cases} 1 - \lambda_j + \lambda_j \beta_j & \text{при } k = l = 0, \\ (1 - \lambda_j)(1 - \beta_j) + \lambda_j \beta_j & \text{при } k = l = 1, 2, \dots, N-1, \\ (1 - \lambda_j) \beta_j & \text{при } k-1 = l = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ \lambda_j (1 - \beta_j) & \text{при } k+1 = l = 1, 2, \dots, N, \\ 1 - \beta_j + \lambda_j \beta_j & \text{при } k = l = N, \\ 0 & \text{при } k \neq l \vee k \neq l \pm 1. \end{cases}$$

Обозначим через $P^{(j)}$, $Q^{(j)}$ матрицы чисел $p_{k,l}^{(j)}$, $q_{k,l}^{(j)}$. Пусть $P^{(j)}(a)$, $Q^{(j)}(a)$ суть a -е степени матриц $P^{(j)}$, $Q^{(j)}$ соответственно, $a = 0, 1, \dots$.

Тогда переходная вероятность цепи Маркова (1) для $x \in X$, $h(x) = r$, $v \in X$ имеет вид

$$\mathbf{P}(\Gamma^{(s,r)}, x; \Gamma^{(\hat{s}, \hat{r})}, v) = \begin{cases} (Q^{(1)}(\Gamma_{(s,r)}))_{x_1, v_1} (Q^{(2)}(\Gamma_{(s,r)}))_{x_2, v_2} & \text{при } u(\Gamma^{(s,r)}, x) = \Gamma^{(\hat{s}, \hat{r})} \wedge \hat{s} \in \{2, 4\}, \\ (P^{(1)}(\Gamma_{(s,r)}))_{x_1, v_1} (Q^{(2)}(\Gamma_{(s,r)}))_{x_2, v_2} & \text{при } u(\Gamma^{(s,r)}, x) = \Gamma^{(\hat{s}, \hat{r})} \wedge \hat{s} \in \{1, 5\}, \\ (Q^{(1)}(\Gamma_{(s,r)}))_{x_1, v_1} (P^{(2)}(\Gamma_{(s,r)}))_{x_2, v_2} & \text{при } u(\Gamma^{(s,r)}, x) = \Gamma^{(\hat{s}, \hat{r})} \wedge \hat{s} \in \{3, 6\}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где запись $(\cdot)_{k,l}$ означает элемент k -й строки и l -го столбца указанной в скобках матрицы.

Построение экономического критерия

С экономической точки зрения время пребывания требований в системе представляет собой потери управляемой системы массового обслуживания. Обозначим через z общее время пребывания всех машин в очередях за цикл, которое с экономической точки зрения является потерями. В следующей теореме приводятся эффективные рекуррентные формулы для вычисления этой величины.

Теорема 2. Пусть $T_{(r)}$ – время цикла с учетом продления, $\Psi_{(r)} = \{0, 1, \dots, T_{(r)}\}$, $\Psi_{(j,r)}$ – множество номеров тактов, когда обслуживается Π_j , $\Psi_{(j,r)}^*$ – такт, после которого осуществляется выбор продления обслуживания Π_j , θ_r – время продления,

$$f_{k,l}^{(j)} = \begin{cases} \lambda_j \beta_j \Delta / 4(1 - \lambda_j + \lambda_j \beta_j) & \text{при } k = l = 0, \\ k\Delta & \text{при } k = l = 1, 2, \dots, N, \\ k\Delta + \Delta / 2 & \text{при } k + 1 = l = 1, 2, \dots, N, \\ k\Delta - \Delta / 2 & \text{при } k - 1 = l = 1, 2, \dots, N - 1, \\ 0 & \text{при } k \neq l \neq l \pm 1; \end{cases}$$

$$g_{l,k}^{(j)} = \begin{cases} k\Delta & \text{при } k = l = 1, 2, \dots, N, \\ k\Delta + \Delta / 2 & \text{при } k + 1 = l = 1, 2, \dots, N, \\ 0 & \text{при } k \neq l \vee k \neq l - 1 \vee k = l = 0. \end{cases}$$

Определим последовательно величины

$$H_{i_1, i_2}^{(j, r)}(i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i=0, \\ \sum_{k_1=0}^{N-1} q_{l_j, k_j}^{(j)} (g_{l_j, k_j}^{(j)} + \sum_{k_2=0}^{N-1} p_{l_{\bar{j}}, k_{\bar{j}}}^{(\bar{j})} H_{k_1, k_2}^{(j, r)}(i-1)) & \text{при } i \in \Psi_{(r)} \setminus \Psi_{(j, r)}, \\ \sum_{k_1=0}^{N-1} p_{l_j, k_j}^{(j)} (f_{l_j, k_j}^{(j)} + \sum_{k_2=0}^{N-1} q_{l_{\bar{j}}, k_{\bar{j}}}^{(\bar{j})} H_{k_1, k_2}^{(j, r)}(i-1)) & \text{при } i \in \Psi_{(j, r)} \setminus \{\Psi_{(j, r)}^*\}, \\ \sum_{k_j=0}^{N_j-1} p_{l_j, k_j}^{(j)} (f_{l_j, k_j}^{(j)} + \sum_{k_{\bar{j}}=0}^{N-1} p_{l_{\bar{j}}, k_{\bar{j}}}^{(\bar{j})} H_{k_1, k_2}^{(j, r)}(i-\theta_r)) + \\ + \sum_{k_j=N_j}^{N-1} p_{l_j, k_j}^{(j)} (f_{l_j, k_j}^{(j)} + \sum_{k_{\bar{j}}=0}^{N-1} q_{l_{\bar{j}}, k_{\bar{j}}}^{(\bar{j})} H_{k_1, k_2}^{(j, r)}(i-1)), & i \in \Psi_{(j, r)}^*, \\ \sum_{k_{\bar{j}}=0}^{N_{\bar{j}}-1} q_{l_j, k_j}^{(j)} (g_{l_j, k_j}^{(j)} + \sum_{k_j=0}^{N-1} q_{l_{\bar{j}}, k_{\bar{j}}}^{(\bar{j})} H_{k_1, k_2}^{(j, r)}(i-\theta_r)) + \\ + \sum_{k_{\bar{j}}=N_{\bar{j}}}^{N-1} q_{l_j, k_j}^{(j)} (g_{l_j, k_j}^{(j)} + \sum_{k_j=0}^{N-1} p_{l_{\bar{j}}, k_{\bar{j}}}^{(\bar{j})} H_{k_1, k_2}^{(j, r)}(i-1)) & \text{при } i \in \Psi_{(j, r)}^*, \end{cases}$$

где $\bar{j}(j)$ принимает значение 2 при $j = 1$ и значение 1 при $j = 2, r = h(x)$,

$$\text{тогда } z(x) = \sum_{j=1}^2 H_{x_1, x_2}^{(j, r)}(\Gamma^{(r)}).$$

Полученные соотношения позволяют изучить числовые характеристики длин очередей в стационарном режиме, а также воспользоваться алгоритмом Ховарда для построения оптимального алгоритма выбора режима. Для проведения численных экспериментов использовался язык высокого уровня Octave^[5], было реализовано четыре типа управления:

$$1) \forall x: h_1(x) = 1,$$

$$2) \forall x: h_2(x) = 2,$$

$$3) \forall x: h_3(x) = 3,$$

$$4) \tilde{h}_R(x) = \begin{cases} 1, & |x_1 - R| \leq x_2 \vee |x_2 - R| \leq x_1, \\ 2, & x_1 - R > x_2, \\ 3, & x_1 < x_2 - R, \end{cases} \quad R = 1, 2, \dots, N.$$

Заключение

В данной работе была построена математическая модель обслуживания двух конфликтных потоков требований в классе циклических алгоритмов с однократным продлением и найдены рекуррентные формулы для вычисления экономических критериев качества управления. Это позволяет численно решать задачи оптимизации для различных реальных систем обслуживания указанного класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зорин А.В.* Оптимизация параметров управления конфликтными потоками в классе циклических алгоритмов // Вестник Томского госуниверситета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 3(24). С. 70–77.
2. *Неймарк Ю.И., Федоткин М.А., Преображенская А.М.* Работа автомата с обратной связью, управляющего уличным движением на перекрестке // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1968. № 5. С. 129–141.
3. *Ховард Р.* Динамическое программирование и марковские процессы. М.: Сов. радио, 1964. 190 с.
4. *Зорин А.В.* Кибернетическая модель циклического управления конфликтными потоками с последствием // Проблемы теоретической кибернетики: материалы XVII Междунар. конф. (Казань, 16 – 20 июня 2014 г.) / под ред. Ю.И. Журавлева. Казань: Отечество, 2014. С.112–114.
5. *Eaton J.W., Bateman D., Hauberg S.* GNU Octave Manual Version 3. Network theory, Ltd, 2008.

Задача распределения нагрузки в сети массового обслуживания с делением и слиянием требований

В.М. Гуркова, А.С. Заварзин, О.А. Осипов

*Саратовский национальный исследовательский университет
им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия*

Сети массового обслуживания (СМО) с делением и слиянием требований [1] являются математическими моделями, используемыми для анализа дискретных стохастических систем с сетевой структурой и параллельным принципом функционирования. Процесс выполнения задач в реальных системах указанного типа может включать несколько этапов обработки, многократное деление получаемых при это подзадач, а самим подзадачам обычно присуща сложная взаимосвязь. Однако на данный момент многие работы рассматривают сети параллельных систем массового обслуживания (СМО) [2]. Для сети обслуживания, состоящей из двух одноприборных параллельных СМО, получено выражение для производящей функции стационарного распределения вероятностей состояний сети [3]. В работе [4] исследуются сети обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований с бесконечно-приборными системами.

Вопросам управления в сетях массового обслуживания посвящено не так много работ. Многие задачи данного класса можно отнести к задачам составления расписаний и сетевого планирования. Среди работ можно выделить [5], где рассматривается задача управления в сети с делением и слиянием требований в случае топологии параллельных систем.

В данной работе будет рассмотрено несколько стратегий распределения фрагментов в сетях массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований, направленных на уменьшение длительности пребывания требований. Производится оценка эффективности стратегий посредством имитационного моделирования.

Описание сети массового обслуживания

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, состоящая из M одноприборных обслуживающих систем $S = \{S_1, \dots, S_M\}$. Каждая система массового обслуживания в рассматриваемой сети является системой с ожиданием и очередью бесконечной вместимости. Системы во

множестве \mathcal{S} поделены на непересекающиеся подмножества $\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_R\}$ в соответствии с типами $1, \dots, R$.

В сеть из источника поступает поток требований, поступающие требования состоят из фрагментов. Между фрагментами заданы отношения предшествования посредством ориентированного ациклического графа G со множеством вершин $\{f, 1, 2, \dots, D, j\}$, где f, j – фиктивные вершины, $1, \dots, D$ – вершины, соответствующие фрагментам. Пример графа изображен на рис. 1.

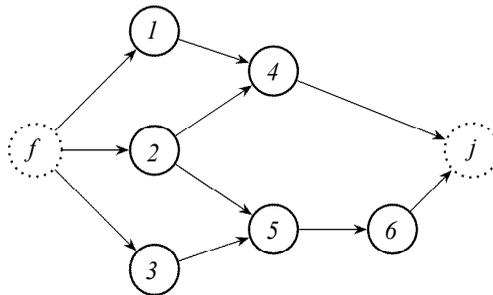


Рис. 1. Связи между фрагментами требования

В представленном примере обслуживание фрагментов $1, 2, 3$ может быть начато одновременно. По завершении обслуживания фрагментов 1 и 2 может быть начато обслуживание фрагмента 4 . После завершения обслуживания фрагментов 2 и 3 возможно начало обслуживания фрагмента 5 , а затем 6 . По завершении обслуживания фрагментов 4 и 6 исходное требование будет считаться обслуженным и покидает сеть.

Пусть для каждого фрагмента задан тип системы, на котором может быть произведено его обслуживание. Фрагмент может выбрать любую систему из соответствующего множества для своего обслуживания. Предполагается, что после поступления в СМО фрагменты не могут переходить из одной системы в другую внутри одного типа, то есть СМО выбирается при поступлении и не может быть изменена после.

Длительность обслуживания фрагмента прибором системы типа r является случайной величиной с заданной функцией распределения. Выбор требования из очереди на обслуживание производится в соответствии с некоторой дисциплиной обслуживания.

После завершения обслуживания фрагменты объединяются в исходное требование, то есть требование считается выполненным и покидает

сеть массового обслуживания только после окончания обслуживания и объединения всех его фрагментов.

Пусть имеется сеть обслуживания из $R = 4$ типов систем обслуживания. Для фрагментов требования, граф которого был представлен на рисунке выше, задано следующее соответствие типов систем обслуживания и фрагментов: $1 - S_1, 2 - S_1, 3 - S_2, 4 - S_3, 5 - S_3, 6 - S_4$.

Основываясь на указанных замечаниях, изобразим топологию сети обслуживания в виде графа (рис. 2), вершины графа изображают системы (множества систем некоторого типа). Метки на дугах задают переходящие между системами (множествами систем) фрагменты.

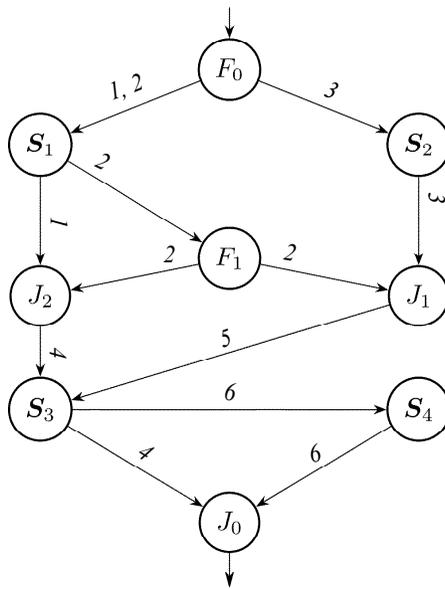


Рис. 2. Пример сети обслуживания

В сеть обслуживания также введены дополнительные системы массового обслуживания – дивайдеры $\{F_0, F_1\}$, обеспечивающие разделение фрагментов, и интеграторы $\{J_0, J_1, J_2\}$, объединяющие фрагменты по завершении их обслуживания. Здесь, например, дивайдер F_0 осуществляет деление требования на три фрагмента: фрагменты 1, 2 поступают для обслуживания в некоторые СМО типа 1, фрагмент 3 поступает в СМО типа 2. После завершения обслуживания фрагмента 1 он посту-

пает в интегратор J_2 , в котором будет находиться до поступления в интегратор фрагмента 2, полученного при делении на дивайдере F_1 . Таким образом, интегратор J_2 отражает тот факт, что обслуживание фрагмента 4 может быть начато только после завершения обслуживания фрагментов 1 и 2.

Для уменьшения длительности пребывания требований в сети массового обслуживания возможно использование нескольких стратегий управления, например, одним из возможных способов является выбор фрагментом СМО с наименее заполненной очередью.

Заключение

В работе рассматриваются сети массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований. Предлагается множество стратегий распределения фрагментов по системам сети, производится оценка их эффективности посредством имитационного моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thomassian A.* Analysis of fork/join and related queueing systems // *ACM Computing Surveys*. 2014. V. 47. No. 2. P. 17:1–17:71.
2. *Squillante M.S., Zhang Y., Sivasubramaniam A., Gautam N.* Generalized parallel-server fork-join queues with dynamic task scheduling // *Annals of Operations Research*. 2008. V. 160. No. 1. P. 227–255.
3. *Flatto L., Hahn S.* Two parallel queues created by arrivals with two demands I // *SIAM J. Applied Mathematics*. 1984. V. 44(5). P. 1041–1053.
1. *Осипов О.А., Тананко И.Е.* Сети массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований: случай бесконечноприборных систем обслуживания // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2017. № 4. С. 43–58.
5. *Ozkan E., Ward A.R.* On the control of fork-join networks // *Mathematics of Operations Research*. 2019. V. 44. Iss. 2. P. 532–564.

Нахождение характеристик производительности системы обслуживания ВМАР/РН/1 с ограниченным разделением процессора и дисциплиной частичного принятия запросов *

С.А. Дудин^{1,2}, А.Н. Дудин¹, О.С. Дудина^{1,2}

¹ Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь

² Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

Исследуется однолинейная система массового обслуживания без входного буфера с дисциплиной ограниченного разделения процессора, групповым марковским входным потоком и частичным принятием запросов в случае дефицита емкости прибора. В работе [1] построен многомерный стохастический процесс, описывающий поведение системы. В данной работе решаются проблемы нахождения стационарного распределения вероятностей числа запросов в системе и определения зависимости основных характеристик системы от ее емкости и параметров.

Стационарное распределение вероятностей состояний системы

В работе [1] рассмотрена система массового обслуживания типа ВМАР/РН/1 с ограниченным равномерным разделением процессора и дисциплиной частичного принятия запросов, адекватно описывающая функционирование многих реальных систем. ВМАР (Batch Markov Arrival Process)-поток хорошо описывает коррелированные взрывные потоки информации, передаваемые в современных телекоммуникационных сетях [2], а обслуживание фазового типа (Phase Type – РН) может быть использовано для хорошего приближения более сложных распределений неотрицательных случайных величин [3].

В работе [1] показано, что многомерный случайный процесс

$$\zeta_t = \{n_t, v_t, h_t^{(1)}, \dots, h_t^{(M)}\}, t \geq 0,$$

где $n_t, n_t = \overline{0, N}$, – число запросов в системе; $v_t, v_t = \overline{0, W}$, – управляющий процесс ВМАР-потока и $h_t^{(m)}, h_t^{(m)} \in \{0, \dots, n\}$, $m = \overline{1, M}$,

* Работа выполнена при финансовой поддержке проекта университета РУДН 5-100 и гранта БРФФИ Ф19КОР-001.

$\sum_{m=1}^M h_t^{(m)} = n$, – число процессов обслуживания, находящихся на фазе m в момент $t, t \geq 0$, описывающий динамику рассматриваемой системы, является цепью Маркова с непрерывным временем.

Для исследования данной цепи необходимо получить ее генератор. С этой целью, кроме уже введенных в работе [1], будем использовать следующие обозначения:

- I – тождественная матрица соответствующего размера. Если размер неясен из контекста, он указывается как нижний индекс. Например, $I_{\overline{W}}$ означает тождественную матрицу размера \overline{W} ;

- O – нулевая матрица соответствующего размера;
- \otimes и \oplus – символы Кронекерова произведения и суммы матриц [4];
- $\text{diag}\{\mathbf{b}\}$ – диагональная матрица с диагональными элементами, являющимися элементами вектора \mathbf{b} ;

- $\Delta^{(n)}(N) = \text{diag}\left\{\frac{1}{n}(A_n(N, S)\mathbf{e} + L_{N-n}(N, \tilde{S})\mathbf{e})\right\}, n = \overline{1, N}$.

Перенумеруем состояния цепи Маркова $\zeta_t, t \geq 0$, в прямом лексикографическом порядке компоненты v_t и обратном лексикографическом порядке компонент $h_t^{(1)}, \dots, h_t^{(M)}$. Множество состояний цепи Маркова, имеющих значение n первой компоненты, назовем уровнем n . Пусть G есть генератор цепи Маркова $\zeta_t, t \geq 0$, т.е. матрица, состоящая из блоков $G_{n,j}$, которые определяют интенсивности перехода цепи с уровня n на уровень j . Диагональные элементы матрицы $G_{n,n}$ отрицательны. Их модули задают интенсивности выхода цепи Маркова из соответствующего состояния цепи Маркова $\zeta_t, t \geq 0$.

Лемма 1. Генератор цепи Маркова $\zeta_t, t \geq 0$, имеет следующую трехблочную-диагональную форму:

$$G = \begin{pmatrix} G_{0,0} & G_{0,1} & G_{0,2} & G_{0,3} & \dots & G_{0,N} \\ G_{1,0} & G_{1,1} & G_{1,2} & G_{1,3} & \dots & G_{1,N} \\ O & G_{2,1} & G_{2,2} & G_{2,3} & \dots & G_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & G_{N,N} \end{pmatrix}.$$

Ненулевые блоки $G_{i,j}, i, j \geq 0$, генератора имеют следующий вид:

$$G_{0,0} = D_0,$$

$$G_{n,n} = D_0 \oplus \frac{1}{n} A_n(N, S) - I_{\bar{W}} \otimes \Delta^{(n)}(N), \quad n = \overline{1, N-1},$$

$$G_{N,N} = D_0 \oplus \frac{1}{N} A_N(N, S) - I_{\bar{W}} \otimes \Delta^{(N)}(N) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \otimes I_{M_N},$$

$$G_{n,n+k} = D_k \otimes P_n(\boldsymbol{\beta}) \times \dots \times P_{n+k-1}(\boldsymbol{\beta}), \quad n = \overline{0, N-1}, \quad k = \overline{1, N-n-1},$$

$$G_{n,N} = \sum_{j=N-n}^{\infty} D_j \otimes P_n(\boldsymbol{\beta}) \times \dots \times P_{N-1}(\boldsymbol{\beta}), \quad n = \overline{0, N-1},$$

$$G_{n,n-1} = I_{\bar{W}} \otimes \frac{1}{n} L_{N-n}(N, \tilde{S}), \quad n = \overline{1, N}.$$

Доказательство леммы 1 проводится путем анализа всевозможных переходов цепи Маркова ζ_t за интервал бесконечно малой длины и компоновки их в матричную форму.

Поскольку цепь Маркова ζ_t является неприводимой и имеет конечное пространство состояний, то стационарные вероятности ее состояний

$$\pi(0, \mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{n_t = 0, \mathbf{v}_t = \mathbf{v}\},$$

$$\pi(n, \mathbf{v}, h^{(1)}, \dots, h^{(M)}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{n_t = n, \mathbf{v}_t = \mathbf{v}, h_t^{(1)} = h^{(1)}, \dots, h_t^{(M)} = h^{(M)}\},$$

$$\mathbf{v} = \overline{0, W}, \quad \sum_{m=1}^M h^{(m)} = n, \quad n = \overline{1, N},$$

существуют при любом выборе параметров системы.

Пусть $\boldsymbol{\pi}_0$ есть вектор-строка, составленная из вероятностей $\pi(0, \mathbf{v})$, и $\boldsymbol{\pi}_n$ есть вектор-строка, составленная из вероятностей $\pi(n, \mathbf{v}, h^{(1)}, \dots, h^{(M)})$.

Пусть $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_0, \dots, \boldsymbol{\pi}_N)$.

Известно, что вектор стационарных вероятностей $\boldsymbol{\pi}$ является единственным решением системы уравнений (уравнений равновесия или Чепмена – Колмогорова):

$$\begin{aligned}\pi G &= \mathbf{0}, \\ \pi \mathbf{e} &= 0.\end{aligned}$$

Если число уравнений этой системы велико, для ее решения следует использовать алгоритмы, учитывающие разреженную структуру генератора G . Например, можно использовать следующий алгоритм.

Алгоритм 1.

Шаг 1. Вычисляем матрицы $P_{i,n}$ по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned}P_{i,N} &= -G_{i,N} (G_{N,N})^{-1}, \quad i = \overline{0, N-1}, \\ P_{i,n} &= -(G_{i,n} + P_{i,n+1} G_{n+1,n}) (G_{n,n} + P_{n,n+1} G_{n+1,n})^{-1}, \\ & \quad i = \overline{0, n-1}, \quad n = N-1, N-2, \dots, 1.\end{aligned}$$

Шаг 2. Находим вектор \mathbf{y}_0 как единственное решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_0 (G_{0,0} + P_{0,1} G_{1,0}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{y}_0 \mathbf{e} &= 1.\end{aligned}$$

Шаг 3. Вычисляем векторы $\mathbf{y}_n, n = \overline{1, N}$ как

$$\mathbf{y}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{y}_i P_{i,n}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Шаг 4. Находим нормирующую константу

$$c = \left(\sum_{n=0}^N \mathbf{y}_n \mathbf{e} \right)^{-1}.$$

Шаг 5. Находим векторы стационарного распределения $\pi_n, n = \overline{0, N}$, как

$$\pi_n = c \mathbf{y}_n.$$

Характеристики производительности

Найдя стационарное распределение состояний системы, можно вычислить следующие характеристики производительности системы.

Среднее число \hat{N} запросов, получающих обслуживание в системе в произвольный момент времени, вычисляется по формуле

$$\hat{N} = \sum_{n=1}^N n \pi_n \mathbf{e}.$$

Интенсивность T потока запросов, получивших обслуживание в системе, вычисляется по формуле

$$T = \sum_{n=1}^N \pi_n (I_{\bar{w}} \otimes \frac{1}{n} L_{N-n}(N, \tilde{S})) \mathbf{e}.$$

Вероятность потери произвольного запроса P_{loss} вычисляется по формуле

$$P_{loss} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^N \pi_n ([\sum_{k=N-n+1}^{\infty} (k - (N - n)) D_k] \otimes I_{M_n}) \mathbf{e}$$

или по формуле

$$P_{loss} = 1 - \frac{T}{\lambda},$$

где λ – средняя интенсивность поступления запросов, которая определяется как

$$\lambda = \theta \sum_{k=1}^{\infty} k D_k \mathbf{e}.$$

Здесь θ – вектор стационарного распределения управляющего процесса ВМАР-потока, который является единственным решением следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\theta \sum_{k=0}^{\infty} D_k \mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad \theta \mathbf{e} = 1.$$

Заключение

Исследовано стационарное распределение числа запросов в системе ВМАР/РН/1 с дисциплиной ограниченного разделения процессора и частичной потерей запросов в случае нехватки емкости прибора N . Распределение времени пребывания в системе произвольного запроса может быть найдено путем распространения техники анализа, использованной в работе [5]. Полученные результаты могут быть использованы для выбора оптимального значения емкости прибора и оптимизации доступа запросов в систему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дудина О. Дудин А. Дудин С. Построение процесса, описывающего состояние системы обслуживания ВМАР/РН/1 с ограниченным разделением процессора и дисциплиной частичного принятия запросов // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019), Саратов, 26–30 июня, 2019. Томск: Изд-во НТЛ, 2019. Часть 2. С. 159–164.
2. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М.: Техносфера. 2018. 564 с.
3. Asmussen S. Applied probability and queues // Springer Science & Business Media. 2008. V. 51.
4. Graham A. Kronecker products and matrix calculus with applications. Courier Dover Publications, 2018.
5. Dudin A.N. et al. Analysis of queueing model with processor sharing discipline and customers impatience // Operations Research Perspectives. 2018. V. 5. P. 245–255.

Построение процесса, описывающего состояние системы обслуживания ВМАР/РН/1 с ограниченным разделением процессора и дисциплиной частичного принятия запросов*

О.С. Дудина^{1,2}, А.Н. Дудин¹, С.А. Дудин^{1,2}

¹Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь

²Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

Исследуется однолинейная система массового обслуживания без входного буфера с дисциплиной ограниченного разделения процессора, групповым марковским входным потоком и частичным принятием запросов. Время обслуживания запросов имеет распределение фазового типа. Системы такого вида не были изучены в литературе. В данной работе решаются вопросы построения стохастического процесса, описывающего состояния системы.

Введение

Системы массового обслуживания с дисциплиной разделения процессора являются адекватными математическими моделями многих реальных систем (см. например, [1]). Классическая дисциплина разделения процессора предусматривает одновременное обслуживание всех запросов, находящихся в системе, со скоростью, обратно пропорциональной числу этих запросов. В применении этой дисциплины в некоторых телекоммуникационных сетях имеет смысл модифицировать данную дисциплину таким образом, что число одновременно обслуживаемых запросов ограничено некоторой константой (емкостью прибора). Допущение слишком большого числа запросов к одновременному обслуживанию может привести к очень низкой скорости обслуживания запросов, что является неприемлемым. Системы массового обслуживания с дисциплиной ограниченного разделения процессора предусматривают одновременное обслуживание в системе не более чем N запросов, где

* Работа выполнена при финансовой поддержке проекта университета РУДН 5-100 и гранта Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований Ф19КОР-001.

N – произвольное целое число, называемое емкостью системы. Такие системы в случае марковского потока поступления запросов рассматривались, например, в [2–4]. В данной работе мы рассматриваем систему с групповым марковским потоком поступления запросов, отличающегося от марковского потока поступления возможностью поступления запросов не по одному, а группами случайного размера. Модели с групповым поступлением запросов ранее рассматривались, например, в [5, 6]. Но в них изучался только существенно более простой случай группового стационарного пуассоновского потока и неограниченного деления процессора. В силу возможности поступления запросов группами и ограничения на число запросов, которые могут обслуживаться в системе совместно, необходимо оговорить стратегию принятия запросов в ситуации, когда в момент поступления группы емкость прибора еще не исчерпана, но число запросов в системе в сумме с размером поступившей группы превышает эту емкость. В данной работе мы ограничимся рассмотрением только стратегии частичного принятия: в описанной ситуации часть группы начинает обслуживание в системе, а оставшаяся часть (с числом запросов, соответствующим размеру превышения) теряется.

Математическая модель

Мы предполагаем, что система имеет один обслуживающий прибор, входного буфера нет. На вход системы поступает групповой марковский поток запросов (Batch Markov Arrival Process – ВМАР). Поступление запросов в ВМАР-потоке может происходить в моменты скачков управляющей неприводимой цепи Маркова $v_t, t \geq 0$, с конечным пространством состояний $\{0, \dots, W\}$. Время пребывания цепи в состоянии v имеет показательное распределение с параметром $\lambda_v, v = \overline{0, W}$. После истечения этого времени с вероятностью $p_k(v, v')$ цепь v_t переходит в некоторое состояние v' и при этом происходит генерация группы из k запросов, $k \geq 0$. ВМАР полностью описывается квадратными матрицами $D_k, k \geq 0$, порядка $\overline{W} = W + 1$, элементы которых задаются следующим образом:

$$(D_0)_{v,v'} = \begin{cases} -\lambda_v, & v = v', \\ \lambda_v p_0(v, v'), & v \neq v', \end{cases} \quad (D_k)_{v,v'} = \lambda_v p_k(v, v'), k \geq 1.$$

Более подробное определение ВМАР-потока, его свойства и обоснование его важности для описания коррелированных потоков в современных сетях связи даны, например, в [7–9].

Базовое время обслуживания отдельного запроса имеет РН-распределение (распределение фазового типа) с неприводимым представлением (β, S) . Это время можно интерпретировать как время, за которое цепь Маркова $\eta_t, t \geq 0$, имеющая конечное пространство состояний $\{1, \dots, M, M+1\}$, достигает единственного поглощающего состояния $M+1$, при условии, что начальное состояние этого процесса выбирается среди переходных состояний $\{1, \dots, M\}$ с вероятностями, определенными элементами вектора-строки $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_M)$. Интенсивности переходов процесса η_t в пределах множества $\{1, \dots, M\}$ определяются субгенератором S , а интенсивности переходов в поглощающее состояние (что приводит к завершению обслуживания) задаются элементами вектора столбца $S_0 = -Se$, где e – вектор-столбец, состоящий из единиц. Для получения более подробной информации о РН-распределении см. [10].

Предполагается, что зафиксирован порог $N, N \geq 1$. Допускается одновременное обслуживание в системе не более N запросов. При одновременном обслуживании n запросов интенсивности всех переходов цепи Маркова η_t уменьшаются в n раз, $n = \overline{1, N}$. Если в момент прихода группы запросов сумма числа запросов в группе и числа запросов на обслуживании не превосходит N , то вся группа принимается на обслуживание в системе. В противном случае, на обслуживание принимается только часть группы, после чего на обслуживании будет ровно N запросов, а оставшаяся часть будет потеряна.

Стационарное распределение числа запросов в системе

Пусть $n_t, n_t = \overline{0, N}$, есть число запросов в системе в момент $t, t \geq 0$. Процесс n_t не является марковским. Для исследования этого процесса применим метод дополнительных переменных. Построим многомерный марковский процесс, одной из компонент которого будет интересующий нас процесс n_t . Несложно понять, что этот многомерный процесс должен включать как компоненту управляющий процесс v_t ВМАР-

потока и процессы, описывающие фазы обслуживания имеющихся в системе запросов. Для задания процессов, описывающих фазы обслуживания, применим известный подход, учитывающий не фазы обслуживания всех текущих процессов обслуживания, а число запросов, находящихся в данный момент на той или иной фазе обслуживания.

Введем вспомогательный многомерный процесс, который описывает одновременное обслуживание до N запросов в аналогичной системе без деления процессора, в которой распределение времени обслуживания каждого запроса имеет распределение фазового типа с неприводимым представлением (β, S) . Пусть текущее число обслуживаемых запросов в такой системе $n_t, n_t = \overline{0, N}$, равно n и $h_t^{(m)}$ есть число процессов обслуживания, находящихся на фазе m , $h_t^{(m)} \in \{0, \dots, n\}$, $m = \overline{1, M}$,

$\sum_{m=1}^M h_t^{(m)} = n$. Рассмотрим векторный процесс $h_t = (h_t^{(1)}, \dots, h_t^{(M)})$, в кото-

ром компоненты $h_t^{(m)}$ перенумерованы в обратном лексикографическом порядке. Обозначим через $A_n(N, S)$ матрицу, элементы которой содержат интенсивности переходов процесса h_t , которые не приводят к изменению текущего числа n процессов обслуживания; через $L_{N-n}(N, \tilde{S})$ – матрицу, элементы которой содержат интенсивности переходов процесса h_t , когда число текущих процессов уменьшается на единицу, и через $P_n(\beta)$ – матрицу, элементы которой содержат вероятности переходов процесса h_t , когда число текущих процессов увеличивается на единицу. Здесь квадратная матрица \tilde{S} размера $M + 1$ задана формулой

$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_0 & O_M \end{pmatrix}$, где O_M – квадратная нулевая матрица размера M ,

а $\mathbf{0}$ – вектор-строка соответствующего размера. Формулы и алгоритмы для рекуррентного вычисления матриц $A_n(N, S)$, $L_{N-n}(N, \tilde{S})$ и $P_n(\beta)$ можно найти, например, в [11]. Число $M_n = C_{n+M-1}^{M-1}$ определяет число возможных состояний процесса h_t при числе одновременно идущих процессов равном n , $n = \overline{0, N}$.

Возвращаемся к исследованию системы с дисциплиной деления процессора. При сравнении с рассмотренной выше ситуацией мы видим

существенное отличие: процессы обслуживания запросов не являются независимыми. Однако следующие вспомогательные результаты могут быть использованы для анализа системы с дисциплиной разделения процессора.

Лемма 1. Пусть текущее число запросов на обслуживании есть $n, n = \overline{1, N}$. Тогда: 1) интенсивности переходов процесса h_i , которые не приводят к изменению текущего числа n процессов обслуживания, являются элементами квадратной матрицы $\frac{1}{n}A_n(N, S)$ размера M_n ; 2) интенсивности переходов процесса h_i , когда число текущих процессов уменьшается с n до $n-1$, являются элементами матрицы $\frac{1}{n}L_{N-n}(N, \tilde{S})$ размера $M_n \times M_{n-1}, n = \overline{1, N}$; 3) вероятности переходов процесса h_i , когда число текущих процессов увеличивается с n до $n+1$, являются элементами матрицы $P_n(\beta)$ размера $M_n \times M_{n+1}, n = \overline{0, N-1}$. Матрица $P_0(\beta)$ равна вектору β .

Доказательство леммы 1 прозрачно с учетом описанного выше смысла матриц, входящих в формулировку леммы, и сделанного предположения, что совместное обслуживание n запросов влечет замедление в n раз всех фаз обслуживания.

Легко видеть, что многомерный процесс

$$\zeta_t = \{n_t, v_t, h_t^{(1)}, \dots, h_t^{(M)}\}, t \geq 0,$$

описывающий динамику рассматриваемой системы, является цепью Маркова с непрерывным временем. Если $n_t = 0$, то компоненты $\{h_t^{(1)}, \dots, h_t^{(M)}\}$ отсутствуют в записи процесса.

Заключение

В данной работе построен стохастический процесс, описывающий состояния системы обслуживания ВМАР/РН/1 с ограниченным разделением процессора и дисциплиной частичного принятия запросов. Нахождение стационарного распределения данного процесса и основных характеристик производительности системы осуществляется в работе [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yashkov S.F., Yashkova A.S.* Processor sharing: A survey of the mathematical theory // *Automation and Remote Control*. 2007. V. 68. No. 9. С. 1662–1731.
2. *Dudin A.N. et al.* Analysis of queueing model with processor sharing discipline and customers impatience // *Operations Research Perspectives*. 2018. V. 5. P. 245–255.
3. *Dudin S. et al.* Analysis of a retrial queue with limited processor sharing operating in the random environment // *International Conference on Wired/Wireless Internet Communication*. Springer, Cham, 2017. P. 38–49.
4. *Samouylov K., Sopin E., Gudkova I.* Sojourn time analysis for processor sharing loss queueing system with service interruptions and MAP arrivals // *International Conference on Distributed Computer and Communication Networks*. Springer, Cham, 2016. P. 406–417.
5. *Avrachenkov K., Ayesta U., Brown P.* Batch arrival processor-sharing with application to multi-level processor-sharing scheduling // *Queueing Systems*. 2005. V. 50. No. 4. P. 459–480.
6. *Kim J., Kim B.* The processor-sharing queue with bulk arrivals and phase-type services // *Performance Evaluation*. 2007. V. 64. No. 4. P. 277–297.
7. *Chakravarthy S.R.* The batch Markovian arrival process: A review and future work // *Advances in probability theory and stochastic processes*. 2001. T. 1. С. 21–49.
8. *Vishnevskii V.M., Dudin A.N.* Queueing systems with correlated arrival flows and their applications to modeling telecommunication networks // *Automation and Remote Control*. 2017. V. 78. No. 8. P. 1361–1403.
9. *Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И.* Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М.: Техносфера, 2018. 564 с.
10. Neuts M.F. *Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach*. Courier Corporation, 1994.
11. *Kim C. et al.* Queueing system MAP|PH|N|N+R with impatient heterogeneous customers as a model of call center // *Applied Mathematical Modelling*. 2013. V. 37. No. 3. P. 958–976.
12. *Дудин С. Дудин А. Дудина О.* Нахождение характеристик производительности системы обслуживания ВМАР/РН/1 с ограниченным разделением процессора и дисциплиной частичного принятия запросов // *Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019)*, Саратов, 26–30 июня, 2019. Томск: Изд-во НТЛ, 2019. Часть 2. С. 153–158.

Эффективные методы снижения вероятности потерь заявок в системах с очередями и степенными хвостами распределений

Т.Р. Захаренкова, В.Н. Задорожный

Омский государственный технический университет, г. Омск, Россия

В начале 90-х годов прошлого столетия было обнаружено, что случайные процессы, описывающие трафик сетей передачи данных, имеют фрактальную структуру [1], которая существенно влияет на свойства очередей в сетевых устройствах. Основной проблемой проектирования сетей стала проблема потерь пакетов, так как фрактальный трафик не сглаживается на различных масштабах времени. Адекватными математическими моделями сетей и их компонентов, функционирующих в условиях сетевого трафика, являются системы (СМО) и сети (СеМО) массового обслуживания со степенными хвостами распределений [2], в частности СМО с распределением Парето с бесконечной дисперсией [3].

В качестве основных методов для уменьшения вероятностей потерь можно выделить следующие: увеличение размера буферной емкости, увеличение скорости работы узлов, увеличение количества параллельно работающих каналов и введение механизмов приоритетного обслуживания. Неэффективность увеличения размера буфера для уменьшения вероятности потерь объясняется тем, что с ростом размера буфера вероятность потерь уменьшается достаточно медленно – по степенному закону [4]. Уменьшение нагрузки также является малоэффективным [5]. Далее будет показано, что основными методами, позволяющими существенно снижать вероятность потерь заявок в системах со степенными хвостами распределений и эффективно решать проблему больших потерь, является увеличение числа обслуживающих каналов и введение дисциплины назначения абсолютных приоритетов.

Постановка задачи

Рассмотрим *фрактальные* системы массового обслуживания, которыми здесь и далее будем обозначать системы класса $G/G/n/m$, интервалы поступления заявок и/или время обслуживания которых принадлежат распределениям с тяжелыми хвостами и имеют бесконечную дисперсию. Фрактальными сетями назовем СеМО, которые состоят хотя

бы из одной фрактальной СМО. Классические СМО описываются распределениями с экспоненциальными хвостами. Распределения с тяжелыми хвостами имеют следующий вид:

$$P[x > t] = t^{-\alpha} L(t), \quad (1)$$

где $L(t)$ – медленно меняющаяся функция.

Одним из самых распространенных представителей класса распределений с тяжелыми хвостами (РТХ) является распределение Парето, которое также является представителем подкласса РТХ-распределений со степенными хвостами:

$$F(t) = 1 - (K/t)^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad K > 0, \quad t \geq K, \quad (2)$$

где α – параметр формы, при этом $1 < \alpha \leq 2$, K – параметр масштаба распределения Парето и одновременно наименьшее значение случайной величины.

Так как классические методы теории массового обслуживания не всегда пригодны для исследования современных сетей, то основным инструментом исследования фрактальных систем с очередями является имитационное моделирование (ИМ). При этом приходится сталкиваться с такими трудностями, как чрезвычайно низкая скорость сходимости оценок, длительные переходные процессы [6, 7] и смещение моментов реализуемых распределений [8, 9]. Для решения данных проблем, при исследовании вероятностей потерь во фрактальных СМО, были использованы методы высокоточного имитационного моделирования: множественные параллельные прогоны и генератор, устраняющий смещения моментов распределений с РТХ – ARAND, разработанный в [10].

Минимизация вероятностей потерь путем оптимального распределения числа каналов

Неэффективность стратегий увеличения размера буфера и уменьшения загрузки каналов с целью снижения вероятности потерь заявок во фрактальных СМО привела к исследованию стратегии увеличения числа каналов для борьбы с потерями заявок. В работе [11] аналитико-имитационным методом было получено выражение для расчета вероятности потерь P в n -линейной системе, основанное на аппроксимации P вероятностями состояний p_n соответствующей бесконечно-линейной системы:

$$P \sim p_n \sim c_0 e^{-C(n-\lambda b)^2}, \quad (3)$$

где c_0, C – некоторые константы, определяемые индивидуально для каждой отдельно взятой фрактальной системы; n – число состояний; λ – интенсивность входящего потока; b – среднее время обслуживания заявок. Выражение (3) позволяет говорить об эффективности стратегии увеличения числа каналов для борьбы с большими потерями заявок. Данное выражение также согласуется с теоретическим результатом, полученным в [12], который может применяться для расчета вероятностей потерь в классических СМО.

Выражение (3) выполняется и для узлов сетей с очередями, поэтому его можно использовать в качестве основы для разработки различных методов структурной и параметрической оптимизации фрактальных СеМО с целью обеспечения низкой вероятности потерь P . Теперь, задав маршрутную матрицу фрактальной сети, функции распределения времен обслуживания $B_i(t)$ в узлах i ($i = 1, \dots, M$) и входящие в сеть потоки заявок, можно перевести задачу оптимального распределения каналов в следующую аналитическую форму и с высокой точностью решить ее:

$$\sum_{i=1}^M c_{0i} e^{-C_i(n_i - \lambda, b_i)^2} \rightarrow \min, \quad (4)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^M n_i = N, \quad n_i > 0, \quad i = 1, \dots, M,$$

при этом буферные накопители в узлах СеМО отсутствуют.

Решением задачи (4) является оптимальное распределение (n_1, n_2, \dots, n_M) N каналов по M , при котором сумма аппроксимаций вероятностей потерь минимальна. Такое решение может быть получено с помощью известных градиентных методов. Полученное разработанным методом распределение зарекомендовало себя лучше, чем, например, равномерное распределение каналов по узлам или распределение каналов с одинаковыми нагрузками узлов сети [11].

Преимущество разработанного метода заключается в том, что существенно сокращаются временные затраты на моделирование фрактальных сетей, так как для получения вероятностей потерь при непосредственном моделировании отдельно взятых узлов при фиксированном n потребуется неприемлемо большое количество компьютерного времени.

Рассмотрим другой способ уменьшения вероятностей потерь во фрактальных СМО. Еще одним эффективным методом борьбы с поте-

рями заявок является введение дисциплины абсолютных приоритетов входящему потоку заявок. Такой способ уменьшения вероятностей потерь предполагает только затраты на программное обеспечение.

Введение дисциплины назначения абсолютных приоритетов большому числу подклассов заявок

В работе [13] с помощью разработанной метамодели было показано, что для многопоточковых СМО при определенных условиях эффективность введения именно дисциплины абсолютных приоритетов растет с увеличением числа потоков. Введение абсолютных приоритетов для большого числа подклассов заявок относительно их трудоемкости для фрактальных систем вида $M/Pa/1/m$ и $Pa/Pa/1/m$ позволило уменьшить вероятность потерь P , которая была оценена путем ИМ. В работе [14] отмечается, что полноценное исследование СМО, требующих варьирования законов распределения времени поступления и времени обработки заявок, возможно только при помощи имитационного моделирования.

В качестве примера (см. таблицу) рассмотрим эффективность введения абсолютных приоритетов для уменьшения вероятности потерь во фрактальных системах вида $Pa/Pa/1/10$. Число приоритетных классов составляет 1000; моделировалось 10^6 заявок.

**Расчет вероятностей потерь для СМО $Pa_1/Pa_2/1/10$
с параметрами входящего потока $K_1 = 10/3, \alpha_1 = 1,5$**

Параметры Pa_2	Коэффициент загрузки ρ	Значения оценки вероятности потерь	
		Режим	Значение P
$K_2 = 0,6, \alpha_2 = 1,25$	$\rho = 0.3$	Бесприоритетный	0.088203
		Относительные п.	0.074936
		Абсолютные п.	0.000000
$K_2 = 1, \alpha_2 = 1,25$	$\rho = 0.5$	Бесприоритетный	0.159006
		Относительные п.	0.154673
		Абсолютные п.	0.000000
$K_2 = 1,6, \alpha_2 = 1,25$	$\rho = 0.8$	Бесприоритетный	0.263948
		Относительные п.	0.22534
		Абсолютные п.	5.08E-05

По данным, представленным в таблице, видно, что введение дисциплины абсолютных приоритетов относительно трудоемкости заявок значительно снижает вероятность потерь заявок.

На рис. 1 приведена зависимость вероятности потерь от размера буфера m в системе M/Pa/1/m с дисциплиной абсолютных приоритетов.

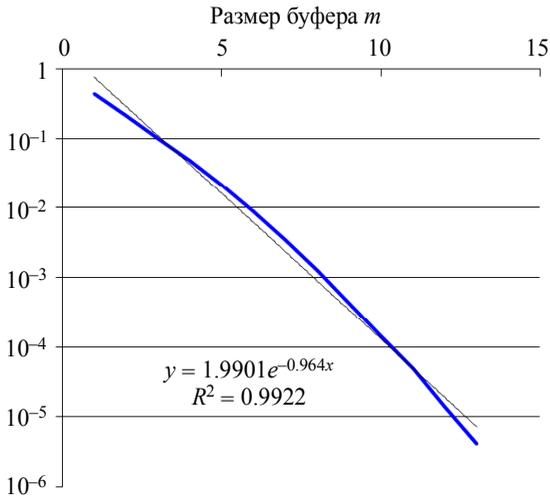


Рис. 1. Экспоненциальная зависимость P (вертикальная ось) от m (горизонтальная ось) в системе M/Pa/1/m при $K = 2.67$, $\alpha_1 = 1.5$, $\rho = 0.8$ и интенсивности $\lambda = 0.1$ для 10000 приоритетных классов и 10^7 заявок

Экспоненциальный характер представленной зависимости говорит об эффективности дисциплины абсолютных приоритетов.

Заключение

Было проведено исследование проблемы больших потерь заявок во фрактальных СМО, которое показало, что методы оптимального распределения числа каналов по узлам фрактальных сетей и метод назначения абсолютных приоритетов большому числу подклассов заявок входящего потока являются эффективными для снижения вероятностей потерь заявок.

Выбор оптимального разбиения и назначения абсолютных приоритетов подклассам входящего потока заявок, а также комбинирование методов увеличения числа каналов и назначения абсолютных приоритетов представляется перспективными для исследования дополнительного снижения вероятности потерь заявок во фрактальных СМО.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Leland W.E. et al.* On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic // ACM SIGCOMM'93. San Fransisco, 1993. P. 183–193.
2. *Zwart A.P.* Queueing Systems with Heavy Tails. Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2001. 227 p.
3. *Paxon V., Floyd S.* Wide area traffic: the failure of Poisson modeling // IEEE/ACM Transactions on Networking. 1995. V. 3. No. 3. P. 226–244.
4. *Park W., Willinger W.* Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation. N.Y.: Wiley-Interscience, 2000. 558 p.
5. *Erramilli A., Narayan O., Willinger W.* Experimental queueing analysis with long range dependent packet traffic // IEEE/ACM Transactions on Networking. 1996. V. 4. No. 2. P. 209–223.
6. *Gross D. et al.* Simulation input analysis: difficulties in simulating queues with Pareto service // Proceedings of the 34th Winter Simulation Conference: Exploring New Frontiers. San Diego, 2002. P. 407–415.
7. *Crovella M., Lipsky L.* Long-Lasting transient, conditions in simulation with heavy-tailed workloads // Proc 1997 Winter Simulation Conference. Atlanta, 1997. P. 1005–1013.
8. *Задорожный В.Н.* Очереди и степенные распределения: монография. Омск: ОмГТУ, 2016. 162 с.
9. *Рыжиков Ю.И.* Имитационное моделирование и метод квантилей // Имитационное моделирование. Теория и практика: сб. докл. Восьмой Всерос. науч.-практич. конф. (ИММОД-2017). СПб., 2017. С. 157–161.
10. *Задорожный В.Н.* Метод ARAND // Имитационное моделирование. Теория и практика: труды 7-й Всерос. науч.-практич. конф. М., 2015. С. 239–244.
11. *Zadorozhnyi V.N., Zakharenkova T.R.* Minimization of Packet Loss Probability in Network with Fractal Traffic // Communications in Computer and Information Science. 2017. V. 800. P. 168–183.
12. *Моисеев А.Н., Назаров А.А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2015. 240 с.
13. *Zadorozhnyi V.N., Zakharenkova T.R., Tulubaev D.A.* Estimation of Prioritized Disciplines Efficiency Based on the Metamodel of Multi-flows Queueing Systems // ITMM 2018. CCIS. 2018. V. 912. P. 290–304.
14. *Соснин В.В.* Моделирование дисциплины обслуживания с абсолютными приоритетами в GPSS World // Имитационное моделирование. Теория и практика: сб. докл. Третьей Всерос. науч.-практич. конф. (ИММОД-2007). СПб., 2007. Т. 1. С. 224–229.

Применение отрицательного биномиального распределения для аппроксимации стационарного распределения числа заявок в системе $MAR|GI|_{\infty}$

М.П. Зимин, А.Н. Моисеев, В.И. Бронер

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

В работе рассматривается система массового обслуживания $MAR|GI|_{\infty}$ с неограниченным числом приборов, входящим MAR потоком заявок и рекуррентным обслуживанием. Анализируя качество аппроксимации характеристик систем массового обслуживания, авторы обратили внимание на ряд работ [1, 2], в которых в качестве «естественного» результата для стационарного распределения числа заявок в системе с повторными вызовами получалась аппроксимация, основанная на гамма-распределении. Поскольку результирующее распределение должно быть дискретным, то авторы называли его дискретным гамма-распределением, а по сути имели дело с так называемым отрицательным биномиальным распределением [3] (далее – ОБР) с действительными положительными значениями параметра, задающего число ожидаемых успехов (в зарубежной литературе термин «дискретное гамма-распределение» достаточно распространен и имеет указанный смысл).

В настоящей работе проводится анализ применимости ОБР в качестве аппроксимации стационарного распределения числа заявок в системе $MAR|GI|_{\infty}$.

Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, входящим MAR -потоком заявок и рекуррентным обслуживанием. MAR -поток задан представлением (D_0, D_1) [4], где D_0 и D_1 – квадратные матрицы порядка M . Время обслуживания каждой заявки является случайной величиной с заданной функцией распределения $B(t)$.

Ставится задача определения распределения числа заявок в системе в стационарном режиме ее функционирования.

Результаты асимптотического анализа

В [5, 6] с применением асимптотического анализа установлено, что в условиях высокой интенсивности входящего потока стационарное распределение числа заявок в системе является гауссовским, получены параметры этого гауссовского распределения. Характеристическую функцию $h_2(u)$ стационарного распределения числа заявок в системе можно записать следующим образом:

$$h_2(u) = \exp \left\{ juN\lambda b + \frac{(ju)^2}{2} [N\lambda b + N\kappa\beta] \right\}, \quad (1)$$

где $\lambda = \theta \mathbf{D}_1 \mathbf{e}$, \mathbf{e} – вектор-столбец, состоящий из единиц, θ – вектор-строка, определяемая системой уравнений

$$\begin{cases} \theta(\mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1) = \theta, \\ \theta \mathbf{e} = 1; \end{cases}$$

$$b = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)] d\tau \text{ – среднее время обслуживания; } \beta = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)]^2 d\tau,$$

величина κ вычисляется как $\kappa = 2\mathbf{g}(\mathbf{D}_1 - \lambda \mathbf{I})\mathbf{e}$, а вектор-строка \mathbf{g} удовлетворяет линейному матричному уравнению $\mathbf{g}\mathbf{D} = \theta(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{D}_1)$. В данном случае входящий МАР-поток является высокоинтенсивным МАР-поток [6] и задан представлением $(N\mathbf{D}_0, N\mathbf{D}_1)$, а параметр N определяет его высокую интенсивность (предполагается, что $N \rightarrow \infty$). Средняя интенсивность (fundamental rate) такого потока равна $N\lambda$.

Функцию (1) можно рассматривать в качестве аппроксимации для характеристической функции стационарного распределения числа заявок в системе МАР|GI| ∞ при достаточно больших значениях параметра N , то есть в указанных условиях в качестве аппроксимации стационарного распределения числа заявок можно использовать нормальное распределение с математическим ожиданием $N\lambda b$ и дисперсией $[N\lambda b + N\kappa\beta]$ (точнее – его дискретный неотрицательный аналог).

В работе [6] также было проведено исследование данной системы с применением асимптотического анализа третьего порядка. В результате исследования была получена функция, которая, как было установлено, дает более точную, по сравнению с (1), аппроксимацию для характеристической функции числа заявок в системе в стационарном режиме.

Аппроксимация отрицательным биномиальным распределением

Отрицательное биномиальное распределение – это распределение дискретной случайной величины ξ , равной количеству неудач, произошедших в последовательности испытаний Бернулли с вероятностью успеха p до наступления r -го успеха. Для случаев действительных значений параметра r распределение можно переписать с использованием гамма-функции Эйлера в следующем виде:

$$P\{\xi = k\} = \frac{\Gamma(r+k)}{k! \Gamma(r)} p^r (1-p)^k.$$

Для использования ОБР в качестве аппроксимации для целей настоящей работы нам необходимо определить его параметры r и p таким образом, чтобы полученное распределение было максимально близко к реальному стационарному распределению числа заявок в системе. Для получения таких значений параметров очень удобно воспользоваться формулами для математического ожидания и дисперсии:

$$M\{\xi\} = \frac{r(1-p)}{p}, \quad D\{\xi\} = \frac{r(1-p)}{p^2},$$

приравняв их к соответствующим значениям матожидания и дисперсии числа заявок в системе $MAP|GI|_{\infty}$ в стационарном режиме. Однако, к сожалению, указанные параметры получить аналитически не представляется возможным (по крайней мере, дисперсию), поэтому в качестве таких «опорных» значений будем использовать матожидание и дисперсию приведенной в предыдущем разделе гауссовской аппроксимации (известно, что математическое ожидание для реального распределения совпадает с указанным). Таким образом, можно записать следующую систему уравнений относительно неизвестных параметров ОБР r и p :

$$\begin{cases} N\lambda b = \frac{r(1-p)}{p}, \\ N\lambda b + N\kappa\beta = \frac{r(1-p)}{p^2}, \end{cases}$$

где параметры N , λ , b , κ , β описаны выше. Решая эту систему, получаем следующие выражения для вычисления параметров r и p :

$$r = \frac{\lambda b}{\lambda b + \kappa\beta}, \quad p = \frac{N(\lambda b)^2}{\kappa\beta}. \quad (2)$$

Анализ области применимости ОБР-аппроксимации

Выполним исследование области применимости полученной аппроксимации в виде отрицательного биномиального распределения с параметрами (2). Выражения (2) получены на основе гауссовской аппроксимации, которая, в свою очередь, была получена в асимптотических условиях высокой интенсивности входящего потока, то есть при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, можно предполагать, что при увеличении параметра N в выражениях (2) ОБР-аппроксимация будет становиться точнее.

Ввиду отсутствия допредельных аналитических выражений для стационарного распределения числа заявок в системе $\text{MAP|GI}|_\infty$, анализ точности ОБР-аппроксимации будем выполнять путем ее сравнения с эмпирическим рядом распределения, построенным на основе результатов имитационного моделирования соответствующей системы массового обслуживания. Сравнение будем производить на основе вычисления расстояния Колмогорова между функциями распределений:

$$D_q = \sup_x |F_q(x) - F(x)|.$$

Здесь $F(x)$ – эмпирическая функция распределения; $F_q(x)$ – функция распределения для аппроксимации. Допустимой границей применимости аппроксимации будем считать значения $D_q \leq 0.05$. Также выполним аналогичный анализ области применимости и для описанных аппроксимаций второго (гауссовской) и третьего порядка [5, 6].

Пусть система $\text{MAP|GI}|_\infty$ задана следующими параметрами. $(\mathbf{MD}_0, \mathbf{MD}_1)$ есть представление входящего высокоинтенсивного MAP-потока [6] с матрицами

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} -8,05 & 4,90 & 0,80 \\ 0,80 & -1,10 & 0,07 \\ 2,40 & 1,50 & -28,50 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 0,05 & 2,10 & 0,20 \\ 0,00 & 0,20 & 0,03 \\ 3,60 & 1,00 & 20,00 \end{pmatrix}.$$

Длительности обслуживания на каждом приборе имеют гамма-распределение с параметрами $k = 0.5$, $\theta = 2$, где характеристическая функция гамма-распределения записана в виде $(1 - \theta it)^{-k}$.

Моделирование выполнено при различных значениях параметра высокой интенсивности N , результаты представлены на рис. 1, а сравнение полученных значений расстояний Колмогорова для разных аппроксимаций приведены в таблице, полужирным шрифтом выделены допустимые значения для расстояния Колмогорова согласно выбранному критерию ($D_q \leq 0.05$).

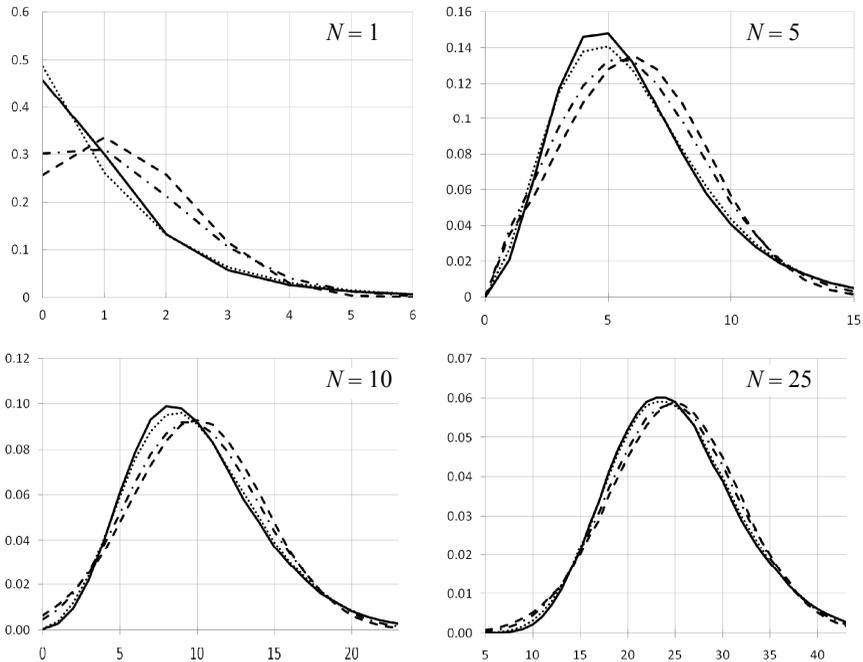


Рис. 1. Сравнение эмпирического ряда распределения (сплошная линия), ОБР-аппроксимации (точечная линия) и асимптотических распределений второго (пунктирная линия) и третьего (штрихпунктирная линия) порядков для стационарного распределения числа заявок системе при различных значениях интенсивности входящего потока N

Расстояние Колмогорова для различных аппроксимаций

Интенсивность входящего потока N	1	5	10	25
Гауссовская аппроксимация (второго порядка)	0.2451	0.0737	0.0451	0.0319
Аппроксимация третьего порядка	0.1816	0.0531	0.0319	0.0148
ОБР-аппроксимация	0.0495	0.0159	0.0088	0.0034

Как видим, аппроксимация, полученная с помощью ОБР, является более точной, чем аппроксимации второго (гауссовская) и третьего порядков. Получается, что ОБР-аппроксимация применима и при малых значениях параметра N , то есть может быть использована для систем типа $MAR|GI|_{\infty}$ при небольшой интенсивности входящего потока ($N \geq 1$).

Заключение

В работе выполнено исследование применимости отрицательного биномиального распределения в качестве аппроксимации для стационарного распределения числа заявок в системе массового обслуживания $MAR|GI|∞$. Проведен сравнительный анализ областей применимости различных аппроксимаций и установлено, что ОБР является наилучшей среди них.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fedorova E.* Quasi-geometric and gamma approximation for retrial queueing systems // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 123–136.
2. *Fedorova E., Voytikov K.* Retrial Queue M/G/1 with Impatient Calls Under Heavy Load Condition // Communications in Computer and Information Science. 2017. V. 800. P. 347–357.
3. *Вадзинский Р.Н.* Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001. 295 с.
4. *Lucantoni D.M.* New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
5. *Моисеев А.Н.* Асимптотический анализ системы массового обслуживания $MAR/GI|∞$ с высокоинтенсивным входящим потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3. С. 56–65.
6. *Моисеев А.Н., Назаров А.А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2015. 236 с.

Анализ процесса обслуживания по алгоритму с петлей с помощью остановленного случайного блуждания

А.В. Зорин

*Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, г. Н. Новгород, Россия*

Построение основной последовательности

Рассмотрим систему массового обслуживания с двумя конфликтными пуассоновскими потоками Π_1 и Π_2 . Интенсивность потока Π_j есть λ_j , $j = 1, 2$. Требования потока Π_j присоединяются к очереди O_j неограниченной емкости. Обслуживающее устройство имеет два состояния, $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$. При состоянии $\Gamma^{(j)}$ обслуживаются только требования потока O_j . Обслуживающее устройство проводит в состоянии $\Gamma^{(j)}$ неслучайное количество времени $T_j > 0$. По истечении этого времени состояние обслуживающего устройства меняется на $\Gamma^{(2)}$, если $j = 1$. Если же $j = 2$, то новым состоянием станет $\Gamma^{(1)}$ только в случае непустой очереди O_1 , иначе снова выбирается состояние $\Gamma^{(2)}$ и обслуживающее устройство пребывает в нем еще один промежуток времени длительностью T_2 , затем снова выбирается новое состояние так, как описано выше. Таким образом, выход и состояния $\Gamma^{(2)}$ происходит только после поступления нового требования по потоку Π_1 . Моменты окончания этих промежутков длительностей T_1 и T_2 будем называть моментами управления. Пусть τ_i – момент управления с номером $i = 0, 1, \dots$. За один промежуток обслуживания требований из очереди O_j могут быть обслужены несколько требований. Для задания вероятностных свойств процесса обслуживания будем использовать потоки насыщения [1]. Пусть при состоянии обслуживающего устройства $\Gamma^{(j)}$ поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ содержит $\ell_j > 0$ требований за промежуток T_j , а второй поток $\Pi_r^{\text{нас}}$, $r \neq j$, не содержит требований за то же время.

В качестве наглядного примера реальной системы обслуживания можно представлять себе перекресток с двумя перпендикулярными направлениями движения и светофором, выбирающим цвет в зависимости от дорожной ситуации. Если возможно присоединить желтый сигнал

(при котором машины могут проезжать) присоединить к соответствующему зеленому сигналу и если продление пропуска по низкоприоритетному направлению допускается только при отсутствии машин по перпендикулярному высокоприоритетному направлению, то мы получим вышеописанную абстрактную модель.

Используя методы из работы [2], представим данную систему обслуживания в виде абстрактной управляющей системы Ляпунова–Яблонского [3] и определим многомерную случайную последовательность

$$\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}), i = 0, 1, \dots\} \quad (1)$$

на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, где Γ_i – состояние обслуживающего устройства на промежутке $(\tau_{i-1}, \tau_i]$, $\kappa_{1,i}$ – число требований в очереди O_j в момент τ_i , $i = 1, 2, \dots$, Γ_0 – начальное состояний обслуживающего устройства в момент $\tau_0 = 0$. Пусть далее $\eta_{j,i}$ – число требований потока Π_j , поступивших промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$. Зависимость случайных величин от описания ω элементарного исхода будет подразумеваться, но явно не указывается. На множестве $\{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(2)}, \kappa_{1,i} > 0\}$ выполняются равенства $\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(1)}$, $\kappa_{1,i+1} = \max\{0, \kappa_{1,i} + \eta_{1,i} - \ell_1\}$, $\kappa_{2,i+1} = \kappa_{2,i} + \eta_{2,i}$, а величина $\eta_{j,i}$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_j T_1$, $j = 1, 2$. На множестве $\{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(1)}\} \cup \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(2)}, \kappa_{1,i} = 0\}$ имеем $\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(2)}$, $\kappa_{1,i+1} = \kappa_{1,i} + \eta_{1,i}$, $\kappa_{2,i+1} = \max\{0, \kappa_{2,i} + \eta_{2,i} - \ell_2\}$, а величина $\eta_{j,i}$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_j T_2$, $j = 1, 2$. В итоге, случайная последовательность (1) является однородной счетной цепью Маркова.

Пространством состояний процесса (1) является множество

$$S' = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}\} \times \{0, 1, \dots\} \times \{0, 1, \dots\}.$$

Рассмотрим множество

$$S_0 = \{(\Gamma^{(2)}, 0, x_2), x_2 = 0, 1, \dots\}.$$

Введем моменты остановки

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_{i+1} = \min\{k: k > \theta_i, (\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}) \notin S_0\}.$$

Введем следующие случайные величины и элементы:

$$\tilde{\Gamma}_i = \Gamma_{\theta_i}, \quad \tilde{\kappa}_{j,i} = \kappa_{j,\theta_i}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Новая последовательность

$$\{(\tilde{\Gamma}_i, \tilde{\kappa}_{1,i}, \tilde{\kappa}_{2,i}), \quad i = 0, 1, \dots\} \quad (2)$$

также является цепью Маркова. Чтобы получить переходные вероятности цепи Маркова (2), необходимо заметить следующее: на множестве $\{\omega: \tilde{\Gamma}_i = \Gamma^{(2)}, \tilde{\kappa}_{1,i} > 0\} \cup \{\omega: \tilde{\Gamma}_i = \Gamma^{(1)}, \tilde{\kappa}_{1,i} > 0\}$ выполняется равенство $\theta_{i+1} = \theta_i + 1$, в то время, как на множестве $\{\omega: \tilde{\Gamma}_i = \Gamma^{(1)}, \tilde{\kappa}_{1,i} = 0\}$ число продлений $\nu_{i+1} = \theta_{i+1} - \theta_i$ имеет геометрическое распределение, приписывающее значению $k = 1, 2, \dots$ вероятность $(1-p)p^{k-1}$, $p = e^{-\lambda_1 T_2}$. Более того, на множестве $\{\omega: \tilde{\Gamma}_i = \Gamma^{(1)}, \tilde{\kappa}_{1,i} = 0, \tilde{\kappa}_{2,i} = x_2\}$ величины $\kappa_{2,\theta_i}, \kappa_{2,\theta_i+1}, \dots, \kappa_{2,\theta_{i+1}}$ образуются по той же закономерности, что и число требований в системе типа $M/G/1/\infty$ с групповым обслуживанием и начальной очередью $\tilde{\kappa}_{2,i}$, а $\tilde{\kappa}_{2,i+1}$ является числом требований в очереди в момент остановки ν_{i+1} . Чтобы использовать данное наблюдение для анализа, введем вспомогательную последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин $\eta'_i, i = 1, 2, \dots$, распределенных по закону Пуассона с параметром $\lambda_2 T_2$, и случайные величины: $\kappa'_0 = b, \kappa'_{i+1} = \max\{0, \kappa'_i + \eta'_i - \ell_2\}$. Далее, введем семейство вероятностных производящих функций ($|z| \leq 1, k = 0, 1, \dots$)

$$\Phi_k(z, b) = \mathbf{E}(z^{\kappa'_k}), \quad \Phi(p, z; b) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k \Phi_k(z, b), \quad q_j = \exp\{\lambda_j(z-1)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} E(z_1^{\tilde{\kappa}_{1,i+1}} z_2^{\tilde{\kappa}_{2,i+1}} | \{\omega: \tilde{\Gamma}_i = \Gamma^{(1)}, \tilde{\kappa}_{1,i} = 0, \tilde{\kappa}_{2,i} = x_2\}) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-\lambda_1 T_2})^{k-1} \left(\sum_{b=1}^{\infty} z_1^b \frac{(\lambda_1 T_2)^b}{b!} e^{-\lambda_1 T_2} \right) \Phi_k(z_2; x_2) = \\ &= (e^{\lambda_1 T_2 z_1} - 1)(\Phi(p, z_2; x_2) - z_2^{x_2}). \end{aligned}$$

Наш основной результат относительно остановленного случайного блуждания содержится в следующей лемме.

Лемма 1. Пусть $\beta_j = \beta_j(p), j = 1, 2, \dots, \ell_2$, суть корни уравнения

$$z^{\ell_2} - q_2(z; T_2) = 0,$$

лежащие внутри единичного круга $|z| < 1$. Тогда

$$\Phi(p, z; b) = \frac{(z - \beta_1) \times \dots \times (z - \beta_{\ell_2})}{z^{\ell_2} - pq_2(z; T_2)} \times \left(\frac{1}{(1 - \beta_1) \times \dots \times (1 - \beta_{\ell_2})} + \sum_{j=1}^{\ell_2} \frac{(\beta_j)^{\ell_2-1}}{\prod_{s \neq j} (\beta_j - \beta_s)} \left(\frac{z^{b+1} - (\beta_j)^{b+1}}{z - \beta_j} - \frac{1 - (\beta_j)^{b+1}}{1 - \beta_j} \right) \right).$$

Обозначим

$$Q_i(r; x_1, x_2) = \mathbf{P}(\{\omega: \tilde{\Gamma}_i = \Gamma^{(r)}, \tilde{\kappa}_{1,i} = x_1, \tilde{\kappa}_{2,i} = x_2\}),$$

$$\Psi_i(z_1, z_2; r) = \sum_{x_1=1}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} z_1^{x_1} z_2^{x_2} Q_i(r; x_1, x_2), \quad r = 1, 2,$$

$$p = e^{-\lambda_1 T_2}, \quad \varphi_j(b; T) = \frac{(\lambda_j T)^b}{b!} e^{-\lambda_j T}, \quad b = 0, 1, \dots, \quad T > 0.$$

Лемма 2. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} & \Psi_{i+1}(z_1, z_2; 1) + \sum_{x_2=0}^{\infty} Q_{i+1}(1; 0, x_2) z_2^{x_2} = \\ & = q_2(z_2; T_1) \sum_{x_1=1}^{\ell_1-1} \sum_{x_2=0}^{\infty} Q_i(2; x_1, x_2) z_2^{x_2} \sum_{b=0}^{\ell_1-1-x_1} \varphi_1(b; T_1) (1 - z_1^{x_1+b-\ell_1}) + \\ & \quad + z_1^{-\ell_2} q_1(z_1; T_1) q_2(z_2; T_1) \Psi_i(z_1, z_2; 2), \\ & \Psi_{i+1}(z_1, z_2; 2) = q_1(z_1; T_2) z_2^{-\ell_2} q_2(z_2; T_2) \Psi_i(z_1, z_2; 1) + \\ & + \sum_{x_1=1}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\ell_2-1} Q_i(1; x_1, x_2) z_1^{x_1} q_1(z_1; T_2) \sum_{b=0}^{\ell_2-1-x_2} \varphi_2(b; T_2) (1 - z_2^{x_2+b-\ell_2}) + \\ & + (p^{-1} q_1(z_1; T_2) - 1) \sum_{x_2=0}^{\infty} Q_i(1; 0, x_2) z_2^{x_2} (z_2^{-x_2} \Phi(p, z_2; x_2) - 1). \end{aligned}$$

Лемма 1 впервые содержит случай $b > 0$. Ранее в литературе рассматривался только случай $b = 0$. Кроме того, другими исследователями изучалось предельное выражения для $(1-p)\Phi(p, z; b)$ при $p \rightarrow 1$, поскольку оно дает стационарное распределение вероятностей для случайного блуждания.

Теорема 1. Для существования стационарного распределения цепи Маркова

$$\{(\tilde{\Gamma}_i, \tilde{\kappa}_{1,i}), \quad i = 0, 1, \dots\} \quad (3)$$

необходимо выполнение неравенства $\lambda_1(T_1 + T_2) - \ell_1 \leq 0$ и достаточно выполнение неравенства $\lambda_1(T_1 + T_2) - \ell_1 < 0$.

Теорема 2. Пусть числа $\alpha_1 = 1, \alpha_1, \dots, \alpha_{\ell_1}$ суть нули уравнения $z^{\ell_1} - q_1(z; T_1 + T_2) = 0$, лежащие в единичном круге $|z| \leq 1$. Тогда стационарная вероятность $Q_1(1, 0)$ попадания процесса (3) в множество $\{\Gamma^{(1)}, 0, x_2, x_2 = 0, 1, \dots\}$ и стационарные вероятности $Q_1(2, b)$ попадания процесса (3) в множество вида $\{\Gamma^{(2)}, b, x_2, x_2 = 0, 1, \dots\}, b = 2, 3, \dots, \ell_1 - 1$, удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{x=1}^{\ell_1-1} Q_1(2, x) \sum_{b=0}^{\ell_1-1-x} \frac{(\lambda_1 T_1)^b}{b!} e^{-\lambda_1 T_1} (\alpha_w^{\ell_1} - \alpha_w^{x+b}) +$$

$$+ Q_1(1, 0) e^{-\lambda_1 T_2} \frac{e^{\lambda_1(T_1+T_2)(\alpha_w-1)} - e^{\lambda_1 T_1(\alpha_w-1)}}{1 - e^{-\lambda_1 T_2}} = 0, \quad w = 2, 3, \dots, \ell_1,$$

$$\sum_{x=1}^{\ell_1-1} Q_1(2, x) \sum_{b=0}^{\ell_1-1-x} \frac{(\lambda_1 T_1)^b}{b!} e^{-\lambda_1 T_1} (\ell_1 - x - b) +$$

$$+ Q_1(1, 0) e^{-\lambda_1 T_2} \frac{\lambda_1 T_2}{1 - e^{-\lambda_1 T_2}} = \frac{\ell_1 - \lambda_1(T_1 + T_2)}{2}.$$

Теорема 3. Для существования стационарного распределения цепи Маркова (2) необходимо выполнение неравенства

$$\frac{1}{2}(\lambda_2(T_1 + T_2) - \ell_2) + \frac{p}{1-p}(\lambda_2 T_2 - \ell_1)Q_1(1, 0) < 0.$$

Теоремы 1–3 характеризуют стационарный режим системы массового обслуживания по алгоритму с петлей в форме, удобной для численной проверки. Отметим появление в необходимом условии для стационарности цепи (2) стационарной вероятности $Q_1(1, 0)$. Дело в том, что эта стационарная вероятность также является стационарной вероятностью для состояния $(\Gamma^{(1)}, 0)$ цепи Маркова (3), а последовательность (3) управляет входящим потоком Π_2 . Пример множества допустимых интенсивностей λ_1 и λ_2 , при которых выполнено условие теоремы 2, приведен на рис. 1.

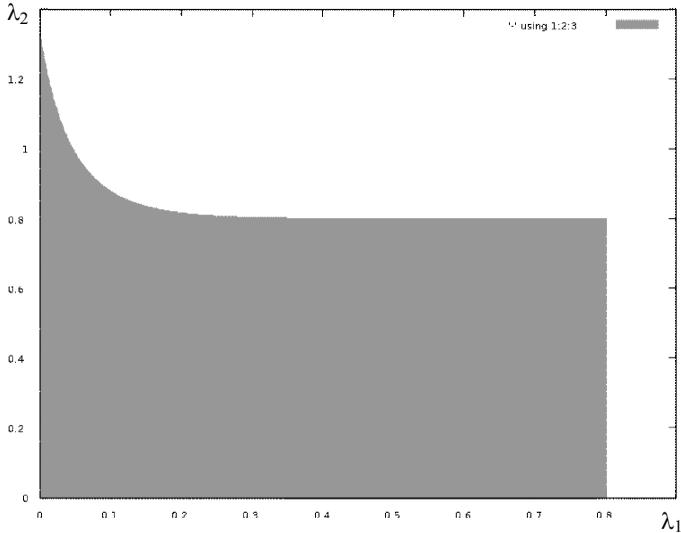


Рис. 1. Область существования стационарного режима для первого потока при значениях параметров $T_1 = 10$, $T_2 = 15$

Заключение

В работе продемонстрировано, что система массового обслуживания, управляемая алгоритмом с петлей, может быть эффективно изучена, если вложенный процесс близок к циклическому алгоритму. Это может быть достигнуто пропуском случайного числа рабочих тактов при некоторых состояниях прибора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоткин М.А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. I // Lietuvos Matematikos Rinkl̄nys. 1988. Т. 28. № 4. С. 783–794.
2. Зорин А.В. Кибернетическая модель циклического управления конфликтными потоками с последствием // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2014. Т. 156. No. 3. С. 66–75.
3. Ляпунов А.А., Яблонский С.В. Теоретические проллемы кибернетики // Проблемы кибернетики. Вып. 9. М.: Физматгиз, 1963. С. 5–22.

Ненадежная управляемая система массового обслуживания с резервным прибором¹

В.И. Клименок, А.Н. Дудин

Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь

В последние годы лазерные (FSO – Free Space Optics) технологии получили широкое распространение благодаря своим несомненным преимуществам. Основными преимуществами атмосферного оптического (лазерного) канала связи являются высокая пропускная способность и качество связи. Однако у систем оптической связи есть и недостатки, основным из которых является зависимость канала связи от погодных условий. Неблагоприятные погодные условия могут значительно уменьшить видимость и, таким образом, значительно снизить эффективность атмосферной оптической линии связи. Как упоминается в [1], одним из основных направлений создания сверхвысокой скорости и надежных беспроводных средств связи является разработка гибридных систем связи на основе лазерных и радиоволновых технологий. В отличие от канала FSO, радиоволновой канал IEEE802.11n не чувствителен к погодным условиям и может считаться абсолютно надежным. Однако он имеет более низкую скорость передачи по сравнению с FSO-каналом. В гибридной системе связи, состоящей из канала FSO и радиоволнового канала IEEE802.11n, последний можно рассматривать как резервный канал связи. Из-за высокой практической потребности в гибридных системах связи в последнее время появилось значительное число исследований этого класса систем. Некоторые результаты этих исследований представлены в [1–4].

В настоящей статье мы рассматриваем систему массового обслуживания, подходящую для моделирования гибридной связи при более общих, по сравнению с упомянутыми выше работами, предположениях о стратегии переключения между основным ненадежным и резервным надежным приборами. Рассматриваемая система может быть применена для моделирования гибридной системы связи, где радиоволновой канал считается абсолютно надежным и заменяет атмосферный оптический

¹ Исследование выполнено в рамках совместного гранта Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф18Р-136) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-57-00002).

канал только в тех случаях, когда последний прерывает функционирование вследствие неблагоприятных погодных условий. При наступлении благоприятных погодных условий информация снова начинает передаваться по каналу FSO. Для экономии энергии используется гистерезисная стратегия подключения и отключения резервного канала. Стратегия определяется двумя порогами, которые являются неотрицательными целыми числами. Если количество запросов в системе не превышает низшего порогового значения, резервный канал не подключается к передаче информации, даже если основной канал находится на ремонте. В этом случае система вообще не обслуживает запросы. Когда в системе накапливаются запросы в количестве, превышающем более высокий порог, они начинают обслуживаться резервным прибором до тех пор, пока не восстановится основной прибор. Если число запросов находится между порогами, система сохраняет предыдущий режим работы.

Математическая модель

Рассматривается система массового обслуживания с ожиданием, в которую поступает стационарный пуассоновский поток запросов интенсивности λ . Обслуживающее устройство состоит из двух обслуживающих приборов, один из которых (основной) является ненадежным, а другой (резервный) – абсолютно надежным. Последний находится в так называемом «холодном» резерве. Интерпретация: ненадежный прибор – это лазерный канал, а надежный – беспроводной радиоканал IEEE 802.11n. Времена обслуживания на приборах распределены по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2 .

Под влиянием погодных условий лазерный канал, т.е., основной прибор, может выходить из строя и сразу начинает восстанавливаться (ремонтиться). Поломки поступают на этот прибор в стационарном пуассоновском потоке с интенсивностью λ . Время ремонта распределено по экспоненциальному закону с параметром τ . Во время восстановления информация передается по резервному прибору, скорость передачи в котором гораздо ниже скорости передачи в основном канале (подчеркнем, что резервный прибор может быть вовлечен в обслуживание только во время ремонта основного прибора). В целях энергосбережения используется гистерезисная стратегия подключения резервного прибора, задаваемая двумя порогами – j_1 и j_2 , $0 \leq j_1 \leq j_2$.

При такой стратегии во время поломки основного прибора резервный прибор и соответственно вся система может находиться в двух со-

стояниях (режимах). При поломке основного прибора резервный включается, если число запросов в системе i такое, что $i > j_2 \geq 0$. При этом будем говорить, что система работает во 2-м режиме. Если во время работы резервного прибора во 2-м режиме и ремонта основного прибора число запросов в системе становится таким, что $i \leq j_1$, то резервный прибор отключается (заметим, что при таком сценарии резервный прибор может несколько раз включаться и отключаться во время ремонта основного прибора). При этом будем говорить, что система находится в 1-м режиме. Если в некоторый момент времени число i запросов в системе становится такое, что $j_1 < i \leq j_2$, то система работает в том режиме, в котором она работала до этого момента. Будем также считать, что в интервалах времени, когда работает основной прибор, система работает в 0-м режиме. После восстановления основного прибора резервный прибор отключается до следующей поломки основного прибора. Если в момент поступления запроса в систему основной прибор занят или находится на ремонте, то запрос становится в очередь в бесконечном буфере.

Стационарное распределение. Характеристики производительности

Процесс функционирования системы описывается цепью Маркова $\{i_t, n_t\}$, $t \geq 0$, где в момент времени t

i_t – число заявок в системе;

$$n_t = \begin{cases} 0, & \text{если система работает в режиме 0;} \\ 1, & \text{если система работает в режиме 1;} \\ 2, & \text{если система работает в режиме 2.} \end{cases}$$

Пространство состояний цепи Маркова $\{i_t, n_t\}$, $t \geq 0$ состоит из пар (i, n) , $i \geq 0$, $n = 0, 1, 2$.

Лемма 1. *Инфинитезимальный генератор Q цепи Маркова $\{i_t, n_t\}$, $t \geq 0$ имеет блочную трехдиагональную структуру $Q = (Q_{i,l})_{i,l \geq 0}$, где ненулевые блоки имеют следующий вид:*

$$Q_{0,0} = \begin{pmatrix} -(\lambda + h) & h \\ \tau & -(\lambda + \tau) \end{pmatrix}, \quad Q_{0,1} = \lambda I_2;$$

$$Q_{i,i-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{i,i} = \begin{pmatrix} -(\lambda + h + \mu_1) & h \\ \tau & -(\lambda + \tau) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, j_1};$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{Q}_{i,i+1} = \lambda M_2, \quad i = \overline{1, j_1 - 1}, \quad \mathcal{Q}_{j_1, j_1 + 1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}; \\
& \mathcal{Q}_{j_1 + 1, j_1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_{j_1 + 1, j_1 + 2} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, & j_2 = j_1 + 1; \\ \lambda M_3, & j_2 > j_1 + 1; \end{cases} \\
& \mathcal{Q}_{j_1 + 1, j_1 + 1} = \begin{pmatrix} -(\lambda + h + \mu_1) & h & 0 \\ \tau & -(\lambda + \tau) & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + \mu_2) \end{pmatrix}; \\
& \mathcal{Q}_{i, i-1} = \begin{pmatrix} \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_{i, i+1} = \lambda M_3, \\
& \mathcal{Q}_{i, i} = \begin{pmatrix} -(\lambda + h + \mu_1) & h & 0 \\ \tau & -(\lambda + \tau) & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + \mu_2) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{j_1 + 2, j_2 - 1}; \\
& \mathcal{Q}_{j_2, j_2 - 1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_{j_2, j_2 + 1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; \\
& \mathcal{Q}_{j_2, j_2} = \begin{pmatrix} -(\lambda + h + \mu_1) & h & 0 \\ \tau & -(\lambda + \tau) & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + \mu_2) \end{pmatrix}; \\
& \mathcal{Q}_{j_2 + 1, j_2} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_{j_2 + 2, j_2 + 2} = \lambda M_2; \\
& \mathcal{Q}_{j_2 + 1, j_2 + 1} = \begin{pmatrix} -(\lambda + h + \mu_1) & h \\ \tau & -(\lambda + \tau + \mu_2) \end{pmatrix}, \\
& \mathcal{Q}_0 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_1 = \begin{pmatrix} -(\lambda + h + \mu_1) & h \\ \tau & -(\lambda + \tau + \mu_2) \end{pmatrix}, \\
& \mathcal{Q}_2 = \lambda M_2, \quad i \geq j_2 + 2.
\end{aligned}$$

Следствие 1. Цепь Маркова $\{i_t, n_t\}$, $t \geq 0$ принадлежит классу квазитеплицевых цепей Маркова с непрерывным временем с несколькими (в данном случае с $j_2 + 1$) граничными состояниями, см. [5, 6].

Теорема 1. Цепь Маркова $\{i_t, n_t\}$, $t \geq 0$, эргодична тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\lambda < \frac{\tau\mu_1 + h\mu_2}{\tau + h}.$$

Введем обозначения для стационарных вероятностей состояний цепи

$$p(i, n) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{i_t = i, n_t = n\}, \quad i \geq 0, \quad n = 0, 1,$$

и для векторов этих вероятностей

$$\mathbf{p}_i = (p(i, 0), p(i, 1)), \quad i = \overline{0, j_1},$$

$$\mathbf{p}_i = (p(i, 0), p(i, 1), p(i, 2)), \quad i = \overline{j_1 + 1, j_2},$$

$$\mathbf{p}_i = (p(i, 0), p(i, 2)), \quad i > j_2 + 1.$$

Для вычисления стационарного распределения использовался устойчивый алгоритм, разработанный в [5] для квазитеплицевых цепей Маркова, адаптированный на случай нашей системы. Вычислив векторы \mathbf{p}_i , $i \geq 0$, стационарных вероятностей, можно вычислить также различные характеристики производительности системы, в частности среднее число и дисперсию числа заявок в системе, доли времени работы в различных режимах, среднее число переключений в единицу времени, а также решать задачу оптимизации.

Заключение

Рассмотрена ненадежная управляемая система массового обслуживания с гистерезисной стратегией подключения резервного прибора. Целью динамического управления является снижение энергозатрат при заданном качестве обслуживания. Процесс функционирования системы описан в терминах многомерной цепи Маркова, получено условие существования стационарного распределения, вычислено стационарное распределение и основные характеристики производительности системы. На основе этих характеристик может быть построен экономический критерий качества функционирования системы и решаться задача выбора оптимальных параметров гистерезисной стратегии управления, доставляющих минимум этому критерию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vishnevsky V., Kozyrev D., Semenova O.V.* Redundant queueing system with unreliable servers // Proceedings of the 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). Moscow, 2014. P. 383–386.
2. *Arnon S., Barry J., Karagiannidis G., Schober R., Uysal M.* Advanced Optical Wireless Communication Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
1. *Vishnevsky V.M., Semenova O.V., Sharov S.Yu.* Modeling and analysis of a hybrid communication channel based on free-space optical and radio-frequency technologies // Automation and Remote Control. 2013. V. 72 P. 345–352.
4. *Sharov S.Yu., Semenova O.V.* Simulation model of wireless channel based on FSO and RF technologies. Distributed Computer and Communication Networks. Theory and Applications (DCCN-2010). 2010. P. 368–374.
5. *Klimenok V.I., Dudin A.N.* Multi-dimensional asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains and their application in queueing theory // Queueing Systems. 2006. V. 54. P. 245–259.
6. *Вишнеvский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И.* Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М.: Техносфера, 2018. 564 с.

Нахождение ожидаемых доходов в G-сети с обходами заявками систем обслуживания

Д.Я. Копать, М.А. Маталыцкий

*Гродненский государственный
университет им. Я.Купалы, г. Гродно, Беларусь*

В связи с бурным развитием информационно-телекоммуникационных систем и сетей возникла необходимость создавать их адекватные математические модели. Одной из таких моделей является G-сеть, впервые введённая в рассмотрение E. Gelenbe в [1]. С тех пор в данную сеть включают системы с различными особенностями: с сигналами, со случайным временем ожидания положительных и отрицательных заявок, с ненадёжными линиями обслуживания, с групповым удалением заявок, с разнотипными заявками и сигналами и т.д. В стационарном режиме данные сети были рассмотрены Gelenbe и Forneau [2–5], а в переходном режиме – в статьях [6–8]. В данной статье рассмотрим новую особенность для G-сети с доходами – возможность обхода узлов положительными заявками. Для такой сети найдены приближённые выражения для ожидаемых доходов в переходном режиме, когда доходы от переходов являются случайными величинами (СВ) с заданными средними значениями. Отметим, что стационарные вероятности состояний этой сети были найдены в статье [9].

Постановка задачи

Рассмотрим G-сеть с n однолинейными системами массового обслуживания (СМО). В i -ю СМО поступает простейший поток положительных заявок с интенсивностью $\lambda_{0i}^+, i = \overline{1, n}$, и дополнительный простейший поток отрицательных заявок с интенсивностью $\lambda_{0i}^-, i = \overline{1, n}$. Поступившая в i -ю СМО положительная заявка с вероятностью f_i присоединяется к очереди в данной СМО и с вероятностью $1 - f_i$ не присоединяется к очереди, считаясь обслуженной. После завершения обслуживания заявка с вероятностью $p_{ij}^+, i, j = \overline{1, n}$, переходит в j -ю СМО как положительная заявка, с вероятностью $p_{ij}^-, i, j = \overline{1, n}$ – как отрица-

тельная, и с вероятностью $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n (p_{ij}^+ + p_{ij}^-)$, $i, j = \overline{1, n}$, уходит

из сети. Введём в рассмотрение следующие условные вероятности: φ_i – условная вероятность того, что положительная заявка, поступающая в i -ю СМО в момент t , не будет обслужена ни одной из СМО; α_i – условная вероятность того, что положительная заявка, обслуженная в i -й СМО, не будет больше обслуживаться ни в одной из СМО; ψ_{ij} – условная вероятность того, что положительная заявка, поступающая в i -ю СМО извне впервые получит обслуживание в j -й СМО; β_{ij} – условная вероятность того, что положительная заявка, обслуженная i -й СМО, перешедшая после этого в другую СМО как положительная заявка, впервые после этого получит обслуживание в j -й СМО, $i, j = \overline{1, n}$. По определению условных вероятностей справедливы сле-

дующие условия нормировки: $\alpha_i = 1 - \sum_{j=1}^n \beta_{ij}$, $\varphi_i = 1 - \sum_{j=1}^n \psi_{ij}$, $i = \overline{1, n}$. Отри-

цательная заявка, пришедшая в i -ю СМО уничтожает одну положительную заявку, если сеть непууста или не производит никаких действий в противном случае. По формуле полной вероятности получаем

$$\varphi_i = (1 - f_i) \left(p_{i0} + \sum_{j=1}^n (p_{ij}^+ + p_{ij}^-) \varphi_j \right), \quad i = \overline{1, n}; \quad (1)$$

$$\psi_{ij} = f_j + (1 - f_i) \sum_{l=1}^n p_{il}^+ \psi_{lj}, \quad i, j = \overline{1, n}; \quad (2)$$

$$\alpha_i = p_{i0} + \sum_{j=1}^n (p_{ij}^+ + p_{ij}^-) \varphi_j, \quad i, j = \overline{1, n}; \quad (3)$$

$$\beta_{ij} = \sum_{l=1}^n p_{il}^+ \psi_{lj}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Состояние сети описывается вектором:

$$\vec{k}(t) = (\vec{k}, t) = (k_1, k_2, \dots, k_n, t), \quad (5)$$

где k_i – количество положительных заявок в i -й СМО в момент времени t .

Обозначим через I_i – нулевой вектор размерности n , i -я компонента которого равна 1; $u(x)$ – единичная функция Хевисайда. Рассмотрим динамику изменения доходов i -й СМО сети, $i = \overline{1, n}$. Пусть доход этой системы в начальный момент времени был равен $v_{i0}, i = \overline{1, n}$. Найдём доход системы $V_i(t)$ в момент времени $t, i = \overline{1, n}$. Доход i -й СМО в момент времени $t + \Delta t$ можно записать в виде

$$V_i(t + \Delta t) = V_i(t) + \Delta V_i(t, \Delta t), \quad (6)$$

где $\Delta V_i(t, \Delta t)$ – изменение дохода i -й системы на интервале времени $[t, t + \Delta t), i = \overline{1, n}$. Рассмотрим всевозможные изменения дохода на интервале времени $[t, t + \Delta t)$:

1) с вероятностью $\lambda_{0j}^+ \psi_{ji} u(k_i) \Delta t + o(\Delta t)$ в очередь i -й СМО поступит положительная заявка и принесёт ей доход в размере r_{0i} , где r_{0i} – СВ с математическим ожиданием (м.о.) $a_{0i}, i = \overline{1, n}$;

2) с вероятностью $\lambda_{0i}^- u(k_i) \Delta t + o(\Delta t)$ i -ю СМО поступит отрицательная заявка и принесёт ей убыток в размере \bar{r}_{0i} , где \bar{r}_{0i} – СВ с м.о. $\bar{a}_{0i}, i = \overline{1, n}$;

3) с вероятностью $(\mu_i p_{i0} + \mu_i p_{ij}^+ \varphi_j) \Delta t + o(\Delta t)$ положительная заявка после обслуживания в i -й СМО больше не получит обслуживания в сети и принесёт ей убыток в размере R_{i0} , где R_{i0} – СВ с м.о. $b_{i0}, i = \overline{1, n}$;

4) с вероятностью $\mu_i \beta_{ij} u(k_j) \Delta t + o(\Delta t)$ положительная заявка после обслуживания в i -й СМО перейдёт в другие СМО в качестве положительной заявки, но впервые получит обслуживание в j -й СМО; в этом случае доход j -й СМО увеличится на r_{ij} , где r_{ij} – СВ с математическим ожиданием (м.о.) $a_{ij}, i = \overline{1, n}$; а доход i -й СМО уменьшится на эту величину;

5) с вероятностью $\mu_i p_{ij}^- \Delta t + o(\Delta t)$ после обслуживания в i -й СМО заявка перейдёт в качестве отрицательной заявки в j -ю СМО и уничто-

жит там одну положительную заявку, доход i -й СМО увеличится на \bar{r}_{ij} , где \bar{r}_{ij} – СВ с м.о. \bar{a}_{ij} , доход j -й СМО уменьшится на эту величину;

б) с вероятностью $1 - \left[\lambda^+ (1 - \varphi_i) + \lambda^- + \mu_i (1 - \beta_{ii}) u(k_i) \right] \Delta t + o(\Delta t)$ состояние сети за промежуток времени Δt не изменится.

Кроме того, за каждый малый промежуток времени Δt система S_i из-за нахождения в ней заявок, увеличивает свой доход на величину $r_i \Delta t$, где r_i – СВ с м. о. $M \{ r_i \} = c_i$, $i = \overline{1, n}$.

Используя формулу полной вероятности, среднее изменение дохода i -й СМО можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 M(\Delta V_i(t, \Delta t)) &= (a_{0i} + c_i \Delta t) (\lambda_{0j}^+ \Psi_{ji} u(k_i) \Delta t + o(\Delta t)) + \\
 &+ (\bar{a}_{0i} + c_i \Delta t) (\lambda_{0i}^- u(k_i) \Delta t + o(\Delta t)) + (b_{i0} + c_i \Delta t) ((\mu_i p_{i0} + \mu_i p_{ij}^+ \varphi_j) \Delta t + o(\Delta t)) - \\
 &- \sum_{j=1}^n (-a_{ij} + c_i \Delta t) (\mu_i \beta_{ij} u(k_j) \Delta t + o(\Delta t)) + \\
 &+ \sum_{j=1}^n (a_{ji} + c_i \Delta t) (\mu_j \beta_{ji} u(k_i) \Delta t + o(\Delta t)) + \\
 &+ \sum_{j=1}^n (-\bar{a}_{ji} + c_i \Delta t) (\mu_i p_{ij}^- \Delta t + o(\Delta t)) + \\
 &+ r_i \Delta t (1 - [\lambda^+ (1 - \varphi_i) + \lambda^- + \mu_i (1 - \beta_{ii}) u(k_i)]) \Delta t + o(\Delta t) = \\
 &= a_{0i} \lambda_{0j}^+ \Psi_{ji} u(k_i) \Delta t + \bar{a}_{0i} \lambda_{0i}^- u(k_i) \Delta t + b_{i0} (\mu_i p_{i0} + \mu_i p_{ij}^+ \varphi_j) \Delta t - \\
 &- \sum_{j=1}^n a_{ij} \mu_i \beta_{ij} u(k_j) \Delta t + \sum_{j=1}^n a_{ji} \mu_j \beta_{ji} u(k_i) \Delta t + r_i \Delta t + o(\Delta t). \quad (7)
 \end{aligned}$$

Пусть сеть функционирует в условиях высокой нагрузки, т.е. всегда в любой системе сети имеется хотя бы одна положительная заявка. Тогда (7) примет вид

$$\begin{aligned}
 M(\Delta V_i(t, \Delta t)) &= a_{0i} \lambda_{0j}^+ \Psi_{ji} \Delta t + \bar{a}_{0i} \lambda_{0i}^- \Delta t + b_{i0} (\mu_i p_{i0} + \mu_i p_{ij}^+ \varphi_j) \Delta t + \\
 &- \sum_{j=1}^n a_{ij} \mu_i \beta_{ij} \Delta t + \sum_{j=1}^n a_{ji} \mu_j \beta_{ji} \Delta t + r_i \Delta t + o(\Delta t). \quad (8)
 \end{aligned}$$

Пусть $v_i(t) = M\{V_i(t)\}$. С учётом данного обозначения и (8) формула (6) примет вид

$$v_i(t + \Delta t) = v_i(t) + a_{0i}\lambda_{0j}^+\Psi_{ji}\Delta t + \bar{a}_{0i}\lambda_{0i}^-\Delta t + b_{i0}(\mu_i p_{i0} + \mu_i p_{ij}^+\Phi_j)\Delta t + \\ - \sum_{j=1}^n a_{ij}\mu_i\beta_{ij}\Delta t + \sum_{j=1}^n a_{ji}\mu_j\beta_{ji}\Delta t + r_i\Delta t + o(\Delta t). \quad (9)$$

Перенося $v_i(t)$ в левую часть (9), разделив обе части на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = a_{0i}\lambda_{0j}^+\Psi_{ji} + \bar{a}_{0i}\lambda_{0i}^- + b_{i0}(\mu_i p_{i0} + \mu_i p_{ij}^+\Phi_j) + \\ - \sum_{j=1}^n a_{ij}\mu_i\beta_{ij} + \sum_{j=1}^n a_{ji}\mu_j\beta_{ji} + r_i. \quad (10)$$

Решение его является линейной функцией следующего вида:

$$v_i(t) = \left[a_{0i}\lambda_{0j}^+\Psi_{ji} + \bar{a}_{0i}\lambda_{0i}^- + b_{i0}(\mu_i p_{i0} + \mu_i p_{ij}^+\Phi_j) + \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^n a_{ij}\mu_i\beta_{ij} + \sum_{j=1}^n a_{ji}\mu_j\beta_{ji} + r_i \right] t + v_{i0}, i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Заключение

В статье исследована в переходном режиме G-сеть с доходами и возможностью обхода систем обслуживания положительными заявками. Найдены ожидаемые доходы систем сети в случае, когда доходы от переходов являются случайными величинами с заданными средними значениями.

Дальнейшие исследования в этом направлении будут связаны с нахождением ожидаемых доходов в такой сети методом последовательных приближений, позволяющим снять условие высокой нагрузки, а также для G-сети с обходами и ограниченным временем ожидания положительных заявок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe E.* Product form queueing networks with negative and positive customers // *J. Applied Probability*. 1991. V. 28. P. 656–663.
2. *Gelenbe E.* G-networks with signals and batch removal // *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 1993. V. 7. P. 335–342.
3. *Gelenbe E., Laped A.* G-networks with multiple classes of signals and positive customers // *European J. Operational Research*. 1998. V. 108. P. 293–305.
4. *Fourneau J.M.* G-network of unreliable nodes // *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 2016. V. 30. P. 361–378.
5. *Fourneau J.M., Tran M.A.* Network of queues with inert customers and signals // *Proceedings of the 7th International Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools, ICST*. P. 155–164.
6. *Матальцкий М.А., Науменко В.В.* Стохастические сети с нестандартными перемещениями заявок: моногр. Гродно: ГрГУ, 2016. 347 с.
7. *Копать Д.Я., Матальцкий М.А.* Исследование в нестационарном режиме сети с положительными и отрицательными заявками различных типов // *Информационные технологии и математическое моделирование: материалы XV Междунар. конф. 29 сентября – 3 октября 2017 г. Часть 1. Томск: ТГУ, 2017. С. 74–80.*
8. *Matalytski M., Kopats D.* Finding expected revenues in G-network with signals and customers batch removal // *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 2017. V. 31. No. 4. P. 561–575.
9. *Малинковский Ю.В., Никитенко О.А.* Стационарное распределение состояний сетей с обходами и отрицательными заявками // *Автоматика и телемеханика*. 2000. № 8. С. 79–85.

Классификация состояний марковской цепи в модели тандема с циклическим управлением с продлением

В.М. Кочеганов^{1,2}

¹ *Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Н. Новгород, Россия*

² *ООО МФИ Софт, г. Н. Новгород, Россия*

На данный момент существует несколько работ, посвященных тандемам перекрестков. В литературе, как правило, изучаются следующие виды алгоритмов управления: циклический алгоритм с фиксированной длительностью, циклический алгоритм с петлей, циклический алгоритм со сменой режимов и т.д. [1–8]. При построении математических моделей сетей массового обслуживания, и тандемов в частности, как правило, применяется описательный подход. При таком подходе задание входных потоков и алгоритмов обслуживания производится на содержательном уровне, законы распределения длительностей обслуживания требований считаются известными и задаются с помощью интегральной функции распределения времени обслуживания произвольного требования. При этом не удается решить проблему изучения выходящих потоков из узлов, а также рассмотреть сети с мгновенным перемещением требований между узлами и с зависимыми разнораспределенными длительностями обслуживания требований.

В настоящей работе применяется новый подход к построению вероятностных моделей тандемов конфликтных систем массового обслуживания с различными алгоритмами управления в узлах. В рамках этого подхода удастся решить проблему выбора описаний ω элементарных исходов случайного эксперимента и математически корректно определить случайный процесс, описывающий эволюцию рассматриваемой системы, а также решить перечисленные выше частные задачи. Основным результатом данной работы является выделение множества существенных состояний марковской цепи, описывающей динамику тандема. Другие результаты, вытекающие из предложенной математической модели, можно найти в работах [9–13].

Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида (рис. 1). Пусть в систему с одним обслуживающим устройством поступают потоки Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4 . Требования по потоку Π_j становятся в соответствующую очередь O_j с неограниченной вместимостью, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для $j \in \{1, 2, 3\}$ дисциплина очереди O_j , поддерживаемая устройством δ_j , имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди O_4 будет описана ниже.

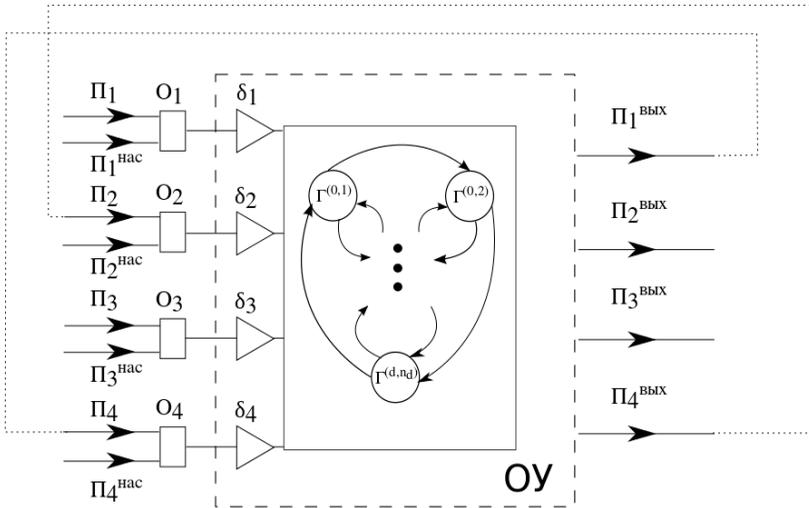


Рис. 1. Структурная схема системы обслуживания

Будем предполагать, что входные потоки Π_1 и Π_3 формируются внешней средой, которая имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков Π_1 и Π_3 формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки. Интенсивности соответствующих простейших потоков для Π_1 и Π_3 будем обозначать λ_1 и λ_3 , а распределение числа заявок в группе по потоку Π_j будем описывать производящей функцией

$$f_j(z) = \sum_{v=1}^{\infty} p_v^{(j)} z^v,$$

которая предполагается аналитической при $|z| < (1 + \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Величина $p_v^{(j)}$ определяет вероятность того, что по потоку Π_j число требований в группе равно $v, j \in \{1, 3\}$. Обслуженные требования потока Π_1 поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток Π_4 . Потоки Π_2 и Π_3 являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков. Заметим, что фиксированный интервал времени для обслуживания требований потока Π_3 может быть увеличен (так называемая фаза *продления*), если количество требований в очереди O_3 в момент принятия решения не превышает порог L .

В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из состояний конечного множества состояний

$$\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)}: k = 0, 1, \dots, d; r = 1, 2, \dots, n_k\}$$

с заданными натуральными числами d, n_0, n_1, \dots, n_d . В каждом состоянии $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающее устройство находится в течение времени $T^{(k,r)}$. Будем предполагать, что для каждого фиксированного $k^* \geq 1$ цикл состояний

$$\{\Gamma^{(k^*,r)}: r = 1, 2, \dots, n_{k^*}\} = C_{k^*}^N \cup C_{k^*}^O \cup C_{k^*}^I$$

может быть представлен как объединение непересекающихся множеств нейтральных, выходных и входных состояний соответственно. Для $k^* = 0$ состояния из множества $\Gamma = \{\Gamma^{(0,r)}: r = 1, 2, \dots, n_0\}$ будем называть состояниями продления. Более подробно алгоритм смены состояний обслуживающего устройства описан в статьях [12, 13].

Математическая модель

Описанная в предыдущем разделе на содержательном уровне система массового обслуживания должна рассматриваться как кибернетическая управляющая система обслуживания (см. работу [9]). Схема управляющей системы приведена на рис. 1. На схеме присутствуют следующие блоки: 1) внешняя среда с одним состоянием; 2) входные полюса первого типа – входные потоки $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$; 3) входные полюса второго типа – потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}, \Pi_2^{\text{нас}}, \Pi_3^{\text{нас}}, \Pi_4^{\text{нас}}$; 4) внешняя память – очереди O_1, O_2, O_3, O_4 ; 5) устройство по переработке информации внешней памяти – устройства по поддержанию дис-

циплины очереди $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$; 6) внутренняя память обслуживающего устройства – обслуживающее устройство (ОУ); 7) устройство по переработке информации во внутренней памяти – граф смены состояний; 8) выходные полюса $\Pi_1^{\text{вых}}, \Pi_2^{\text{вых}}, \Pi_3^{\text{вых}}, \Pi_4^{\text{вых}}$. Координатой блока является номер этого блока на схеме.

Введем следующие величины и элементы, а также укажем множества их возможных значений. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$ моментов смены состояний обслуживающего устройства. Обозначим Γ_i из множества Γ состояние обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_{i-1}, \tau_i]$, количество $\kappa_{j,i} \in Z_+$ требований в очереди O_j в момент времени τ_i , количество $\eta_{j,i} \in Z_+$ требований, поступивших в очередь O_j по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, количество $\xi_{j,i} \in Z_+$ требований по потоку насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ в течение времени $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, количество $\bar{\xi}_{j,i} \in Z_+$ обслуженных требований по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i, \tau_{i+1}], j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Пусть $\Gamma_i \in \Gamma$ и $\kappa_i = (\kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \kappa_{3,i}, \kappa_{4,i}) \in Z_+^4$. В работе [12] показано, что можно построить вероятностное пространство $(\Omega, F, \mathbf{P}(\cdot))$, на котором будет определена стохастическая последовательность $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$, соответствующая сформулированным выше предположениям. Более того, можно показать, что на этом пространстве последовательность $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ будет марковской.

Более детально математическая модель рассмотрена в работах [12, 13].

Классификация состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$

Теорема 1. Состояния марковской цепи $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ вида $(\Gamma^{(k,r)}, x)$, где $k = 0, 1, \dots, d, r = 1, 2, \dots, n_k, x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in Z_+^4$, такие, что

$$(x_1 > 0) \Rightarrow (x_4 \geq \ell(k, r, 1)); \quad (1)$$

$$x_3 \geq \max \left\{ 0, L + 1 - \sum_{s=1}^r \ell(k, s, 3) \right\}, \text{ если } k > 0; \quad (2)$$

$$x_3 \geq \max \left\{ 0, L + 1 - \max_{k=1,d} \sum_{s=1}^{n_k} \ell(k, s, 3) \right\}, \text{ если } k = 0; \quad (3)$$

и только они являются существенными.

Доказательство этой теоремы опирается на ряд лемм. Сначала доказывается существенность состояний вида

$$\Gamma^{(0,r)}, x^0, \quad x^0 = (0, 0, L+1, 0), \quad r = 1, 2, \dots, n_0. \quad (4)$$

Далее последовательно рассматриваются различные подмножества множества (1) – (3) теоремы 1, и доказывается их сообщаемость с состояниями из (4).

Из вида существенных состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ легко получается множество существенных состояний для марковской цепи $\{(\Gamma_i, \kappa_{3,i}); i \geq 0\}$, содержащей состояние только одной очереди O_3 . Для этого определим множества

$$S_{0,r}^3 = \left\{ \left(\Gamma^{(0,r)}, x_3 \right) : x_3 > L - \max_{k=1,2,\dots,d} \left\{ \sum_{t=1}^{n_k} \ell(k,t,3) \right\} \right\}, \quad 1 \leq r \leq n_0,$$

$$S_{k,r}^3 = \left\{ \left(\Gamma^{(k,r)}, x_3 \right) : x_3 > L - \sum_{t=1}^r \ell(k,t,3) \right\}, \quad 1 \leq k \leq d, \quad 1 \leq r \leq n_k.$$

Тогда можно показать, что множество существенных состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \kappa_{3,i}); i \geq 0\}$ будет иметь вид

$$\left(\bigcup_{1 \leq r \leq n_0} S_{0,r}^3 \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{1 \leq k \leq d \\ 1 \leq r \leq n_k}} S_{k,r}^3 \right).$$

Заключение

Проведенная классификация позволяет сузить множество состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ до множества существенных состояний. В дальнейшем исследовании, связанном с поиском необходимых и достаточных условий существования стационарного распределения, несущественные состояния могут быть отброшены, поскольку марковская цепь в них никогда не вернется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Haight F.A.* Mathematical Theories of Traffic Flow. New York: Academic, 1963.
2. *Inose H., Hamada T.* Road Traffic Control. Tokyo: Univ. of Tokyo Press, 1975.
3. *Drew D.R.* Traffic Stream Theory and Control. New York: McGraw-Hill, 1968.
4. *Fedotkin M.A.* On a class of stable algorithms for control of conflicting flows or arriving airplanes // Problems of Control and Information Theory. 1977. V. 6. No. 1. P. 13–22.

5. *Fedotkin M.A.* Construction of a model and investigation of nonlinear algorithms for control of intense conflict flows in a system with variable structure of servicing demands // *Lithuanian Mathematical J.* 1977. V. 7. No. 1. P. 129–137.
6. *Litvak N.V., Fedotkin M.A.* A probabilistic model for the adaptive control of conflict flows // *Automation and Remote Control.* 2000. V. 61. No. 5. P. 777–784.
7. *Proidakova E.V., Fedotkin M.A.* Control of output flows in the system with cyclic servicing and readjustments // *Automation and Remote Control.* 2008. V. 69. No. 6. P. 993–1002.
8. *Yamada K., Lam T.N.* Simulation analysis of two adjacent traffic signals // *Proceedings of the 17th winter simulation conference.* ACM, New York, 1985. P. 454–464.
9. *Кочеганов В.М., Зорин А.В.* Вероятностная модель тандема систем массового обслуживания с циклическим управлением с продлением // *Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Г.А. Медведева, Минск, 23–26 февр. 2015.* С. 94–99.
10. *Kochegarov V.M., Zorine A.V.* Low-priority queue fluctuations in tandem of queuing systems under cyclic control with prolongations // *Distributed Computer and Communication Networks. Ser. Communications in Computer and Information Science.* 2016. V. 601. P. 268–279.
1. *Kochegarov V.M., Zorine A.V.* Low-priority queue and server's steady-state existence in a tandem under prolongable cyclic service // *Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2016. Communications in Computer and Information Science.* 2016. V. 678. P. 210–221.
12. *Кочеганов В.М., Зорин А.В.* Достаточное условие существования стационарного режима низкоприоритетной очереди в тандеме систем массового обслуживания // *Вестник Волжской государственной академии водного транспорта.* 2017. № 50. С. 47–55.
13. *Кочеганов В.М., Зорин А.В.* Достаточное условие существования стационарного режима очередей первичных требований в тандеме систем массового обслуживания // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика.* 2018. № 2. С. 49–74.

Фазовые портреты и парциальные корреляторы потока агрегатов сетевого трафика

А. Краснов, Д. Никольский

*Отдел информационных технологий
ФГАОУ ДПО ЦРГОП и ИТ, г. Москва, Россия*

Для описания статистик различных состояний сетевого трафика используют множество моделей, основанных на методах корреляционного, спектрального, фрактального и динамического анализа [1, 2]. Однако результаты применения данных статистик для обнаружения сложных атак [3] в литературе не приведены, а были лишь высказаны предположения о возможной применимости рассмотренных методов. В [4] был предложен и исследован новый метод корреляционного анализа нестационарных сигналов, основанный на корреляторах оператора эволюции трафика, а также экспериментально показана их применимость для обнаружения сложных атак на основе байесовской классификации. Целью настоящей работы является развитие метода оператора эволюции трафика и описания его корреляторов по аналогии с описанием полевых корреляторов волновых пакетов квазиклассического электромагнитного поля [5].

Математическая модель потока агрегатов сетевого трафика

Будем использовать формат потокового протокола передачи (TCP) для извлечения значений управляющих бинарных полей (флагов) заголовков передаваемых пакетов данных. Двоичная последовательность флагов образует двоичный код возможных флаговых состояний пакета. Сгруппируем все пакеты данных, наблюдаемые на интервале ΔT , по флаговым состояниям, вычисляя для каждого j -го состояния число $N_{\Delta T}^j$ пакетов и их общую информационную емкость $I_{\Delta T}^j$ ($j = 1, 2, \dots, J$). Рассмотрим поток последовательных по дискретному времени $t_k = k\Delta T$ ($k = 1, 2, \dots, K$) сгруппированных пакетов (агрегатов) трафика, ставя в соответствие каждому k -му агрегату его обобщенную динамическую координату $X_{\Delta T}^j(t_k) = \sqrt{N_{\Delta T}^j(t_k)}$. Вычислим также по значениям обобщенных координат значения обобщенных скоростей $Y_{\Delta T}^j(t_k)$, ис-

пользуя преобразование Гильберта [2]. Сформируем далее дискретную статистическую модель потока агрегатов сетевого трафика в виде совокупности аналитических сигналов $F_{\Delta T}^j(t_k) = X_{\Delta T}^j(t_k) + iY_{\Delta T}^j(t_k)$, где $j = 1, 2, \dots, J$. Динамическую модель сетевого трафика определим на основе оператора его эволюции [4]

$$S(t_s, t_p) \sim F_{\Delta T}(t_s) F_{\Delta T}^+(t_p); \quad p < s; \quad s = 2, \dots, K, \quad (1)$$

где $F_{\Delta T}^+(t_p) = [F_{\Delta T}^{1*}(t_p), F_{\Delta T}^{2*}(t_p), \dots, F_{\Delta T}^{j*}(t_p), \dots, F_{\Delta T}^{J*}(t_p)]$ – транспонированный и комплексно-сопряженный вектор столбец $F_{\Delta T}(t_p)$. Если сигналами $F_{\Delta T}^j(t_k)$ ($j = 1, 2, \dots, J$) осуществить внешнюю модуляцию когерентного электромагнитного поля с амплитудой E_0 электрической напряженности и циклической оптической частотой ω , то получим поток его волновых пакетов

$$\begin{aligned} E_{\Delta T}^j(t) &= |E_0| [X_{\Delta T}^j(t) + iY_{\Delta T}^j(t)] \exp(-i\omega t) = \\ &= |E_0| |\alpha_j(t)| \exp\{-i[\omega t - \phi_0 - \phi_j(t)]\}, \end{aligned}$$

имеющих медленно изменяющиеся комплексные огибающие или оптические сигналы

$$F_{\Delta T}^j(t) = X_{\Delta T}^j(t) + iY_{\Delta T}^j(t) = |\alpha_j(t)| \exp\{i[\phi_j(t)]\},$$

где $|\alpha_j(t)| = \sqrt{(X_{\Delta T}^j(t))^2 + (Y_{\Delta T}^j(t))^2}$, а $\phi_j(t) = \arctg[Y_{\Delta T}^j(t)/X_{\Delta T}^j(t)]$ ($j = 1, 2, \dots, J$). При этом, в каждой j -й моде волнового пакета поля будет

находиться порядка $K_{\Delta T}^j \sim K_{\Delta T}^{\text{photon}} N_{\Delta T}^j / \sum_{j=1}^J N_{\Delta T}^j$ фотонов, где $K_{\Delta T}^{\text{photon}}$ – чис-

ло фотонов, приходящихся на волновой пакет, соответствующий агрегату.

Так, например, для оптического диапазона ($\omega \sim 10^{14}$ Гц) число фотонов, излучаемых непрерывным лазером с мощностью $P = |E_0|^2 / c = 10$ мВт в интервал времени агрегата $\Delta T = 50$ мс, будет порядка $K_{\Delta T}^{\text{photon}} = 10^{15}$.

Поэтому даже для незначительных весов $N_{\Delta T}^j / \sum_{j=1}^J N_{\Delta T}^j \sim 1/J$ флаговых

состояний ($J \sim 10^2$) числа $K_{\Delta T}^j$ фотонов будут большими ($\sim 10^{13}$), а поток

полученных волновых пакетов можно рассматривать как квазиклассическое поле и описывать динамику его огибающих как их фазовыми портретами [6], так и полевыми корреляторами [5].

Фазовые портреты и корреляторы потока агрегатов трафика

Действию оператора $S(t_s, t_p)$ эволюции из (1), сформированного для соответствующих огибающих электромагнитного поля, отвечает реальный физический объект: объемная голограмма, записанная с кодированной опорной волной [7]. Голограмма восстанавливает (путем резонансного брегговского рассеяния) оптический сигнал F_{out} как отклик на входной сигнал F_{in} [4, 7] в виде

$$F_{\text{out}} = S(t_s, t_p) F_{\text{in}} = F_{\Delta T}(t_s) F_{\Delta T}^+(t_p) F_{\text{in}}.$$

Тем самым, выходной сигнал F_{out} пропорционален сигналу $F_{\Delta T}(t_s)$ с коэффициентом $F_{\Delta T}^+(t_p) F_{\text{in}}$ перекрытия огибающей $F_{\Delta T}(t_p)$ кодированной опорной волны и огибающей F_{in} входного сигнала.

Введем по аналогии с [4, 5] нормированный парциальный коррелятор как среднее (по флаговым состояниям) значение физической величины, соответствующей оператору эволюции

$$H(t_s, t_p) = \frac{\text{Re} \langle F_{\Delta T}(t_s) F_{\Delta T}^+(t_p) \rangle}{\sqrt{F_{\Delta T}^+(t_s) F_{\Delta T}(t_s)} \sqrt{F_{\Delta T}^+(t_p) F_{\Delta T}(t_p)}}; \quad p < s, \quad (2)$$

где $\langle F_{\Delta T}(t_s) F_{\Delta T}^+(t_p) \rangle = \text{tr} [Q(t_s) F_{\Delta T}(t_s) F_{\Delta T}^+(t_p)]$, а действительные матричные элементы $q_{j,m}(t_s)$ флагового статистического оператора $Q(t_s)$ ($\text{tr}[Q(t_s)] = 1$; $s = 1, 2, \dots, K$) определяются значениями $I_{\Delta T}^j(t_s)$ и $I_{\Delta T}^m(t_s)$ нагрузок агрегатов для их различных состояний ($j, m = 1, 2, \dots, J$). Значения коррелятора $H(t_s, t_p)$ характеризуют степени когерентности [5] данных агрегатов.

Наиболее полная информация о временной структуре огибающих когерентного электромагнитного поля заключена в их фазовых портретах [6], формируемых в нашем случае в виде двумерных распределений вероятностей $w[X_{\Delta T}^j, Y_{\Delta T}^j]$ значений реальных и мнимых компонент поля для его различных мод ($j = 1, 2, \dots, J$). Ниже, для наглядности будем

использовать один фазовый портрет, формируемый в виде $w[X_{\Delta T}, Y_{\Delta T}]$,

$$\text{где } X_{\Delta T}(t) = \sum_{j=1}^J q_{j,j}(t) X_{\Delta T}^j(t), \quad Y_{\Delta T}(t) = \sum_{j=1}^J q_{j,j}(t) Y_{\Delta T}^j(t).$$

Численные эксперименты

В численных экспериментах исследовались 10-минутные записи сетевого трафика, снятые с одного из Frontend серверов к некоторому Web-сервису. Frontend сервера работала под управлением сервера Nginx. Использовались 6 флагов протокола TCP ($J = 64$). В качестве аппаратной поддержки применялась сетевая карта Qlogic с пропускной способностью 10 Гбит/с.

Исследовались распределения $w(H)$ значений корреляторов $H(t_s, t_{s-1})$ смежных агрегатов трафика при его различных состояниях: нормальном – Normal; при атаках TCP Connection Flood, Slow Loris, HTTP Get Flood. Данные атаки относятся к сложным атакам прикладного уровня модели взаимодействия открытых систем (OSI) [3].

На рис. 1 и 2 приведены двумерные срезы фазовых портретов $w[X_{\Delta T}, Y_{\Delta T}]$, построенных для различных интервалов ΔT формирования агрегатов (50 мс, 1 мс). Виден различный характер зависимости фазовых портретов от переменных $X_{\Delta T}$ и $Y_{\Delta T}$, свидетельствующий о разрушении когерентности потока агрегатов для малых ΔT : зависимость вырождается в зависимость только от $X_{\Delta T}$.

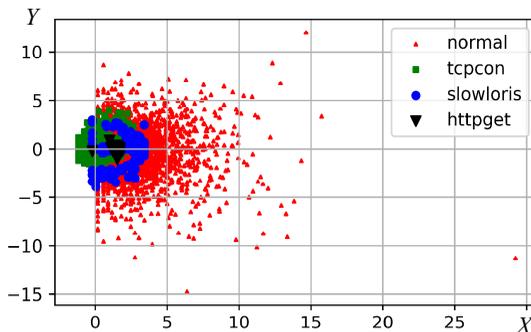


Рис. 1. Фазовые портреты $w[X_{\Delta T}, Y_{\Delta T}]$ сетевого трафика для $\Delta T = 50$ мс

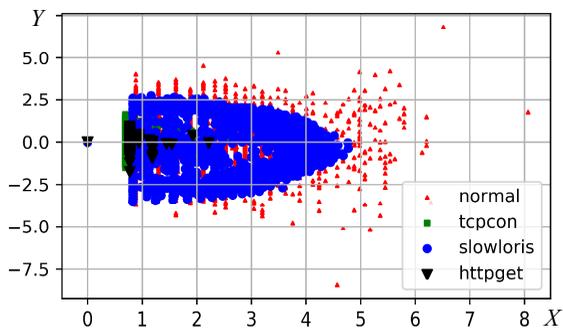


Рис. 2. Фазовые портреты $w[X_{\Delta T}, Y_{\Delta T}]$ сетевого трафика для $\Delta T = 1$ мс

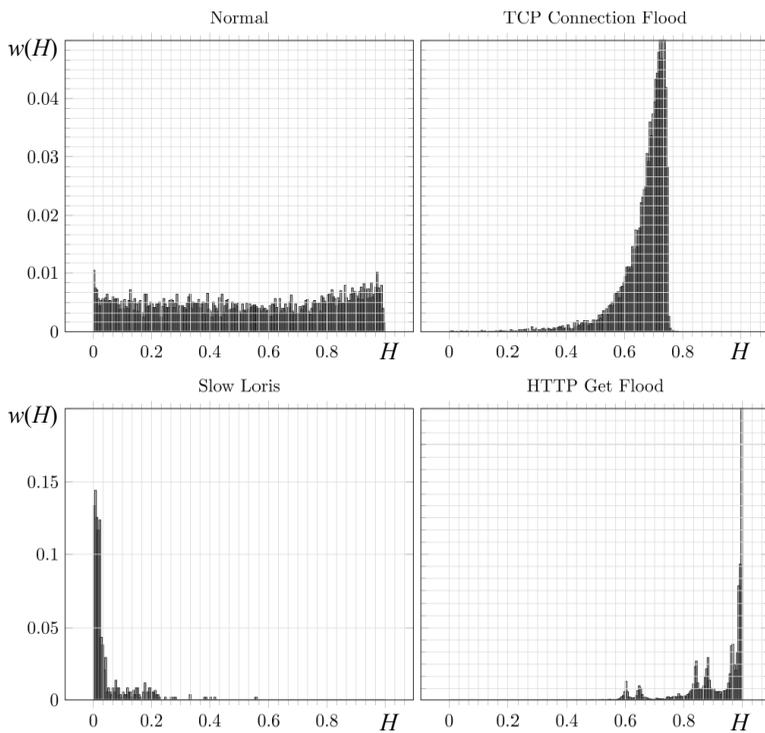


Рис. 3. Распределения значений коррелятора $H(t_s, t_{s-1})$ для разных состояний сетевого трафика ($\Delta T = 50$ мс)

На рис. 3 приведены распределения $w(H)$ положительных значений корреляторов для $\Delta T = 50$ мс. Наглядно видно значительное различие полученных распределений. Дополнительные численные эксперименты показали, что данное время является минимальным временем сохранения когерентности потока агрегатов сетевого трафика.

Заключение

Фазовые портреты и корреляторы агрегатов сетевого трафика позволяют различать его состояния для сложных атак, а следовательно, могут быть эффективно использованы для их обнаружения и байесовской классификации. В дальнейшем авторы намереваются провести исследование связи длительности ΔT апертury агрегатов трафика с производительностью используемых сетевых карт, принимающих пакеты данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bel'kov D., Edemskaya E., Nezamova L.* Staty'sty'chesky'j analy'z setevogo trafy'ka // Naukovi praci DonNTU. Seriya "Informaty'ka, kiberneti'ka ta obchy'slyuval'na tekhnika". 2011. Vy'pusk 13(185). С. 66–75.
2. *Kanarachos S. et al.* Anomaly detection in time series data using a combination of wavelets, neural networks and Hilbert transform // Information, Intelligence, Systems and Applications: Abstracts of 6th International Conference, Corfu, Greece: IEEE, 2015.
3. *Bhattacharyya D., Kalita J.* DDoS attacks: evolution, detection, prevention, reaction, and tolerance. Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group, 2016. 283 p.
4. *Krasnov A., Nadezhdin E., Nikol'skij D.* Pryamye i obratnye zadachi rekonstrukcii operatorov ehvolyucii v analize dinamiki mnogomernyh processov // СHebyshevskij sbornik. 2018. V. 19. No. 2. P. 217–233.
5. *Glauber R.* The quantum theory of optical coherence // Physical Review. 1963. V. 130. No. 6. P. 2529–2539.
6. *Krasnov A.E.* Fazovye portrety ogibayushchih kogerentnogo ehlektromagnitnogo polya na ploskosti: ispol'zovanie fazovyh portretov dlya optimal'nogo razlicheniya sostoyaniy polya // Radiotekhnika. 1997. No. 2. P. 49–54.
7. *Krasnov A.E.* Tolstoslojnye fazovye gologrammy, zapisannye s pomoshch'yu kodirovannyh opornyh voln // Kvantovaya Ehlektronika. 1977. V. 4. No. 9. P. 2011–2013.

Исследование переходного процесса адаптивного управления потоками неоднородных требований путем имитационного моделирования¹

Е.В. Кудрявцев, М.А. Федоткин

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

При создании интеллектуальных транспортных систем управления транспортными потоками на пересечении магистралей наряду с циклическими используются различные адаптивные алгоритмы. При соответствующих ограничениях математическими моделями таких систем являются многомерные марковские процессы. Аналитическое исследование многомерных марковских процессов и их характеристик представляет значительную сложность. Более того, как правило, не удается найти явный вид интересующих характеристик процесса. Поэтому для изучения и вычисления основных характеристик процесса могут быть использованы методы имитационного моделирования. Для исследования систем путем имитационного моделирования важным этапом является решение проблемы переходного процесса. Основным результатом работы заключается в изучении переходного процесса адаптивного управления конфликтными транспортными потоками неоднородных требований.

Построение математической модели

Данная работа связана с важной проблемой изучения свойств алгоритмов в интеллектуальных транспортных системах, которые управляют конфликтными потоками на пересечениях магистралей в крупных городах. Под конфликтностью понимается невозможность одновременного обслуживания требований из разных потоков. Рассматривается класс нециклических алгоритмов управления транспортными потоками. Алгоритмы управления потоками из этого класса учитывают не только длины очередей, но и очередности поступления автомобилей к стоп-линии перекрестка.

¹ Исследование выполнено в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности по заданию №2014/134 и при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-413-520005).

Перейдем к описанию вероятностной модели $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ рассматриваемой системы E управления потоками. Здесь Ω есть достоверный исход (событие), а через символ $\omega \in \Omega$ обозначим описание некоторого элементарного исхода системы E или случайного эксперимента. Описание ω определяет как процесс поступления требований в систему, так и процесс управления конфликтными потоками и обслуживания заявок. Множество наблюдаемых исходов эксперимента E составляет σ -алгебру \mathfrak{F} , на которой задана вероятностная функция $\mathbf{P}(\cdot): \mathfrak{F} \rightarrow [0, 1]$. Все случайные события, случайные величины и случайные элементы будем рассматривать на основном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}(\cdot))$. В некоторых случаях для сокращения записи не будем явно фиксировать символ ω как аргумент случайных величин или случайных элементов.

Транспортный поток состоит из разнотипных автомобилей, различающихся скоростью движения. Таким образом, рассматриваются входные потоки $\{\eta_j(\omega; t): t > 0\}$ с неоднородными требованиями, где $\eta_j(\omega; t)$ – число поступивших заявок на промежутке времени $[0, t)$ по потоку Π_j , $j = 1, 2$. В работе [1] предложен механизм образования таких потоков неоднородных требований. Показана возможность аппроксимации предложенных потоков неординарными пуассоновскими потоками. Это дает возможность рассматривать в качестве входных потоков два конфликтных неординарных пуассоновских потока Π_1 и Π_2 . В каждый вызывающий момент по потоку Π_j приходит k заявок с вероятностями $P_j(k)$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} P_j(1) &= (1 + \alpha_j + \alpha_j \beta_j / (1 - \gamma_j))^{-1} = p_j, \\ P_j(2) &= \alpha_j (1 + \alpha_j + \alpha_j \beta_j / (1 - \gamma_j))^{-1}, \\ P_j(k) &= \alpha_j \beta_j \gamma_j^{k-3} (1 + \alpha_j + \alpha_j \beta_j / (1 - \gamma_j))^{-1}, \quad k \geq 3, \end{aligned}$$

где α_j , β_j и γ_j – некоторые параметры распределения, физический смысл которых был определен в [1]. Интенсивность поступления вызывающих моментов по потоку Π_j равна λ_j . Свойства описанных потоков с неоднородными требованиями изучены в [1, 2]. В частности, была получена формула для вероятности $\mathbf{P}(\{\omega: \eta_j(\omega; t) = k\}) = P_j(t, k)$ поступления k требований за время $[0, t)$ по потоку Π_j .

Управление конфликтными потоками при обслуживании требований производится с помощью адаптивного нециклического алгоритма, подробное описание которого приведено в работе [3].

В изучаемой системе обслуживающим устройством (ОУ) является светофор, а требованиями – автомобили, подъезжающие к перекрестку.

Множество состояний светофора обозначим через $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}, \Gamma^{(4)}, \Gamma^{(5)}, \Gamma^{(6)}, \Gamma^{(7)}, \Gamma^{(8)}\}$. В работе [3] приведены описания всех состояний и длительности пребывания в них, которые выражаются через некоторые параметры $T_i, i = 1, \dots, 6$ и K_j, n_j . Постоянная $K_j \in \{1, 2, \dots\}$ определяет пороговую длину очереди по потоку Π_j . При этом если длина очереди в состоянии $\Gamma^{(3j-1)}$ превышает K_j , то продлеваем это состояние на T_{3j-1} , но не более n_j раз. В состояниях $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(3)}, \Gamma^{(4)}, \Gamma^{(6)}$ длительности пребывания постоянные и равны соответственно T_1, T_3, T_4, T_6 . Длительности пребывания в состояниях $\Gamma^{(7)}$ и $\Gamma^{(8)}$ являются случайными.

Будем рассматривать систему в моменты $\tau_i, i \geq 0$, или на промежутках $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Здесь величина τ_0 – начальный момент времени, а $\tau_i, i \geq 1$, являются моментами смены состояний обслуживающего устройства. Пусть $y_0 = (0, 0), y_1 = (1, 0), y_2 = (0, 1)$ и X – одномерная целочисленная неотрицательная решетка. Для нелокального описания [4] системы при $i = 0, 1, \dots$ введем следующие случайные величины и элементы:

- 1) $\Gamma_i(\omega) \in \Gamma$ – состояние ОУ на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$;
- 2) $\eta_{j,i}(\omega) \in X$ – число заявок потока Π_j , поступивших в систему за промежутки $[\tau_i, \tau_{i+1}), \eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i})$;
- 3) $\eta'_{j,i}(\omega)$ – случайный вектор, принимающий значение y_0 , если в систему на i -м такте $[\tau_i, \tau_{i+1})$ не поступило ни одной заявки, и значение y_j , если на i -м такте первой пришла заявка (или заявки) потока Π_j ;
- 4) $\kappa_{j,i}(\omega) \in X$ – число заявок потока Π_j , которые находятся в системе в момент $\tau_i, \kappa_i = (\kappa_{1,i}, \kappa_{2,i})$;
- 5) $\xi_{j,i}(\omega)$ – максимально возможное число заявок потока Π_j , которое система может обслужить на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1}), \xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i})$.

При $i = 1, \dots, 6$ примем следующие соотношения для параметров (длительностей) T_i :

$$T_{3j-2} = \mu_{j,1}^{-1} + l_{3j-2} \theta_j \mu_{j,1}^{-1}, \quad T_{3j-1} = l_{3j-1} \theta_j \mu_{j,2}^{-1}, \quad T_{3j} = l_{3j} \theta_j \mu_{j,2}^{-1},$$

где $l_{3j-2} \in X, l_{3j-1}, l_{3j} \in X \setminus \{0\}$. При этом постоянные величины $\mu_{j,1}$ и $\mu_{j,2}$ определяют длительности обслуживания одной заявки на первом (начало обслуживания) и втором (продолжение обслуживания) этапе соответственно. Величина $0 < \theta_j \leq 1$ обозначает часть обслуживания, которую необходимо пройти требованию, чтобы можно было начать обслуживать следующую заявку. В случае $\theta_j < 1$ одновременно может обслуживаться несколько требований.

Адаптивный алгоритм смены состояний обслуживающего устройства из множества Γ задается с помощью рекуррентного по $i = 0, 1, \dots$ со-

отношения $\Gamma_{i+1} = U(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i')$. Динамика длин очередей задается следующими рекуррентными соотношениями $\kappa_{i+1} = V(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i, \xi_i) = (v_1(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i, \xi_i), v_2(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i, \xi_i))$. Функции $U(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i')$ и $v_j(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i, \xi_i)$, $j = 1, 2$, определены в работе [3].

Таким образом, при $i = 0, 1, \dots$ получаем рекуррентное функциональное соотношение вида $(\Gamma_{i+1}, \kappa_{i+1}) = (U(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i'), V(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i, \xi_i))$. При этом векторная последовательность $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ определяет динамику состояний ОУ и изменение длин очередей. Свойства этой последовательности изучены в работах [3, 5].

Изучение переходного процесса

К сожалению, не удастся аналитически найти такие важные характеристики, как среднее время пребывания произвольного требования в системе и средние длины очередей по потокам. В первую очередь необходимо изучить указанные характеристики системы в стационарном режиме. Поэтому важной задачей является определение времени достижения стационарного режима и изучение переходного процесса.

Для решения поставленных вопросов реализована имитационная модель системы адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований в виде программы, написанной на языке C++. Имитационная модель позволяет не только изучить процесс управления и обслуживания неоднородных требований, но и получить реализации векторной последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$. Каждая реализация задается параметрами входных потоков $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \lambda_j$, параметрами системы $T_1, T_2, \dots, T_6, \mu_{j,1}, \mu_{j,2}, \theta_j, K_j, n_j$ и начальными значениями $\Gamma^{(r)}, x_1, x_2$ случайных элементов $\Gamma_0, \kappa_{1,0}, \kappa_{2,0}$.

При имитационном моделировании будем рассматривать две реализации $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ с начальными условиями двух типов: 1) $\Gamma^{(r)} = \Gamma^{(1)}, x_1 = 0, x_2 = 0$; 2) $\Gamma^{(r)} = \Gamma^{(1)}, x_1 = n_1 K_1, x_2 = n_2 K_2$. При этом используем одну и ту же реализацию входных потоков. Определим момент окончания переходного процесса следующим образом. Обозначим через $\gamma_j^0(m)$ и $\gamma_j^+(m)$ время пребывания в системе заявки с номером $m = 1, 2, \dots$ потока P_j , поступившей в систему после начала имитации, при нулевых начальных условиях и при смещенных начальных условиях второго типа. Величины

$$\bar{\gamma}_j^0(n) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \gamma_j^0(m), \quad \bar{\gamma}_j^+(n) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \gamma_j^+(m),$$

определяют выборочные средние времена пребывания в системе первых n требований потока Π_j . Если для параметра близости $\delta > 0$ выполнено условие

$$|\bar{\gamma}_j^+(n) - \bar{\gamma}_j^0(n)| \leq \delta \bar{\gamma}_j^0(n), \quad (1)$$

то на содержательном уровне можно считать, что начальные условия перестали влиять на выборочное среднее время пребывания для требований потока Π_j . В случае существования в системе стационарного режима величина $n_j(d)$ определяет номер требования, при котором условие (1) впервые выполнилось d раз подряд ($d = 1, 2, \dots$). Пусть t_j – момент окончания обслуживания требования с номером $n_j(d)$ потока Π_j и $t^* = \max(t_1, t_2)$. Будем считать, что t^* определяет момент окончания переходного процесса в системе для данной реализации входных потоков. Различным реализациям входных потоков соответствуют разные значения оценок для длительности переходного процесса системы. При использовании N реализаций входных потоков получим N значений оценок $t_1^*, t_2^*, \dots, t_N^*$ длительностей переходного процесса системы. Пусть $n_{j,1}^*, n_{j,2}^*, \dots, n_{j,N}^*$ – номера первых заявок потока Π_j , поступивших в систему после моментов $t_1^*, t_2^*, \dots, t_N^*$ достижения стационарного режима в реализациях. Тогда оценку $\bar{\gamma}_j^*$ среднего времени пребывания для требований потока Π_j будем вычислять по формуле

$$\bar{\gamma}_j^* = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \gamma_{j,m}^0(n_{j,m}^*).$$

Здесь $\gamma_{j,m}^0(m)$ – время пребывания в системе заявки с номером m потока Π_j , поступившей в систему после начала имитации, при нулевых начальных условиях в l -й реализации.

Имитационная модель позволяет найти зависимость длительности переходного процесса от параметров δ и d .

Заключение

Пусть $\gamma_j(m)$ – время пребывания заявки с номером m потока Π_j . Для системы адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований последовательности $\{\gamma_1(m): m \geq 1\}$, $\{\gamma_2(m): m \geq 1\}$ являются зависимыми и каждая из них составлена из зависимых случайных величин. Значения оценок среднего времени пребывания произвольной заявки потока Π_j в стационарном режиме, полученные по од-

ной реализации, могут сильно зависеть от реализации. Поэтому в качестве оценки для среднего времени пребывания разумно взять среднее время пребывания только первой заявки, поступившей по потоку Π_j после достижения стационарного режима, но в нескольких независимых реализациях.

Предлагаемый метод определения длительности переходного процесса адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований позволяет вычислять оценки для основных характеристик, не зависящие от конкретной реализации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fedotkin M.A., Fedotkin A.M., Kudryavtsev E.V.* Construction and analysis of a mathematical model of spatial and temporal characteristics of traffic flows // *Automatic Control and Computer Sciences*. 2014. 48. No 6. P. 358–367. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-71504-9>
2. *Fedotkin M.A., Fedotkin A.M., Kudryavtsev E.V.* Nonlocal description of the time characteristic for input flows by means of observations // *Automatic Control and Computer Sciences*. 2015. V. 49. No 1. P. 29–36. <https://doi.org/10.3103/S0146411615010034>
3. *Федоткин М.А., Кудрявцев Е.В.* Предельные свойства системы адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований // *Материалы Международной научной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-15)»*. М.: Техносфера, 2015, С. 233–240.
4. *Федоткин М.А.* Нетрадиционные проблемы математического моделирования экспериментов. М.: Физматлит, 2018. 424 с.
5. *Кудрявцев Е.В., Федоткин М.А.* Исследование математической модели адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2019. № 1. С. 23–37. <https://doi.org/10.26456/vtprmk522>

Исследование выходящего потока в RQ-системе M/GI/1¹

И.Л. Лапатин, А.А. Назаров

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Одной из основных характеристик, которая определяет качество функционирования системы связи, является число обслуженных заявок системой за единицу времени. Информация о характеристиках выходящего потока представляет большой практический интерес, так как часто выходящий поток одной системы является входящим для другой.

Результаты исследования выходящих потоков сетей массового обслуживания широко применяются при моделировании вычислительных систем, при проектировании сетей передачи данных и при анализе сложных многоэтапных производственных процессов.

Большинство работ в современной литературе посвящены исследованию числа заявок в системе [1–3]. Изучению выходящих потоков уделяется недостаточно внимания, так как на сегодняшний день не существует общих подходов к их исследованию. Основные результаты по аналитическому исследованию выходящих потоков в рамках классической теории были сделаны в середине XX в. [4–6]. Подробный обзор можно найти в работе [7].

Качественное изменение сетей связи влечет за собой разработку все новых математических моделей, способных адекватно описывать функционирование реальных систем. Наряду с этим должны быть разработаны современные методы исследования выходящих потоков предложенных моделей. Поэтому проблема модификации имеющихся и разработка новых методов исследования выходящих потоков является актуальной и современной.

В данной работе основным методом исследования является метод асимптотического анализа, который позволяет в RQ-системе M/GI/1 найти вид предельного распределения числа событий в выходящем потоке, наступивших за время t в асимптотическом условии большой задержки заявок на орбите.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00277.

Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим RQ-систему, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Заявка входящего потока, поступая в систему и обнаруживая прибор свободным, занимает его, а прибор начинает обслуживание в течение случайного времени с функцией распределения $B(x)$. Если же заявка, поступая в систему, обнаруживает прибор занятым, она мгновенно уходит на орбиту и осуществляет там случайную задержку в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром σ .

Обозначим: $i(t)$ – число заявок в системе в момент времени t ; $k(t)$ – состояние прибора: 0 – прибор свободен, 1 – прибор занят обслуживанием заявки входящего потока; $z(t)$ – остаточное время обслуживания заявки на приборе, то есть продолжительность интервала от момента времени t до окончания времени обслуживания заявки; данная компонента имеет смысл только для $k(t) = 1$; $m(t)$ – число событий в выходящем потоке, наступивших за время t .

Рассмотрим марковский процесс

$$\{k(t) = 0, i(t), m(t)\}, \{k(t) = 1, i(t), z(t), m(t)\}$$

с переменным числом компонент. Для распределения вероятностей

$$P\{k(t) = 0, i(t) = i, m(t) = m\} = P_0(i, m, t),$$

$$P\{k(t) = 1, i(t) = i, z(t), m(t) = m\} = P_1(i, m, z, t)$$

составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0(i, m, t)}{\partial t} &= -(\lambda + i\sigma)P_0(i, m, t) + \frac{\partial P_1(i+1, 0, m-1, t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial P_1(i, z, m, t)}{\partial t} &= -\lambda P_1(i, z, m, t) + \frac{\partial P_1(i, z, m, t)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(i, 0, m, t)}{\partial z} + \\ &+ \lambda P_0(i-1, m, t) + i\sigma P_0(i, m, t)B(z) + \lambda P_1(i-1, z, m, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j = \sqrt{-1}$,

$$H_0(u_1, u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{ju_i} e^{jum} P_0(i, m, t),$$

$$H_1(u_1, z, u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{ju_i} e^{jum} P_1(i, z, m, t).$$

Тогда систему (1) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0(u_1, u, t)}{\partial t} &= -\lambda H_0(u_1, u, t) + j\sigma \frac{\partial H_0(u_1, u, t)}{\partial u_1} + e^{-ju_1} e^{ju} \frac{\partial H_1(u_1, 0, u, t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial H_1(u_1, z, u, t)}{\partial t} &= \lambda e^{ju_1} H_0(u_1, u, t) B(z) - j\sigma \frac{\partial H_0(u_1, u, t)}{\partial u_1} B(z) + \\ &+ \frac{\partial H_1(u_1, z, u, t)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(u_1, 0, u, t)}{\partial z} + \lambda (e^{ju_1} - 1) H_1(u_1, z, u, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Асимптотический анализ

Систему дифференциальных уравнений в частных производных (2) будем решать методом асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \rightarrow 0$).

Теорема 1. Пусть $m(t)$ – число событий в выходящем потоке, наступивших за время t в RQ -системе $M/GI/1$. Тогда в условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \rightarrow 0$) асимптотическое распределение вероятностей процесса $m(t)$ совпадает с распределением вероятностей числа событий, наступивших в рекуррентном потоке, длины интервалов которого представляют собой сумму экспоненциальной величины с параметром $\lambda + \kappa$, где λ – интенсивность входящего потока, κ – нормированное среднее число заявок в системе, и случайной величины с функцией распределения $B(x)$.

Доказательство. Обозначим

$$\varepsilon = \sigma, u_1 = \varepsilon w, F_0(w, u, t, \varepsilon) = H(u_1, u, t), F_1(w, z, u, t, \varepsilon) = H(u_1, z, u, t),$$

тогда система (2) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0(w, u, t, \varepsilon)}{\partial t} &= -\lambda F_0(w, u, t, \varepsilon) + j \frac{\partial F_0(w, u, t, \varepsilon)}{\partial w} + e^{-j\varepsilon w} e^{ju} \frac{\partial F_1(w, 0, u, t, \varepsilon)}{\partial z}, \\ \frac{\partial F_1(w, z, u, t, \varepsilon)}{\partial t} &= \lambda e^{j\varepsilon w} F_0(w, u, t, \varepsilon) B(z) - j \frac{\partial F_0(w, z, u, t, \varepsilon)}{\partial w} B(z) + \\ &+ \frac{\partial F_1(w, z, u, t, \varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w, 0, u, t, \varepsilon)}{\partial z} + \lambda (e^{j\varepsilon w} - 1) F_1(w, z, u, t, \varepsilon). \end{aligned} \quad (3)$$

Делая предельный переход в полученной системе (3), имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0(w, u, t)}{\partial t} &= -\lambda F_0(w, u, t) + j \frac{\partial F_0(w, u, t)}{\partial w} + e^{ju} \frac{\partial F_1(w, 0, u, t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial F_1(w, z, u, t)}{\partial t} &= \lambda F_0(w, u, t) B(z) - j \frac{\partial F_0(w, z, u, t)}{\partial w} B(z) + \\ &+ \frac{\partial F_1(w, z, u, t)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w, 0, u, t)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение системы (4) будем искать в виде

$$F_0(w, u, t) = \Phi(w) F_0(u, t), \quad F_1(w, z, u, t) = \Phi(w) F_1(z, u, t). \quad (5)$$

Здесь функция $\Phi(w)$ имеет смысл асимптотического приближения характеристической функции числа заявок в системе в условии большой задержки на орбите. Подставляя (5) в систему (4) и разделив обе части уравнений на $\Phi(w)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0(u, t)}{\partial t} &= -\lambda F_0(u, t) + j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} F_0(u, t) + e^{ju} \frac{\partial F_1(0, u, t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial F_1(z, u, t)}{\partial t} &= \lambda F_0(u, t) B(z) - j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} F_0(u, t) B(z) + \\ &+ \frac{\partial F_1(z, u, t)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(0, u, t)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Нетрудно показать, что $\Phi(w) = \exp(j\kappa w)$. Здесь κ имеет смысл нормированного среднего числа заявок в системе. В этом случае из системы (6) получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0(u, t)}{\partial t} &= -(\lambda + \kappa) F_0(u, t) + e^{ju} \frac{\partial F_1(0, u, t)}{\partial z}; \\ \frac{\partial F_1(z, u, t)}{\partial t} &= (\lambda + \kappa) F_0(u, t) B(z) + \frac{\partial F_1(z, u, t)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(0, u, t)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (7)$$

которая совпадает с системой уравнений для распределения вероятностей числа событий, наступивших в рекуррентном потоке [8], длины интервалов которого представляют собой сумму экспоненциальной величины с параметром $\lambda + \kappa$ и случайной величины с функцией распределения $B(x)$.

Заключение

Исследование выходящего потока рассматриваемой RQ-системы проводится методом асимптотического анализа в условии большой задержки заявок на орбите. В результате проведенных исследований было получено, что выходящий поток рассматриваемой системы является рекуррентным, длины его интервалов представляют собой сумму экспоненциальной величины с параметром $\lambda + \kappa$ (λ – интенсивность входящего потока, κ – нормированное среднее число заявок в системе), и случайной величины с функцией распределения $B(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 2008. 318 p.
2. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial Queues. London: Chapman and Hall, 1997.
3. *Nazarov A., Paul S., Gudkova I.* Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition // Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation, ECMS, Budapest, 2017. P. 687–693.
4. *Burke P.J.* The output of queueing systems // Operations Research. 1956. V. 4. P. 699–704.
5. *Reich E.* Waiting times when queues are in tandem // Ann. Math. Statist. 1957. V. 28. No. 3. P. 768.
6. *Finch P.D.* The output process of the queueing system M|G|1 // J. Roy. Statist. Soc. 1959. V. 21. No. 2. P. 375–380.
7. *Лапатын И.Л.* Исследование выходящих потоков моделей массового обслуживания с неограниченным числом приборов: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Томский государственный университет. Томск, 2012. 138 с.
8. *Лопухова С.В.* Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Томский государственный университет. Томск, 2008. 15 с.

О задаче включения медленного сервера

Э.В. Мехбалиева

*Сумгаитский государственный университет,
г. Сумгаит, Азербайджанская Республика*

В компьютерных и телекоммуникационных системах приходится использовать гетерогенные серверы (Heterogeneous Servers, HS). Первая работа, посвященная изучению моделей систем массового обслуживания (СМО) с гетерогенными серверами была опубликована почти 60 лет тому назад [1]. В последние годы подобные модели интенсивно изучаются различными авторами. В системах с HS важными являются проблемы определения оптимальных стратегий доступа заявок, а также схем распределения заявок между серверами. Во многих работах используются эвристические стратегии типа FSF-схемы (Fast Server First) доступа или рандомизированные стратегии. Однако после опубликования работы [2] стало известно, что эвристические стратегии не всегда являются оптимальными и даже субоптимальными. Так, в этой работе доказано, что для минимизации среднего числа заявок в системе необходимо использовать стратегию доступа порогового типа: для двух серверных систем быстрый сервер работает всегда, если в системе имеется хоть одна заявка, а медленный сервер включается лишь тогда, когда длина очереди достигает определенного порогового значения. В дальнейшем этот результат доказан различными авторами с использованием разных подходов [3–6]. Аналог этого факта доказан для моделей с ненадежными серверами [7, 8]. В настоящей работе предложен альтернативный подход к решению задачи нахождения момента включения медленного сервера в системах с двумя гетерогенными серверами.

Описание модели и постановка задачи

Изучаемая система содержит два сервера – высокоскоростного (F-сервер), а медленного сервера (S-сервер). Времена обслуживания заявок в этих серверах имеют показательные распределения со средними значениями μ_F^{-1} и μ_S^{-1} для F-серверов и S-серверов соответственно, при этом $\mu_F > \mu_S$. На вход этой системы поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ , и эти заявки могут образовать общую очередь перед гетерогенными серверами; максимальная длина очереди ог-

раничена величиной N , $N < \infty$. Если в момент поступления заявки в очереди уже имеются N заявок, то она теряется с вероятностью единица. В системе принята следующая схема обслуживания заявок: F-сервер работает всегда, а S-сервер может начинать работать лишь тогда, когда общее число заявок в системе достигает определенного порогового значения r , $r < N$, и S-сервер отключается, если длина очереди становится меньше этой величины. Если в момент поступления новой заявки общее число заявок в системе не меньше величины r и S-сервер является свободным, то она, согласно схеме Бернулли, либо с вероятностью α принимается для обслуживания в S-сервере, либо с вероятностью $1 - \alpha$ присоединяется к очереди для обслуживания в F-сервере.

Задача заключается в нахождении характеристики системы – среднего числа заявок в системе и вероятности их потери.

Решение задачи

Работа системы описывается двумерной цепью Маркова с состояниями вида (n, i) , где n – общее число заявок в системе, включая заявки в F-сервере, и i – статус S-сервера, т.е. $i \in \{0, 1\}$, $i = 0$ означает, что S-сервер является свободным и $i = 1$ – S-сервер занят.

Пространство состояний определяется как декартово произведение двух множеств, т.е. $E = \{0, 1, \dots, N + 1\} \times \{0, 1\}$.

Интенсивности переходов между состояниями из пространства состояний E определяются так:

- интенсивность перехода $(n, 1) \rightarrow (n + 1, 1)$ равна λ ;
- интенсивность перехода $(n, 0) \rightarrow (n + 1, 0)$ при выполнении условия $n < r$ равна λ ;
- интенсивность перехода $(n, 0) \rightarrow (n + 1, 0)$ при выполнении условия $n \geq r$ равна $\lambda(1 - \alpha)$;
- интенсивность перехода $(n, 0) \rightarrow (n, 1)$ при выполнении условия $n \geq r$ равна $\lambda\alpha$;
- интенсивность перехода $(n, 0) \rightarrow (n - 1, 0)$ равна μ_F ;
- интенсивность перехода $(n, 1) \rightarrow (n - 1, 1)$ при выполнении условия $n < r$ равна μ_F ;

- интенсивность перехода $(n,1) \rightarrow (n-1,1)$ при выполнении условия $n \geq r$ равна $\mu_F + \mu_S$;

- интенсивность перехода $(n,1) \rightarrow (n,0)$ при выполнении условия $n \leq r$ равна μ_S ;

Все состояния данной конечномерной и двумерной цепи Маркова сообщаются друг другом, иными словами, в ней существует стационарный режим. Стационарная вероятность состояния $(m,n) \in E$ обозначается через $p(m,n)$. Эти вероятности находятся из системы уравнений равновесия (СУР). С учетом разработанного выше алгоритма построения ПМ изучаемой цепи заключаем, что эта СУР имеет следующий вид:

Для состояний типа $(n,0)$:

$$(\lambda I(n < N+1) + \mu_F I(n > 0)) p(n,0) = \lambda p(n-1,0) I(0 < n \leq r) + \lambda(1-\alpha) p(n-1,0) I(n > r) + \mu_F p(n+1,0) + \mu_S p(n,1) I(n \leq r). \quad (1)$$

Для состояний типа $(n,1)$:

$$(\lambda I(n < N+1) + \mu_F + \mu_S) p(n,1) = \lambda p(n-1,0) I(n > 0) + \lambda \alpha p(n,0) I(n \geq r) + \mu_F p(n+1,1) I(n < r) + (\mu_F + \mu_S) p(n+1,1) I(n \geq r). \quad (2)$$

Здесь $I(A)$ обозначает индикаторную функцию события A . Условия нормировки имеют следующий вид:

$$\sum_{(m,n) \in E} p(m,n) = 1. \quad (3)$$

Среднее число заявок в системе определяется так:

$$L_s = \sum_{k=1}^{N+2} k \sum_{(n,i) \in E_k} p(n,i), \quad (4)$$

где $E_k = \{(n,i) \in E : n+i = k\}$.

Вероятность потери заявок вычисляется следующим образом:

$$PB = (1-\alpha) p(N+1,0) + p(N+1,1). \quad (5)$$

Для решения СУР (1) – (3) могут быть использованы известные методы линейной алгебры. Эти методы реализованы в пакетах прикладных программ. После вычисления вероятностей состояний определяют

ся характеристики системы (4), (5). С помощью предложенного подхода можно проводить исследования по изучению поведения характеристик (4), (5) относительно изменения исходных нагрузочных параметров системы, а также изменения порогового параметра r . Из-за ограниченности объема статьи здесь не приводятся результаты соответствующих численных экспериментов.

Заключение

В качестве направлений дальнейших исследований следует указать задачи оптимизации изучаемой системы. Так, большой практический интерес представляет задача выбора оптимального (в известном смысле) значения указанного параметра. Иными словами, можно найти моменты включения медленного сервера, при этом эти моменты определяются в зависимости от общего числа заявок в системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gumbel H.* Waiting Lines with heterogeneous servers // *Operations Research*. 1960. V. 8. P. 504–511.
2. *Larsen R.L., Agrawala A.K.* Control of heterogeneous two-server exponential queuing system // *IEEE Transactions on Software Engineering*. 1983. V. 9. P. 522–526.
3. *Koole G.* A simple proof of the optimality of a threshold policy in a two-server queuing system // *Systems and Control Letter*. 1995. V. 26. P. 301–303.
4. *Lin W., Kumar P.R.* Optimal control of queuing system with two heterogeneous servers // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1984. V. 29. P. 696–703.
5. *Luh H.P., Viniotis I.* Threshold control policies for heterogeneous servers systems // *Mathematical Methods in Operational Research*. 2002. V. 55. P. 121–142.
6. *Weber R.* On a conjecture about assigning jobs to processors of different speeds // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1993. V. 38. P. 166–170.
7. *Efrosinin D., Sztrik J.* Optimal control of a two-server heterogeneous queuing system with breakdowns and constant retrials // *Communications in Computer and Information Sciences*. 2016. V. 638. P. 57–72.
8. *Efrosinin D., Sztrik J., Farkhadov M., Stepanova N.* Reliability analysis of two-server heterogeneous queuing system with threshold control policy // *Communications in Computer and Information Sciences*. 2017. V. 800. P. 13–27.

Доступная полоса пропускания транспортного соединения с селективным режимом повтора в нагруженном тракте передачи данных¹

П.А. Михеев, П.В. Приступа, С.П. Сущенко

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Важнейшей операционной характеристикой абонентского соединения компьютерной сети является его пропускная способность, которая определяется интенсивностью внешних по отношению к данному соединению потоков, имеющих с ним хотя бы часть общего маршрута. Основным индикатором «внешней» нагрузки на тракт, в котором проложено исследуемое транспортное соединение, являются размеры очередей перед протокольными блоками данных рассматриваемого соединения в транзитных узлах. Мониторинг такого индикатора позволяет оценить распределение длин очередей в транзитных узлах от внешних по отношению к анализируемому соединению сетевых потоков и использовать при расчете операционных характеристик соединения и выборе протокольных параметров на время сеанса связи между заданной парой абонентов. Известные модели управляющих процедур звена передачи данных и транспортного протокола [1–7] не позволяют учитывать нагрузку на разделяемые сетевые ресурсы, обеспечиваемую соседством с другими виртуальными соединениями, агрегируемыми на различных участках пути в отдельных звеньях маршрута заданного абонентского соединения, и проявляющуюся в виде «внешних» очередей в транзитных узлах. В [8] исследование процесса передачи данных в нагруженном транспортном соединении выполнено при существенных ограничениях на значения протокольных параметров и характеристик тракта передачи данных. В работе предложена математическая модель транспортного соединения, управляемого транспортным протоколом в режиме селективного отказа, учитывающая кроме фактора искажений в прямом и обратном трактах передачи данных и механизмов повторных передач, обусловленных искажениями и истечением тайм-аута неприе-

¹ Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России, проект №2.4218.2017/4.6

ма ответа от получателя информации, еще и очереди ненулевой длины от «внешних» межабонентских соединений для длительностей сквозного тайм-аута с ограничениями снизу.

Рассмотрим обмен между абонентами, соединенными многозвенным трактом передачи данных. Предположим, что выполняются следующие допущения. Узлы тракта соединены дуплексными каналами связи, имеющими одинаковое быстродействие в обоих направлениях. Длина тракта, выраженная в количестве участков переприема, равна D_n . Обратный канал, по которому доставляются подтверждения отправителю о корректности приема последовательности сегментов данных, имеет длину D_o . Заданы достоверности передачи сегментов данных вдоль тракта от источника до адресата и обратно F_n и F_o соответственно. Время обработки сегментов в узлах тракта одинаково. Взаимодействующие абоненты имеют неограниченный поток сегментов для передачи, а обмен выполняется сегментами одинаковой длины. Подтверждения получателя о корректности приема принимаемых данных переносятся в сегментах встречного потока. Полагаем, что повторная передача сегментов организована в соответствии с селективной процедурой отказа [1]. Считаем, кроме того, что потеря сегментов из-за отсутствия буферной памяти в узлах тракта не происходит. Задана функция вероятностей $b_n, n = \overline{0, N}$, того, что каждый сегмент из потока анализируемого соединения в транзитных узлах встретит очередь размера $n \leq N$, где N – максимальный размер очереди, определяемый емкостью буферных пулов транзитных узлов. Будем называть тактом время t , необходимое для вывода сегмента в линию. Такт определяется суммой времени вывода сегмента в линию, времени распространения сигнала в канале связи и времени обработки сегмента принимающим узлом. Тайм-аут S , выраженный в длительностях t , запускается перед началом передачи первого сегмента последовательности и фиксируется для всех сегментов в пределах ширины окна. Полагаем, что размер окна управляющего протокола определяется величиной W , а $S > W$ – задает длительность тайм-аута ожидания подтверждения корректности доставки данных. Очевидно, что сумму длин прямого и обратного трактов передачи данных $D = D_n + D_o$ можно интерпретировать как длительность круговой задержки в ненагруженном тракте, выраженную в тактах t . После передачи очередного сегмента, протокол копирует его в очередь переданных,

но не подтвержденных данных и запускает тайм-аут. Как только размер очереди становится равным ширине окна W , управляющий протокол приостанавливает передачу в ожидании получения квитанции или истечения тайм-аута S ожидания подтверждения. При получении подтверждения, из очереди удаляются сегменты, дошедшие до адресата без искажений. При истечении тайм-аута S соответствующий сегмент передается повторно и тайм-аут запускается вновь. Тогда время получения отправителем сквозной квитанции распределено по геометрическому закону с параметром F_0 и длительностью такта дискретизации t . Функционирование виртуального соединения, управляемого транспортным протоколом, в нагруженном многозвенном тракте передачи данных с очередями сегментов перед отправляемыми данными или подтверждениями может быть описано марковизированным процессом динамики очереди переданных, но не подтвержденных сегментов, в котором размер очереди перед прямым или обратным потоком данных исследуемого соединения является дополнительной переменной марковского процесса. В состоянии цепи Маркова (i, n) источник отправил последовательность размера $i-n$ сегментов, которая в процессе переноса в одном из звеньев встретила очередь длиной n сегментов. Значениям координаты $i = \overline{0, W + n}, n = \overline{0, N}$ состояний цепи Маркова соответствует количество переданных, но не подтвержденных получателем сегментов и время от начала передачи последовательности, а значениям $i = \overline{W + n + 1, S - 1}, n = \overline{0, N}$, – время, в течение которого отправитель не активен и ожидает получение квитанции о корректности приема переданной последовательности из W сегментов. Обозначим через $P(i, n), i = \overline{0, S - 1}, n = \overline{0, N}$, – вероятности состояний цепи Маркова. Тогда последовательность переданных, но не подтвержденных сегментов данных рассматриваемого виртуального соединения при очереди нулевой длины растет до состояния цепи Маркова с координатами $(D - 1, 0)$ с вероятностью b_0 . Дальнейший рост размера этой последовательности происходит с вероятностью $b_0(1 - F_0)$. В состояниях $(i, n), i = \overline{D - 1 + n, S - 1}, n = \overline{0, N}$, возможно получение отправителем квитанции и в зависимости от результатов доставки отправитель передает новые сегменты (при положительной квитанции), либо повторно – иска-

женные. Поскольку отправленная последовательность сегментов исследуемого виртуального соединения может встретить очередь ненулевой длины в любой момент процесса передачи (на пути последовательности до адресата или при переносе подтверждения отправителю информационного потока), то переход из состояния $(i, 0)$, $i = \overline{0, S-2}$, в состояние (i, n) , $i = \overline{0, S-2}$, $n = \overline{1, N}$, происходит с вероятностью b_n .

Разнообразие вида решения системы уравнений равновесия для вероятностей состояний цепи Маркова определяется соотношениями между протокольными параметрами W , S , общей длиной тракта D и максимальным размером длин очередей N . Поскольку длительность таймаута должна превышать ширину окна, быть не короче круговой задержки ($S \geq D$), а также превышать время ожидания в очередях из протокольных блоков данных сопутствующего трафика до начала передачи в транзитных узлах, то выделяются широкое разнообразие вариантов решения для различных областей изменения значений протокольных параметров и длин очередей. Рассмотрим процесс передачи данных в тракте с очередями ненулевой длины ($b_0 = 0$) и протокольными параметрами, связанными с общей длиной тракта и максимальным размером очереди неравенствами вида $W \geq D$, $S \geq D + W + N - 1$. Система уравнений равновесия при этом записывается следующим образом:

$$P(0, 0) = F_0 \sum_{n=1}^N \sum_{i=D+W+n-2}^{S-2} P(i, n) + \sum_{n=0}^N P(S-1, n);$$

$$P(i, 0) = F_0 \sum_{n=1}^N P(D+W+n-2-i, n), i = \overline{1, D-2};$$

$$P(D-1, 0) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=D+n-1}^{W+n-1} F_0 P(i, 0);$$

$$P(0, n) = b_n P(0, 0), n = \overline{1, N};$$

$$P(i, n) = P(i-1, 0) + b_n P(i, 0), i = \overline{1, D-1}, n = \overline{1, N};$$

$$P(i, n) = P(i-1, n), i = \overline{D, D+n-1}, n = \overline{1, N};$$

$$P(i, n) = (1 - F_0) P(i-1, n), i = \overline{D+n, S-1}, n = \overline{1, N}.$$

Отсюда с точностью до вероятности начального состояния получаем распределение вероятностей состояний цепи Маркова

$$P(i, 0) = \frac{F_o P(0, 0)}{(1 - F_o)^i}, i = \overline{1, D-2};$$

$$P(D-1, 0) = \frac{(1 - (1 - F_o)^{W-D+1}) P(0, 0)}{(1 - F_o)^{W-1}};$$

$$P(i, n) = \frac{b_n P(0, 0)}{(1 - F_o)^i}, i = \overline{0, D-2}, n = \overline{1, N};$$

$$P(i, n) = \frac{b_n P(0, 0)}{(1 - F_o)^{W-1}}, i = \overline{D-1, D+n-1}, n = \overline{1, N};$$

$$P(i, n) = \frac{b_n (1 - F_o)^{i-D-n+1} P(0, 0)}{(1 - F_o)^{W-1}}, i = \overline{D+n-1, S-1}, n = \overline{1, N}.$$

Пропускная способность транспортного соединения в условиях соперничества потоков различных корреспондирующих абонентов за полосу пропускания тракта передачи данных, определяется как отношение среднего объема данных, передаваемых между двумя последовательными получениями квитанций, к среднему времени получения квитанции [4, 5]. Вклад в быстродействие виртуального соединения дают те состояния цепи Маркова, для которых возможно получение квитанции. В случае абсолютно надежного обратного канала ($F_o = 1$) доступная полоса пропускания транспортного соединения при $W \leq D$ в значительной мере определяется близостью ширины окна к длительности круговой задержки

$$Z_c(W, S) = \frac{F_n}{2 + D - W + \bar{N}} \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{n+1}, \bar{N} = \sum_{n=1}^N n b_n,$$

а для $W \geq D$ – инвариантна к D :

$$Z_c(W, S) = \frac{F_n}{2 + \bar{N}} \left[1 + \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{n+1} \right].$$

Неограниченная длительность тайм-аута ($S \rightarrow \infty$) при $W < D$ приводит

к зависимости вида

$$Z_c(W, \infty) = \frac{F_n (1 - (1 - F_o)^W) \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{n+1}}{2 + F_o (D - W + \bar{N}) - (1 - F_o)^W},$$

а для неограниченно возрастающей ширины окна получаем

$$Z_c(\infty, \infty) = \frac{F_n}{1 + F_o (\bar{N} + 1)} \left[F_o^2 + \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{n+1} \right].$$

Численный анализ показывает, что доступная транспортному соединению полоса пропускания для $W \geq D$ практически инвариантна к длительности круговой задержки, ощутимо снижаясь от области насыщения при $W = D$ и $F_o < 1$. В случае $W < D$ доступная полоса пропускания недогружена и эффективная скорость передачи данных значительно снижается. С ростом конкуренции между абонентами за полосу пропускания тракта передачи данных размер очереди увеличивается, и скорость информационного переноса быстро падает. Численные исследования доступной полосы пропускания транспортного соединения в селективном режиме повторной передачи показали, что скорость передачи между абонентами определяется достоверностью передачи данных, распределением длин очередей протокольных блоков в транзитных узлах, и соотношением между длительностью круговой задержки и шириной окна. Направлением дальнейших исследований необходимо выделить задачу анализа доступной полосы пропускной способности транспортных соединений при интервальных ограничениях на длительность сквозного тайм-аута транспортного протокола. Важным является анализ эффективности применения процедур прямой коррекции ошибок на уровне транспортного протокола при монопольном и конкурентном использовании сетевых каналов связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богуславский Л.Б.* Управление потоками данных в сетях ЭВМ. М.: Энергоатомиздат, 1984. 168 с.
2. *Gelenbe E., Labetoulle J., Pugolle G.* Performance evaluation of the HDLC protocol // *Comput. Networks.* 1978. V. 2. P. 409–415.
3. *Боровихин Е.А., Коротаев И.А.* Анализ функционирования и оптимизация протокола HDLC // *Автоматика и вычисл. техника.* 1993. № 2. С. 47–51.

4. Сущенко С.П. Аналитические модели асинхронных процедур управления звеном передачи данных // Автоматика и вычисл. техника. 1988. № 2. С. 32–40.
5. Кокшнев В.В., Сущенко С.П. Анализ быстродействия асинхронной процедуры управления звеном передачи данных // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. № 5. С. 61–65.
6. Nimbe L. Ewald, Andrew H. Kemp. Analytical Model of TCP New Reno through CTMC // Computer Performance Engineering, 6th European Performance Engineering Workshop, EPEW 2009; London, UK, July 9–10, 2009; Proceedings.
7. Jitendra Padhye, Victor Firoiu, Donald F. Towsley, Fellow, IEEE, and James F. Kurose, Fellow, IEEE. Modeling TCP Reno Performance: A simple model and its empirical validation // IEEE/ACM Transactions on Networking. V. 8. No. 2. April 2000.
8. Кокшнев В.В., Михеев П.А., Сущенко С.П. Анализ селективного режима транспортного протокола в нагруженном тракте передачи данных // Вестник ТГУ. Серия управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 3(24). С. 78–94.

Исследование замкнутой RQ-системы M/GI/1//N с вызываемыми заявками

А.А. Назаров^{*1}, А.С. Квач^{**1}, Я. Штрик²

¹Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия
²Дебреценский университет, г. Дебрецен, Венгрия

В настоящее время среди широкого класса RQ-систем [1, 2] системы с вызываемыми заявками представляют особый практический интерес. Один из типичных примеров такой системы – это call-центры, где оператор в свободное от обслуживания поступающих звонков время может сам производить исходящий звонок абонентам для предоставления актуальной информации, предложения товаров, акций. Первые результаты по RQ-системам с вызываемыми заявками были получены Фалиным [3], другие результаты по исследованию данных систем можно найти в работах [4–6].

В отличие от классической системы с вызываемыми заявками в данной модели учитывается тот факт, что при увеличении числа заявок в системе интенсивность генерирования новой заявки уменьшается. В такой ситуации используются модели с конечным числом источников [7–10].

Стоит отметить, что в данной системе заявки вызываются либо из источника, либо с орбиты. Ранее такая система была представлена в работе [11] для случая экспоненциального обслуживания поступающих и вызываемых заявок. Также для замкнутой RQ-системы M/M/1//N с вызываемыми заявками в работе [12] авторами было выполнено исследование времени пребывания заявки на орбите.

Постановка задачи

Рассматривается немарковская замкнутая RQ-система с вызываемыми заявками (рис. 1). Источник, отправивший заявку на обслуживание, не генерирует новую до тех пор, пока заявка не завершит свое обслужи-

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00277).

** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-41-703002.

живание. Каждый из N источников генерирует заявку и отправляет ее на прибор с интенсивностью λ/N . Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его для обслуживания. Время обслуживания каждой заявки является случайной величиной с произвольной функцией распределения $B_1(x)$ с первым и вторым начальными моментами b_1 и $b_1^{(2)}$ соответственно. Если прибор занят, то заявка переходит на орбиту и после случайной задержки, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ/N , она вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата.

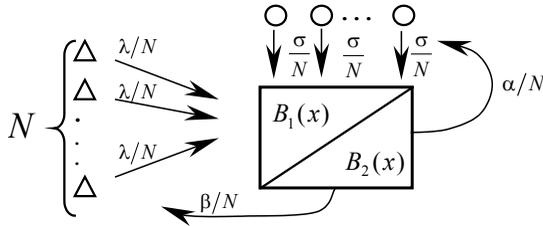


Рис 1. Замкнутая RQ-система M/GI/1/N с вызываемыми заявками

В данной модели предполагается, что прибор в свободном состоянии может осуществлять вызов заявок с орбиты с интенсивностью α/N или из источника с интенсивностью β/N . Обслуживание вызванных прибором заявок имеет произвольную функцию распределения $B_2(x)$ с соответствующими первым и вторым начальными моментами b_2 и $b_2^{(2)}$.

Пусть $n(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t , а процесс $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{прибор свободен,} \\ 1, & \text{прибор занят поступившей заявкой,} \\ 2, & \text{прибор занят вызванной заявкой.} \end{cases}$$

Для рассматриваемой системы процесс $\{k(t), n(t)\}$ не является марковским. Для его марковизации воспользуемся методом дополнительной переменной, а именно методом остаточного времени обслуживания.

Введем случайный процесс $z(t)$, имеющий смысл длины интервала от момента t до момента окончания обслуживания заявки. Таким образом, исследуется марковский процесс $\{k(t), n(t), z(t)\}$, если $k(t) = 1, 2$ и $\{k(t), n(t)\}$ при $k(t) = 0$.

Обозначим следующие вероятности

$$P_0(n, t) = P\{k(t) = 0, n(t) = n\},$$

$$P_k(n, z, t) = P\{k(t) = k, z(t) < z, n(t) = n\}, \quad k = 1, 2.$$

Для предложенной модели ставится задача исследования распределения вероятностей числа заявок на орбите методом асимптотического анализа в предельном условии растущего числа источников.

Метод асимптотического анализа

Для стационарного распределения вероятностей $P_0(n)$, $P_1(n, z)$, $P_2(n, z)$ состояний системы составим систему уравнений Колмогорова вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(n, 0)}{\partial z} + \frac{\partial P_2(n, 0)}{\partial z} - \left[\lambda \frac{N-n}{N} + \beta \frac{N-n}{N} + \sigma \frac{n}{N} + \alpha \frac{n}{N} \right] P_0(n) = 0, \\ \frac{\partial P_1(n, z)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(n, 0)}{\partial z} - \lambda \frac{N-n-1}{N} P_1(n, z) + \\ + \lambda \frac{N-n}{N} [P_1(n-1, z) + B_1(z)P_0(n)] + \sigma \frac{n+1}{N} B_1(z)P_0(n+1) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2(n, z)}{\partial z} - \frac{\partial P_2(n, 0)}{\partial z} - \lambda \frac{N-n-1}{N} P_2(n, z) + \lambda \frac{N-n}{N} P_2(n-1, z) + \\ + \beta \frac{N-n}{N} B_2(z)P_0(n) + \alpha \frac{n+1}{N} B_2(z)P_0(n+1) = 0. \end{aligned}$$

Введем частичные характеристические функции

$$H_0(u) = \sum_{n=0}^N e^{iun} P_0(n), \quad H_k(u, z) = \sum_{n=1}^N e^{iun} P_k(n, z), \quad k = 1, 2,$$

тогда систему (1) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + \frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} - [\lambda + \beta] H_0(u) + \frac{i}{N} [\alpha + \sigma - \lambda - \beta] \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} = 0, \\
& \frac{\partial H_1(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + \lambda B_1(z) H_0(u) + \lambda \left(1 - \frac{1}{N}\right) (e^{iu} - 1) H_1(u, z) + \\
& \quad + \frac{i}{N} B_1(z) (\lambda - \sigma e^{-iu}) \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} + \frac{i}{N} \lambda (e^{iu} - 1) \frac{\partial H_1(u, z)}{\partial u} = 0, \quad (2) \\
& \frac{\partial H_2(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} + \beta B_2(z) H_0(u) + \lambda \left(1 - \frac{1}{N}\right) (e^{iu} - 1) H_2(u, z) + \\
& \quad + \frac{i}{N} B_2(z) (\beta - \alpha e^{-iu}) \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} + \frac{i}{N} \lambda (e^{iu} - 1) \frac{\partial H_2(u, z)}{\partial u} = 0.
\end{aligned}$$

Полученную систему (2) будем решать методом асимптотического анализа в условии растущего числа источников ($N \rightarrow \infty$).

Теорема 1. Для замкнутой RQ-системы M/GI/1/N с вызываемыми заявками справедливо следующее равенство:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M \exp\left(iw \frac{n(t)}{N}\right) = \exp(iw\kappa_1),$$

где величина κ_1 имеет смысл асимптотического семиинварианта первого порядка и является решением уравнения

$$\lambda(1 - \kappa_1)[R_1(\kappa_1) + R_2(\kappa_1)] - (\alpha + \sigma)R_0(\kappa_1)\kappa_1 = 0,$$

где стационарное распределение вероятностей $R_k(\kappa_1)$ состояний k прибора зависит от κ_1 и определяются равенствами

$$\begin{aligned}
R_0(\kappa_1) &= \{1 + \delta_1(\kappa_1)b_1 + \delta_2(\kappa_1)b_2\}^{-1}, \\
R_1(\kappa_1) &= \delta_1(\kappa_1)R_0(\kappa_1)b_1, \quad R_2(\kappa_1) = \delta_2(\kappa_1)R_0(\kappa_1)b_2.
\end{aligned}$$

Здесь $\delta_1(\kappa_1) = \lambda(1 - \kappa_1) + \sigma\kappa_1$, $\delta_2(\kappa_1) = \beta(1 - \kappa_1) + \alpha\kappa_1$.

Для реализации асимптотики второго порядка в системе уравнений (2) выполним следующие замены:

$$\begin{aligned}
H_0(u) &= H_0^{(2)}(u) \exp\{iu\kappa_1 N\}, \\
H_k(u, z) &= H_k^{(2)}(u, z) \exp\{iu\kappa_1 N\}, \quad k = 1, 2,
\end{aligned}$$

и в результате получим систему вида

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial H_1^{(2)}(u, 0)}{\partial z} + \frac{\partial H_2^{(2)}(u, 0)}{\partial z} - [(\lambda + \beta)(1 - \kappa_1) + (\alpha + \sigma)\kappa_1] H_0^{(2)}(u) + \\
 & \quad + \frac{i}{N} [\alpha + \sigma - \lambda - \beta] \frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} = 0, \\
 & \frac{\partial H_1^{(2)}(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_1^{(2)}(u, 0)}{\partial z} + [\lambda(1 - \kappa_1) + \sigma\kappa_1 e^{-iu}] B_1(z) H_0^{(2)}(u) + \\
 & \quad + \lambda \left(1 - \kappa_1 - \frac{1}{N}\right) (e^{iu} - 1) H_1^{(2)}(u, z) + \\
 & \quad + \frac{i}{N} B_1(z) (\lambda - \sigma e^{-iu}) \frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} + \frac{i}{N} \lambda (e^{iu} - 1) \frac{\partial H_1^{(2)}(u, z)}{\partial u} = 0, \\
 & \frac{\partial H_2^{(2)}(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_2^{(2)}(u, 0)}{\partial z} + [\beta(1 - \kappa_1) + \alpha\kappa_1 e^{-iu}] B_2(z) H_0^{(2)}(u) + \\
 & \quad + \lambda \left(1 - \kappa_1 - \frac{1}{N}\right) (e^{iu} - 1) H_2^{(2)}(u, z) + \\
 & \quad + \frac{i}{N} B_2(z) (\beta - \alpha e^{-iu}) \frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} + \frac{i}{N} \lambda (e^{iu} - 1) \frac{\partial H_2^{(2)}(u, z)}{\partial u} = 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Применяя систему (3), можно доказать следующее утверждение:

Теорема 2. В условиях теоремы 1 справедливо равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M \exp \left(iw \frac{n(t) - \kappa_1 N}{\sqrt{N}} \right) = \exp \left\{ \frac{(iw)^2}{2} \kappa_2 \right\},$$

где величина κ_2 имеет смысл асимптотического семиинварианта второго порядка и определяется равенством

$$\kappa_2 = \frac{\lambda(1 - \kappa_1)g_1 + (\alpha + \sigma)\kappa_1}{\lambda(1 - \kappa_1)g_2 + \lambda(\delta_1 b_1 + \delta_2 b_2) + (\alpha + \sigma)},$$

$$\text{где } g_1 = \frac{\lambda}{2} (1 - \kappa_1) [\delta_1 b_1^{(2)} + \delta_2 b_2^{(2)}] - \kappa_1 [\sigma b_1 + \alpha b_2],$$

$$g_2 = (\lambda - \sigma)b_1 + (\beta - \alpha)b_2, \quad \delta_1 = \delta_1(\kappa_1), \quad \delta_2 = \delta_2(\kappa_1).$$

Таким образом, из теоремы 1 и 2 следует, что допредельное распределение вероятностей числа заявок на орбите можно аппроксимировать нормальным распределением с математическим ожиданием $\kappa_1 N$ и дисперсией $\kappa_2 N$.

Заключение

В работе рассмотрена замкнутая RQ-система M/GI/1//N с вызываемыми заявками. Исследование системы выполнено методом асимптотического анализа в предельном условии растущего числа источников. В результате анализа было показано, что предельное распределение вероятностей числа заявок на орбите имеет нормальное распределение с заданными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Springer, 2008. 309 p.
2. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial queues. London: Chapman & Hall, 1997. 328 p.
3. *Falin G.* Model of coupled switching in presence of recurrent calls // Engineering Cybernetics Review. 1979. V. 17. P. 53–59.
4. *Artalejo J.R., Phung-Duc T.* Markovian retrial queues with two way communication // J. Industrial and Management Optimization. 2012. V. 8(4). P. 781–806.
5. *Dragieva V., Phung-Duc T.* Two-way communication M/M/1 retrial queue with server-orbit interaction // Proceedings of the 11th International Conference on Queueing Theory and Network Applications. ACM, 2016. P. 11.
6. *Nazarov A.A., Paul S., Gudkova I., et al.* Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition // Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation. 2017.
7. *Dragieva V.I.* Number of retrials in a finite source retrial queue with unreliable server // Asia-Pac. J. Oper. Res. 2014. V. 31(2). P. 23.
8. *Sztrik J., Almási B., Roszik J.* Heterogeneous finite-source retrial queues with server subject to breakdowns and repairs // J. Math. Sci. 2006. V. 132. P. 677–685.
9. *Nazarov A., Sztrik J., Kvach A.* A Survey of Recent Results in Finite-Source Retrial Queues with Collisions // Communications in Computer and Information Science. Springer Verlag, 2018. V. 912. P. 1–15.
10. *Nazarov A., Sztrik J., Kvach A. et al.* Asymptotic analysis of finite-source M/M/1 retrial queueing system with collisions and server subject to breakdowns and repairs // Annals of Operations Research. 2018. <https://doi.org/10.1007/s10479-018-2894-z>
11. *Dragieva V., Phung-Duc T.* Two-way communication M/M/1//N retrial queue // International Conference on Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications. Springer, 2017. P. 81–94.
1. *Nazarov A., Sztrik J., Kvach A.* Asymptotic sojourn time analysis of closed M/M/1 retrial queueing system with two-way communication // Communications in Computer and Information Science. Springer Verlag, 2018. V. 912. P. 172–183.

Исследование RQ-системы $M|M|1$ с двумя орбитами и отрицательными заявками методом асимптотического анализа*

А.А. Назаров¹, Е.В. Капустин²

¹Томский государственный университет, г. Томск, Россия

²Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники, г. Томск, Россия

Понятие отрицательной заявки впервые появилось в работах Е. Гелленбе [1–3]. Такие заявки не обслуживаются, а лишь искажают обычные положительные заявки. В первую очередь, отрицательные заявки применяются в сетях массового обслуживания [2–6], например, с их помощью описывают функционирование вредоносных программ. Отрицательные заявки также находят применение в системах массового обслуживания [7–15], в том числе RQ-системах [13–15].

В этой работе методом асимптотического анализа исследуется RQ-система, в которой отрицательная заявка не уничтожает положительную, а лишь искажает ее и отправляет ее на орбиту восстановления.

Математическая модель

Пусть имеется RQ-система с одним обслуживающим прибором и двумя орбитами, 1-й (ожидания) и 2-й (восстановления), входящий поток положительных заявок – простейший интенсивностью λ_1 , отрицательных – λ_2 , время обслуживания заявки на приборе экспоненциальное с параметром μ , время задержки заявки на 1-й орбите экспоненциальное с параметром σ_1 , на 2-й – σ_2 (рис. 1).

Положительная заявка, обратившаяся к прибору из входящего потока, орбиты ожидания или восстановления, занимает прибор, если он свободен, иначе уходит

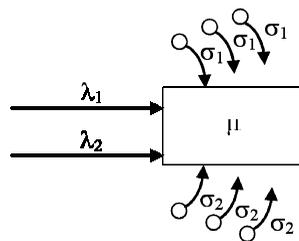


Рис. 1. Однолинейная RQ-система с двумя орбитами

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00277.

на орбиту ожидания. Поступившая в систему из входящего потока отрицательная заявка, если прибор занят положительной, искажает ее и отправляет на орбиту восстановления и покидает систему, если же прибор свободен – просто покидает систему.

Далее заявки на приборе и орбите ожидания будем называть неискаженными, на орбите восстановления – искаженными.

Пусть $k(t)$ – состояние прибора (число заявок на приборе) в момент времени t , то есть $k(t) = 0$, если прибор свободен, $k(t) = 1$, если прибор занят, $i_1(t)$ – число неискаженных заявок, $i_2(t)$ – число искаженных заявок.

Обозначим

$$P(k(t) = k, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2) = P_k(i_1, i_2, t)$$

вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k , число неискаженных заявок – i_1 , искаженных – i_2 , стационарные вероятности обозначим $P_k(i_1, i_2)$.

Поставим задачу: найти распределение вероятностей числа неискаженных заявок в системе.

Уравнения Колмогорова

Для стационарных вероятностей имеем систему разностных уравнений

$$\begin{cases} -(\lambda_1 + i_1\sigma_1 + i_2\sigma_2)P_0(i_1, i_2) + \lambda_2 P_1(i_1 + 1, i_2 - 1) + \mu P_1(i_1 + 1, i_2) = 0, \\ -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu + i_2\sigma_2)P_1(i_1, i_2) + \lambda_1 P_0(i_1 - 1, i_2) + i_1\sigma_1 P_0(i_1, i_2) + \\ +(i_2 + 1)\sigma_2 P_0(i_1 - 1, i_2 + 1) + (i_2 + 1)\sigma_2 P_1(i_1 - 1, i_2 + 1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Условие нормировки имеет вид

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} P_0(i_1, i_2) + \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} P_1(i_1, i_2) = 1. \quad (2)$$

Введем частичные характеристические функции

$$H_k(u_1, u_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1 + ju_2 i_2} P_k(i_1, i_2), \quad (3)$$

$k = 0, 1$ (здесь $j = \sqrt{-1}$).

Для функций (3) из системы (1) получаем

$$\begin{cases} -\lambda_1 H_0 + (\lambda_2 e^{ju_2} + \mu) e^{-ju_1} H_1 + j\sigma_1 \frac{\partial H_0}{\partial u_1} + j\sigma_2 \frac{\partial H_0}{\partial u_2} = 0, \\ \lambda_1 e^{ju_1} H_0 + (\lambda_1 e^{ju_1} - \lambda_1 - \lambda_2 - \mu) H_1 - \\ -j\sigma_1 \frac{\partial H_0}{\partial u_1} - j\sigma_2 e^{ju_1} e^{-ju_2} \frac{\partial H_0}{\partial u_2} + j\sigma_2 (1 - e^{ju_1} e^{-ju_2}) \frac{\partial H_1}{\partial u_2} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Из условия нормировки имеем

$$H_0(0, 0) + H_1(0, 0) = 1. \quad (5)$$

Асимптотический анализ

При исследовании системы уравнений (4) методом асимптотического анализа в предельном условии $\sigma_2 \rightarrow 0$, то есть в случае большого времени задержки на орбите восстановления, был получен следующий результат.

Теорема. Предельная характеристическая функция числа неискаженных заявок при $\sigma_2 \rightarrow 0$ имеет вид

$$h(u_1) = \left(\frac{1 - \beta}{1 - \beta e^{ju_1}} \right)^{\alpha+1}, \quad (6)$$

где
$$\alpha = \frac{\lambda_1}{\mu} \cdot \frac{\mu + \lambda_2}{\sigma_1}, \quad (7)$$

$$\beta = \frac{\lambda_1}{\mu}. \quad (8)$$

Это означает, что число неискаженных заявок в системе имеет отрицательное биномиальное распределение.

Заключение

Методом асимптотического анализа показано, что в RQ-системе M|M|1 с двумя орбитами и отрицательными заявками в случае большого времени задержки на орбите восстановления число неискаженных заявок имеет отрицательное биномиальное распределение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe E., Glynn P., Sigman K.* Queues with negative arrivals // *J. Appl. Prob.* 1991. V. 28. P. 245–250.
2. *Gelenbe E.* Product form queueing networks with negative and positive customers // *J. Appl. Prob.* 1991. V. 28. P. 656–663.
3. *Gelenbe E.* Random Neural Networks with Negative and Positive Signals and Product Form Solution // *Neural Computation*. 1989. V. 1. P. 502–510.
4. *Tien Van Do.* Bibliography on G-networks, negative customers and applications // *Mathematical and Computer Modelling*. 2011. V. 53. Iss. 1–2. P. 205–212.
5. *Науменко В.В., Матальцкий М.А.* Анализ марковской сети с доходами, положительными и отрицательными заявками // *Информатика*. 2014. № 1 (41). С. 5–14.
6. *Ерёмина А.Р., Малинковский Ю.В.* Инвариантность стационарного распределения сетей массового обслуживания с многорежимными стратегиями и отрицательными заявками // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2015. № 4 (33). С. 23–30.
7. *Назаров А. А., Феропонтова Н. М.* Исследование бесконечнолинейной системы обслуживания с отрицательными заявками и их ожиданием в пустой системе // *Изв. вузов. Физика*. 2015. Т. 58. № 11-2. С. 204–210.
8. *Бочаров П.П., Д'атице Ч., Мандзо Р., Печинкин А.В.* Анализ многолинейной марковской системы массового обслуживания с неограниченным накопителем и отрицательными заявками // *Автоматика и телемеханика*. 2007. № 1. С. 93–104.
9. *Мандзо Р., Касконе Н., Разумчик Р.В.* Экспоненциальная система массового обслуживания с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок // *Автоматика и телемеханика*. 2008. № 9. С. 103–113.
10. *Разумчик Р.В.* Многолинейная экспоненциальная система массового обслуживания с отрицательными заявками и дополнительной очередью для вытесненных заявок // *Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт*. 2011. Т. 5. № 7. С. 129–133.
11. *Печинкин А.В., Разумчик Р.В.* Стационарное распределение времени ожидания в системе обслуживания с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок при дисциплине LAST-LIFO-LIFO // *Информационные процессы*. 2012. Т. 12.– № 3. С. 159–171.
12. *Klimenok V., Dudin A.* A BMAP/PH/N Queue with Negative Customers and Partial Protection of Service // *Special Issue: Sixth St. Petersburg Workshop on Simulation*, 2012. V. 41. Issue 7. P. 1062–1082.
13. *Dimitriou I.* A preemptive resume priority retrial queue with state dependent arrivals, unreliable server and negative customers // *An Official J. the Spanish Society of Statistics and Operations Research*. 2011. P. 1–30.
14. *Krishna Kumar B., Pavai Madheswari S., Anantha Lakshmi S. R.* An M/G/1 Bernoulli feedback retrial queueing system with negative customers // *J. Operational Research*. 2011. P. 1–24.
15. *Ayyappan G., Muthu Ganapathi Subramanian, Sekar G.* Study of influences of negative arrival for single server retrial queueing system with Coxian phase type service // *Proceedings of the 6th International Conference on Queueing Theory and Network Applications*. 2011. P. 53–59.

Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками¹

А.А. Назаров, С.В. Пауль, О.Д. Лизюра

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

RQ-системы характеризуются следующей отличительной особенностью: заявка, заставшая прибор занятым при поступлении в систему, уходит на орбиту, где осуществляет случайную задержку, после чего повторяет попытку занять прибор. RQ-системы являются адекватными моделями телекоммуникационных систем, компьютерных сетей и реальных объектов. В монографиях [1, 2] приводятся обширные исследования таких моделей.

Модели RQ-систем с вызываемыми заявками имеют приложение в работе таких систем, как call-центры, где оператор в свободное время совершает звонки или занимается альтернативными видами деятельности. О приложениях RQ-систем в моделировании call-центров изложено в работах [3, 4].

RQ-системы с вызываемыми заявками активно изучаются в последнее время [5–7]. В работах, упомянутых выше, исследуются марковские RQ-системы с вызываемыми заявками. Модель RQ-системы с несколькими типами вызываемых заявок была рассмотрена Сакураи и Фунг-Дуком [8]. Для такой модели был получен численный алгоритм нахождения стационарного распределения вероятностей числа заявок на орбите.

В данной работе в качестве метода исследования рассматриваемых моделей применяется метод асимптотического анализа. В работах [9, 10] метод асимптотического анализа предложен для исследования RQ-систем M|M|1 и MMPP|M|1 с вызываемыми заявками, тогда как в данной работе рассматривается модель с разнотипными вызываемыми заявками.

Описание математической модели и постановка задачи

Рассмотрим однолинейную RQ-систему, на вход которой поступает MMPP-поток, определяемый управляющим процессом $m(t)$ – цепью Маркова с конечным числом состояний $m = \overline{1, M}$, которая задана мат-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00277.

рицей инфинитезимальных характеристик \mathbf{Q} с элементами $q_{k_1 k_2}$; диагональной матрицей Λ условных интенсивностей λ_m , $m = \overline{1, M}$, наступления событий на интервалах постоянства.

Заявки, поступающие в систему, занимают прибор и обслуживаются экспоненциальное случайное время с параметром μ_1 , если прибор свободен. Если поступившая заявка застаёт прибор занятым, она отправляется на орбиту, где осуществляет случайную задержку. Длительность задержки экспоненциальная с параметром σ . Когда прибор свободен, он вызывает заявки извне. В системе N типов вызываемых заявок. Прибор вызывает заявки типа n с интенсивностью α_n . Вызванная заявка мгновенно занимает прибор для обслуживания. Время обслуживания вызываемой заявки типа n распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_n . Для удобства исследования пронумеруем типы вызываемых заявок от 2 до $N + 1$.

Пусть процесс $i(t)$ – число заявок входящего потока в системе в момент времени t . Этот случайный процесс $i(t)$ не является марковским, поэтому введем дополнительный процесс $k(t)$, характеризующий состояние прибора в момент времени t . Он принимает следующие значения: 0, если прибор свободен, 1, если обслуживается поступившая заявка, n , если обслуживается вызванная заявка типа n , $n = 2, 3, \dots, N + 1$.

Трёхмерный процесс $\{i(t), k(t), m(t)\}$ образует цепь Маркова с непрерывным временем. Обозначим $P\{i(t) = i, k(t) = k, m(t) = m\} = P_k(i, m, t)$ – вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k , в системе находится i заявок и управляющая ММРР-потокком цепь Маркова $m(t)$ принимает значение m .

Для распределения вероятностей $P_k(i, m, t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему уравнений Колмогорова. Запишем полученную систему уравнений в стационарном режиме:

$$\begin{aligned} -\left(\lambda_m + i\sigma + \sum_{n=2}^{N+1} \alpha_n\right)P_0(i, m) + \mu_1 P_1(i+1, m) + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n P_n(i, m) + \sum_{v=1}^M P_0(i, v)q_{vm} &= 0, \\ -(\lambda_m + \mu_1)P_1(i, m) + \lambda_m P_1(i-1, m) + \lambda_m P_0(i-1, m) + i\sigma P_0(i, m) + \sum_{v=1}^M P_1(i, v)q_{vm} &= 0, \\ -(\lambda_m + \mu_n)P_n(i, m) + \lambda_m P_n(i-1, m) + \alpha_n P_0(i, m) + \sum_{v=1}^M P_n(i, v)q_{vm} &= 0, \\ n = \overline{2, N+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Перейдем к частичным характеристическим функциям

$$H_k(u, m) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju} P_k(i, m), \quad k = \overline{0, N+1},$$

где $j = \sqrt{-1}$. Запишем систему уравнений в матричном виде, используя следующие обозначения:

$$\mathbf{H}_n(u) = \{H_n(u, 1), H_n(u, 2), \dots, H_n(u, M)\},$$

$$\mathbf{H}'_n(u) = \left\{ \frac{\partial H_n(u, 1)}{\partial u}, \frac{\partial H_n(u, 2)}{\partial u}, \dots, \frac{\partial H_n(u, M)}{\partial u} \right\},$$

$$\Lambda = \text{diag}[\lambda_m], \quad \mathbf{I} - \text{единичная матрица.}$$

Получим следующую систему уравнений:

$$\mathbf{H}_0(u) \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^{N+1} \alpha_n \mathbf{I} \right) + j\sigma \mathbf{H}'_0(u) + \mu_1 e^{-ju} \mathbf{H}_1(u) + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \mathbf{H}_n(u) = 0,$$

$$\mathbf{H}_1(u) (\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1)\Lambda - \mu_1 \mathbf{I}) + e^{ju} \mathbf{H}_0(u) \Lambda - j\sigma \mathbf{H}'_0(u) = 0,$$

$$\mathbf{H}_n(u) (\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1)\Lambda - \mu_n \mathbf{I}) + \alpha_n H_0(u) = 0, \quad n = \overline{2, N+1}. \quad (2)$$

Будем решать полученную систему уравнений методами асимптотического анализа в двух различных предельных условиях: высокой интенсивности вызывания заявок и длительного обслуживания вызываемых заявок.

Метод асимптотического анализа в условии высокой интенсивности вызывания заявок

Для удобства исследования представим параметры RQ-системы в виде $\alpha_n = \alpha \gamma_n$, где $n = 2, 3, \dots, N+1$. В предложенных обозначениях предельное условие высокой интенсивности вызывания заявок имеет вид $\alpha \rightarrow \infty$.

Теорема 1 Пусть $i(t)$ – число поступивших заявок в RQ-системе ММРР|M|1 с N типами вызываемых заявок, тогда выполняется предельное равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} M \exp \left\{ jw \frac{i(t)}{\alpha} \right\} = \exp \{ jw \kappa_1 \},$$

где κ_1 – положительный корень уравнения

$$\mathbf{R} \left\{ \sigma \kappa_1 (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I})^{-1} + \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I})^{-1} \right\}^{-1} \times \\ \times \left\{ \sigma \kappa_1 (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}) + \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I})^{-1} \mathbf{\Lambda} \right\} \mathbf{e} = 0,$$

вектор-строка \mathbf{R} – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $t(t)$, определяемый системой уравнений: $\mathbf{RQ} = 0$, $\mathbf{Re} = 1$, \mathbf{e} – единичный вектор-столбец.

Теорема 1 определяет асимптотическое среднее значение κ_1 числа поступивших заявок в RQ-системе ММРР|M|1 с N типами вызываемых заявок в предельном условии высокой интенсивности вызывания заявок. Для более детального исследования случайного процесса, перейдем к асимптотике второго порядка.

Теорема 2 Пусть $i(t)$ – число поступивших заявок в RQ-системе ММРР|M|1 с N типами вызываемых заявок, тогда выполняется предельное равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} M \exp \left\{ jw \frac{i(t) - \alpha \kappa_1}{\sqrt{\alpha}} \right\} = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \right\},$$

где

$$\kappa_2 = \frac{\mathbf{y}_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}) \mathbf{e} - \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{y}_n \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} - \mu_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{e}}{\sigma \left[\mathbf{g}_1 (\mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}) \mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{g}_n \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} \right]}.$$

Векторы \mathbf{y}_k и \mathbf{g}_k определяются следующими равенствами:

$$\mathbf{g}_1 = (\sigma \kappa_1 \mathbf{g}_0 + \mathbf{R}_0) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad \mathbf{g}_n = \gamma_n \mathbf{g}_0 (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad n = \overline{2, N+1},$$

$$\mathbf{g}_0 \left(- \left(\sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n + \sigma \kappa_1 \right) \mathbf{I} + \mu_1 \sigma \kappa_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \gamma_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right) = \\ = \mathbf{R}_0 - \mu_1 \mathbf{R}_0 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad \sum_{k=0}^{N+1} \mathbf{g}_k \mathbf{e} = 0.$$

$$\mathbf{y}_1 = (\sigma \kappa_1 \mathbf{y}_0 + \mathbf{R}_1 \mathbf{\Lambda}) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1},$$

$$\mathbf{y}_n = (\gamma_n \mathbf{y}_0 + \mathbf{R}_n \mathbf{\Lambda}) (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad n = \overline{2, N+1},$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{y}_0 \left(- \left(\sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n + \sigma \kappa_1 \right) \mathbf{I} + \mu_1 \sigma \kappa_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \gamma_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right) = \\ & = \mu_1 \mathbf{R}_1 - \mu_1 \mathbf{R}_1 \Lambda (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} - \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \mathbf{R}_n \Lambda (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad \sum_{k=0}^{N+1} \mathbf{y}_k \mathbf{e} = 0. \end{aligned}$$

Векторы \mathbf{R}_k определены аналогично в процессе доказательства теоремы 1.

Теорема 2 показывает, что в предельном условии асимптотическая характеристическая функция числа поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок является характеристической функцией гауссовской случайной величины с математическим ожиданием $\kappa_1 \alpha$ и дисперсией $\kappa_2 \alpha$.

Метод асимптотического анализа в условии длительного обслуживания вызываемых заявок

Представим параметры системы (2) в виде $\mu_n = \mu \gamma_n$. В предложенных обозначениях предельное условие длительного обслуживания вызываемых заявок имеет вид $\mu \rightarrow 0$.

Теорема 3 Пусть $i(t)$ – число поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок, тогда выполняется предельное равенство

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} M \exp \{ j \omega \mu i(t) \} = \frac{1}{v_1} \left(\sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n}{\gamma_n - j \omega \rho \mu_1} \right)^{N+1} \prod_{n=2}^{N+1} \left(1 - j \omega \frac{\rho \mu_1}{\gamma_n} \right)^{-\frac{\alpha_n}{\sigma(1-\rho)}},$$

где

$$v_1 = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n}{\gamma_n}, \quad \rho = \frac{\mathbf{R} \Lambda \mathbf{e}}{\mu_1}.$$

Теорема 3 позволяет однозначно определить вид асимптотической характеристической функции числа поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок в предельном условии длительного обслуживания вызываемых заявок. В отличие от исследования системы в предельном условии высокой интенсивности вызывания, здесь не требуется дополнительного исследования с использованием разложений более высокого порядка, так как характеристическая функция достаточно полно описывает случайный процесс.

Заключение

В данной работе исследована RQ-система MMPP|M|1 с несколькими типами вызываемых заявок в предельных условиях высокой интенсивности вызывания заявок и длительного обслуживания вызываемых заявок. Для каждого предельного условия найдена предельная характеристическая функция числа поступивших заявок в системе.

В дальнейшем планируется исследование RQ-систем GI|M|1 и M|GI|1 с N типами вызываемых заявок в различных предельных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R., Gómez-Corral A.* Retrial queueing systems // *Mathematical and Computer Modelling.* 1999. V. 30. No. 3-4.
2. *Falin G., Templeton J.G.C.* Retrial queues. CRC Press, 1997. V. 75.
3. *Bhulai S., Koole G.* A queueing model for call blending in call centers // *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2003. V. 48. No. 8. P. 1434–1438.
4. *Aguir S., Karaesmen F., Akşin O.Z., & Chauvet F.* The impact of retrials on call center performance // *OR Spectrum.* 2004. V. 26. No. 3. P. 353–376.
5. *Artalejo J.R., Phung-Duc T.* Markovian retrial queues with two way communication // *J. Industrial and Management Optimization.* 2012. V. 8. No. 4. P. 781–806.
6. *Artalejo J.R., Phung-Duc T.* Single server retrial queues with two-way communication // *Applied Mathematical Modelling.* 2013. V. 37. No. 4. P. 1811–1822.
7. *Phung-Duc T., Rogiest W.* Two-way communication retrial queues with balanced call blending // *International Conference on Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications.* Berlin; Heidelberg: Springer, 2012. P. 16–31.
8. *Sakurai H., Phung-Duc T.* Two-way communication retrial queues with multiple types of outgoing calls // *Top.* 2015. V. 23. No. 2. P. 466–492.
9. *Nazarov A., Paul S., Gudkova I.* Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition // *Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation, ECMS, Budapest, 2017.* P. 687–693.
10. *Nazarov A., Phung-Duc T., Paul S.* Heavy outgoing call asymptotics for MMPP/M/1/1 retrial queue with two-way communication // *International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling.* Springer, Cham, 2017. P. 28–41.

RQ-система с неординарным входящим потоком и разнотипными вызываемыми заявками¹

А.А. Назаров, С.В. Пауль, О.Д. Лизюра

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

В реальных системах связи со случайным доступом часто возникают ситуации, при которых пользователи, использующие один канал связи, могут быть заблокированы. При этом они не теряются, а повторяют попытку захватить прибор через некоторое время [1]. Математическими моделями таких систем являются RQ-системы, которые достаточно адекватно описывают функционирование инфо-телекоммуникационных систем, систем сотовой связи, работу call-центров [2, 3].

Наряду с тем, что в современных системах связи должны учитываться ситуации, при которых пользователи не теряются, время простоя сервера должно использоваться для повышения производительности и эффективности системы. Поэтому в систему не только поступают сообщения извне, но также могут выполняться исходящие запросы в режиме простоя системы [4]. Эти ситуации моделируются системами с двумя видами заявок, где сервер обслуживает входящие и вызываемые заявки. Такие системы широко изучаются в настоящее время [5–9].

В работе call-центров зачастую возникают ситуации, при которых работа системы существенно зависит от типа вызываемых заявок, что влияет на продолжительность времени их обслуживания и функционирования системы в целом. Поэтому целесообразно рассматривать математические модели реальных систем с разнотипными вызываемыми заявками [10].

Заявки, поступающие в систему из основного потока, могут приходиться пачками или группами, при этом обслуживание заявок происходит по одной. В это время оставшиеся заявки ожидают начала своего обслуживания на орбите. Такие ситуации моделируются неординарными входящими потоками.

В предложенной работе рассматривается RQ-система $M^{[n]}/GI/GI/1/N$ с неординарным входящим потоком и разнотипными вызываемыми заяв-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00277.

ками. Для предложенной системы найдена характеристическая функция распределения вероятностей числа заявок основного потока в системе.

Математическая модель и постановка задачи

Рассматривается RQ-система, на вход которой поступает неординарный пуассоновский поток однородных событий, который задан интенсивностью λ . В момент наступления события потока, в систему поступает пачка заявок объема n с вероятностью r_n , $n \geq 0$. Заявки входящего потока будем называть поступившими в систему заявками.

Если в момент поступления пачки заявок в систему, прибор свободен, то любая заявка из пачки встает на прибор, а прибор начинает обслуживание этой заявки в течение произвольного времени обслуживания с функцией $B(x)$, при этом остальные заявки из пачки уходят на орбиту и осуществляют там случайные задержки в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром σ , после которых вновь обращаются к прибору, независимо друг от друга. Если же пачка заявок, поступая в систему, обнаруживает прибор занятым, то все заявки из пачки мгновенно уходят на орбиту и осуществляют там случайные задержки в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром σ , после которых стараются занять прибор.

Когда прибор свободен, он вызывает заявки извне. Рассматривается система с разными типами вызываемых заявок. Прибор вызывает заявки типа l с интенсивностью α_l , $l = \overline{2, L}$. Вызываемая заявка типа l встает на прибор и обслуживается в течение произвольного времени с функцией распределения $V_l(x)$, $l = \overline{2, L}$.

Обозначим процесс $i(t)$ – число заявок входящего потока в системе в момент времени t . Ставится задача нахождения стационарного распределения числа поступивших заявок в RQ-системе с неординарным входящим потоком и разнотипными вызываемыми заявками.

Распределение вероятностей числа поступивших заявок в системе

Обозначим: процесс $k(t)$ – состояние прибора в момент времени t . Этот процесс может принимать следующие значения: 0 – прибор свободен; 1 – прибор занят обслуживанием заявки входящего потока; l – прибор занят обслуживанием вызываемой заявки l -го типа, $l = \overline{2, L}$; $y(t)$ – истекшее время обслуживания заявки в момент времени t ;

$\mu(x) = \frac{B'(x)}{1-B(x)}$ и $v_l(x) = \frac{V_l'(x)}{1-V_l(x)}$ – условные интенсивности обслуживания поступившей и вызванной заявки соответственно при условии, что истекшее время обслуживания равно x .

Обозначим вероятности

$$P_0(i, t) = P\{k(t) = 0, i(t) = i\},$$

$$P_k(i, y, t) = \frac{\partial P\{k(t) = 0, i(t) = i, y(t) < y\}}{\partial y}, \quad k = \overline{1, L}. \quad (1)$$

Так как случайный процесс $\{k(t), i(t)\}$, $k = 0$ $\{k(t), i(t), y(t)\}$, $k = \overline{1, L}$, с переменным числом компонент марковский, то для распределения вероятностей (1) система уравнений Колмогорова в стационарном режиме имеет вид

$$-\left(\lambda + i\sigma + \sum_{l=2}^L \alpha_l\right) P_0(i) + \int_0^\infty P_1(i+1, y) \mu(y) dy + \sum_{l=2}^L \int_0^\infty P_l(i, y) v_l(y) dy = 0,$$

$$\frac{\partial P_1(i, y)}{\partial y} = -(\lambda + \mu(y)) P_1(i, y) + \lambda \sum_{n=0}^i P_1(i-n, y) r_n,$$

$$P_1(i, 0) = \lambda \sum_{n=0}^i P_0(i-n) r_n + i\sigma P_0(i),$$

$$\frac{\partial P_l(i, y)}{\partial y} = -(\lambda + v_l(y)) P_l(i, y) + \lambda \sum_{n=0}^i P_l(i-n, y) r_n,$$

$$P_l(i, 0) = P_0(i) \alpha_l, \quad l = \overline{2, L}. \quad (2)$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j = \sqrt{-1}$:

$$H_0(u) = \sum_{i=0}^\infty e^{jui} P_0(i), \quad H_1(u, y) = \sum_{i=0}^\infty e^{jui} P_1(i, y), \quad \text{где } P_1(0, y) \equiv 0,$$

$$H_l(u, y) = \sum_{i=0}^\infty e^{jui} P_l(i, y), \quad r(u) = \sum_{n=1}^\infty e^{jun} r_n, \quad \text{где } r_0 = 0.$$

Систему (2) перепишем в виде

$$-\left(\lambda + \sum_{l=2}^L \alpha_l\right) H_0(u) + e^{-ju} \int_0^{\infty} H_1(u, y) \mu(y) dy + \sum_{l=2}^L \int_0^{\infty} H_l(u, y) \nu_l(y) dy + j\sigma H_0'(u) = 0,$$

$$\frac{\partial H_1(u, y)}{\partial y} = ((r(u) - 1)\lambda - \mu(y)) H_1(u, y),$$

$$H_1(u, 0) = \lambda r(u) H_0(u) - j\sigma H_0'(u),$$

$$\frac{\partial H_l(u, y)}{\partial y} = ((r(u) - 1)\lambda - \nu_l(y)) H_l(u, y), \quad H_l(u, 0) = \alpha_l H_0(u), \quad (3)$$

где $l = \overline{2, L}$.

Теорема. *Характеристическая функция числа поступивших заявок в RQ-системе с неординарным пуассоновским входящим потоком и разнотипными вызываемыми заявками имеет вид*

$$\begin{aligned} H(u) &= H_0(u) + H_1(u) + \sum_{l=2}^L H_l(u) = \\ &= H_0(u) \left(1 + (\lambda r(u) - j\sigma h(u)) \frac{1 - B^*(\lambda - \lambda r(u))}{\lambda - \lambda r(u)} + \sum_{l=2}^L \alpha_l \frac{1 - V_l^*(\lambda - \lambda r(u))}{\lambda - \lambda r(u)} \right). \end{aligned}$$

Здесь $B^*(u)$ и $V_l^*(u)$ – преобразования Лапласа – Стильтеса функций $B_1(x)$ и $V_l(x)$, $l = \overline{2, L}$, соответственно. Функция $H_0(u)$ определяется равенствами

$$H_0(u) = P_0 \exp \left\{ \int_0^u h(x) dx \right\},$$

$$h(u) = j \frac{\lambda \left(e^{-ju} r(u) B^*(\lambda - \lambda r(u)) - 1 \right) + \sum_{l=2}^L \alpha_l \left(V_l^*(\lambda - \lambda r(u)) - 1 \right)}{\sigma \left\{ 1 - e^{-ju} B^*(\lambda - \lambda r(u)) \right\}},$$

$$P_0 = \frac{1 - r\lambda b}{1 + \sum_{l=2}^L \alpha_l \nu_l},$$

где b и ν_l – средние соответствующих распределений $B(x)$ и $V_l(x)$, $l = \overline{2, L}$, а величина r – среднее число заявок в поступившей пачке.

Заключение

В работе была рассмотрена RQ-система $M^{[n]}/GI/GI/1/N$ с неординарным входящим потоком и разнотипными вызываемыми заявками. Для предложенной модели найдена характеристическая функция распределения вероятностей числа заявок входящего потока в системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Retrial queueing systems: a computational approach. Springer, 2008. P. 315.
2. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial Queues. London: Chapman and Hall, 1997.
3. *Bhulai S., Koole G.* A queueing model for call blending in call centers // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. V. 48. P. 1434–1438.
4. *Deslauriers A., L'Ecuyer P., Pichitlamken J., Ingolfsson A., Avramidis A.N.* Markov chain models of a telephone call center with call blending // Computers and Operations Research. 2007. V. 34. P. 1616–1645.
5. *Choi B.D., Choi K.B., Lee Y.W.* M/G/1 retrial queueing systems with two types of calls and finite capacity // Queueing Systems. 1995. V. 19. P. 215–229.
6. *Tran-Gia P., Mandjes M.* Modeling of customer retrial phenomenon in cellular mobile networks // IEEE J. Selected Areas in Communications. 1997. V. 15. P. 1406–1414.
7. *Artalejo J.R., Phung-Duc T.* Markovian retrial queues with two way communication // J. Industrial and Management Optimization. 2012. V. 8. P. 781–806.
8. *Artalejo J.R., Phung-Duc T.* Single server retrial queues with two way communication // Applied Mathematical Modelling. 2013. V. 37. No. 4. P. 1811–1822.
9. *Nazarov A., Paul S., Gudkova I.* Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition // Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation, ECMS, Budapest, 2017. P. 687–693.
10. *Sakurai H., Phung-Duc T.* Two-way communication retrial queues with multiple types of outgoing calls // Top. 2015. V. 23. No. 2. P. 466–492.

Исследование энергоэффективности цепочечной маршрутизации в сенсорных сетях

И.М. Никольский

*Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносов, г. Москва, Россия*

Беспроводные сенсорные сети (БСС) являются важной составляющей технологии интернета вещей, которая возникает на наших глазах [1]. БСС позволяют контролировать расход ресурсов, отслеживать состояние мостов и дорог, проводить мониторинг пожаров и паводков [2].

Узлами БСС являются так называемые умные сенсоры (motes) – устройства, состоящие из одного или нескольких датчиков, трансивера, позволяющего передавать данные по беспроводному каналу и микроконтроллера, предназначенного для предварительной обработки информации. Питаются устройства, как правило, от батарейки.

Жесткие ограничения на расход энергии, возникающие из-за ограниченности емкости элемента питания, составляют одно из важнейших отличий БСС от традиционных компьютерных сетей.

Проблеме повышения эффективности энергопотребления БСС посвящено большое количество работ (см. [3–6]). Известно, что уменьшение расхода энергии возможно за счет правильного выбора протокола маршрутизации. Возможным вариантом является использование цепочечного (chain-based) протокола. Экономия энергии здесь достигается за счет использования передач на короткие расстояния (каждое устройство общается только с соседями по цепочке).

Еще один способ экономить энергию – введение в цикл работы сенсора режима сна. В этом режиме устройство не может принимать или передавать информацию, однако потребление энергии пренебрежимо мало.

В данной работе исследуется влияние на эффективность функционирования БСС совместного использования цепочечного протокола маршрутизации (рассматривается протокол PEGASIS [7]) и фазы сна.

Постановка задачи

Рассмотрим сеть, состоящую из сенсоров, расположенных на одной прямой с равными интервалами. Маршрутизация построена на базе энергоэффективного протокола PEGASIS. Работа БСС состоит из раундов. На

каждом раунде случайным образом выбирается сток – узел, на который будет собираться информация. Сток рассылает в обе стороны служебные сообщения, информируя остальные узлы о своем местоположении. Когда это сообщение достигает крайнего в цепочке узла, он высылает соседнему узлу сообщение со своими данными. Сосед, приняв сообщение, добавляет в него свои данные и передает их дальше в сторону стока. Раунд заканчивается, когда сток получает информацию со всех узлов цепочки.

Сенсоры могут находиться в одном из двух состояний: активном и в состоянии сна (прием/передача/генерация информации невозможны, расход энергии минимален). Переход из одной фазы в другую регламентируется моделью Чиассерини – Гаретто [8]. А именно, продолжительность активной фазы и фазы сна распределена по геометрическому закону с параметрами p и q соответственно.

Работа батарейки описывается моделью, предложенной в [9]. Предполагается, что при передаче расходуется $E_{tx} = 50L + 0.1Ld^2$ нДж энергии. При приеме расход энергии равен $E_{rx} = 50L$. Расход энергии в активном состоянии при отсутствии приема и передачи считается равным E_{tx} . Мы предполагаем длину сообщений L равной 2000 бит, расстояние между узлами $d = 5$ м.

Описанная модель цепочки сенсоров была реализована в виде программы на C++. Модель является дискретной, её работа строится в виде последовательности шагов. На каждом шаге сенсор может принять или передать сообщение.

Вычислительные эксперименты проводились для двух значений параметра p : $p = 0.0001$ (фактическое отсутствие фазы сна) и $p = 0.1$. Параметр q изменялся в пределах от 0.05 до 0.09. Для каждой пары значений p и q проводилась серия раундов. Для каждого раунда вычислялась его продолжительность (в шагах модели) и средний расход энергии по всем узлам цепочки. Затем эти показатели усреднялись по всей серии экспериментов.

Полученные результаты показаны на рис. 1 и 2. Жирная линия соответствует $p = 0.1$, тонкая линия отвечает $p = 0.0001$. На рис. 1 можно видеть, что при отсутствии фазы сна ($p = 0.0001$) средняя продолжительность раунда оказывается меньше, чем при её наличии. График 2 показывает, что и расход энергии при наличии фазы сна больше.

Более подробный анализ позволяет вскрыть причины, по которым складывается такая картина. Она возникает из-за несогласованности режима сна узлов сети. Активным сенсорам приходится ожидать получения сообщения от уснувших соседей, расходуя энергию впустую.

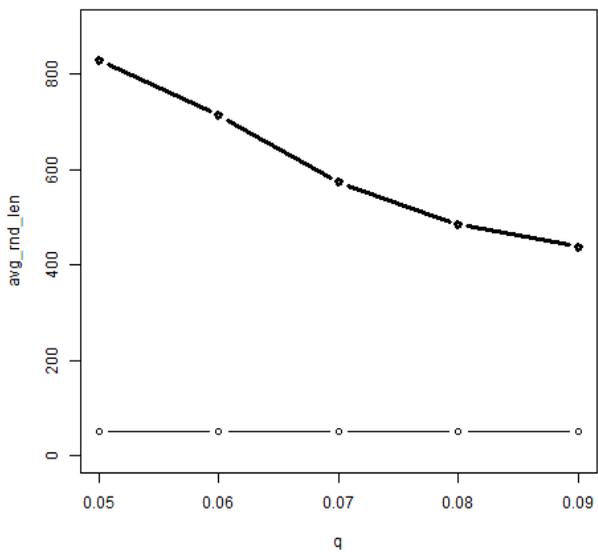


Рис. 1. Средняя длина раунда

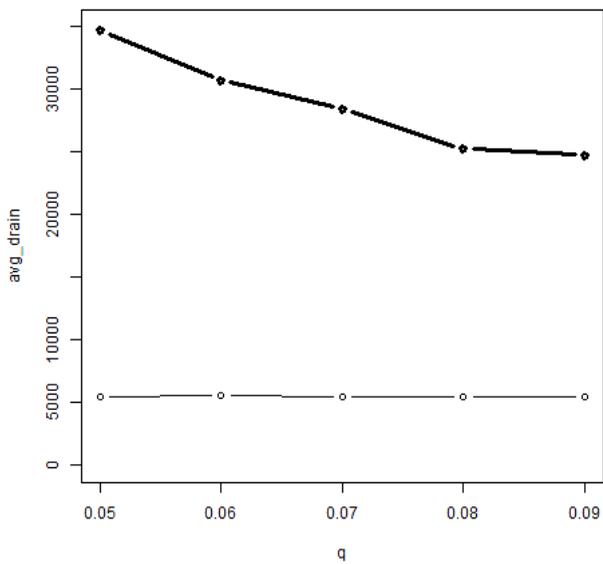


Рис. 2. Средний расход энергии

Заключение

Введение фазы сна в работу энергоэффективного протокола маршрутизации оказывает негативное влияние на работу сети, если моменты засыпания/просыпания сенсоров выбираются случайным образом. Необходимо внедрение стратегий машинного обучения узлов сети, когда сенсор будет выбирать моменты входа/выхода из фазы сна на основе накопленной информации о прохождении сообщений через данный участок сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Estrin D., Govindan R., Heidemann J.* Embedding the Internet // Communication of the ACM. 2000. V. 43. P. 38–41
2. *Pottie G.J., Kaiser W.J.* Wireless integrated network sensors // Communications of the ACM. 2000. V. 43(5). P. 551–558
3. *Kravets R., Schwan K., Calvert K.* Power-aware communication for mobile computers // Proceedings of MoMUC'99, San Diego, CA, November 1999. P. 64–73
4. *Porret A., Melly T., Enz C.C., Vittoz E.A.* A low-power low-voltage transceiver architecture suitable for wireless distributed sensors network // IEEE International Symposium on Circuits and Systems'00, Geneva. 2000. V. 1. P. 56–59
5. *Shih E., Calhoun B.H., Cho S., Chandrakasan A.* Energy-efficient link layer for wireless microsensor networks // Proceedings IEEE Computer Society Workshop on VLSI 2001, Orlando, FL, April 2001. P. 16–21
6. *Shih E., Cho S., Ickes N., Min R., Sinha A., Wang A., Chandrakasan A.* Physical layer driven protocol and algorithm design for energy-efficient wireless sensor networks // Proceedings of ACM MobiCom'01, Rome, Italy, July 2001. P. 272–286
7. *Lindsey S., Raghavendra C. S.* PEGASIS: Power efficient gathering in sensor information systems // Proceedings of the IEEE Aerospace Conference, Big Sky, Montana, March 2002.
8. *Chiasserini C.-F., Garetto M.* Modeling the performance of wireless sensor networks // Proc. Infocom. 2004.
9. *Heinzelman W.R., Chandrakasan A., Balakrishnan H.* An application-specific protocol architecture for wireless sensor networks // IEEE Transaction on Wireless Communications. 2002. P 660–670

Анализ сети массового обслуживания с делением и слиянием требований и переходами фрагментов требований между системами

О.А. Осипов, Е.С. Рогачко

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

Сети массового обслуживания с делением и слиянием требований являются математическими моделями стохастических систем с параллельным или распределённым принципом функционирования [1]. В большинстве работ по исследованию сетей массового обслуживания с делением и слиянием требований рассматриваются сети, состоящие из параллельных систем обслуживания. Обобщением является класс сетей с произвольной топологией, изученный в работе [2]. В сетях массового обслуживания с делением и слиянием требований может выполняться распределение фрагментов поступающих требований по системам [3], выполняемое с целью распределения нагрузки в сети [4]. Эффективным методом перераспределения требований между параллельными системами массового обслуживания в процессе их функционирования являются переходы требований между системами [5, 6]. В данной работе исследуется сеть массового обслуживания с делением и слиянием требований, в которой осуществляются переходы фрагментов требований между системами обслуживания (узлами сети) с целью уменьшения длительности пребывания требований в сети.

Описание сети

Рассматривается сеть массового обслуживания, состоящая из M узлов, каждый из которых представляет собой одноприборную систему обслуживания с локальной очередью вместимости B , и общей глобальной очереди неограниченной вместимости (рис. 1). В сеть поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ . Предполагается, что каждое требование при поступлении в сеть делится на r , $0 < r \leq R$, фрагментов с вероятностью σ_r . Математическое ожидание числа фрагментов требования обозначим через $\bar{\sigma}$. Поступающие фрагменты требования распределяются по узлам сети по правилу присоединения к очереди наименьшей длины. В том случае, когда поступающий фраг-

мент застаёт все локальные очереди заполненными, он ожидает обслуживания в глобальной очереди. Выбор фрагментов из глобальной очереди производится в соответствии с дисциплиной FCFS.

Длительность обслуживания во всех узлах имеет экспоненциальное распределение с параметром μ . Фрагменты требований обслуживаются в узлах в соответствии с дисциплиной PS, при которой прибор обслуживает одновременно и с одинаковой интенсивностью все находящиеся в узле фрагменты. Требование будет считаться обслуженным после завершения обслуживания всех фрагментов, полученных при его делении.

В том случае, когда глобальная очередь пуста, при завершении обслуживания в одном из узлов сети может быть начат процесс миграции фрагмента – переход фрагмента из одной локальной очереди в другую. Целью миграции является уменьшение длительности пребывания требований в сети обслуживания. При миграции фрагмент переходит из очереди узла x с максимальным числом фрагментов в очередь узла y с минимальным числом фрагментов, $x, y \in \{1, \dots, M\}$, $x \neq y$. Выбор фрагмента в узле x производится случайным образом. Новая миграция может быть начата также после завершения текущей. Предполагается, что в сети не может одновременно происходить несколько миграций (рис. 1).

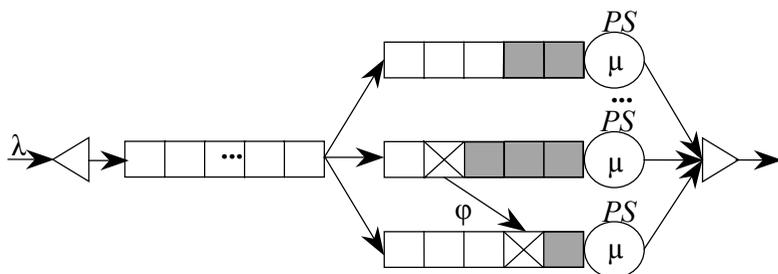


Рис. 1. Сеть обслуживания с делением и слиянием требований и переходами фрагментов требований между системами

Длительность миграции является случайной величиной с экспоненциальным распределением с параметром ϕ . В момент начала миграции в очереди узла y резервируется одно место для мигрирующего фрагмента, и при этом место в очереди узла x предполагается также занятым до момента завершения миграции фрагмента. Таким образом, каждый фрагмент может находиться в некоторый момент времени в одном из двух состояний – обслуживание или миграция.

Стационарное распределение сети

Пусть n_0 – число фрагментов в глобальной очереди, $n_0 = 0, 1, \dots$. Обозначим через $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_M)$ вектор числа обслуживаемых фрагментов в узлах сети, где n_i – число обслуживаемых фрагментов в узле i , $\mathbf{n} \in \{(n_1, \dots, n_M) : n_i \in \{0, \dots, B\}\}$.

Предположим, что фрагмент при миграции переходит из узла x в узел y , тогда будем обозначать соответствующую миграцию $m = (x, y)$; $\mathcal{M} = \{(x, y) : x \neq y, x, y \in \{1, \dots, M\}\} \cup \{\emptyset\}$ – множество всех допустимых миграций, где \emptyset обозначает отсутствие миграции в сети.

Состояние сети обслуживания в момент времени t определим как вектор $\mathbf{s}(t) = (n_0(t), \mathbf{n}(t), m(t)) = (n_0(t), n_1(t), \dots, n_M(t), m(t))$. Процесс $\{\mathbf{s}(t), t \geq 0\}$ есть цепь Маркова с непрерывным временем, определённая на пространстве состояний \mathbf{S} . Пусть $q(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$, $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in \mathbf{S}$, обозначает интенсивность перехода цепи из состояния \mathbf{s} в \mathbf{s}' .

Введём следующие обозначения:

\mathbf{e}_i – вектор-строка размерности M , i -я компонента которого равна 1, а остальные – 0;

$\min \text{Ind}(\mathbf{n}, m)$ – наименьший индекс среди индексов минимальных компонент вектора $f(\mathbf{n}, m) \neq (B, \dots, B)$, где $f(\mathbf{n}, m) = \mathbf{n}$, если $m = \emptyset$, и $f(\mathbf{n}, m) = \mathbf{n} + \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y$, если $m = (x, y)$; в случае $f(\mathbf{n}, m) = (B, \dots, B)$ полагаем $\min \text{Ind}(\mathbf{n}, m) = 0$;

$\max \text{Ind}(\mathbf{n}, m)$ – наименьший индекс среди индексов максимальных компонент вектора $f(\mathbf{n}, m)$.

Определим для цепи Маркова интенсивности переходов из состояния \mathbf{s} в \mathbf{s}' , обусловленные следующими событиями в сети обслуживания.

1. Поступление требования из r фрагментов в сеть обслуживания:

(а) если $\mathbf{s} = (n_0, \mathbf{n}, m)$, $n_0 \geq 0$, $\min \text{Ind}(\mathbf{n}, m) = 0$, $\mathbf{s}' = (n_0 + r, \mathbf{n}, m)$, то

$$q(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \sigma_r \lambda ; \tag{1}$$

(б) если $\mathbf{s} = (0, \mathbf{n}, m)$, $\min \text{Ind}(\mathbf{n}, m) = i_1 \neq 0$,

$$\min \text{Ind}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_{i_1}, m) = i_2 \neq 0, \dots, \min \text{Ind}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_{i_1} + \dots + \mathbf{e}_{i_{k-1}}, m) = i_k \neq 0,$$

$\min \text{Ind}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_{i_1} + \dots + \mathbf{e}_{i_k}, m) = 0, k \leq r$, $\mathbf{s}' = (r - k, \mathbf{n} + \mathbf{e}_{i_1} + \dots + \mathbf{e}_{i_k}, m)$, то

$$q(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \sigma_r \lambda . \tag{2}$$

2. Завершение обслуживания фрагмента в узле i , $n_i > 0$:

(а) если $\mathbf{s} = (n_0, \mathbf{n}, m)$, $n_0 > 0$, $\mathbf{s}' = (n_0 - 1, \mathbf{n}, m)$, то

$$q(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \mu; \quad (3)$$

(б) если $\mathbf{s} = (0, \mathbf{n}, m)$, $m \neq \emptyset$, $\mathbf{s}' = (0, \mathbf{n} - \mathbf{e}_i, m)$, то

$$q(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \mu; \quad (4)$$

(с) если $\mathbf{s} = (0, \mathbf{n}, \emptyset)$, $\max\text{Ind}(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i, \emptyset) \neq \min\text{Ind}(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i, \emptyset)$, $\mathbf{s}' = (0, \mathbf{n} - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_x, m)$, где $m = (x, y)$, $x = \max\text{Ind}(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i, \emptyset)$, $y = \min\text{Ind}(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i, \emptyset)$, то

$$q(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \mu; \quad (5)$$

(д) если $\mathbf{s} = (0, \mathbf{n}, \emptyset)$, $\max\text{Ind}(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i, \emptyset) = \min\text{Ind}(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i, \emptyset)$, $\mathbf{s}' = (0, \mathbf{n} - \mathbf{e}_i, \emptyset)$, то

$$q(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \mu. \quad (6)$$

3. Завершение миграции, $m \neq \emptyset$:

(а) если $\mathbf{s} = (n_0, \mathbf{n}, m)$, $n_0 > 0$,

$\mathbf{s}' = (n_0 - 1, \mathbf{n} + \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y, \emptyset) = (n_0 - 1, (B, \dots, B), \emptyset)$, то

$$q(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \varphi; \quad (7)$$

(б) если $\mathbf{s} = (0, \mathbf{n}, m)$, $\max\text{Ind}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_y, \emptyset) \neq \min\text{Ind}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_y, \emptyset)$,

$\mathbf{s}' = (0, \mathbf{n} + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_{x'}, m')$, где $m' = (x', y')$, $x' = \max\text{Ind}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_y, \emptyset)$, $y' = \min\text{Ind}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_y, \emptyset)$, то

$$q(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \varphi; \quad (8)$$

(с) если $\mathbf{s} = (0, \mathbf{n}, m)$, $\max\text{Ind}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_y, \emptyset) = \min\text{Ind}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_y, \emptyset)$,

$\mathbf{s}' = (0, \mathbf{n} + \mathbf{e}_y, \emptyset)$, то

$$q(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \varphi. \quad (9)$$

Расположим состояния цепи Маркова в лексикографическом порядке. Под макросостоянием с номером l будем понимать множество состояний $\mathbf{S}_l = \{(n_0, n_1, \dots, n_M, m) \in \mathbf{S} : n_0 = l\}$, $l = 0, 1, \dots$. Мощности множеств \mathbf{S}_0 и \mathbf{S}_l , $l > 0$, равны $L = (B+1)^M + (B+1)^{M-2} B^2 M(M-1)$,

$K = M(M - 1) + 1$ соответственно. Заметим, что из (1)–(9) следует возможность перехода из макросостояния \mathbf{S}_l , $l > 0$, только в макросостояния \mathbf{S}_{l-1} , \mathbf{S}_{l+1} , ..., \mathbf{S}_{l+R} .

Матрица $\mathbf{Q} = (q(\mathbf{s}, \mathbf{s}'))$, $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in \mathbf{S}$, имеет вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00} & \mathbf{B}_{01} & \mathbf{B}_{02} & \cdots & \mathbf{B}_{0R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{B}_{10} & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{A}_{R-1} & \mathbf{A}_R & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{A}_{R-1} & \mathbf{A}_R & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{A}_0 & \ddots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Матрицы \mathbf{B}_{00} , \mathbf{B}_{0r} , $r = 1, \dots, R$, \mathbf{B}_{10} имеют размерность $L \times L$, $L \times K$, $K \times L$ соответственно. Матрицы \mathbf{D} , \mathbf{A}_0 , \mathbf{A}_r , $r = 1, \dots, R$, – квадратные матрицы порядка K .

Выражения (3), (7) полностью определяют элементы матриц \mathbf{B}_{10} и \mathbf{D} . Элементы матрицы \mathbf{B}_{00} определяются выражениями (2), (4)–(6), (8), (9), а элементы \mathbf{B}_{0r} , $r = 1, \dots, R$, – выражениями (1), (2).

Отметим, что $\mathbf{A}_r = \lambda \sigma_r \mathbf{I}$, $r = 1, \dots, R$, где \mathbf{I} – единичная матрица; $\mathbf{A}_0 = -\text{diag}((\mathbf{D} + \mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_R)\mathbf{1})$, где $\text{diag}(\mathbf{a})$ задаёт диагональную матрицу с вектором \mathbf{a} на главной диагонали, $\mathbf{1}$ – единичный вектор-столбец.

Для вычисления стационарного распределения $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ воспользуемся матрично-аналитическим методом [7]. Компонента вектор-строки $\boldsymbol{\pi}_l$, $l = 0, 1, \dots$, задаёт вероятность нахождения сети обслуживания в некотором состоянии из макросостояния \mathbf{S}_l в соответствии с введённым лексикографическим порядком. Для сети обслуживания стационарный режим будет существовать тогда и только тогда, когда $\lambda \bar{\sigma} / (M\mu) < 1$. При выполнении этого условия стационарное распределение сети имеет вид

$$\boldsymbol{\pi}_l = - \left(\boldsymbol{\pi}_0 \bar{\mathbf{B}}_{0l} + \sum_{k=1}^{l-1} \boldsymbol{\pi}_k \bar{\mathbf{A}}_{l-k} \right) (\bar{\mathbf{A}}_0)^{-1}, \quad l = 2, 3, \dots, R,$$

$$\boldsymbol{\pi}_l = - \left(\sum_{k=l-R}^{l-1} \boldsymbol{\pi}_k \bar{\mathbf{A}}_{l-k} \right) (\bar{\mathbf{A}}_0)^{-1}, \quad l = R+1, R+2, \dots,$$

где
$$\bar{\mathbf{B}}_{0l} = \sum_{k=0}^{R-l} \mathbf{B}_{0,l+k} \mathbf{G}^k, \quad l = 1, 2, \dots, R,$$

$$\bar{\mathbf{A}}_l = \sum_{k=0}^{R-l} \mathbf{A}_{l+k} \mathbf{G}^k, \quad l = 0, 1, 2, \dots, R,$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{0l} = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{A}}_l = \mathbf{0}, \quad l = R+1, R+2, \dots,$$

\mathbf{G} есть решение уравнения $\mathbf{D} + \sum_{l=0}^R \mathbf{A}_l \mathbf{G}^{l+1} = \mathbf{0}$, векторы $\boldsymbol{\pi}_0$ и $\boldsymbol{\pi}_1$ находятся

как решение уравнения

$$(\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1) \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00} & \bar{\mathbf{B}}_{01} \\ \mathbf{B}_{10} & \bar{\mathbf{A}}_0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

На основе стационарного распределения вычисляются стационарные характеристики рассматриваемой сети массового обслуживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thomassian A.* Analysis of fork/join and related queueing systems // ACM Computing Surveys. 2014. V. 47. No. 2. P. 17:1–17:71.
2. *Осипов О.А., Тананко И.Е.* Сети массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований: случай бесконечноприборных систем обслуживания // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 4. С. 43–58.
3. *Squillante M.S., Zhang Y., Sivasubramaniam A., Gautam N.* Generalized parallel-server fork-join queues with dynamic task scheduling // Annals of Operations Research. 2008. V. 160. No. 1. P. 227–255.
4. *Митрофанов Ю.И., Рогачко Е.С.* Управление распределением нагрузки в сетях массового обслуживания // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 94–102.
5. *Zhao Y., Grassmann W.K.* Queueing analysis of a jockeying model // Operations Research. 1995. V. 43. No. 3. P. 520–529.
6. *Dehghanian A., Kharoufeh J.P., Modarres M.* Strategic dynamic jockeying between two parallel queue // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2016. V. 30. No. 1. P. 41–60.
7. *He Q.-M.* Fundamentals of matrix-analytic methods. New York: Springer, 2014. 349 p.

Анализ вероятностных характеристик гетерогенной СМО вида $MR^{(s)}|M_s|\infty$ с параметрами обслуживания, зависящими от состояния вложенной цепи Маркова

Е.П. Полин, С.П. Моисеева

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Теория массового обслуживания – раздел теории вероятностей, позволяющий смоделировать и проанализировать поведение той или иной системы массового обслуживания. В настоящее время область применения теории массового обслуживания включает в себя множество различных сфер человеческой деятельности, в том числе промышленное производство, телекоммуникационные и информационные сети, медицину, страховые компании и пенсионные фонды [1–3].

Основоположителем теории массового обслуживания является датский ученый А.К. Эрланг [4]. Предметом его исследования были телефонные системы, характеризующиеся случайным потоком вызовов абонентов, требующих случайного времени занятости телефонной линии. Расширение класса задач впоследствии привело к появлению различных модификаций систем массового обслуживания. Современные информационные и телекоммуникационные системы включают в себя разнотипные потоки данных, которые передают текстовые данные, голосовую информацию и информацию из видеоисточников, что требует использования более сложных моделей потоков. В качестве них используют математические модели марковских модулированных потоков (ВМАР, МАР), полумарковских (SM) или их частных случаев (марковский модулированный пуассоновский поток ММРР, поток марковского восстановления MR и рекуррентный поток GI).

Различные единицы информации требуют различного времени обслуживания в зависимости от своего формата. В связи с этим, в качестве моделей процессов в современных информационных системах используют системы массового обслуживания с разнотипными заявками [5–7], в которых обслуживание заявок каждого типа занимает различное время.

Данная статья посвящена исследованию числа занятых приборов в системе с входящим потоком марковского восстановления (MR). Дис-

циплина обслуживания в рассматриваемой СМО определяется состояниями вложенной по моментам восстановления цепи Маркова, в отличие от работы [8], где параметры обслуживания μ_k определяются вероятностями p_k . В работе [9] рассматривается СМО с расщеплением (копированием) заявок, которые обслуживаются в разных блоках с разными параметрами параллельно. В данной работе с помощью метода начальных моментов найдены аналитические выражения для основных вероятностных характеристик числа занятых приборов в системе.

Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов. На вход поступает поток марковского восстановления, заданный набором функций распределения длин интервалов $A_1(x), A_2(x), \dots, A_K(x)$ и матрицей $\mathbf{P} = [p_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, K$, – вложенной по моментам наступления событий цепи Маркова с конечным числом состояний $k(t) = 1, 2, \dots, K$.

Дисциплина обслуживания определяется следующим образом: если вложенная цепь Маркова находится в состоянии $k(t) = s$, то поступающая заявка будет обслуживаться случайное время, распределенное по экспоненциальному закону $F_s(x) = 1 - e^{-\mu_s x}$. Ставится задача исследования многомерного случайного процесса $\mathbf{i}(t) = [i_1(t), i_2(t), \dots, i_K(t)]$ – числа занятых приборов разного типа в системе. Определим многомерный марковский случайный процесс $\{k(t), z(t), i_1(t), i_2(t), \dots, i_K(t)\}$, где $z(t)$ – длина интервала от момента времени t до момента наступления очередного события в потоке марковского восстановления, $k(t)$ – вложенная по моментам восстановления цепь Маркова.

Для стационарного распределения вероятностей $\Pi(k, z, i_1, i_2, \dots, i_K)$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова вида

$$\frac{\partial \Pi(k, z, \mathbf{i})}{\partial z} - \frac{\partial \Pi(k, 0, \mathbf{i})}{\partial z} - \sum_{s=1}^K i_s \mu_s \Pi(k, z, \mathbf{i}) + \quad (1)$$

$$+ \sum_{s=1}^K (i_s + 1) \mu_s \Pi(k, z, \mathbf{i}_s) + \sum_{s=1}^K P_{sk} A_k(z) \frac{\partial \Pi(s, 0, \mathbf{i}_k)}{\partial z} = 0,$$

где $\mathbf{i}_s = [i_1, i_2, \dots, i_s + 1, \dots, i_K]$, $\mathbf{i}_k = [i_1, i_2, \dots, i_k - 1, \dots, i_K]$.

Для характеристических функций вида

$$H(k, z, u_1, u_2, \dots, u_K) = \sum_{i_1=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} \sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju_2 i_2} \dots \sum_{i_K=0}^{\infty} e^{ju_K i_K} \Pi(k, z, i_1, i_2, \dots, i_K)$$

имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(k, z, \mathbf{u})}{\partial z} - \frac{\partial H(k, 0, \mathbf{u})}{\partial z} + \sum_{i=1}^K j\mu_i (1 - e^{-ju_i}) \frac{\partial H(k, z, \mathbf{u})}{\partial u_i} + \\ + \sum_{i=1}^K e^{ju_k} P_{ik} A_k(z) \frac{\partial H(i, 0, \mathbf{u})}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Систему (2) запишем в виде матричного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(z, \mathbf{u})}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}(0, \mathbf{u})}{\partial z} [\mathbf{P}\mathbf{A}(z)\mathbf{B}(\mathbf{u}) - \mathbf{I}] + j\mathbf{c}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{H}(z, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{H}(z, \mathbf{u}) = [H(1, z, \mathbf{u}), H(2, z, \mathbf{u}), \dots, H(K, z, \mathbf{u})],$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{u}) = [\mu_1(1 - e^{-ju_1}), \mu_2(1 - e^{-ju_2}), \dots, \mu_K(1 - e^{-ju_K})],$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(z, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H(1, z, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial H(K, z, \mathbf{u})}{\partial u_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H(1, z, \mathbf{u})}{\partial u_K} & \dots & \frac{\partial H(K, z, \mathbf{u})}{\partial u_K} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(z, \mathbf{u})}{\partial z} = \left[\frac{\partial H(1, z, \mathbf{u})}{\partial z}, \frac{\partial H(2, z, \mathbf{u})}{\partial z}, \dots, \frac{\partial H(K, z, \mathbf{u})}{\partial z} \right],$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(0, \mathbf{u})}{\partial z} = \left. \frac{\partial \mathbf{H}(z, \mathbf{u})}{\partial z} \right|_{z=0},$$

$$\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} A_1(z) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_K(z) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{K \times K}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} e^{ju_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{ju_K} \end{bmatrix}.$$

Уравнение (3) является основным для дальнейших исследований.

Основные числовые вероятностные характеристики

Дифференцируя (2) по u_1, u_2, \dots, u_K и полагая их равными нулю, получаем основные вероятностные характеристики. Моменты первого порядка числа занятых приборов каждого типа в рассматриваемой системе определяются равенствами

$$m_1^{(k)}(\infty) = \frac{\lambda}{\mu_k},$$

где λ – интенсивность потока марковского восстановления, которая определяется выражением

$$\lambda = \frac{1}{\int_0^{\infty} (1 - \mathbf{rA}(u)\mathbf{e}) du}.$$

Здесь $\mathbf{r} = [r(1), r(2), \dots, r(K)]$ – вектор стационарного распределения вероятностей значений вложенной цепи Маркова.

Моменты второго порядка числа занятых приборов каждого типа в системе имеют вид

$$m_2^{(k)}(\infty) = \frac{1}{\mu_k} \lambda \mathbf{rPA}^*(\mu_k) \mathbf{E}_k [\mathbf{I} - \mathbf{PA}^*(\mu_k)]^{-1} \mathbf{PA}^*(0) \mathbf{E}_k \mathbf{e} + \\ + \lambda \mathbf{rPA}^*(0) \mathbf{E}_k \mathbf{e} + \lambda \mathbf{rE}_k \mathbf{e}.$$

Здесь $\mathbf{A}^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} d\mathbf{A}(z),$

\mathbf{E}_k – квадратная матрица, все элементы которой равны 0, кроме $e_{kk} = 1$.

Заключение

В данной работе построена и исследована математическая модель обслуживания заявок в бесконечнолинейной гетерогенной системе массового обслуживания $\text{MR}^{(s)} | \text{M}_s | \infty$ с входящим потоком марковского восстановления. Определены аналитические выражения для нахождения первого и второго моментов, характеризующих число занятых приборов каждого типа в системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гарайшина И.Р., Назаров А.А.* Исследование математической модели процесса изменения страхового капитала пенсионного фонда // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 280. С. 109–111.
2. *Назаров А.А., Даммер Д.Д.* Исследование числа требований на выплату страховых сумм // Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. Ч. 1. С. 50–55.
3. *Ахмедова Д.Д., Терпугов А.Ф.* Математическая модель страховой компании с учетом расходов на рекламу // Изв. вузов. Физика. 2001. № 1. С. 25–29.
4. *Erlang A.K.* The theory of probability and telephone conversations // *Nyt Tidsskrift Mat.* 1911. В. 20. Р. 33–39.
5. *Панкратова Е.В.* Исследование системы массового обслуживания $GI/GI/\infty$ с двумя типами заявок // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015): материалы XIV Междунар. конф. им. А.Ф. Терпугова. 2015. Ч. 1. С. 152–157.
6. *Панкратова Е.В.* Исследование системы массового обслуживания $MAR|M/\infty$ с разнотипным обслуживанием методом асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний входящего потока // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: Управление, вычисление, связь. 2015. С. 585–592.
7. *Pankratova E., Moiseeva S.* Queueing system $GI/GI/\infty$ with n types of customers // *Communications in Computer and Information Science.* Switzerland: Springer, 2015. V. 564. P. 216–225.
8. *Моисеева С.П., Панкратова Е.В., Убонова Е.Г.* Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 2 (35). С. 46–53.
9. *Синякова И.А., Моисеева С.П.* Метод моментов для исследования математической модели параллельного обслуживания кратных заявок потока марковского восстановления // Известия ТПУ. 2012. № 5. С. 24–28.

Моделирование адаптивной системы обслуживания и управления конфликтными транспортными потоками¹

Е.В. Пройдакова

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» – ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Достаточно длительное время остается актуальной задача организации дорожного движения в крупных населенных пунктах. При этом для управления транспортом применяются различные устройства (светофоры), в том числе и реализующие сложные адаптивные алгоритмы [1, 2]. Очевидно, что для обеспечения эффективного функционирования таких алгоритмов необходимо предварительно провести их оптимизацию. Указанная задача решается посредством построения математической, а также имитационной модели управляющей системы обслуживания и исследования полученных моделей аналитически и численно.

Постановка задачи

Рассматривается система обслуживания двух независимых транспортных потоков Π_1 , Π_2 на перекрестке с помощью адаптивного алгоритма. Потоки автомобилей (заявок, требований) Π_1 , Π_2 являются конфликтными, их обслуживание (проезд через перекресток) осуществляется только в непересекающиеся промежутки времени. Входные потоки Π_1 и Π_2 полагаем простейшими (пуассоновскими) с интенсивностями λ_1 и λ_2 соответственно. Здесь интенсивность потоков λ_j , $j = 1, 2$, – это количество автомобилей, поступающих на перекресток в единицу времени. Очереди по потокам разрешены неограниченные. Обслуживающее устройство (ОУ) имеет два различных состояния $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, где $\Gamma^{(1)}$ – состояние, при котором пропускается только поток Π_1 ; $\Gamma^{(2)}$ – состояние ОУ, при котором пропускается только поток Π_2 . Смена состояний светофора осуществляется согласно адаптивному алгоритму, работающему по принципу пропуска очередей, образовавшихся в период действия запрещающего сигнала. Для реализации данного алгоритма на перекрестке по каждому направлению устанавливаются два типа детекторов: D_1 и D_2 . Детекторы типа D_1 располагаются на подъезде к перекрестку, они

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-413-520005).

считывают регистрационные номера автомобилей в момент проезда и вносят их в память. Детекторы типа D_2 располагаются на границе перекрестка, они необходимы для учета автомобилей, покидающих его.

Работа алгоритма реализуется по следующим шагам.

Шаг 1. Во время работы «красной» (запрещающей) фазы обслуживающего устройства для потока детекторы типа D_1 считывают номера проехавших через них автомобилей и заносят их в список.

Шаг 2. В момент, когда включается «зеленая» (обслуживающая) фаза для потока, детекторы типа D_1 останавливают запись номеров в список, а детекторы типа D_2 начинают удалять из списка номера автомобилей, покидающих перекресток по данному направлению.

Шаг 3. В момент, когда последний автомобиль проезжает детектор типа D_2 и список становится пустым, обслуживающее устройство переключается на «зеленую» фазу для конфликтного потока и алгоритм переходит на шаг 1. Этот же переход происходит в случае, если срабатывает установленное ограничение на допустимую длительность обслуживающей фазы для данного направления, равное T_j^{\max} , $j = 1, 2$.

В случае, когда светофор переходит в режим, при котором длительность разрешающего сигнала по потокам регулярно принимает значение равное T_j^{\max} , $j = 1, 2$, то он начинает работать как простейший циклический. Рассматриваемый в работе алгоритм управления транспортом уже реализован на территории РФ [2]. Нашей задачей является его исследование, в том числе выявление параметров, при которых данный адаптивный алгоритм вырождается в циклический с фиксированным ритмом [3]. Для построения математической модели системы обслуживания и при создании ее имитационной модели применялся так называемый кибернетический подход, методологически разработанный А.А. Ляпуновым и С.В. Яблонским [1, 4].

В основе кибернетического подхода при построении, анализе и оптимизации модели управляющей системы лежат следующие фундаментальные принципы:

- дискретность актов функционирования системы во времени τ_i , $i \geq 0$, где точечный случайный процесс $\{\tau_i; i \geq 0\}$ задает на $[0, \infty)$ шкалу тактов времени работы управляющей системы;
- нелокальность в описании строения системы;
- совместное рассмотрение блочного строения системы и ее функционирования во времени.

Построение математической модели

Согласно принципам кибернетического подхода, рассматриваемая система изучалась в дискретные моменты времени $\tau_i, i = 0, 1, \dots$, переключений состояний обслуживающего устройства либо на промежутках $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Для построения математической модели системы определим на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, F, P(\cdot))$ при $j = 1, 2$ и $i = 0, 1, \dots$ следующие случайные величины и элементы:

1) $\eta_{j,i}$ – число автомобилей потока Π_j , поступивших за промежуток $[\tau_i, \tau_{i+1})$, дискретные случайные величины $\eta_{j,i} \in X = \{0, 1, \dots\}$;

2) $\kappa_{j,i}$ – длина очереди по потоку Π_j в момент τ_i , каждая из дискретных случайных величин $\kappa_{j,i}$ принимает значения из множества X ;

3) Γ_i – состояние светофора на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, случайный элемент $\Gamma_i \in \Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}\}$. Причем $\Gamma^{(1)}$ – это «зеленая» фаза для Π_1 , разрешающая проезд автомобилей только из первого потока с интенсивностью μ_1 ; $\Gamma^{(2)}$ – «зеленая» фаза для Π_2 , разрешающая обслуживание автомобилей только из второго потока с интенсивностью μ_2 . Интенсивность обслуживания μ_j соответствует количеству машин, покидающих перекресток по направлению j в единицу времени.

4) $\xi_{j,i}$ – максимально возможное число требований, которое может обслужиться за промежуток времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$ из очереди потока Π_j ; дискретные случайные величины $\xi_{j,i} \in \{0, l_j^{\max}\}$, где $l_j^{\max} = [\mu_j T_j^{\max}]$;

5) $\bar{\xi}_{j,i}$ – число реально обслуженных автомобилей потока Π_j за время $[\tau_i, \tau_{i+1})$, дискретная случайная величина $\bar{\xi}_{j,i} \in \{0, 1, \dots, l_j^{\max}\}$.

Для числа реально обслуженных требований по потоку Π_j из физических соображений выполняется соотношение $\bar{\xi}_{j,i} = \min\{\kappa_{j,i}, l_j^{\max}\}$.

Очередь по потоку Π_j в момент времени τ_{i+1} подчиняется следующему соотношению $\kappa_{j,i+1} = \max\{\kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - l_j^{\max}, \eta_{j,i}\}$.

Введем в рассмотрение функцию $U(\Gamma^{(r)}, w_1, v_1, w_2, v_2)$, описывающую смену состояний обслуживающего устройства:

$$\Gamma_{i+1} = U(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \bar{\xi}_{1,i}, \bar{\xi}_{2,i}) = \begin{cases} \Gamma^{(1)}, r = 2, w_2 - v_2 = 0; \\ \Gamma^{(1)}, r = 2, w_2 - v_2 > 0, v_2 = l_2^{\max}; \\ \Gamma^{(2)}, r = 1, w_1 - v_1 = 0; \\ \Gamma^{(2)}, r = 1, w_1 - v_1 > 0, v_1 = l_1^{\max}. \end{cases}$$

Тогда зависимость состояния светофора Γ_{i+1} от Γ_i определяется рекуррентным соотношением $\Gamma_{i+1} = U(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \bar{\xi}_{1,i}, \bar{\xi}_{2,i}), i = 0, 1, \dots$.

Стоит отметить, что случайные величины $\eta_{j,i}$ и $\xi_{j,i}$, являются независимыми при условии, что известно состояние обслуживающего устройства. В силу сказанного выше, а также в соответствии с принципами кибернетического подхода будем характеризовать состояние системы обслуживания на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$ случайным вектором $(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \bar{\xi}_{1,i}, \bar{\xi}_{2,i})$. А поведение исследуемой адаптивной системы обслуживания будем описывать пятимерной случайной векторной последовательностью $\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \bar{\xi}_{1,i}, \bar{\xi}_{2,i}), i = 0, 1, \dots\}$.

Имитационное моделирование

Для проведения численного исследования была создана программа, являющаяся имитационной моделью изучаемой системы обслуживания [5]. Основной целью создания имитационной модели являлось выявление областей, в которых адаптивный алгоритм вырождается в простейший циклический.

В начале работы имитационной модели задаются следующие входные параметры: 1) максимальное время работы зелёной фазы для каждого из потоков $T_j^{\max}, j = 1, 2$, (с); 2) интенсивности λ_j поступления заявок по потокам (требований/с) и интенсивности $\mu_j, j = 1, 2$, обслуживания заявок по потокам (требований/с).

При получении численных результатов, на первом этапе имитационная модель приводилась к квазистационарному (близкому к стационарному) режиму функционирования [5].

По итогам работы программы выводилось значение коэффициента $k_{\text{отн}} = q/Q$, где q – количество экспериментов, в которых длительность зеленого света по обоим направлениям приняла значение $T_j^{\max}, j = 1, 2$, а Q – количество всех экспериментов.

Коэффициент $k_{\text{отн}}$ рассматривался в качестве характеристики эффективности функционирования адаптивного алгоритма. Полагалось, что при значении $k_{\text{отн}} > 0.8$ алгоритм фактически перестает быть адаптивным и большую часть времени функционирует как простейший циклический. Ниже приведены фрагменты полученных численных результатов.

В таблице для значений $k_{\text{отн}}$ принята следующая цветовая шкала:

 - 0.00 ÷ 0.30;  - 0.31 ÷ 0.50;  - 0.51 ÷ 0.80;  - в 0.81 ÷ 1.00.

Значения $k_{\text{отн}}$ при $T_1^{\text{max}} = 60$, $T_2^{\text{max}} = 50$ и различных интенсивностях λ_1, λ_2

$\lambda_1 \backslash \lambda_2$	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0.10	0.06	0.12	0.15	0.18	0.24	0.35	0.34	0.33	0.35
0.15	0.20	0.31	0.41	0.37	0.38	0.47	0.60	0.38	0.46
0.20	0.27	0.43	0.49	0.49	0.40	0.58	0.72	0.63	0.78
0.25	0.43	0.45	0.53	0.54	0.61	0.74	0.76	0.68	0.62
0.30	0.46	0.53	0.55	0.56	0.63	0.80	0.83	0.81	0.91
0.35	0.51	0.57	0.59	0.63	0.65	0.77	0.85	0.87	0.93
0.40	0.49	0.59	0.60	0.68	0.69	0.78	0.87	0.90	0.90
0.45	0.52	0.61	0.66	0.77	0.81	0.81	0.86	0.89	0.91
0.50	0.57	0.64	0.68	0.84	0.82	0.85	0.89	0.91	0.97

Таблица иллюстрирует ситуацию, когда рассматриваемый в работе алгоритм выполняет свою адаптивную функцию приблизительно в половине случаев.

Заключение

Данная работа продолжает цикл статей [1–3, 5], посвященных исследованию уже реализованных на практике систем управления транспортом. Здесь рассматривается адаптивная система управления конфликтными простейшими транспортными потоками на основе алгоритма пропуска очередей. Построена математическая модель системы в виде случайной пятимерной векторной последовательности и создана программная реализация имитационной модели системы. При численном исследовании системы выявлялись области, в которых исследуемый адаптивный алгоритм вырождается в циклический с фиксированным ритмом. Данная область существенно зависит от входных параметров имитационной модели, в том числе интенсивностей транспортных потоков. Созданная программа и полученные численные результаты позволяют выработать практические рекомендации по повышению эффективности функционирования исследуемого адаптивного алгоритма, а также выбору его оптимальных настроек.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пройдакова Е.В.* Исследование приоритетной системы обслуживания и ее выходных потоков с помощью кибернетического подхода // Материалы XIII Международ. науч.-практич. конф. имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2014)», 20–22 ноября 2014 г. Томск, 2014. Ч. 2. С. 202–207.
2. *Пройдакова Е.В., Решетова А.А.* Исследование системы массового обслуживания с адаптивным алгоритмом поиска разрыва в потоке. // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта. 2017. № 53. С. 36–41.
3. *Пройдакова Е.В., Федоткин М.А.* Управление выходными потоками в системе с циклическим обслуживанием и переналадками // Автоматика и телемеханика. 2008. № 06. С. 96–107.
4. *Федоткин М.А.* Процессы обслуживания и управляющие системы // Математические вопросы кибернетики. 1996. Вып. 6. С. 51–70.
5. *Пройдакова Е.В.* Численное исследование циклической и приоритетной систем управления конфликтными потоками требований // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. № 3(1). С. 199–205.

Метод анализа ненадежной сети массового обслуживания с управлением маршрутизацией и с задержкой информации об изменении ее структуры

И.Е. Тананко, Н.П. Фокина

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия*

Сети массового обслуживания часто используются в качестве моделей дискретных стохастических систем с сетевой структурой и ненадежными элементами. Однако их использование ограничивается допущением о мгновенной реакции на изменение параметров этих сетей [1–3]. Существующие многочисленные имитационные модели, в которых реализованы задержки в передаче информации и, следовательно, в принятии решений, не дают качественных характеристик рассматриваемых систем.

Ненадежная сеть массового обслуживания

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, состоящая из L систем массового обслуживания S_i , $i = 1, \dots, L$, типа $M/M/2$. Из источника S_0 в сеть поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ_0 . Матрица смежности $W = (w_{ij})$ ориентированного графа определяет структуру сети систем массового обслуживания. Элемент $w_{ij} = 1$, если имеется связь из S_i в S_j , и $w_{ij} = 0$, если такой связи нет, $i, j = 0, 1, \dots, L$. Маршрутная матрица $\Theta = (\theta_{ij})$ определяет переходы требований в сети обслуживания, где θ_{0i} – вероятность поступления требований из источника S_0 в систему S_i ; θ_{i0} – вероятность того, что после обслуживания в системе S_i требование покинет сеть обслуживания и возвратится в источник S_0 ; θ_{ij} – вероятность того, что после обслуживания в системе S_i требование перейдет в систему S_j , $i, j = 1, \dots, L$.

Один из двух приборов каждой из систем обслуживания S_i , $i = 1, \dots, L$, является абсолютно надежным. Интенсивность обслуживания требований этим прибором $\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, L$.

Другой прибор системы S_i , $i = 1, \dots, L$, является ненадежным и последовательно переходит из работоспособного состояния в неработоспособное.

Пребывание ненадежного прибора системы обслуживания S_i в работоспособном состоянии означает, что интенсивность обслуживания требований этим прибором равна $\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, L$. Когда же прибор системы S_i находится в неработоспособном состоянии, то его интенсивность обслуживания $\mu_i = 0$.

Когда отказавший прибор восстанавливается, то система обслуживания представляет собой систему типа $M/M/1$. Если в момент отказа ненадежный прибор обслуживал требование, то это требование возвращается в очередь этой системы. После восстановления ненадежного прибора система обслуживания вновь становится системой типа $M/M/2$.

Длительности наработки на отказ и восстановления ненадежного прибора системы S_i являются экспоненциально распределенными случайными величинами соответственно с параметрами α_i и β_i , где $\beta_i > \alpha_i$, $i = 1, \dots, L$.

Будем считать, что в сети массового обслуживания существует стационарный режим вне зависимости от того, сколько всего восстанавливается приборов в сети обслуживания и в каких системах обслуживания.

Обозначим $n(t) = (n_i(t))$ – вектор числа работоспособных приборов в системах сети обслуживания в момент t , $n_i(t)$ – число работоспособных приборов в системе S_i в момент t . Состояние $n_i(t) = 2$ означает, что ненадежный прибор системы S_i работоспособен в момент t , $n_i(t) = 1$ – в момент t ненадежный прибор системы S_i восстанавливается, $i = 1, \dots, L$.

В процессе функционирования сети обслуживания производится наблюдение за работоспособностью ненадежных приборов систем S_i и управление входящими потоками требований в системы S_i , основанное на результатах этих наблюдений. Управление потоками заключается в изменении маршрутной матрицы Θ . Полагаем, что начиная с момента t получения информации о состоянии $n(t)$ необходимо время для изменения маршрутной матрицы Θ и, следовательно, изменения потоков тре-

бований, поступающих в системы обслуживания. Формализуем алгоритм наблюдения за состоянием $n(t)$ и управления матрицей Θ .

Пусть в момент t_s^k , $k = 1, 2, \dots$, производится наблюдение за состоянием работоспособности ненадежных приборов в каждой из систем S_i , $i = 1, \dots, L$. В момент t_d^k , $t_d^k > t_s^k$, принимается решение об изменении потоков требований в системы сети обслуживания. Буквы s и d символизируют соответственно наблюдение за системами обслуживания и принятие решения об изменении матрицы Θ . Обозначим через $\Theta(n(t_s^k))$ маршрутную матрицу, используемую в сети массового обслуживания с момента t_d^k , при условии, что в момент t_s^k состояние работоспособности приборов систем сети определялось вектором $n(t_s^k)$. Маршрутная матрица $\Theta(n(t_s^k))$ не меняется с момента t_d^k до момента t_d^{k+1} .

Длительности интервалов времени между моментами t_d^k и t_s^{k+1} , $t_s^{k+1} > t_d^k$, $k = 1, 2, \dots$, следующего наблюдения за состоянием работоспособности приборов систем обслуживания являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами с параметром Δ .

Полагаем также, что длительности интервалов времени между моментами t_s^k и t_d^k , $k = 1, 2, \dots$, являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами с параметром τ .

В качестве критерия оптимальности функционирования сети обслуживания установим равенство математических ожиданий (м.о.) длительностей пребывания требований в системах массового обслуживания, т. е. $\bar{u}_i = \bar{U}$, $i = 1, \dots, L$, где \bar{U} – некоторое заданное значение. Задача оптимизации заключается в определении маршрутной матрицы $\Theta(n(t_s^k))$, $k = 1, 2, \dots$, которая обеспечивает выполнение критерия оптимальности функционирования сети обслуживания.

Целью работы является нахождение вероятностно-временных характеристик сети обслуживания с ненадежными приборами в системах обслуживания и с задержкой в принятии решения об изменении потоков требований.

Анализ ненадежной системы и сети обслуживания с учетом задержки в управлении потоком

Пусть μ – интенсивность обслуживания требований прибором системы, λ – интенсивность потока требований в систему обслуживания. Тогда м. о. длительности пребывания требований в системе обслуживания типа $M/M/1$ и $M/M/2$ определяются соответственно выражениями

$$\bar{u} = 1/(\mu - \lambda), \quad \bar{u} = \frac{4\mu}{4\mu^2 - \lambda^2}.$$

Следовательно, необходимые интенсивности потоков требований в системы соответственно с одним и в системы с двумя приборами, обеспечивающие заданное \bar{U} , определяются соотношениями

$$\lambda(1) = \mu - 1/\bar{U},$$

$$\lambda(2) = \sqrt{4\mu(\mu - 1/\bar{U})}.$$

Используя метод синтеза маршрутных матриц сетей обслуживания [4] для каждого известного вектора ω относительных интенсивностей потоков требований, мы можем получить маршрутную матрицу Θ , удовлетворяющую системе уравнений $\omega\Theta = \omega$ с условием нормировки $\sum_{i=0}^L \omega_i = 1$.

Введем обозначение $(a_i, n_i(t), n_i(t_s^k), c(t))$ для определения числа работоспособных приборов и параметров управления потоком в систему S_i , $i = 1, \dots, L$, где:

- a_i – состояние потока, $a_i = 2$ – поток в систему обслуживания установлен из расчета, что в этой системе работоспособны оба прибора, т. е. интенсивность такого потока равна $\lambda_i(2)$. Если $a_i = 1$, то интенсивность потока в систему S_i равна $\lambda_i(1)$;

- $n_i(t)$, $n_i(t_s^k)$ – состояния работоспособности приборов системы соответственно в текущий момент времени t и в момент t_s^k , $t_s^k < t$;

- $c(t)$ – параметр управления, который равен d , если в момент t , $t \in [t_s^k, t_d^k)$, принимается решение об интенсивности потока требований в систему. Параметр $c(t) = s$, если $t \in [t_d^k, t_s^{k+1})$.

Из всех возможных 16 состояний $(a_i, n_i(t), n_i(t_s^k), c(t))$ системы S_i , $i = 1, \dots, L$, состояния $(1, 2, 2, s)$, $(1, 1, 2, s)$, $(2, 2, 1, s)$, $(2, 1, 1, s)$ являются невозвратными. Остальные образуют класс положительных возвратных состояний, вероятности $P_i(a_i, n_i(t), n_i(t_s^k), c(t))$ которых могут быть найдены из решения системы линейных уравнений.

Поскольку система обслуживания S_i , $i = 1, \dots, L$, характеризуется потоком требований с двумя возможными интенсивностями, а также числом работоспособных приборов, то изменение числа требований в системе представляется случайными процессами рождения и гибели $\xi_i(a_i, n_i)$, $a_i = 1, 2$, $n_i = 1, 2$.

Введем обозначения для стационарных вероятностей того, что в системе обслуживания S_i , $i = 1, \dots, L$, осуществляются соответственно процессы $\xi_i(2, 2)$, $\xi_i(2, 1)$, $\xi_i(1, 2)$, $\xi_i(1, 1)$:

$$\pi_i(2, 2) = P_i(2, 2, 2, d) + P_i(2, 2, 2, s) + P_i(2, 2, 1, d),$$

$$\pi_i(2, 1) = P_i(2, 1, 2, d) + P_i(2, 1, 2, s) + P_i(2, 1, 1, d),$$

$$\pi_i(1, 2) = P_i(1, 2, 1, d) + P_i(1, 2, 1, s) + P_i(1, 2, 2, d),$$

$$\pi_i(1, 1) = P_i(1, 1, 1, d) + P_i(1, 1, 1, s) + P_i(1, 1, 2, d).$$

Предложение 1. Вероятность $P_i(2, 1, 2, s) = P_i(1, 2, 1, s)$, $i = 1, \dots, L$.

Для доказательства Предложения 1 можно воспользоваться методом Крамера для решения системы линейных уравнений.

Предложение 2. Вероятность действия процесса $\xi_i(2, 1)$ в системе обслуживания S_i , равна вероятности действия процесса $\xi_i(1, 2)$ в этой системе обслуживания, т. е. $\pi_i(2, 1) = \pi_i(1, 2)$, $i = 1, \dots, L$.

Предложение 3. Вероятность того, что в систему S_i поступает поток требований с интенсивностью $\lambda_i(2)$, равна вероятности того, что ненадежный прибор этой системы работоспособен, т. е.

$$\pi_i(2, 2) + \pi_i(2, 1) = \pi_i(2, 2) + \pi_i(1, 2), \quad i = 1, \dots, L.$$

Предложение 2, так же как и Предложение 1, доказывается с использованием свойств определителей. Предложение 3 непосредственно следует из Предложения 2. Можно показать также, что

$$\pi_i(2,2) + \pi_i(2,1) = \beta_i / (\alpha_i + \beta_i)$$

и
$$\pi_i(1,1) + \pi_i(2,1) = \alpha_i / (\alpha_i + \beta_i), \quad i = 1, \dots, L.$$

Обозначим $q = (q_i)$ – вектор состояния сети обслуживания, где q_i – число требований в системе S_i ; (a, n) – вектор состояния потоков требований и числа приборов в системах сети обслуживания, где $a = (a_i)$, $n = (n_i)$, $i = 1, \dots, L$; $P(q, a, n)$ – стационарная вероятность пребывания сети обслуживания в состоянии q с вектором состояния потоков a и вектором n числа приборов в системах обслуживания.

Тогда стационарная вероятность $\pi(a, n)$ того, что сеть обслуживания находится в состоянии (a, n) , определяется выражением

$$\pi(a, n) = \pi_1(a_1, n_1) \cdot \dots \cdot \pi_L(a_L, n_L).$$

Стационарная вероятность состояния q сети массового обслуживания с ненадежными приборами и с задержкой информации имеет вид

$$P(q) = \sum_{a, n} P(q, a, n) \pi(a, n), \quad q \in E,$$

где E – множество всех состояний сети обслуживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vinod B., Altioik T. Approximating unreliable queueing networks under the assumption of exponentiality // J. Opl. Res. Soc. 1986. V. 37. No. 3. P. 309–316.
2. Economides A.A., Silvester J.A. Optimal routing in a network with unreliable links // Proc. IEEE 1988 Computer Networking Symposium. 1988. P. 288–297.
3. Akyildiz I.F., Liu W. Performance optimization of distributed-system models with unreliable servers // IEEE Trans. on Reliability. 1990. V. 39. No. 2. P. 236–243.
4. Тананко И.Е. Метод оптимизации маршрутных матриц открытых сетей массового обслуживания // Автоматика и вычислительная техника. 2002. № 4. С. 39–46.

Характеристическая функция числа заявок на орбите в RQ-системе M/M/1 с отрицательными заявками и буфером*

Е.А. Фёдорова¹, М.П. Фархадов²

¹ *Национальный исследовательский*

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

² *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН), г. Москва, Россия*

RQ-системы являются математическими моделями ТМО, широко используемые для анализа и оптимизации различных телекоммуникационных систем, сетей мобильной связи, call-центров и др. Наиболее подробное описание RQ-систем представлено в монографиях Дж. Арталехо и Г.И. Фалина [1, 2].

В последнее время широко исследуются СМО с отрицательными заявками, предложенные Э. Геленбе [3, 4], или так называемые G-системы и G-сети. Суть отрицательных заявок заключается в том, что они не требуют обслуживания, а оказывают влияние на работу системы: уничтожают заявки в очереди, ломают обслуживающие приборы, «обнуляют» всю систему и др. Такой эффект объясняется наличием вирусов, хакерских атак и т.д. в реальных сетях связи. В статье [5] представлен обзор основных работ по исследованию G-систем и G-сетей, в том числе RQ-систем.

Постановка задачи

Рассмотрим (рис. 1) однолинейную RQ-систему, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Заявки этого потока будем называть положительными. Такие заявки занимают прибор для обслуживания, если прибор свободен. Время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_1 . Если прибор занят, то заявка переходит на орбиту (источник повторных вызовов), где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-41-703002.

ром σ . С орбиты после случайной задержки заявка вновь обращается обслуживающему прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка поступает в прибор для обслуживания, в противном случае – заявка мгновенно возвращается на орбиту для реализации следующей задержки.

Кроме того, в систему поступает простейший поток отрицательных заявок с интенсивностью γ . Отрицательная заявка «ломает» прибор на некоторое время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ_2 . При этом, если на приборе обслуживалась положительная заявка, то она перемещается в буфер, где ожидает восстановления работы прибора, после чего мгновенно начинает обслуживание.

Если в момент нахождения отрицательной заявки на приборе к прибору обращается положительная заявка (извне или с орбиты), то такая заявка отправляется на орбиту, где осуществляет случайную задержку.

Ставится задача нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите.

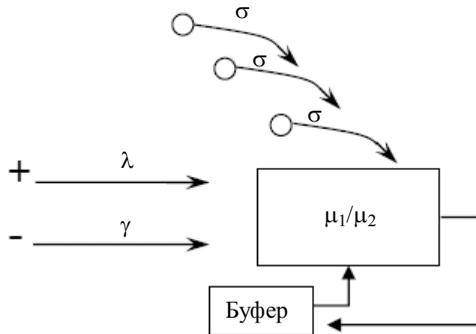


Рис. 1. RQ-система $M|M|1$ с отрицательными заявками и буфером

Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, $n(t)$ – число заявок в очереди, а $k(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{прибор занят положительной заявкой,} \\ 2, & \text{прибор занят отрицательной заявкой и в буфере нет заявки,} \\ 3, & \text{прибор занят отрицательной заявкой и в буфере есть заявка.} \end{cases}$$

Обозначим $P\{k(t) = k, i(t) = i\} = P_k(i, t)$ – вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k и в источнике повторных вызовов находится i заявок. Очевидно, что процесс $\{k(t), i(t)\}$ изменения состояний данной системы во времени является марковским.

Для распределения вероятностей $P_k(i, t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова. В стационарном режиме эта система имеет вид

$$\begin{cases} -(\lambda + \gamma + i\sigma)P_0(i) + \mu_1 P_1(i) + \mu_2 P_2(i) = 0, & i \geq 0, \\ -(\lambda + \mu_1 + \gamma)P_1(i) + \lambda P_0(i) + (i+1)\sigma \cdot P_0(i+1) + \lambda P_1(i-1) + \mu_2 P_3(i) = 0, \\ -(\lambda + \mu_2)P_2(i) + \gamma P_0(i) + \lambda P_2(i-1) = 0, \\ -(\lambda + \mu_2)P_3(i) + \gamma P_1(i) + \lambda P_3(i-1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $P_k(i) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(i, t)$.

Перейдем к частичным характеристическим функциям

$$H_k(u) = \sum_i e^{ju_i} P_k(i),$$

где j – мнимая единица. Тогда система (1) переписется в виде

$$\begin{cases} -(\lambda + \gamma)H_0(u) + j\sigma H_0'(u) + \mu_1 H_1(u) + \mu_2 H_2(u) = 0, \\ -(\lambda + \mu_1 + \gamma)H_1(u) + \lambda H_0(u) - je^{-ju}\sigma \cdot H_0'(u) + \lambda e^{ju} H_1(u) + \mu_2 H_3(u) = 0, \\ -(\lambda + \mu_2)H_2(u) + \gamma H_0(u) + \lambda e^{ju} H_2(u) = 0, \\ -(\lambda + \mu_2)H_3(u) + \gamma H_1(u) + \lambda e^{ju} H_3(u) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Из третьего уравнения системы (2) имеем

$$H_2(u) = \frac{\gamma}{\lambda - \lambda e^{ju} + \mu_2} H_0(u). \quad (3)$$

А из четвертого уравнения системы (2) запишем

$$H_3(u) = \frac{\gamma}{\lambda - \lambda e^{ju} + \mu_2} H_1(u). \quad (4)$$

Подставив (4) во второе уравнение системы (2), нетрудно получить:

$$H_1(u) = \frac{(\lambda(1 - e^{ju}) + \mu_2)(\lambda H_0(u) - je^{-ju}\sigma \cdot H_0'(u))}{(\lambda(1 - e^{ju}) + \mu_1)(\lambda(1 - e^{ju}) + \mu_2) + \gamma\lambda(1 - e^{ju})}. \quad (5)$$

Подставим (3), (5) в первое уравнение системы (2):

$$j\sigma H_0'(u) = \frac{\lambda[1 - \mu_1 A(u)] + \frac{\lambda(1 - e^{ju})}{\lambda(1 - e^{ju}) + \mu_2}}{1 - \mu_1 e^{-ju} A(u)}, \quad (7)$$

где
$$A(u) = \frac{\lambda(1 - e^{ju}) + \mu_2}{(\lambda(1 - e^{ju}) + \mu_1)(\lambda(1 - e^{ju}) + \mu_2) + \gamma\lambda(1 - e^{ju})}.$$

Решение (7) имеет вид

$$H_0(u) = C \exp \left\{ \frac{1}{j\sigma} \int \frac{\lambda(1 - \mu_1 A(u))(\lambda(1 - e^{ju}) + \mu_2) + \lambda(1 - e^{ju})}{(1 - \mu_1 e^{-ju} A(u))(\lambda(1 - e^{ju}) + \mu_2)} du \right\}. \quad (8)$$

С помощью формул (3) – (5) можно найти характеристическую функцию числа заявок в системе $H(u) = H_0(u) + H_1(u) + H_2(u) + H_3(u)$, где константа C определяется из условия нормировки: $H(0) = 1$.

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрена RQ-система с отрицательными заявками и буфером, в котором ожидает продолжения обслуживания прерванная заявка. Получен вид характеристической функции числа заявок на орбите.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial queues. London: Chapman & Hall, 1997. 328 p.
2. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems. A Computational Approach. Berlin: Springer, 2008. 267 p.
3. *Gelenbe E.* Random neural networks with positive and negative signals and product form solution // Neural Computation. 1989. V. 1. No. 4. P. 502–511.
4. *Gelenbe E.* Queueing networks with negative and positive customers // J. Applied Probability. 1991. V. 28. P. 656–663.
5. *Do T.V.* Bibliography on G-networks, negative customers and applications // Mathematical and Computer Modelling. 2011. V. 53. No. 1–2. P. 205–212.

Сеть массового обслуживания с нестационарной структурой и задержкой восстановления систем

Н.П. Фокина, И.Е. Тананко

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

Сети массового обслуживания с переменной структурой [1–5] широко применяются в качестве математических моделей дискретных стохастических систем с сетевой структурой и ненадежными элементами. Практическая необходимость решения задач эффективного управления системами этого класса способствовала разработке методов управления и оптимизации сетей массового обслуживания с переменной структурой [6–9].

В данной работе рассматривается открытая экспоненциальная сеть массового обслуживания с одним классом требований и одноприборными ненадежными системами массового обслуживания. Предполагается, что при отказе одной из систем обслуживания другие системы не могут выходить из строя до момента ее восстановления. Процесс восстановления отказавшей системы начинается не мгновенно, а через определенный интервал времени, соответствующей задержке в обнаружении и/или поступлении информации об изменении структуры сети. С момента начала процесса восстановления вышедшей из строя системы происходит изменение маршрутной матрицы сети таким образом, чтобы требования не поступали в данную систему до момента завершения ее восстановления. В работе представлен метод анализа сети массового обслуживания с ненадежными системами и с задержкой информации об изменении ее структуры.

Постановка задачи

Рассмотрим однородную открытую сеть массового обслуживания Γ , состоящую из L ненадежных систем массового обслуживания S_i , $i = 1, \dots, L$, типа М/М/1 с интенсивностями обслуживания $\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, L$, в работоспособном состоянии и $\mu_i = 0$ при отказе обслуживающего прибора. Из источника S_0 в сеть поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ_0 . Топология сети определяется матрицей смежности $W = (w_{ij})$, $i, j = 0, \dots, L$, соответствующего сети ори-

ентированного графа. Переходы требований между системами в сети, а также источником требований и системами сети определяются маршрутной матрицей $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 0, \dots, L$. Интервал времени функционирования сети со всеми исправными системами назовем нормальным тактом.

Предполагается, что системы сети выходят из строя и восстанавливаются таким образом, что в каждый момент времени в сети в состоянии отказа может находиться не более одной системы.

Длительность наработки на отказ системы S_i , $i = 1, \dots, L$, имеет экспоненциальное распределение с параметром γ_i . При отказе системы все требования, находящиеся в ней, теряются. В течение малого интервала времени, имеющего экспоненциальное распределение с параметром τ и математическое ожидание (м.о.) $\Delta = 1/\tau$, требования, которые поступают в вышедшую из строя систему, получают отказ в обслуживании и немедленно покидают сеть, возвращаясь в источник. Назовем этот интервал времени недиагностируемым тактом. Имеется L типов недиагностируемых тактов. Тип такта определяется номером вышедшей из строя системы.

По окончании недиагностируемого такта начинается коррективный такт, соответствующий процессу восстановления вышедшей из строя системы. Имеется L типов коррективных тактов. Длительность интервала восстановления системы S_i , $i = 1, \dots, L$, имеет экспоненциальное распределение с параметром β_i . В момент начала коррективного такта изменяется матрица смежности W сети и маршрутная матрица Θ для того, чтобы исключить поступление требований в неработоспособную систему S_i . Обозначим через $\Theta^{(i)}$ маршрутную матрицу сети без системы S_i . По окончании коррективного такта мгновенно восстанавливается структура сети и маршрутная матрица.

Пусть λ_i , $i = 1, \dots, L$, – интенсивность потока требований, поступающих в систему S_i .

Предполагается, что между параметрами длительностей тактов имеет место следующее соотношение:

$$\tau \gg \min_i \beta_i > \max_i \gamma_i, \quad (1)$$

а также между интенсивностями потоков требований, циркулирующих внутри сети, и интенсивностями наработки на отказ

$$\min_i \lambda_i \gg \max_i \beta_i. \quad (2)$$

Процесс функционирования сети описанного вида с ненадежными системами можно представить в виде последовательности интервалов времени, которые назовем циклами. Каждый цикл состоит из трех тактов: нормального, недиагностируемого и коррективного, которые следуют друг за другом в указанной последовательности.

Требуется разработать метод анализа данной ненадежной сети обслуживания.

Метод анализа ненадежной сети обслуживания

Пусть ξ , η_k и ζ_k , $k = 1, \dots, L$, – случайные процессы, описывающие функционирование сети в течение нормального, недиагностируемого и коррективного тактов соответственно, где индекс k обозначает номер вышедшей из строя или восстанавливаемой системы.

Пусть $M = \{m_0, m_1, \dots, m_L, m'_1, \dots, m'_L\}$ – множество макросостояний сети Γ , где m_0 – макросостояние сети, соответствующее функционированию в сети процесса ξ , m_k – макросостояние сети, соответствующее процессу η_k , m'_k – макросостояние сети, соответствующее процессу ζ_k .

Поскольку для интенсивностей наработки на отказ, восстановления систем и интенсивностей потоков требований справедливы соотношения (1),(2), то можно считать, что процессы ξ и ζ_k , $k = 1, \dots, L$, экспоненциально быстро переходят в стационарный режим функционирования, поэтому стационарные вероятности состояний сети в течение этих интервалов могут быть получены по теореме Джексона [10].

Пусть $n = (n_i)$, $i = 1, \dots, L$, – состояние сети, где n_i – число требований в системе S_i , $n(n_i = m)$, $i \in \{1, \dots, L\}$, – состояния сети, отличающиеся от состояния n только указанной в скобках компонентой, E_L – пространство состояний сети с L работоспособными системами.

Согласно теореме Джексона, если потоки в сети определяются некоторой маршрутной матрицей Θ^* , стационарная вероятность пребывания сети в состоянии $n = (n_i)$ имеет мультипликативный вид

$$P(n) = \prod_{i=1}^L P_i(n_i), \quad n \in E_L, \quad (3)$$

где

$$P_i(n_i) = P_i(0) \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{n_i} \quad (4)$$

есть стационарная вероятность состояний системы S_i типа $M/M/1$ при

$\lambda_i = \lambda_0 \omega_i / \omega_0$, а $\omega = (\omega_i)$ является решением системы уравнений

$$\omega \Theta^* = \omega \quad (5)$$

с условием нормировки $\sum_{i=0}^L \omega_i = 1$.

Выражения (3) – (5) определяют стационарные вероятности состояний сети в течение нормального и коррективных тактов при $\Theta^* = \Theta$ и $\Theta^* = \Theta^{(k)}$, $k = 1, \dots, L$, соответственно.

Маршрутная матрица $\Theta^{(k)}$ формируется из матрицы Θ путем исключения столбца с номером k и перераспределением вероятности θ_{ik} по оставшимся ненулевым элементам i -й строки пропорционально их значениям, для всех $i = 1, \dots, L$.

Обозначим через $P(n|m_0)$, $n \in E_L$, $P(n|m'_k)$, $n \in E_{L-1}$, вероятности состояний для нормального и коррективного тактов соответственно.

В течение недиагностируемого такта маршрутизация требований между работоспособными системами определяется соответствующими элементами матрицы Θ . Поток требований, который поступает в вышедшую из строя систему S_k , получает отказ, возвращаясь в источник без обслуживания. Для реализации отказа заменим матрицу Θ на $\tilde{\Theta}^{(k)}$, в которой

$$\tilde{\theta}_{ij} = \theta_{ij}, \text{ для всех } i \neq j \text{ и } i, j \neq k,$$

$$\tilde{\theta}_{i0} = \theta_{i0} + \theta_{ik}, \quad i = 1, \dots, L,$$

$$\tilde{\theta}_{ik} = 0, \quad i = 1, \dots, L.$$

Процесс η_k , описывающий функционирование сети в течение недиагностируемого такта, является марковским с инфинитезимальным оператором $A(\tilde{\Theta}^{(k)})$. В силу предположения о малой длительности такта Δ процесс η_k нестационарный. Вероятности состояний сети удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{dP(t)}{dt} = A(\tilde{\Theta}^{(k)})P(t), \quad 0 \leq t \leq \Delta,$$

где $P(t) = (P(n, t))$, $n \in E_L$, – вектор вероятностей состояний в момент времени t , причем $n_k = 0$ для любого t .

Тогда

$$P(\Delta) = P(0) \left(I + A(\tilde{\Theta}^{(k)})\Delta + o(\Delta) \right).$$

В дальнейшем будем использовать линейное приближение с погрешностью $o(\Delta)$ и считать, что

$$P(\Delta) = P(0) \left(I + A(\tilde{\Theta}^{(k)})\Delta \right).$$

Таким образом,

$$P(n | m_k) = P(n, \Delta) = P(n, 0) + \Delta \sum_{m \in E(n)} P(m, 0) a_{mn}(\tilde{\Theta}^{(k)}), \quad n \in E_L,$$

где $P(n, 0) = \sum_{n(n_k=m): m=0}^{\infty} P(n | m_0)$, $n \in E_L$, $E(n) \subset E_L$ – подмножество состояний, из которых возможен переход в состояние n при перемещении одного требования, $|E(n)| \leq L(L+1)$.

Переходы сети между макросостояниями можно описать цепью Маркова с непрерывным временем и матрицей интенсивностей $A = (a_{ij})$, $i, j \in M$, где

$$\text{при } i \neq j \quad a_{ij} = \begin{cases} \gamma_i, & i = m_0, j = m_i, \\ \tau, & i = m_i, j = m'_i, \\ \beta_i, & i = m'_i, j = m_0, \\ 0, & \text{иначе при } i \neq j, \end{cases}$$

$$\text{при } i = j \quad a_{ii} = - \sum_{\substack{j \in M \\ j \neq i}} a_{ij}.$$

Стационарное распределение вероятностей макросостояний сети $\pi = (\pi_m)$, $m \in M$, является решением системы уравнений $\pi A = 0$ с условием нормировки $\sum_{m \in M} \pi_m = 1$.

Тогда по формуле полной вероятности для средних стационарных вероятностей состояний ненадежной сети справедливо равенство

$$P(n) = \sum_{m \in M} P(n | m) \pi_m,$$

где $P(n | m)$ – вероятность состояния $n \in E_L$ при условии, что сеть находится в макросостоянии m , причем состояние $n \in E_{L-1}$ соответствует состоянию $n \in E_L$ при $n_k = 0$, а вероятности $P(n | m)$ состояний $n \in E_L$, при $n_k \neq 0$ для $m \in \{m_1, \dots, m_L, m'_1, \dots, m'_L\}$ равны нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sauer C., Daduna H.* BCMP networks with unreliable servers // Preprint No. 2003-01, Schwerpunkt Mathematische Statistik und Stochastische Prozesse, Universitat Hamburg, 2003.
2. *Sommer J., Berkhout J., Daduna H., Heidergott B.* Analysis of Jackson networks with infinite supply and unreliable nodes // *Queueing Systems*. 2017. V. 87. Issue 1-2. P. 181–207.
3. *Tsai Y.-L., Yanagisawa D., Nishinari K.* Performance analysis of open queueing networks subject to breakdowns and repairs // *Engineering Letters*. 2016. V. 24. No. 2. P. 207–214.
4. *Tsitsiashvili G.S., Osipova M.A.* Limiting distributions in queueing networks with unreliable elements // *Problems of Information Transmission*. 2008. V. 44. No. 4. P. 385–394.
5. *Статкевич С.Э., Маталыцкий М.А.* Исследование сети массового обслуживания с ненадежными системами в переходном режиме // *Вестник Томского гос. ун-та*. 2012. № 1(18). С. 112–125.
6. *Glazebrook K.D., Kirkbride C.* Dynamic routing to heterogeneous collections of unreliable servers // *Queueing Systems*. 2007. V. 55. P. 9–25.
7. *Akyildiz I.F., Liu W.* Performance optimization of distributed-system models with unreliable servers // *IEEE Trans. on Reliability*, 1990. V. 39. No. 2. P. 236–243.
8. *Фокина Н.П., Тананко И.Е.* Метод управления маршрутизацией в сетях массового обслуживания с переменной топологией // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2013. Т. 13. Вып. 2. Ч. 2. С. 82–88.
9. *Saghafian S., Oyen M.P., Kolfal B.* The “W” network and the dynamic control of unreliable flexible servers // *IEE Transactions*. 2011. V. 43. P. 893–907.
10. *Вишневецкий В.М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003. 512 с.

Двумерная гауссовская аппроксимация суммарных объемов занятого ресурса с ММРР-входящим потоком заявок и их параллельным обслуживанием

Е.Н. Чернышова, Е.Ю. Лисовская

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

В настоящее время, ввиду широкой востребованности мобильных и телекоммуникационных сетей, значительную роль играет исследование моделей массового обслуживания [1, 2]. Эти математические модели используются для анализа показателей и улучшения эффективности систем. Однако недостаток таких моделей состоит в том, что довольно часто они не учитывают стохастическую природу поступления и обслуживания абонентов. Для более правдоподобного описания этих процессов используют марковские или рекуррентные потоки событий.

Помимо этого, ввиду неоднородности услуг (телефонные звонки, смс-сообщения, интернет-трафик), необходимо учитывать объём обрабатываемой информации во избежание потери или искажении данных из-за нехватки ресурсов [3–5].

В данной статье с помощью методов многомерного динамического просеивания и асимптотического анализа исследуется СМО с входящим ММРР-потоком заявок и их параллельным обслуживанием.

Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания, состоящую из двух блоков, каждый из которых имеет неограниченное число приборов; на вход поступает ММРР-поток требований, управляемый цепью Маркова $k(t)$, заданный матрицами инфинитезимальных характеристик Q и условных интенсивностей Λ (рис. 1).

Дисциплина обслуживания определяется следующим образом. Заявка, пришедшая в СМО, попадает в каждый блок и мгновенно занимает любой свободный прибор, где обслуживается в течение случайного времени. Функция распределения вероятностей времени обслуживания на первом блоке – $B_1(\tau) = P\{\xi_1 < \tau\}$, на втором – $B_2(\tau) = P\{\xi_2 < \tau\}$. Функции распределения вероятностей для случайного объема ресурсов

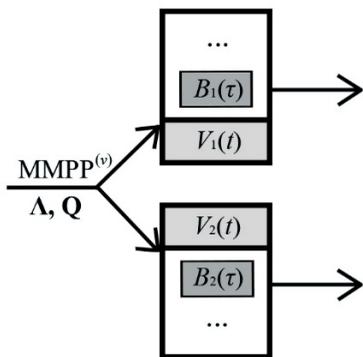


Рис. 1. Ресурсная СМО с ММРР потоком и параллельным обслуживанием

$G_1(y) = P\{v_1 < y\}$, $G_2(y) = P\{v_2 < y\}$ соответственно. При завершении обслуживания, требование покидает систему, освобождая прибор и все занимаемые ресурсы. Количество занимаемого ресурса и время обслуживания не зависят друг от друга.

Пусть $V_1(t)$ и $V_2(t)$ – суммарный объем занятого ресурса на первом и втором блоках соответственно. Ставится задача исследования случайного двумерного процесса $\{V_1(t), V_2(t)\}$. Важно отметить, что данный процесс не является марковским, для его марковизации и дальнейшего исследования применим метод многомерного динамического просеивания.

На рис. 2 изображены три оси времени. Ось под номером 0 отображает моменты наступления событий входящего потока. Зададим функции, определяющие динамические вероятности просеивания на оси 1 и 2. Зафиксируем произвольный момент времени T . Функция $S_1(t) = 1 - B_1(T - t)$ – вероятность просеивания на ось 1, $S_2(t) = 1 - B_2(T - t)$ – на ось 2, $S_1(t) \cdot S_2(t) = (1 - B_1(T - t))(1 - B_2(T - t))$ – на оси 1 и 2 одновременно.

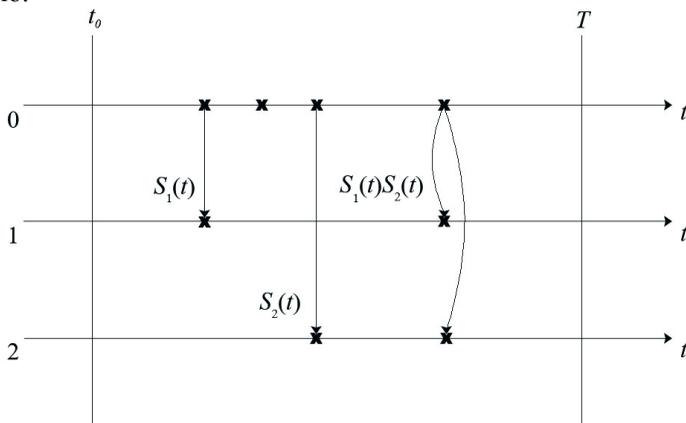


Рис. 2. Просеивание заявок входящего потока событий

Пусть $W_i(t)$, $i=1,2$, – суммарный объём занятого ресурса в СМО после просеивания. Для исследуемого процесса $\{V_1(t), V_2(t)\}$ справедливо

$$P\{V_1(t) < z_1, V_2(t) < z_2\} = P\{W_1(t) < z_1, W_2(t) < z_2\}, \forall z_1, z_2 > 0. \quad (1)$$

Составим трёхмерный случайный процесс $\{k(t), W_1(t), W_2(t)\}$, где $k(t)$ – состояние цепи Маркова, управляющей входящим ММРР потоком. Данный процесс является марковским, для его дальнейшего исследования воспользуемся Δt -методом.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Функция распределения вероятностей имеет вид

$$P\{k(t) = k, W_1(t) < w_1, W_2(t) < w_2\} = P(k, w_1, w_2, t), k = \overline{1, K}, \forall w_1, w_2 > 0.$$

Воспользуемся формулой полной вероятности, составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, w_1, w_2, t)}{\partial t} = & \lambda_k S_1(t) \left[\int_0^{v_1} P(k, w_1 - y, w_2, t) dG_1(y) - P(k, w_1, w_2, t) \right] + \\ & + \lambda_k S_2(t) \left[\int_0^{v_2} P(k, w_1, w_2 - y, t) dG_2(y) - P(k, w_1, w_2, t) \right] + \\ & + \lambda_k S_1(t) S_2(t) \left[\int_0^{w_2} \int_0^{w_1} P(k, w_1 - y_1, w_2 - y_2, t) G_1(y_1) G_2(y_2) - \right. \\ & \left. - P(k, w_1, w_2, t) \right] + \sum_{v \neq k} P(k, w_1, w_2, t) q_{vk}, \end{aligned}$$

с начальным условием $P(k, w_1, w_2, t_0) = \begin{cases} r(k), w_1 = w_2 = 0, \\ 0, \text{ иначе,} \end{cases}$ где $r(k)$ – стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова $k(t)$.

Введём характеристические функции вида

$$h(k, u_1, u_2, t) = \int_0^\infty e^{ju_1 w_1} \int_0^\infty e^{ju_2 w_2} P(k, dw_1, dw_2, t),$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Запишем для них систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(k, u_1, u_2, t)}{\partial t} = & \lambda_k S_1(t) h(k, u_1, u_2, t) [G_1^*(u_1) - 1] + \\ & + \lambda_k S_2(t) h(k, u_1, u_2, t) [G_2^*(u_2) - 1] + \\ & + \lambda_k S_1(t) S_2(t) h(k, u_1, u_2, t) [G_1^*(u_1) G_2^*(u_2) - 1] + \\ & + \sum_{v \neq k} h(k, u_1, u_2, t) q_{vk}, \end{aligned}$$

где $G_i^*(u) = \int_0^\infty e^{juv} dG_i(v)$, $i = 1, 2$. Приведём систему дифференциальных уравнений к матричному виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, t)}{\partial t} = & \mathbf{H}(u_1, u_2, t) \left[\mathbf{\Lambda} \left(S_1(t) [G_1^*(u_1) - 1] + S_2(t) [G_2^*(u_2) - 1] + \right. \right. \\ & \left. \left. + S_1(t) S_2(t) [G_1^*(u_1) G_2^*(u_2) - 1] \right) + \mathbf{Q} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(u_1, u_2, t) = \mathbf{r}, \quad (3)$$

где $\mathbf{H}(u_1, u_2, t) = [h(1, u_1, u_2, t), \dots, h(K, u_1, u_2, t)]$, $\mathbf{r} = [r(1), \dots, r(K)]$; \mathbf{r} – вектор-строка стационарного распределения вероятностей состояний $k(t)$, удовлетворяющая системе матричных линейных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{r}\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}\mathbf{e} = 1; \end{cases}$$

\mathbf{e} – единичный вектор-столбец.

Метод асимптотического анализа

Воспользуемся методом асимптотического анализа в условиях растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова.

Обозначим $\mathbf{\Lambda} = N\bar{\mathbf{\Lambda}}$ и $\mathbf{Q} = N\bar{\mathbf{Q}}$, где $N \rightarrow \infty$ – некоторый параметр. Перепишем уравнение (2), используя введённые обозначения.

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, t)}{\partial t} = & \mathbf{H}(u_1, u_2, t) \left[\overline{\Lambda} \left(S_1(t) \left[G_1^*(u_1) - 1 \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + S_2(t) \left[G_2^*(u_2) - 1 \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + S_1(t) S_2(t) \left[G_1^*(u_1) G_2^*(u_2) - 1 \right] \right] + \overline{\mathbf{Q}} \right] \end{aligned}$$

с начальным условием (3).

Теорема 1. Совместное асимптотическое распределение вероятностей двумерного процесса суммарных объемов занятого ресурса на блоках СМО с параллельным обслуживанием в условиях растущей интенсивности входящего потока и при предельно частых изменениях состояний управляющей ММРР-поток цепи Маркова является двумерным гауссовским распределением вероятностей с параметрами:

- вектор математических ожиданий:

$$\mathbf{a} = \left[N\lambda a_1^{(1)} b_1 \quad N\lambda a_2^{(1)} b_2 \right];$$

- матрица ковариаций:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} N\lambda a_1^{(2)} b_1 + N\kappa \left(a_1^{(1)} \right)^2 \beta_1 & Na_1^{(1)} a_2^{(1)} b_{12} (\lambda + \kappa) \\ Na_1^{(1)} a_2^{(1)} b_{12} (\lambda + \kappa) & N\lambda a_2^{(2)} b_2 + N\kappa \left(a_2^{(1)} \right)^2 \beta_2 \end{bmatrix},$$

где $\lambda = \mathbf{r} \overline{\Lambda} \mathbf{e}$, $\kappa = 2\mathbf{g} \left(\overline{\Lambda} - \lambda \mathbf{I} \right) \mathbf{e}$, $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}$, $i = \overline{1, 2}$, – первые и вторые начальные моменты объема занимаемого ресурса каждой заявкой;

$$b_i = \int_0^{\infty} (1 - B_i(\tau)) d\tau, \quad \beta_i = \int_0^{\infty} (1 - B_i(\tau))^2 d\tau, \quad i = \overline{1, 2};$$

$$b_{12} = \int_0^{\infty} (1 - B_1(\tau))(1 - B_2(\tau)) d\tau.$$

Заключение

Была исследована ресурсная СМО с неограниченным числом приборов с входящим ММРР-поток и их параллельным обслуживанием. С использованием методов динамического просеивания и асимптотического анализа было показано, что совместное асимптотическое распределение вероятностей чисел занятых приборов и суммарного объема

занятого ресурса каждого типа сходится к двумерному гауссовскому распределению в условиях растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменениях состояний цепи Маркова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ефросинин Д.В.* Методы анализа управляемых динамических систем: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 05.13.01 / М., 2013. 332 с.
2. *Матальцкий М.А., Тихоненко О.М., Паньков А.В.* Теория массового обслуживания и ее применения. Гродно: ГрГУ, 2008. 771 с.
3. *Pankratova E., Moiseeva S.* Queueing system $GI/GI/\infty$ with n types of customers // Communications in Computer and Information Science. Switzerland: Springer, 2015. V. 564. P. 216–225.
4. *Моисеева С.П., Назаров А.А.* Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
5. *Лисовская Е.Ю.* Асимптотические методы исследования ресурсных СМО с непугассоновскими входящими потоками: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Томск, 2018. 138 с.

Метод марковского суммирования для исследования потока повторных обращений в системах $M|GI|_{\infty}$

М.А. Шкленник, А.Н. Моисеев, А.С. Морозова

*Национальный исследовательский Томский государственный
университет, г. Томск, Россия*

Системы массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом обслуживающих приборов и обратной связью являются математическими моделями инфокоммуникационных систем, в частности систем с дообслуживанием, а также различных социально-экономических систем [1, 2]. Исследованию потоков в такого рода системах посвящено немало количество работ. Но для получения аналитического выражения для характеристик потоков в данных системах имеется не так много методов, и они позволяют это сделать лишь при существенных ограничениях. Так, например, метод предельной декомпозиции, используемый для исследования потоков [3 – 6], можно применять лишь в системах с входящим пуассоновским потоком, а методы асимптотического анализа [7, 8] позволяют определять характеристики систем при выполнении некоторого предельного условия. Причем, как правило, все системы исследуются при стационарном режиме работы. Предлагается использовать метод марковского суммирования [9] для исследования потока повторных обращений в двухфазной СМО с неограниченным числом приборов, произвольным обслуживанием и возможностью повторного обращения на второй фазе системы.

Постановка задачи

Рассмотрим двухфазную систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих устройств на каждой фазе и возможностью повторного обращения на второй фазе. На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Время обслуживания заявки на первой фазе системы является произвольной случайной величиной, заданной функцией распределения $B_1(x)$. Каждая заявка, завершив обслуживание на первой фазе системы, с вероятностью r_1 может перейти на вторую фазу системы или с вероятностью $(1 - r_1)$

покинуть систему. Время обслуживания заявки на второй фазе системы также является произвольной случайной величиной, имеющей функцию распределения $B_2(x)$. Завершив обслуживание на второй фазе системы, каждая заявка может с вероятностью r_2 вернуться на вторую фазу системы для следующего повторного обслуживания, или с вероятностью $(1 - r_2)$ покинуть систему. Повторными обращениями к системе будем считать все обращения заявок ко второй фазе системы. В работе ставится задача нахождения распределения вероятностей числа событий в r -потоке – потоке повторных обращений в системе с момента начала ее функционирования.

Метод марковского суммирования

Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ система свободна и в ней нет обслуживаемых заявок. Рассмотрим одну заявку входящего потока, поступившую в систему в момент времени t . Она будет формировать события r -потока, которые наступят после момента времени t . Зафиксируем некоторый момент времени $t = T$. Обозначим $n(t)$ – число событий r -потока, то есть число обращений ко второй фазе системы, наступивших на интервале $[0, T]$, сформированных всеми заявками входящего потока, поступившими в систему на интервале $[0, t]$, $t \leq T$.

Пусть $P(n, t) = P\{n(t) = n\}$, тогда $P(n) = P(n, T)$ есть распределение вероятностей числа событий r -потока, наступивших за время T на интервале $[0, T]$.

Обозначим $\xi(t)$ – число событий r -потока, сформированных одной заявкой, поступившей в систему в момент времени t за интервал $(T - t)$ – локальный r -поток; $g(i, t) = P\{\xi(t) = i\}$ – вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени t , к моменту времени T сформирует в r -потоке i событий.

По формуле полной вероятности запишем равенство

$$P(n, t) = P\{n(t) = n\}P(n, t + \Delta t) = P(n, t)(1 - \lambda \Delta t) + \\ + \lambda \Delta t \sum_{i=0}^n P(n - i, t) g(i, t) + o(\Delta t).$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ получим дифференциальное уравнение Колмогорова для распределения вероятностей $P(n, t)$

$$\frac{\partial P(n, t)}{\partial t} = -\lambda P(n, t) + \lambda \sum_{i=0}^n P(n - i, t) g(i, t) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$P(n, 0) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2)$$

Определим характеристические функции вида

$$H(u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(n, t),$$

$$G(u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} g(i, t).$$

Тогда из уравнения (1) получим дифференциальное уравнение для характеристической функции исследуемого процесса $n(t)$:

$$\frac{\partial H(u, t)}{\partial t} = \lambda H(u, t)(G(u, t) - 1) \quad (3)$$

с начальными условиями

$$H(u, 0) \equiv 1. \quad (4)$$

Для решения задачи (3), (4) найдем вид характеристической функции $G(u, t)$ процесса $\xi(t)$.

Исследование локального r -потока

Рассмотрим произвольный момент времени τ ($t \leq \tau \leq T$). Пусть $\eta(t, \tau)$ – число событий локального r -потока, то есть число повторных обращений, сформированных заявкой, поступившей в систему в момент времени t , за интервал $[t, t + \tau]$. Тогда $\xi(t) = \eta(t, T - t)$.

Введем в рассмотрение дополнительные переменные:

- $v(t, \tau)$ – состояние заявки, поступившей в систему в момент времени t , в момент времени $t + \tau$, то есть если к моменту времени $t + \tau$ заявка покинула систему, то $v(t, \tau) = 0$; если к моменту времени $t + \tau$ заявка находится на первой фазе системы, то $v(t, \tau) = 1$; и если к моменту времени $t + \tau$ заявка находится на второй фазе системы, то $v(t, \tau) = 2$;

- $z(t, \tau)$ – длина интервала времени от момента $t + \tau$ до окончания текущего обслуживания заявки (если она не покинула систему).

Случайный процесс $\{\eta(t, \tau), v(t, \tau), z(t, \tau)\}$ является марковским.

Введем следующие обозначения:

1) $g_0(i, t, \tau) = P\{\eta(t, \tau) = i, v(t, \tau) = 0\}$ – вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени t , к моменту времени $t + \tau$ покинула систему и сделала i повторных обращений;

2) $g_1(i, t, \tau, z) = P\{\eta(t, \tau) = i, v(t, \tau) = 1, z(t) < z\}$, если $i = 0$, и $g_1(i, t, \tau, z) = 0$, если $i > 0$, – вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени t , к моменту времени $t + \tau$ находится на первой фазе и сделала i повторных обращений;

3) $g_2(i, t, \tau, z) = P\{\eta(t, \tau) = i, v(t, \tau) = 2, z(t) < z\}$, если $i > 0$, и $g_2(i, t, \tau, z) = 0$, если $i = 0$, – вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени t , к моменту времени $t + \tau$ находится на первой фазе и сделала i повторных обращений.

Заметим, что вид выражений для вышеперечисленных вероятностей не будет зависеть от t , поэтому в дальнейшем для краткости исключим этот аргумент.

Перейдем к частичным характеристическим функциям вида

$$G_0(u, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} g_0(i, \tau); \quad (5)$$

$$G_1(\tau, z) = \begin{cases} g_1(i, \tau, z), & i = 0, \\ 0, & i > 0; \end{cases} \quad (6)$$

$$G_2(u, \tau, z) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} e^{ju i} g_2(i, \tau, z), & i > 0, \\ 0, & i = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Тогда характеристическая функция $G(u, t)$ процесса $\xi(t)$ будет определяться выражением

$$G(u, t) = G_0(u, T - t) + G_1(T - t, \infty) + G_2(u, T - t, \infty).$$

Подставив выражения (5) – (7) в систему дифференциальных уравнений Колмогорова для описанного выше распределения вероятностей, получим систему дифференциальных уравнений для функций $G_0(u, \tau)$, $G_1(\tau, z)$ и $G_2(u, \tau, z)$. Проинтергрировав данную систему и определив вид функций $G_0(u, \tau)$, $G_1(\tau, z)$ и $G_2(u, \tau, z)$, получаем

$$G(u, t) = 1 + r_1(e^{ju} - 1)B_1(T - t) + \frac{r_1 r_2}{2\pi} (e^{ju} - 1) e^{ju} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha) (1 - e^{-j\alpha(T-t)})}{(1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)) j\alpha} d\alpha. \quad (8)$$

Характеристическая функция r -потока

Подставив в уравнение (3) выражение (8) для характеристической функции локального r - потока, получим дифференциальное уравнение для характеристической функции исследуемого процесса $n(t)$. Проинтегрировав его с начальными условиями (4) и положив $t = T$, получим характеристическую функцию распределения вероятностей

$$H(u, T) = \exp \left[\lambda r_1 (e^{ju} - 1) \left\{ \int_0^T B_1(x) dx + \frac{r_2}{2\pi} e^{ju} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha)}{(1 - r_2 e^{j\alpha}) j\alpha} \left(T - \frac{1 - e^{-j\alpha T}}{j\alpha} \right) d\alpha \right\} \right].$$

Заключение

В данной работе получено выражение для характеристической функции распределения вероятностей числа повторных обращений в неоднородной системе массового обслуживания при нестационарном режиме работы. Найденное выражение позволяет получить основные вероятностные характеристики исследуемого процесса.

Предложенный метод исследования потока повторных обращений в системах с обратной связью существенно расширяет класс задач теории массового обслуживания, для которых можно получить аналитическое выражение без существенных ограничений. Так, например, данный метод позволяет исследовать поток повторных обращений в системах с немарковскими входящими потоками и произвольным временем обслуживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жидкова Л.А., Моисеева С.П. Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам // Изв. Томского политехнического университета. 2013. Т. 322. № 6. С. 5.
2. Shklennik M., Moiseeva S., Moiseev A. Optimization of two-level discount values using queueing tandem model with feedback // CCIS. 2018. V. 912. P. 321–332.
3. Назаров А.А., Моисеева С.П., Морозова А.С. Исследование СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. № 55. С. 88–92.

4. Морозова А.С., Моисеева С.П. Исследование потока повторных обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. 2005. № 287. С. 46–51.
5. Моисеева С.П., Шкленник М.А., Набокова О.О. Исследование потоков в двухфазной бесконечнолинейной СМО с повторными обращениями методом предельной декомпозиции // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017): материалы XVI Междунар. конф. имени А.Ф. Терпугова, 29 сент. – 3 окт. 2017 г. Томск: Изд-во НТЛ, 2017. Ч. 1. С. 108–114.
6. Шкленник М.А., Моисеева С.П.. Исследование потока повторных обращений в неоднородных бесконечнолинейных системах массового обслуживания // Проблемы оптимизации сложных систем: сб. докл. Двенадцатой Международной азиатской школы-семинара. Новосибирск, Академгородок, 12–16 декабря 2016 г. Новосибирск, 2016. С. 542–546.
7. Жидкова Л.А., Моисеева С.П. Исследование системы $GI|M|\infty$ с повторными обращениями. // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы II Всероссийской молодежной научной конференции. Т. 295. Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. С. 94–100.
8. Pankratova E., Moiseeva S. Queueing system $GI/GI/(\text{infinity})$ with n types of customers // Communications in Computer and Information Science. Switzerland: Springer, 2015. V. 564. P. 216–225.
9. Nazarov A., Dammer D. Methods of limiting decomposition and Markovian summation in queueing system with infinite number of servers // CCIS. 2018. V. 912. P. 71–82.

ПРИКЛАДНОЙ ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ

Remarks on the Markov Branching Processes with mean one and infinite variance

A.A. Imomov, A.Kh. Meyliyev

Karshi State University Karshi city, Uzbekistan

Definition and preliminaries

Let $\{Z(t), t \geq 0\}$ is the continuous-time Markov Branching Process (MBP) to be a homogeneous Markov chain with the state space $\mathcal{S}_0 = \{0\} \cup \mathcal{S}$, where $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$ and $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Transition probabilities of the process $P_{ij}(t) = \mathbb{P}\{Z(t) = j | Z(0) = i\}$ satisfy the branching property

$$P_{ij}(t) = P_{1j}^{i*}(t) \quad \text{for all } i, j \in \mathcal{S}, \quad (1)$$

where the asterisk denotes convolution. Herein the transition probabilities $P_{1j}(t)$ expressed by the following relation:

$$P_{1j}(\varepsilon) = \delta_{1j} + a_j \varepsilon + o(\varepsilon) \quad \text{as } \varepsilon \downarrow 0, \quad (2)$$

where δ_{ij} is Kronecker's delta function and $\{a_j\}$ are intensities of individuals' transformation so that that $a_j \geq 0$ for $j \in \mathcal{S}_0 \setminus \{1\}$ and

$$0 < a_0 < -a_1 = \sum_{j \in \mathcal{S}_0 \setminus \{1\}} a_j < \infty;$$

see [1, Ch. III]. Consider the generating functions (GF)

$$F(t, s) = \sum_{j \in \mathcal{S}_0} P_{1j}(t) s^j \quad \text{and} \quad f(s) = \sum_{j \in \mathcal{S}_0} a_j s^j \quad \text{for } s \in [0, 1).$$

It follows from (1) and (2) that the process $\{Z(t)\}$ is determined by the infinitesimal GF $f(s) = \sum_{j \in \mathcal{S}_0} a_j s^j$. Let $m := \sum_{j \in \mathcal{S}} j a_j$ is finite. Then $m = f'(1-)$ and the process $\{Z(t)\}$ is classified as sub-critical, critical and supercritical, if $m < 0$, $m = 0$ and $m > 0$, respectively. In this report, we consider the critical case only that is $m = 0$.

Put $R(t; s) = 1 - F(t; s)$. It is known that if $f'''(1-) < \infty$ then

$$\frac{1}{R(t; s)} - \frac{1}{1-s} = \frac{f''(1-)}{2}t + O(\ln t) \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (3)$$

for all $s \in [0, 1)$; see [3, p. 20]. In particular the value $q(t) = R(t; 0)$ is the surviving probability of MBP. V. Zolotarev [7] has established a principally new result on asymptotic representation of $q(t)$ without the assumption $f''(1-) < \infty$. Namely providing that $g(x) = f(1-x)$ is a regularly varying function at zero, that is

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{xg'(x)}{g(x)} = \gamma$$

with index $1 < \gamma = 1 + \alpha \leq 2$, he has proved that

$$\frac{q(t)}{f(1-q(t))} \sim \alpha t \quad \text{as } t \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Main assumptions and Basic Lemma

From this point, we assume that the GF $f(s)$ admits the representation

$$f(s) = (1-s)^{1+\nu} \mathcal{L}\left(\frac{1}{1-s}\right) \quad (5)$$

for all $s \in [0, 1)$, where $0 < \nu < 1$ and $\mathcal{L}(\ast)$ is slowly varying (SV) function at infinity in sense of Karamata; see [6]. By the criticality of the process the condition (5) implies that $f''(1-) = \infty$.

A.Pakes [5] has established, that if the condition (5) holds then

$$\frac{1}{R(t; s)} = U\left(t + V\left(\frac{1}{1-s}\right)\right), \quad (6)$$

where $V(x) = \mathcal{M}(1-1/x)$ and $\mathcal{M}(s)$ is GF of invariant measures of MBP. And $U(y)$ is the inverse of the function $V(x)$. From the formula (6) follows an alternative relation to (4):

$$q(t) = \frac{1}{U(t)}.$$

Letting $\Lambda(y) := y^\nu \mathcal{L}(1/y)$ for $y \in (0,1]$, we rewrite (5) as

$$f(1-y) = y\Lambda(y).$$

Note that the function $y\Lambda(y)$ is positive and tends to zero and has a derivative so that $y\Lambda'(y)/\Lambda(y) \rightarrow \nu$ as $y \downarrow 0$; see [2, p. 401]. Therefore, it is natural to write the following relation:

$$\frac{y\Lambda'(y)}{\Lambda(y)} = \nu + \delta(y),$$

where $\delta(y)$ is continuous and $\delta(y) \rightarrow 0$ as $y \downarrow 0$. At the same time, since $\mathcal{L}(\ast)$ is SV at infinity, it is natural to write

$$\frac{\mathcal{L}(\lambda x)}{\mathcal{L}(x)} = 1 + \sigma(x) \tag{7}$$

for each $\lambda > 0$, where $\sigma(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$. If henceforth it is supposed that there is some positive function $g(x)$ so that $g(x) \rightarrow 0$ and $\sigma(x) = O(g(x))$, then $\mathcal{L}(\ast)$ is said to be *SV-function with remainder* at infinity; see [2, p. 185, condition SR1]. We see $\sigma(x) = O(\delta(1/x))$ as $x \rightarrow \infty$.

In further discussion, suppositions (5) and (7) are our *main assumptions*.

The following Basic Lemma improves assertions (3) and (6), because firstly the finiteness of $f''(1-)$ declined here and secondly the character of asymptotical decreasing of the function $R(t;s)$ seems to be more explicitly rather than in the formula (6). Let

$$\mathfrak{U}(t;s) := \int_0^t \delta(R(u;s)) du.$$

Since $\delta(y) \rightarrow 0$ as $y \downarrow 0$ then $\mathfrak{U}(t;s) = o(t)$ as $t \rightarrow \infty$.

Lemma. *Under the main assumptions (5) and (7)*

$$\frac{1}{\Lambda(R(t;s))} - \frac{1}{\Lambda(1-s)} = \nu t + \mathfrak{U}(t;s).$$

If, in particular $\delta(y) = \Lambda(y)$, then

$$\frac{1}{\Lambda(R(t;s))} - \frac{1}{\Lambda(1-s)} = vt + \frac{1}{v} \ln v(t;s) + o(\ln v(t;s))$$

as $t \rightarrow \infty$, where

$$v(t;s) = \Lambda(1-s)vt + 1$$

for all $s \in [0,1)$.

Subsequent theorems from the Lemma

The following theorems derive from Lemma and first of these improves the assertion (4).

Theorem 1. Under the main assumptions (5) and (7)

$$q(t) = \frac{\mathcal{N}(t)}{(vt)^{1/v}} \left(1 - \frac{\mathfrak{U}(t)}{v^2 t} + o\left(\frac{\mathfrak{U}(t)}{t}\right) \right), \quad \text{as } t \rightarrow \infty,$$

where $\mathfrak{U}(t) = \mathfrak{U}(t;0)$; if, in particular $\delta(y) = \Lambda(y)$, then

$$q(t) = \frac{\mathcal{N}(t)}{(vt)^{1/v}} \left(1 - \frac{\ln[a_0 vt + 1]}{v^3 t} + o\left(\frac{\ln t}{t}\right) \right), \quad \text{as } t \rightarrow \infty,$$

where $\mathcal{N}(t)$ is SV-function so that

$$\mathcal{N}^v(t) \mathcal{L} \left(\frac{(vt)^{1/v}}{\mathcal{N}(t)} \right) \longrightarrow 1 \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

Theorem 2. Under the main assumptions (5) and (7)

$$(vt)^{1+1/v} P_{11}(t) = \frac{\mathcal{N}(t)}{a_0} \left(1 - \frac{1+v}{v^2} \frac{\mathfrak{U}(t)}{t} + o\left(\frac{\mathfrak{U}(t)}{t}\right) \right)$$

as $t \rightarrow \infty$, where $\mathfrak{U}(t) = \mathfrak{U}(t;0)$; if, in particular $\delta(y) = \Lambda(y)$, then

$$(vt)^{1+1/v} P_{11}(t) = \frac{\mathcal{N}(t)}{a_0} \left(1 - \frac{1+v}{v^3} \frac{\ln[a_0 vt + 1]}{t} + o\left(\frac{\ln t}{t}\right) \right)$$

as $t \rightarrow \infty$, where $\mathcal{N}(t)$ is SV-function defined Theorem 1.

Now put $\mathbb{P}_i\{*\} := \mathbb{P}\{*|Z(0) = i\}$ and consider a conditional distribution

$$\mathbb{P}_i^{\mathcal{H}(t+u)}\{*\} = \mathbb{P}_i\{*|t + u < \mathcal{H} < \infty\},$$

where $\mathcal{H} = \inf\{t: Z(t) = 0\}$ is an extinction time of the process. It was shown in [4] that the probability measures

$$Q_{ij}(t) := \lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{P}_i^{\mathcal{H}(t+u)}\{Z(t) = j\} = \frac{i}{j} P_{ij}(t)$$

defines a continuous-time Markov chain $\{\omega(t), t \geq 0\}$ with the state space $\mathcal{E} \subset \mathbb{N}$, called *Markov Q-process* (MQP). According to the definition

$$Q_{ij}(t) = \mathbb{P}_i\{Z(t) = j | \mathcal{H} = \infty\},$$

so MQP can be interpreted as MBP with non-degenerating trajectory in remote future. Define

$$G_i(t; s) = \sum_{j \in \mathcal{E}} Q_{ij}(t) s^j \quad \text{for } s \in [0, 1).$$

Theorem 3. *Under the main assumptions (5) and (7)*

$$(\nu t)^{1+1/\nu} G_i(t; s) = \pi(s) \mathcal{N}(t) (1 + \rho(t; s)),$$

where $\rho(t; s) = o(1)$ as $t \rightarrow \infty$. The function $\pi(s)$ has an expansion in powers of s with non-negative coefficients so that $\pi(s) = \sum_{j \in \mathcal{E}} \pi_j s^j$ and $\{\pi_j, j \in \mathcal{E}\}$ is an invariant measure for MQP at that

$$\pi(s) = \frac{s}{(1-s)^{1+\nu}} \mathcal{L}_\pi \left(\frac{1}{1-s} \right), \tag{8}$$

where $\mathcal{L}_\pi(*) = \mathcal{L}^{-1}(*)$. If, in particular $\delta(y) = \Lambda(y)$, then

$$\rho(t; s) = -\frac{1+\nu}{\nu^3} \frac{\ln[\Lambda(1-s)\nu t + 1]}{t} + o\left(\frac{\ln t}{t}\right), \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

Note that in accordance with tauberian theorem (8) implies

$$\sum_{j=1}^n \pi_j = \frac{1}{\Gamma(2+\nu)} n^{1+\nu} \mathcal{L}_\pi(n),$$

where $\Gamma(*)$ is Euler's Gamma function and $\mathcal{L}_\pi(n) \mathcal{L}(n) \rightarrow 1$ as $n \rightarrow \infty$.

REFERENCES

1. *Athreya K.B., Ney P.E.* Branching processes, New York: Springer, 1972.
2. *Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.* Regular Variation. Cambridge University Press, 1987.
3. *Harris T.E.* The theory of branching processes, Berlin: Springer-Verlag, 1963.
4. *Imomov A.A.* On Markov analogue of Q-processes with continuous time // Theory Prob. and Math. Stat. 2012. V. 84. P. 57–64.
5. *Pakes A.G.* Critical Markov branching process limit theorems allowing infinite variance // Adv. Appl. Prob. 2010. V. 42. P. 460–488.
6. *Seneta E.* Regularly Varying Functions, Berlin: Springer, 1972.
7. *Zolotarev V.M.* More exact statements of several theorems in the theory of branching processes // Theory Prob. Appl. 1957. V. 2. P. 245–253.

Remarks on Galton-Watson Branching Processes with infinite variance and Immigration component

A.A. Imomov, E.E. Tukhtayev

Karshi State University, Karshi city, Uzbekistan

Definition and preliminaries

Let $\{X(n), n \in \mathbb{N}_0\}$ is the Galton – Watson branching process allowing immigration, where $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ and $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. This is a homogeneous Markov chain with the state space $\mathcal{S}_0 = \{0\} \cup \mathcal{S}$, where $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$. Transition probabilities from $i \in \mathcal{S}_0$ to $j \in \mathcal{S}_0$ of the process for a single step is

$$p_{ij} = \text{coefficient of } s^j \text{ in } h(s)(f(s))^i, \quad s \in [0, 1),$$

where $h(s) = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} h_j s^j$ and $f(s) = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} p_j s^j$ are probability generating functions (PGFs). We interpret $X(n)$ as the population size in the process at the moment n . An evolution of the process will occurs by following scheme. An initial state is empty that is $\mathbb{P}\{X(0) = 0\} = 1$ and the process starts owing to immigrants. Each individual at time n produces k progeny with probability p_k independently of each other so that $p_0 > 0$. Simultaneously in the population h_j immigrants arrive with probability j in each moment n . These individuals undergo further transformation obeying the reproduction law $\{p_j\}$ and n -step transition probabilities

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}\{X(n+k) = j | X(k) = i\}$$

for each $k \in \mathbb{N}$ are given by PGF

$$\mathcal{P}_n^{(i)}(s) := \sum_{j \in \mathcal{S}_0} p_{ij}^{(n)} s^j = (f_n(s))^i \prod_{k=0}^{n-1} h(f_k(s)) \quad \text{for any } i \in \mathcal{S}_0, \quad (1)$$

where $f_n(s)$ is n -fold iteration of $f(s)$; see for example [1]. Thus transition probabilities $\{p_{ij}^{(n)}\}$ completely defined by probabilities $\{p_j\}$ and $\{h_j\}$.

The above described population process was considered first by C. Heathcote [2] in 1965. Further many authors investigated long-term properties and problems of existence and uniqueness of invariant measures of GWPI; see for example [3]. In initial research, the properties of the process were discussed under the assumption $f''(1-) < \infty$. Later on A.Pakes [1, 4, 5] has obtained principally new results without the assumption $f''(1-) < \infty$.

Throughout the paper we keep on the case $f''(1-) = \infty$ and consider the critical process, for which the mean per-capita offspring number is

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} jp_j = f'(1-) = 1.$$

A. Pakes [4] has proved that

$$p_{00}^{(n)} \sim K \cdot \exp \left\{ \int_1^{e^n} \frac{\ln h(1 - \varphi(y))}{y} dy \right\} \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

where K is some constant and $\varphi(y)$ is decreasing slowly varying (SV) function in sense of Karamata.

Remind that real-valued, positive and measurable function $L(x)$ is said to be SV at infinity if $L(\lambda x)/L(x) \rightarrow 1$ as $x \rightarrow \infty$ for each $\lambda > 0$. We refer the reader to [6] and [7] for more information on Karamata's theory.

Main assumptions

Discussing this case we will always assume that the offspring PGF $f(s)$ admits the representation

$$f(s) = s + (1-s)^{1+\nu} \mathcal{L} \left(\frac{1}{1-s} \right) \quad [f_\nu]$$

for all $s \in [0, 1)$, where $0 < \nu < 1$ and $\mathcal{L}(\cdot)$ is SV at infinity. Moreover, we everywhere will consider the case in which the immigration PGF $h(s)$ for all $s \in [0, 1)$ has the following form:

$$1 - h(s) = (1-s)^\delta \ell \left(\frac{1}{1-s} \right), \quad [h_\delta]$$

where $0 < \delta \leq 1$ and $\ell(\cdot)$ is SV at infinity. As was proved in the paper [5], that the Markov chain $\{X(n)\}$ is ergodic, if $\delta > \nu$.

In the paper, our results appear in the case $\delta > \nu$ only. Herewith we put forward an additional requirement concerning functions $\mathcal{L}(\ast)$ and $\ell(\ast)$. So since these functions are SV, we can write

$$\frac{\mathcal{L}(\lambda x)}{\mathcal{L}(x)} = 1 + \alpha(x) \quad [\mathcal{L}_\alpha]$$

for each $\lambda > 0$, where $\alpha(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$. Henceforth we suppose that there is some positive function $g(x)$ so that $g(x) \rightarrow 0$ and $\alpha(x) = o(g(x))$. In this case $\mathcal{L}(\ast)$ is said to be *SV with remainder* at infinity; see [2, p. 185, condition SR3]. Wherever we exploit the condition $[\mathcal{L}_\alpha]$, we will suppose

$$\alpha(x) = o\left(\frac{\mathcal{L}(x)}{x^\nu}\right), \quad \text{as } x \rightarrow \infty.$$

Moreover, by perforce we suppose a condition

$$\frac{\ell(\lambda x)}{\ell(x)} = 1 + \beta(x) \quad [\ell_\beta]$$

for each $\lambda > 0$, where

$$\beta(x) = o\left(\frac{\ell(x)}{x^\delta}\right), \quad \text{as } x \rightarrow \infty.$$

Results

Since $f_n(s) \uparrow 1$ for all $s \in [0, 1)$ in virtue of (1) it suffice to observe the case $i = 0$ as $n \rightarrow \infty$. Write

$$\mathcal{P}_n(s) = \mathcal{P}_n^{(0)}(s).$$

The following theorem is a generalization of the assertion (2).

Theorem 1. *Let conditions $[f_\nu]$ and $[h_\delta]$ hold. If $\delta > \nu$, then*

$$\mathcal{P}_n(s) \sim K(s) \exp \left\{ - \int_s^{f_n(s)} \frac{1 - h(y)}{f(y) - y} [1 + \delta(1 - y)] dy \right\}$$

as $n \rightarrow \infty$, where $K(s)$ is a bounded function for $s \in [0, 1)$ and $\delta(x) \rightarrow 0$ as $x \downarrow 0$. If in addition, the condition $[\mathcal{L}_\alpha]$ is satisfied then

$$\mathcal{P}_n(s) \sim K(s) \exp \left\{ - \int_s^{f_n(s)} \frac{1-h(y)}{f(y)-y} [1+o(\Lambda(1-y))] dy \right\}$$

as $n \rightarrow \infty$, where $\Lambda(y) = y^\nu \mathcal{L}(1/y)$.

We make sure that at the conditions of second part of Theorem 1 PGF $\mathcal{P}_n(s)$ converges to the limit $\pi(s)$, which we denote by the following power series representation

$$\pi(s) = \sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j s^j.$$

In our conditions, may can establish a speed rate of this convergence.

Theorem 2. *Let conditions $[f_\nu]$ and $[h_\delta]$ hold and $\delta > \nu$. Then $\mathcal{P}_n(s)$ converges to the limit $\pi(s)$, which generates the invariant measures $\{\pi_j\}$ for GWPI. The convergence is uniform over compact subsets of the open unit disc. If in addition, the conditions $[\mathcal{L}_\alpha]$ and $[\ell_\beta]$ are fulfilled then*

$$\mathcal{P}_n(s) = \pi(s) \left(1 + \Delta_n(s) \mathcal{N}_\delta \left(\frac{1}{1-f_n(s)} \right) \right),$$

where $\mathcal{N}_\delta(x) = \mathcal{N}^\delta(x) \ell(x)$, the function $\mathcal{N}(x)$ satisfies the condition

$$\mathcal{N}^\nu(x) \mathcal{L} \left(\frac{(vx)^{1/\nu}}{\mathcal{N}(x)} \right) \longrightarrow 1 \quad \text{as } x \rightarrow \infty.$$

Therein

$$\Delta_n(s) = \frac{1}{\delta - \nu} \frac{1}{(v_n(s))^{\delta/\nu-1}} - \frac{1+\nu}{2\nu} \frac{\ln[v_n(s)]}{(v_n(s))^{\delta/\nu}} (1+o(1))$$

as $n \rightarrow \infty$ and where $v_n(s) = \nu n + \Lambda^{-1}(1-s)$.

The following result is direct consequence of Theorem 2.

Corollary. *If conditions of Theorem 2 hold, then*

$$p_{00}^{(n)} = \pi_0 \cdot (1 + \Delta_n \mathcal{N}_\delta(n)),$$

where $\mathcal{N}_\delta(n)$ is SV at infinity and

$$\Delta_n(s) = \frac{1}{\delta - \nu} \frac{1}{(\nu n)^{\delta/\nu-1}} - \frac{1+\nu}{2\nu} \frac{\ln n}{(\nu n)^{\delta/\nu}} (1+o(1)) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Note that the basic lemma of the theory of critical Galton-Watson Branching processes with the estimate of the remainder term (see [8]) used in the proofs of results of the report.

REFERENCES

1. *Pakes A.G.* Limit theorems for the simple branching process allowing immigration, I. The case of finite offspring mean // *Adv. Appl. Prob.* 1979. V. 11. P. 31–62.
2. *Heatcote C.R.* A branching process allowing immigration // *J. Royal Stat. Soc.* 1965. V. B-27. P. 138–143.
3. *Seneta E.* Functional equations and the Galton-Watson process // *Adv. Appl. Prob.* 1969. V. 1. P. 1–42.
4. *Pakes A.G.* Some results for non-supercritical Galton-Watson process with immigration // *Math. Biosci.* 1975. V. 24. P. 71–92.
5. *Pakes A.G.* Some new limit theorems for the critical branching process allowing immigration // *Stoch. Proc. Appl.* 1975. V. 3. P. 175–185.
6. *Asmussen S., Hering H.* Branching processes. Boston: Birkhäuser, 1983.
7. *Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.* Regular Variation. Cambridge University Press, 1987.
8. *Imomov A.A., Tukhtaev E.E.* On application of slowly varying functions with remainder in the theory of Galton-Watson branching process // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* 2019. V. 12(1). P. 51–57.

Исследование финального среднего веса вершин в растущих случайных графах с нелинейным правилом предпочтительного связывания

В.А. Бадрызов

Омский государственный технический университет, г. Омск, Россия

Современные растущие сети, среди которых наиболее известны социальные сети и Интернет, успешно моделируются с использованием случайных графов. Наиболее известны случайные графы с предпочтительным связыванием, предложенные А. Барабаши и Р. Альберт [1]. Различные виды случайных графов предлагались в работах [2–6]. В работе [7] были предложены случайные графы с нелинейным правилом предпочтительного связывания (графы с НППС) и заложены основы теории этих случайных графов. До недавнего времени считалось, что растущие случайные графы с НППС при времени, стремящемся к бесконечности, достигают стационарных состояний, которые характеризуются конечным финальным средним весом вершин. На предположении о конечности финального среднего веса основаны многие методы, применяемые в теории случайных графов с НППС. Исследования, инициированные в работе [8], вносят сомнения в это предположение.

Характеристика случайных графов с НППС

Случайный граф с НППС выращивается из небольшого произвольного графа-затравки. В каждый момент времени $t = t_1, t_2, \dots$ к графу добавляется приращение – новая вершина с несколькими инцидентными ей ребрами. Свободные концы ребер присоединяются к вершинам графа, выбираемым случайно с вероятностями, пропорциональными заданной неотрицательной функции предпочтения (весу) $f(k)$, где k – степень связности вершины. Вероятность p_i того, что ребро приращения выберет для присоединения вершину i графа, пропорциональна $f(k_i)$:

$$p_i = \frac{f(k_i)}{\sum_j f(k_j)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где N – число вершин в графе.

Число ребер x в приращении случайного графа с НППС – случайная величина с дискретным распределением вероятностей $\{r_k\}$. Вероятно-

сти $r_k = P(x = k) \geq 0$ появления в приращении k ребер заданы для $g \leq k \leq h$, где величина $g \geq 1$ определяет минимальное число ребер в приращении, а h – максимальное. Кроме того, $r_g + \dots + r_h = 1$. Распределение $\{r_k\}$ определяет среднее число ребер $m = M(x) = \sum kr_k < \infty$ в приращении. Функция предпочтения $f(k)$ и распределение вероятностей $\{r_k\}$ числа ребер в приращении задают алгоритм генерации растущего случайного графа с НППС.

Финальное распределение степеней связности (РСС) вершин Q_k для растущих графов с нелинейной функцией предпочтения $f(k)$ можно точно описать рекуррентными соотношениями, выведенными в [7]:

$$Q_m = \frac{\langle f \rangle}{\langle f \rangle + mf(m)}; \quad (2)$$

$$Q_k = \frac{mf(k-1)}{\langle f \rangle + mf(k)} Q_{k-1}, \quad k \geq m+1, \quad (3)$$

где Q_k – финальная вероятность степени k , т.е. вероятность того, что случайно (равновероятно) выбранная вершина в бесконечном графе будет иметь степень k , $\langle f \rangle = a$ – финальный средний вес вершин, который в общем случае легко рассчитывается описанным в [7] численным методом «Double parameter selection» (DPS).

В работах [9, 10] разработаны методы расчета переходных процессов, которые позволяют рассчитывать изменение во времени ряда вероятностных характеристик растущих графов, а значит, и моделируемых ими реальных сетей. Переходные РСС вершин графа $\{q_k(t)\}$ рассчитываются по рекуррентным формулам

$$q_g(t+1) = \frac{tq_g(t) + r_g - m \frac{q_g(t)f_g}{\bar{f}(t)}}{t+1}; \quad (4)$$

$$q_k(t+1) = \frac{tq_k(t) + r_k + \frac{m}{\bar{f}(t)} [q_{k-1}(t)f_{k-1} - q_k(t)f_k]}{t+1}, \quad k > g, \quad (5)$$

где t – выполненное число шагов выращивания графа (совпадает с числом N вершин в графе); $\bar{f}(t) = \sum_{k \geq g} q_k(t)f_k$ – средний вес вершин графа

на шаге t его выращивания.

Постановка задачи

В исследованиях [9, 10] показано, что в частных случаях РСС $\{q_k(t)\}$ быстро сходится к финальному распределению $\{Q_k\}$, а значит, существует стационарный режим. Однако в общем случае определить путем численных расчетов, является ли финальный средний вес $\langle f \rangle$ конечным, затруднительно. При фактическом $\langle f \rangle = \infty$ полученное по конечной части последовательности рекуррентных формул (2), (3) конечное значение $a < \infty$ будет определяться с бесконечной погрешностью. Применение такого ошибочного значения $a = \langle f \rangle$ приводит к ошибкам как в формулах (2), (3), так и в других формулах теории случайных графов с НППС. Задача, решаемая в данной статье, исследование финального среднего веса известных графов и разработка аналитического метода решения вопроса о существовании конечного финального среднего веса $\langle f \rangle$ у графов с НППС.

Численный анализ среднего веса вершин

С использованием специальной программы получены значения финального среднего веса $a = \langle f \rangle$ для случайных графов с числом ребер в приращении $m = 2$ и с функциями предпочтения, часто используемыми в исследованиях случайных графов. Результаты представлены в таблице. Расчеты выполнены для слоев (множество вершин с одинаковой степенью связности) графа с различными значениями степени связности K .

Финальный средний вес $\langle f \rangle$ вершин растущих случайных графов

№	Функция предпочтения $f(k)$	Расчет для слоя вершин с максимальной степенью связности K				
		10 000	100 000	1 000 000	5 000 000	10 000 000
1	$\ln(k)$	1.174529113	1.174529113	1.174529113	1.174529113	1.174529113
2	$k^\gamma, \gamma = 0.9$	3.38171357	3.381713786	3.381713786	3.381713786	3.381713786
3	k	3.999398796	3.999939991	3.99999418	3.999998617	3.999999079
4	$k + s, s = 1$	4.999973611	4.999999115	4.999999959	4.999999999	5.000000001
5	$k^\gamma, \gamma = 1.1$	4.890514235	4.955827097	5.034715146	5.110903341	5.151546188
6	$k \ln(k)$	8.047009769	9.138613919	10.23807939	11.01268326	11.34727074

Для случайных графов с функциями предпочтения 1 и 2 уже при $K = 10000$ значение стационарного среднего веса вершин рассчитывается с точностью 10 и 7 значащих цифр соответственно. Для функции предпочтения 3 (граф Барабаши – Альберт) известен финальный средний вес $\langle f \rangle = \langle k \rangle = 4$ и он определяется с 6 точными значащими циф-

рами лишь при $K \approx 10^6$. Для графа с линейной функцией предпочтения 4 финальный средний вес при $s = 1$ также известен: $\langle f \rangle = 2m + s = 5$.

Для графов с функциями предпочтения 5 и 6 нельзя уверенно утверждать, что средний вес вершин сходится к конечному пределу, нужен надёжный аналитический метод, позволяющий решать вопрос о конечности финального среднего веса для любых заданных функций $f(k)$.

Аналитическое решение вопроса о конечности финального среднего веса вершин

Аналитический подход к решению вопроса о конечности финального среднего веса рассмотрим на примере случайного графа с функцией предпочтения $f(k) = k^\gamma$. Используя предписанные методом среднего поля [1] шаги, выведем приближенное аналитическое описание РСС вершин графа.

Шаг 1. Изменение во времени средней степени k_i вершины i графа вытекает из (1) в виде дифференциального уравнения $\frac{dk_i}{dt} = \frac{mk_i^\gamma}{at}$.

Решаем его:

$$\int \frac{dk_i}{mk_i^\gamma} = \int \frac{dt}{at} + C \quad \text{или} \quad \frac{1}{m} \frac{k_i^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \frac{1}{a} \ln(t) + C.$$

$$k_i = \left[\frac{m(1-\gamma)}{a} \ln(t) + C_1 \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (6)$$

Константу C_1 найдем из начального условия $k_i(i) = m$:

$$\left[\frac{m(1-\gamma)}{a} \ln(i) + C_1 \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} = m, \quad \text{откуда} \quad C_1 = m^{1-\gamma} - \frac{m(1-\gamma)}{a} \ln(i).$$

Подставляя C_1 в (6), окончательно получаем среднюю степень

$$k_i = \left[\frac{m(1-\gamma)}{a} \ln\left(\frac{t}{i}\right) + m^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (7)$$

Шаг 2. Используя (7), находим номер l такой вершины, степень которой равна k :

$$\left[\frac{m(1-\gamma)}{a} \ln\left(\frac{t}{l}\right) + m^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} = k. \quad \text{т.е.} \quad \frac{l}{t} = e^{-\frac{a}{m} \left(\frac{k^{1-\gamma} - m^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)}. \quad (8)$$

Шаг 3. Отсюда получаем выражение функции распределения (ф.р.) степени k вершины, случайно выбираемой в графе:

$$\hat{F}(k) = \frac{t-l}{t} = 1 - e^{-\frac{a}{m} \left(\frac{k^{1-\gamma} - m^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)}, \quad k \geq m. \quad (9)$$

Через $\hat{F}(k)$ обозначена полученная приближенная оценка ф.р. $F(k)$.

Шаг 4. РСС Q_k вершин находим как производную $F'(k)$:

$$\hat{Q}_k = \hat{F}'(k) = \frac{a}{m} k^{-\gamma} e^{-\frac{a}{m} \left(\frac{k^{1-\gamma} - m^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)}, \quad k \geq m. \quad (10)$$

Через \hat{Q}_k обозначена полученная приближенная оценка вероятности Q_k .

Для случая весовой функции $f(k) = k^\gamma$ при $\gamma > 1$ запишем, используя (10), выражение для математического ожидания $\langle k \rangle$:

$$\langle \hat{k} \rangle = \int_0^{\infty} (1 - F(k)) dk = m + \int_2^{\infty} e^{-\frac{a}{m} \left(\frac{k^{1-\gamma} - m^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)} dk. \quad (11)$$

Этот интеграл расходится к бесконечности при любом конечном a . В то же время по правилу построения графа средняя степень вершин $\langle k \rangle = 2m$. Следовательно, в интеграле (11) $a \rightarrow \infty$. Тогда при любом конечном значении K полученное по формулам (2), (3) конечное значение a всегда будет иметь бесконечную ошибку. Таким образом, аналитический подход к вопросу о конечности финального среднего веса состоит в том, что для конкретного случайного графа выполняются шаги 1–4 метода среднего поля и на основании сходимости (или расходимости) интеграла, подобного (11), делается вывод о конечности (или бесконечности) финального среднего веса вершин.

Заключение

Путем численного анализа установлено, что не для всех случайных графов с НППС существует конечный финальный средний вес $\langle f \rangle$ вершин. Это ставит под сомнение возможность применения к таким графам всего арсенала известных методов анализа, основанных на знании величины $\langle f \rangle$. Для разрешения подобных сомнений разработан аналитический подход к решению вопроса о конечности веса $\langle f \rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barabasi A.L., Albert R.* Emergence of scaling in random networks // *Science*. 1999. V. 286(5439). P. 509–512.
2. *Bollobas B., Borgs C., Chayes J., Riordan O.* Directed scale-free graphs // *Proceedings of the Fourteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (Baltimore, MD, 2003). P. 132–139, New York: ACM, 2003.
3. *Cooper C., Frieze A.* A general model of web graphs // *Random Structures Algorithms*. 2003. V. 22(3). P. 311–335.
4. *Ergun G., Rodgers G.J.* Growing random networks with fitness // *Physica A*. 2002. V. 303. P. 261–272.
5. *Krapivsky P.L., Redner S.* Organization of growing random networks. URL: <http://physics.bu.edu/~redner/pubs/pdf/organization.pdf> (дата обращения 16.12.2014).
6. *Dereich S., Morters P.* Random networks with sublinear preferential attachment: Degree evolutions // *Electronic J. Probability*. 2009. V. 14. P. 1222–1267.
7. *Задорожный В.Н.* Случайные графы с нелинейным правилом предпочтительного связывания // *Проблемы управления*. 2010. № 6. С. 2–11.
8. *Задорожный В.Н., Юдин Е.Б., Бадрызов В.А.* Распределения степеней вершин в растущих графах: методы расчёта с контролем погрешностей // *Омский научный вестник*. 2018. №4(160). С. 156–160.
9. *Задорожный В.Н., Бадрызов В.А.* Переходные процессы в растущих сетях с нелинейным правилом предпочтительного связывания // *Омский научный вестник*. 2016. №1(145). С. 95–99.
10. *Zadorozhnyi V.N., Badrizlov V.A.* Calculation methods of transient processes in growing networks with non-linear preferential attachment rule // *2016 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). Proceedings*. Moscow: National Research University "Higher School of Economics". Russia, Moscow, May 12–14, 2016. IEEE Catalog Number: CFP16794-CDR. Online ISSN: 2380-6516.

Множества двудольных множеств событий и их применение в задачах анализа данных

И.В. Баранова

*Сибирский федеральный университет,
г. Красноярск, Россия*

Во многих областях современной научной и практической деятельности при проведении различных исследований довольно часто возникает необходимость анализа сложных статистических систем, поведение которых описывается разнотипными данными (числовыми и множественными). К числу таких областей человеческой деятельности можно отнести здравоохранение, технику, экономику, финансы, социологию, экологию, биологию, лингвистику, педагогику и другие. Задача выявления зависимости между данными, описывающими поведение подобных систем, является очень важной и актуальной.

Основные трудности при проведении анализа таких систем заключаются в сложной структуре зависимости между элементами системы, большом числе элементов и их разнотипности. Для устранения этих трудностей автором в работе [1] было введено понятие двудольного множества событий и предложен метод анализа данных, базирующийся на данном понятии. Под двудольным множеством событий понимается объединение двух множеств событий, первая доля которого определяется случайными величинами, а вторая – случайными множествами. Основная идея метода заключается в представлении любой сложной системы с помощью модели, в которой поведение каждого элемента системы характеризуется двудольным множеством событий, и сведении анализа поведения элементов системы к анализу вероятностных распределений соответствующих им двудольных множеств событий [2].

В данной работе рассматривается понятие множества двудольных множеств событий, состоящее из двудольных множеств событий. Изучаются три возможных структурных разновидности множества двудольных множеств событий. Особое внимание уделяется практическим задачам применения рассмотренных видов множеств.

Двудольное множество случайных событий

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P) , где F – алгебра событий, события $x, y \in F$ – элементы алгебры событий, на которой определена вероятность P . Множество избранных событий $X \in F$.

Случайное множество событий под X определяется как измеримое отображение

$$K : (\Omega, F, P) \rightarrow (2^X, 2^{2^X}), \quad (1)$$

где 2^X – множество всех подмножеств множества X [1].

Множество случайных элементов $\{\xi, K\}$, представимое в виде объединения двух множеств: множества случайных величин ξ и множества K случайных событий, будем называть *двудольным множеством случайных элементов*:

$$\{\xi, K\} = \xi \cup K = \{\xi_a, a \in A, K_\beta, \beta \in B\}. \quad (2)$$

Здесь A – множество индексов случайных величин, B – множество индексов случайных множеств событий, $A+B = m$.

Двудольное множество случайных событий представляет собой объединение двух множеств – множества событий, которое определяется случайными величинами, и множества событий, которое определяется случайными множествами событий:

$$Z = \{Y, X\} = \{Y_a, X_\beta, a \in A, \beta \in B\}. \quad (3)$$

Пусть задано двудольное множество случайных событий s , являющееся подмножеством двудольного множества событий Z :

$$s = \{Y_{k_A}, X_{k_B}, k_A \subseteq A, k_B \subseteq B\} \subseteq Z, \quad (4)$$

где каждое множество событий является подмножеством соответствующего множества избранных событий $Y_{k_A} \subseteq Y_A$ или $X_{k_B} \subseteq X_B$.

В работе [2] был получен вид распределения вероятностей событий двудольного множества s :

$$p(s) = p(\mathbf{r}, \mathbf{X}) = P \left(\bigcap_{a \in A} \{Y_a(r_a)\} \bigcap_{x_\beta \in X} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X^c} x_\beta^c, a \in A, \beta \in B \right), \quad (5)$$

где $\mathbf{r} = \{r_a, a \in A\}$, а $\mathbf{X} = \{X_\beta, \beta \in B\}$.

Множество двудольных множеств событий

Множество двудольных множеств событий представляет собой набор множеств событий, каждое из которых состоит из двудольных множеств:

$$S = \{s^1, \dots, s^n\}. \quad (6)$$

Возможны следующие разновидности структуры данного множества:

1. Случай однотипных двудольных множеств событий: ситуация, в которой все множества s^i порождаются одним и тем же двудольным множеством случайных элементов и описываются одним и тем же двудольным множеством Z . Для каждого множества s^i они различаются только вероятностями наступления:

$$S = \{s^1 = \{Y_a^1, X_\beta^1\}, \dots, s^n = \{Y_a^n, X_\beta^n\}, a \in A, \beta \in B\}.$$

Этот случай является простейшим.

2. Случай, когда двудольные множества событий s^i являются подмножествами одного и того же двудольного множества событий Z ($s^i \subseteq Z$):

$$S = \{s^1 = \{Y_{k_A^1}, X_{k_B^1}, k_A^1 \subseteq A, k_B^1 \subseteq B\}, \dots, s^n = \{Y_{k_A^n}, X_{k_B^n}, k_A^n \subseteq A, k_B^n \subseteq B\}\}.$$

Здесь $k_A^i \subseteq A$ – подмножества множества индексов числовой доли двудольного множества A , $k_B^i \subseteq B$ – подмножества множества индексов множественной доли B .

3. Случай, когда двудольные множества событий s^i являются подмножествами различных двудольных множеств событий $Z^i = \{Y^i, X^i\} = \{Y_a^i, X_\beta^i, a \in A^i, \beta \in B^i\}$ ($s^i \subseteq Z^i$):

$$S = \{s^1 = \{Y_{k_A^1}, X_{k_B^1}, k_A^1 \subseteq A^1, k_B^1 \subseteq B^1\}, \dots, s^n = \{Y_{k_A^n}, X_{k_B^n}, k_A^n \subseteq A^n, k_B^n \subseteq B^n\}\}.$$

Здесь под A^j понимается множество индексов для числовой доли двудольного множества $s^j \in S$, под B^j – множество индексов для множественной доли. Обозначение k_A^j принято для индекса, который пробе-

гает соответствующее множество индексов A^j . Аналогичным образом, обозначение k_B^j – для индекса, который пробегает соответствующее множество индексов B^j . Множество событий $Y_{k_A^i} \subseteq Y_A^i$, а $X_{k_B^i} \subseteq X_B^i$. Данный случай является самым общим и самым сложным по своей структуре.

Полной характеристикой множества двудольных множеств случайных событий служит его эвентологическое распределение. В работе [3] были получены эвентологические распределения для всех видов множества двудольных множеств событий.

Применение множеств двудольных множеств событий

1. Однотипные двудольные множества событий. Как уже было сказано выше, наиболее простым (и чаще всего встречающимся) является случай однотипных двудольных множеств событий. Любая задача системного, факторного или кластерного анализа приводит нас к изучению такого множества [4, 5].

Пусть имеется множество объектов $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, где каждый объект x_i описывается набором числовых и множественных показателей ($x_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^m)$). Основная идея метода заключается в том, что каждому объекту кластеризации x_i (находящемуся в N -мерном пространстве признаков) ставится в соответствие двудольное множество событий $s_i = \{Y_a^i, X_\beta^i, a \in A, \beta \in B\}$ и выполняется кластеризация множеств событий s_i с использованием их вероятностных распределений.

В качестве метрики для нахождения расстояния между объектами используется вероятностная метрика – симметрическая разность по Минковскому между двудольными множествами, предложенная в работах [1, 2]. Сет-операция симметрической разности двудольных множеств событий s^1 и s^2 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} s^1(\Delta)s^2 &= \{Y_a^1(\Delta)Y_a^2, X_\beta^1(\Delta)X_\beta^2, X_\chi \subseteq X_\beta, a \in A, \beta \in B\} = \\ &= \{Y_a^1(r_a)(\Delta)Y_a^2(r_a), X_\beta^1(\Delta)X_\beta^2, r_a \in \mathfrak{R}_a, X_\chi \subseteq X_\beta, a \in A, \beta \in B\}. \end{aligned}$$

Вероятность операции определяется следующим образом:

$$P(s^1(\Delta)s^2) = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \frac{1}{|Y_a|} \sum_{r_a \in \mathfrak{R}_a} P(Y_a^1(r_a)\Delta Y_a^2(r_a)) + \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in B} \frac{1}{|X_\beta|} \sum_{X_\beta \subseteq X_\beta} P(X_\beta^1 \Delta X_\beta^2). \quad (7)$$

2. Множества двудольных множеств второго вида. Представляет собой случай, когда двудольные множества событий s^i являются подмножествами одного и того же двудольного множества событий.

К изучению множеств такого вида могут привести задачи регрессионного или ковариационного анализа. Например, когда требуется найти ковариацию или корреляцию между двудольными множествами событий [5, 6].

Арная ковариация двудольного множества случайных событий s представляет собой величину, характеризующую разницу эвентологических распределений вероятностей пересечений событий двудольного множества в общем виде и в ситуации независимости событий [6]:

$$Kov_s = p(s) - p^i(s). \quad (16)$$

Пусть $s = \{Y_a, X_\beta, a \in A, \beta \in B\} = \{Y(\mathbf{r}), \mathbf{X}\}$,
 $\mathbf{r} = \{r_a, a \in A\}$, а $\mathbf{X} = \{X_\beta, \beta \in B\}$.

Эвентологическое распределение вероятностей пересечений событий двудольного множества в общем виде имеет следующий вид:

$$p(s) = p(\mathbf{r}, \mathbf{X}) = P \left(\bigcap_{a \in A} \left\{ \bigcap_{y \neq r_a} \{\xi = y\}^c \right\} \bigcap_{x_\beta \in X} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X^c} x_\beta^c, a \in A, \beta \in B \right).$$

В ситуации независимости событий данное эвентологическое распределение вероятностей пересечений примет следующий вид:

$$p^i(s) = \prod_{a \in A} P \left(\bigcap_{y \neq r_a} \{\xi = y\}^c \right) \prod_{x_\beta \in X} x_\beta \prod_{x_\beta \in X^c} x_\beta^c, a \in A, \beta \in B.$$

В работе [6] изучались условные вероятности двудольных множеств событий и, в частности, их применение для решения задачи статистической оценки функции теоретической регрессии.

3. Множество подмножеств различных двудольных множеств событий. К изучению множеств такого вида могут привести задачи

регрессионного, ковариационного анализа, поиска ассоциативных правил, прогнозирования поведения системы и принятия решений. В целом, этот перечень задач аналогичен предыдущей ситуации. Отличием является то, что для данного случая происходит работа не с одним множеством Z , а с набором разных областей Z^i . Большинство задач регрессионного и ковариационного анализа предполагают именно работу с данным видом множества двудольных множеств событий.

Заключение

Предлагается подход к анализу разнотипных данных на основе понятия множества двудольных множеств событий. Изучаются возможные структурные разновидности описанного множества.

Предложенный подход может быть эффективно применен для решения широкого круга практически важных задач анализа данных, в том числе в кластерном анализе, типологизации, регрессионном, ковариационном и факторном анализе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баранова И.В.* Метод двудольных множеств событий в эвентологическом анализе социально-экономических систем // Вестник Красноярского государственного университета: физико-математические науки. 2006. Вып. 1. С. 142–152.
2. *Воробьев О.Ю., Баранова И.В.* Метод двудольных множеств событий в эвентологическом анализе сложных систем. Красноярск: СФУ, 2007. 132 с.
3. *Baranova I.* Sets of bipartite sets of events and their application // Communications in Computer and Information Science. Switzerland, Springer International Publishing, 2014. V. 487. P. 26–33.
4. *Баранова И.В.* Применение метода двудольных множеств событий для кластеризации разнотипных данных // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2018): материалы XVII Междунар. конф. им. А.Ф. Терпугова. Томск: Изд-во НТЛ, 2018. С. 281–286.
5. *Baranova I.* Eventological approach to factor analysis of complex systems // Proceedings of the IASTED International Conference on Automation, Control, and Information Technology (ACIT-CDA 2010). Novosibirsk, Russia, 2010. P. 341–344.
6. *Baranova I.* Regression between the polytypic data, describing behavior of complex system // Proceedings of of the Third International Conference "Problems of Cybernetics and Informatics". Baku, Azerbaijan, 2010. V. 2. P. 244–248.

Об использовании «ядерных» оценок плотностей при рандомизации математических численных моделей*

Т.Е. Булгакова¹, А.В. Войтишек^{1,2}

¹ Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия

² Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия

1. Рандомизация численных моделей

Данная работа отражает новые результаты исследований по тематике, представленной ранее в докладе [1] и в учебнике [2], где изучаются проблемы рандомизации математических численных (компьютерных) моделей. Приведем общую схему рандомизации из [2]. Как правило, при применении алгоритмов численного статистического моделирования требуется приближенно вычислять значение среднего

$$\hat{I} = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\eta}} [q(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta})] = \int_{\mathbb{R}^m} q(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) f_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{v}; \boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{v}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}) \in \mathbb{R}^k$ – набор фиксированных (не случайных) параметров, а $\boldsymbol{\eta} = (\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(m)})$ – исходный набор m случайных параметров, распределенных в \mathbb{R}^m согласно плотности $f_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{v}; \boldsymbol{\lambda})$. При этом можно использовать алгоритм метода Монте-Карло (см., например, [2]):

$$\hat{I} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\zeta}_i; \quad \hat{\zeta}_i = q(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}_i), \quad (2)$$

где выборочные значения $\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_n$ численно моделируются (реализуются на ЭВМ) согласно плотности $f_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{v}; \boldsymbol{\lambda})$.

Рандомизация задачи вычисления величины (1) связана с предположением о том, что вектор $\boldsymbol{\lambda}$ является случайно распределенным в \mathbb{R}^k . В этом случае вместо $\boldsymbol{\lambda}$ можно ввести случайный вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)})$, распределенный согласно плотности $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{u})$; при этом

* Исследование выполнено в рамках государственного задания № 0315-2016-0002.

актуальным становится приближенное вычисление значения

$$I = \mathbf{E}q(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^m} q(\mathbf{u}, \mathbf{v}) f_\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\mathbf{u} d\mathbf{v} \quad (3)$$

вместо величины \hat{I} из соотношения (1). Здесь

$$\gamma = (\xi, \eta) = (\gamma^{(1)} = \xi^{(1)}, \dots, \gamma^{(k)} = \xi^{(k)}, \gamma^{(k+1)} = \eta^{(1)}, \dots, \gamma^{(k+m)} = \eta^{(m)})$$

является d -мерным случайным вектором ($d = k + m$), распределенным в \mathbb{R}^d согласно плотности $f_\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f_\xi(\mathbf{u}) \times f_\eta(\mathbf{v} | \mathbf{u})$; при этом $f_\eta(\mathbf{v} | \mathbf{u}) = f_\eta(\mathbf{v}; \mathbf{u})$ – условная плотность случайной компоненты η вектора γ при фиксированном ξ .

По аналогии с соотношением (2), для вычисления величины (3) можно применить алгоритм метода Монте-Карло:

$$I \approx Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \zeta_i; \quad \zeta_i = q(\gamma_i), \quad (4)$$

где выборочные значения $\gamma_1 = (\xi_1, \eta_1), \dots, \gamma_n = (\xi_n, \eta_n)$ моделируются согласно плотности $f_\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v})$; при этом ξ_i моделируются согласно плотности $f_\xi(\mathbf{u})$, а значения η_i реализуются согласно плотностям $f_\eta(\mathbf{v} | \xi_i)$.

Следует заметить, что скорость сходимости погрешности алгоритма (4) к нулю при $n \rightarrow \infty$ является относительно низкой. Конкретнее, справедливо соотношение $|I - Z_n| \approx H\sqrt{\mathbf{D}\zeta} / \sqrt{n}$ [2]; здесь $\mathbf{D}\zeta$ – дисперсия случайной величины ζ , а $H = \text{const}$ (проведенные нами аккуратные тестовые вычисления дали значение $H \approx 0,80$ – точно устанавливаются только две первые десятичные цифры мантиссы). Поэтому справедливо следующее соображение.

Замечание 1. При выборе случайного параметра (набора параметров) ξ и его плотности распределения $f_\xi(\mathbf{u})$ следует заботиться о том, чтобы численное моделирование выборочных значений ξ_i было экономичным.

Данная работа (как и доклад [1]) посвящена проблемам выбора плотности $f_{\xi}(u)$ в описанной схеме рандомизации для одномерного случая: $u, \xi \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

В работах [1, 2] отмечено, что в целом ряде приложений принято использовать в качестве функции $f_{\xi}(u)$ плотности бета-, гамма- или нормального распределений с соответствующим выбором параметров этих распределений. Наши подробные исследования показали, что из-за относительно высокой трудоемкости многократных обращений к генератору стандартных случайных чисел и вычислений логарифмических, степенных и тригонометрических функций в случайных точках, моделирующие формулы и алгоритмы для бета-, гамма- и нормального распределений являются неэффективными (не экономичными). Поэтому, следуя рекомендациям из замечания 1, при рандомизации численных стохастических моделей желательно (если это возможно) избегать выбора в качестве $f_{\xi}(u)$ плотностей этих трех распределений.

В качестве первой альтернативы можно предложить выбирать $f_{\xi}(u)$ из некоторого «банка» элементарных (эффективно моделируемых) вероятностных плотностей (технологии формирования такого банка представлены в работах [1, 2]). Второй альтернативой выбору бета-, гамма- или нормального распределений является использование приближений неизвестных или сложно моделируемых плотностей, в частности таких, которые построены на основании известных (например, полученных с помощью натуральных экспериментов или измерений) данных. В данной работе рассмотрены вариации реализации второй альтернативы, а конкретнее, возможности использования «ядерных» оценок плотностей [3].

2. Применение гистограммы

На практике рандомизация той или иной рандомизированной математической модели часто основана на том, что для вводимого случайного параметра $\hat{\xi}$ имеется выборка

$$\hat{\xi}_1^{(data)}, \dots, \hat{\xi}_K^{(data)} \quad (5)$$

с неизвестной плотностью распределения $f_{\xi}(u)$, полученная из натуральных наблюдений или экспериментов.

В качестве плотности $f_{\xi}(u)$ можно попытаться взять построенную на основе выборки (5) гистограмму, т.е. кусочно-постоянную функцию

$$f_{\xi}(u) \equiv \frac{s_i}{K(b_i - a_i)}, \quad u \in (a_i, b_i); \quad (6)$$

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 \dots < b_{M-1} = a_M < b_M = b;$$

$$a = \min(\hat{\xi}_1^{(data)}, \dots, \hat{\xi}_K^{(data)}), \quad b = \max(\hat{\xi}_1^{(data)}, \dots, \hat{\xi}_K^{(data)}),$$

где s_i – это количество элементов выборки (5), попавших в полуинтервал $[a_i, b_i)$. Чаще всего $b_i - a_i \equiv h = (b - a) / M$. Имеется также рекомендация выбирать число делений M отрезка $[a, b]$ так, что $K / M \geq 10$.

Замечание 2. Известно, что при согласованном стремлении K и M к бесконечности функция (6) (являющаяся сама по себе плотностью некоторой случайной величины ξ) приближается к неизвестной плотности $f_{\xi}(u)$ распределения выборочных значений (5).

Согласно замечанию 2, функцию (6) можно взять в качестве плотности $f_{\xi}(u)$ при рандомизации соответствующей модели, для которой известны выборочные значения (5), соответствующие вводимому параметру ξ .

В свою очередь, можно отметить, что кусочно-постоянная плотность (6) является составной, а в работах [1, 2] для составных плотностей в одномерном случае предложен весьма эффективный (экономичный) алгоритм модифицированного метода суперпозиции. Таким образом, выбор плотности $f_{\xi}(u)$ вида (6) при рандомизации численных моделей вполне соответствует рекомендациям из замечания 1.

3. Использование «ядерных» оценок

В ряде работ использование гистограммы (6) подвергается определенной критике с позиций замечания 2 в том смысле, что функция (6) является не самым точным приближением неизвестной плотности $f_{\xi}(u)$. Так, например, в работе [3] предлагается использование «ядерных» оценок этой плотности вида

$$f_{\hat{\xi}}(u) \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \kappa^{(u)}(\hat{\xi}_k^{(data)}), \quad (7)$$

где $\kappa^{(u)}(y)$ – некоторая финитная параметрическая, одинаковая по форме для всех значений параметра u , «ядерная» функция. Приближение (7) называется «ядерной» оценкой плотности $f_{\hat{\xi}}(u)$.

При исследовании свойств приближения (7) существенно используется то обстоятельство, что, по аналогии с соотношениями (1)–(4), для достаточно больших K выполнено

$$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \kappa^{(u)}(\hat{\xi}_k^{(data)}) \approx \mathbf{E} \kappa^{(u)}(\hat{\xi}) = \int \kappa^{(u)}(y) f_{\hat{\xi}}(y) dy. \quad (8)$$

Из соотношений (7) и (8) следует, что выбор «ядерной» функции $\kappa^{(u)}(y)$ должен обеспечивать выполнение приближенного равенства

$$f_{\hat{\xi}}(u) \approx \int \kappa^{(u)}(y) f_{\hat{\xi}}(y) dy. \quad (9)$$

Определенным конструктивным недостатком теории «ядерных» оценок плотности и ее приложений (см., в частности, работу [3]) является отсутствие обсуждения алгоритма практического (в первую очередь, численного, компьютерного) приближения функции $f_{\hat{\xi}}(u)$, основанного на теории сеточной аппроксимации функций (см., например, [4]). Такой алгоритм мог бы выглядеть следующим образом.

Учитывая конечность выборки (5), на описанном выше отрезке $[a, b]$ можно ввести равномерную сетку

$$\left\{ x_i = \frac{a_i + b_i}{2}, i = 1, \dots, M; \quad b_i - a_i \equiv h = \frac{b - a}{M} \right\} \quad (10)$$

и рассмотреть приближение вида

$$f_{\hat{\xi}}(u) \approx \sum_{i=1}^M w^{(i)}(\mathbf{f}) \chi^{(i)}(u); \quad \mathbf{f} = \{f_{\hat{\xi}}(x_1), \dots, f_{\hat{\xi}}(x_M)\}, \quad (11)$$

где $\Xi^{(M)} = \{\chi^{(1)}(x), \dots, \chi^{(M)}(x)\}$ – набор заданных (как правило, связанных с сеткой (10)) «базисных» функций, а $\{w^{(i)}(\mathbf{f})\}$ – аппроксимационные коэффициенты.

Алгоритм 1. Вычисляем значения

$$\tilde{f}^{(x_i)} \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \kappa^{(x_i)} \left(\hat{\xi}_k^{(data)} \right); \quad i = 1, \dots, M,$$

и приближаем плотность $f_{\hat{\xi}}(u)$ по формуле вида (11):

$$f_{\hat{\xi}}(u) \approx \sum_{i=1}^M w^{(i)}(\tilde{\mathbf{f}}) \chi^{(i)}(u); \quad \tilde{\mathbf{f}} = \{\tilde{f}^{(x_1)}, \dots, \tilde{f}^{(x_M)}\}. \quad (12)$$

Теперь проанализируем полученное приближение (12) с точки зрения использования его при рандомизации численных моделей.

Во-первых, базис $\Xi^{(M)}$ должен быть моделируемым (см. раздел 11.4 учебника [2]). В частности, весьма подходящими являются функции $\chi^{(i)}(u)$, равные единице при $u \in [a_i, b_i]$ и нулю при $u \notin [a_i, b_i]$.

Во-вторых, для выполнения соотношений вида (9) для всех $u = x_i$ целесообразным является выбор функции $\kappa^{(u)}(y)$, равной $1/h$ при $y \in \left[u - \frac{h}{2}, u + \frac{h}{2} \right]$ и нулю при $y \notin \left[u - \frac{h}{2}, u + \frac{h}{2} \right]$. При таких $\chi^{(i)}(u)$ и $\kappa^{(u)}(y)$ приближение (12) превращается в гистограмму (6).

4. Заключение

В данной работе обсуждается ситуация, когда при рандомизации численных моделей в качестве плотности распределения вводимого одномерного параметра берется функция, полученная на основании измеренных выборочных значений, соответствующих этому параметру. Отмечена целесообразность использования соответствующей гистограммы в качестве выбираемой плотности. Приведены соображения о том, что обобщения этого подхода (конкретнее, использование «ядерных» оценок плотностей) не дают ощутимых преимуществ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войтишек А.В.* Об «универсальных» алгоритмах моделирования случайной величины, распределенной на конечном интервале // Материалы XVII Междунар. конф. имени А.Ф.Терпугова «Информационные технологии и математической моделирование» (Томск, 10–15 сентября 2018 года). Томск: Изд-во НТЛ, 2018. С. 306–313.

2. *Войтишек А.В.* Лекции по численным методам Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2018.
3. *Епанечников В.А.* Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятностей и ее применения. 1969. Т. 14. Вып. 1. С. 156–161.
4. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1975.

Применение рандомизированных функциональных алгоритмов для решения одной задачи с «вычислимым» ядром интегрального уравнения*

Т.Е. Булгакова¹, А.В. Войтишек^{1,2}

¹Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия

²Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Введение

Данная работа отражает новые результаты исследований по тематике, представленной ранее в докладе [1] и последующих статьях [2, 3], в которых изучаются рандомизированные функциональные алгоритмы приближения решений $\varphi(x)$ прикладных интегральных уравнений Фредгольма второго рода вида

$$\varphi(x) = \int k(y, x)\varphi(y)dy + f(x) \quad \text{или} \quad \varphi = K\varphi + f \quad (1)$$

на некоторой ограниченной области $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Из теории функциональных алгоритмов (см., например, [4, 5]) следует, что наилучшими вычислительными свойствами обладает следующий сеточный алгоритм (метод зависимых испытаний).

Алгоритм 1. Моделируя n траекторий

$$\xi_j^{(0)}, \xi_j^{(1)}, \dots, \xi_j^{(N_j-1)}, \xi_j^{(N_j)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

прикладной цепи Маркова

$$\xi_j^{(0)}, \xi_j^{(1)}, \dots, \xi_j^{(N-1)}, \xi_j^{(N)} \quad (3)$$

с начальной плотностью распределения $\pi(x)$ (это плотность распределения случайной величины $\xi_j^{(0)}$) и переходной функцией

$$p(y, x) = [1 - p_a(y)]r(y, x) \quad (4)$$

(здесь $p_a(y)$ – вероятность обрыва цепи в точке y , $r(y, x)$ – вероятностная переходная плотность, а N – случайный номер состояния

* Исследование выполнено в рамках государственного задания № 0315-2016-0002.

обрыва), вычисляем значения

$$\tilde{\varphi}^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{N_j} Q_j^{(m)} k(\xi_j^{(m)}, x_i) + f(x_i), \quad i = 1, \dots, M. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{X}^{(M)} = \{x_1, \dots, x_M\}$ (6)

является аппроксимационной сеткой в области X , а случайные веса $\{Q_j^{(m)}\}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$Q_j^{(0)} = \frac{f(\xi_j^{(0)})}{\pi(\xi_j^{(0)})}, \quad Q_j^{(m)} = Q_j^{(m-1)} \times \frac{k(\xi_j^{(m-1)}, \xi_j^{(m)})}{p(\xi_j^{(m-1)}, \xi_j^{(m)})}. \quad (7)$$

Далее вычисляем коэффициенты по заданным формулам:

$$\tilde{w}^{(i)} = w^{(i)}(\tilde{\varphi}^{(1)}, \dots, \tilde{\varphi}^{(M)}),$$

а затем используем приближение

$$\varphi(x) \approx \sum_{i=1}^M \tilde{w}^{(i)} \chi^{(i)}(x), \quad (8)$$

где $\Xi^{(M)} = \{\chi^{(1)}(x), \dots, \chi^{(M)}(x)\}$ (9)

является набором заданных (как правило, связанных с сеткой (6)) «базисных» функций.

В работах [1–3] отмечено, что для основных приложений, описываемых в теории численного статистического моделирования (см., например, [4]), в которых требуется приближать функцию $\varphi(x)$ при решении задач математической физики, алгоритм 1 неприменим из-за наличия интегрируемых особенностей (конкретнее, специальных дельта-функций) в ядрах $k(y, x)$ интегральных операторов K уравнений вида (1) и невозможности вычисления значений $k(\xi_j^{(m)}, x_i)$ из соотношения (5). В связи с этим в работах [1–3] предложено использовать рандомизированные проекционные алгоритмы с различными ортогональными базисами (9). Однако наши недавние тестовые расчеты обнаружили существенную вычислительную неустойчивость рандомизированных проекционных алгоритмов приближенного решения уравнения (1). Кроме того, для этих алгоритмов не удастся построить теорию услов-

ной оптимизации [4, 5]. В последнее время нами последовательно отстаивается тезис о том, что для прикладных задач, представленных в работах [2–4], целесообразнее всего применять метод полигона частот [4, 5] (в работах [1–3] это частный случай проекционно-сеточных методов, которые можно также назвать «ядерными» алгоритмами).

Заметим также, что вычисление ядра $k(y, x)$ уравнения (1) формально требуется и в формуле (7) при подсчете случайных весов $\{Q_j^{(m)}\}$. Здесь особенности ядра могут быть нивелированы специальным выбором переходной функции (4), соответствующим прямому моделированию или принципу выборки по важности [4].

Новизна данной работы определяется тем, что нам удалось найти прикладную задачу, в которой вычисление значений ядра $k(y, x)$ из соотношений (5) и (7) (а значит, и применение алгоритма 1) – возможно.

Одномерная обратная задача для гиперболических уравнений

Широкое распространение в математической геофизике имеют коэффициентные обратные задачи для гиперболических уравнений (см., например, [6]). Здесь требуется определить свойства среды или расположенных на определенной глубине включений с помощью дополнительной информации, полученной путем измерения поверхностных волн, отраженных от неоднородной среды. Распространение этих волн описывается уравнениями в частных производных, полученных из фундаментальных законов сохранения. Свойства среды и параметры объекта описываются коэффициентами этих уравнений. Конкретнее, параметрами (коэффициентами одинаковых по форме уравнений) чаще всего являются: в задачах акустики – плотность среды и скорость распространения волн в среде, в задачах теории упругости – модули упругости и плотность среды, в уравнениях Максвелла – проницаемость и проводимость среды. Таким образом возникает задача определения коэффициентов гиперболических уравнений по дополнительной информации, измеренной на части границы.

Рассмотрим задачу такого типа для случая, когда для упругой изотропной среды, описываемой функцией $U(x, t)$, неизвестным является один параметр $\sigma(x)$, определяющий акустическую жесткость среды, и

этот параметр зависит от глубины x и известен только на поверхности (т.е. при $x = 0$). Такая одномерная задача распространения акустических волн описывается следующим гиперболическим уравнением

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \quad (10)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями

$$U(x,t)|_{t < 0} \equiv 0; \quad \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \delta(t); \quad U(x,t)|_{x=0} = Y_0(t). \quad (11)$$

Известно, что задачу (10), (11) можно переписать в виде параметрического семейства (с параметром x) интегральных уравнений М.Г. Крейна (см., например, [6])

$$-2Y_0(+0)V(x,t) - \int_{-x}^x V(x,y)Y_0'(t-y)dy = 1; \quad t \in (-x,x); \quad x > 0.$$

Здесь предполагается, что известная функция $Y_0(t)$, описывающая граничные условия (11), продолжена в область $t < 0$ нечетным образом (поэтому функция является $Y_0'(t)$ четной), а $Y_0(+0)$ – это предел функции $Y_0(t)$ при стремлении аргумента t к нулю справа. Решение $V(x,t)$ уравнения (12) связано с искомым параметром $\sigma(x)$ следующим соотношением:

$$\sigma(x) = \frac{V(0,0)}{2V^2(x,x)}, \quad x > 0.$$

Таким образом, при решении поставленной обратной задачи особый интерес представляет приближение функции $\varphi(x) = V(x,x)$. Из соотношения (12) следует, что эта функция является решением уравнения Фредгольма второго рода (1) с ядром и свободным членом

$$k(y,x) = \frac{Y_0'(x-y)\Delta_{(-x,x)}(y)}{-2Y_0(+0)}, \quad f(x) \equiv \frac{1}{-2Y_0(+0)};$$

здесь $\Delta_{(-x,x)}(y) \equiv 1$ при $y \in (-x,x)$ и $\Delta_{(-x,x)}(y) \equiv 0$ при $y \notin (-x,x)$.

Применение рандомизированных функциональных алгоритмов

Проанализируем возможности применения рандомизированных функциональных алгоритмов для решения уравнения (1) с ядром и свободным членом (13).

Вид ядра $k(y, x)$ позволяет вычислять эту функцию в конкретных (в том числе, случайных) точках (как в формулах (5) и (7)), а значит, и применять «наилучший» функциональный алгоритм 1. Конкретные вычисления, проведенные в работе [7], обнаружили, однако, два существенных затруднения применения алгоритма 1.

Во-первых, в конкретных практически значимых приложениях некоторую проблему составляет вычисление значений производной $Y'_0(x - y)$ (см. соотношения (13)), которую приходится приближать численно.

Во-вторых, наличие индикаторной функции $\Delta_{(-x,x)}(y)$ существенным образом затрудняет оптимальный выбор начальной плотности $\pi(x)$, переходной функции (4) прикладной цепи Маркова (3) и соответствующего алгоритма моделирования траекторий (2). По сути, для каждого узла x_i сетки (6) получается свое интегральное уравнение вида (1).

Эти соображения приводят к выводу о целесообразности использования функционального метода сопряженных блужданий [5], т.е. следующего алгоритма.

Алгоритм 2. Для каждого узла x_i сетки (6) моделируем $n^{(i)}$ траекторий $\xi_j^{(i,0)} \equiv x_i, \xi_j^{(i,1)}, \dots, \xi_j^{(i,N_j^{(i)}-1)}, \xi_j^{(i,N_j^{(i)})}$, $j=1, \dots, n^{(i)}$, прикладной цепи Маркова с переходной функцией $p^{(i)}(y, x)$ и получаем значения

$$\tilde{\varphi}^{(i)} = \frac{1}{n^{(i)}} \sum_{j=1}^{n^{(i)}} \sum_{m=1}^{N_j^{(i)}} Q_j^{(i,m)} f(\xi_j^{(i,m)}) + f(x_i); \quad i=1, \dots, M,$$

где

$$Q_j^{(i,0)} \equiv 1, \quad Q_j^{(i,m)} = Q_j^{(i,m-1)} \times \frac{k(\xi_j^{(i,m)}, \xi_j^{(i,m-1)})}{p^{(i)}(\xi_j^{(i,m-1)}, \xi_j^{(i,m)})}.$$

Далее вычисляем коэффициенты по заданным формулам

$$\tilde{w}^{(i)} = w^{(i)}(\tilde{\varphi}^{(1)}, \dots, \tilde{\varphi}^{(M)}),$$

а затем используем приближение (8).

Последнее соображение учтено в работе [7] и проведены соответствующие тестовые расчеты.

Заключение

В данной работе представлен редкий случай прикладного уравнения Фредгольма второго рода (1) (конкретнее, семество уравнений М.Г. Крейна (12)), ядро $k(y, x)$ которого (вида (13)) может быть вычислено явно или приближенно в различных точках x и y . Это позволяет использовать рандомизированные сеточные функциональные алгоритмы 1 и 2 подобно тому, как это сделано в работе [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войтишек А.В.* Особенности построения и оптимизации рандомизированных проекционных функциональных алгоритмов // *Материалы XVI Междунар. конф. имени А.Ф.Терпугова «Информационные технологии и математической моделирования»* (Казань, 29 сентября – 3 октября 2017 года). Томск: Изд-во НТЛ, 2017. Часть 2. С. 267–275.
2. *Войтишек А.В.* Разработка и оптимизация рандомизированных функциональных численных методов решения практически значимых интегральных уравнений Фредгольма второго рода // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2018. Т. 21. № 2 (74). С. 32–45.
3. *Войтишек А.В.* Классификация и возможности практического применения рандомизированных функциональных численных алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода // *Математический анализ. Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*. 2018. Т. 155. С. 3–19.
4. *Михайлов Г.А., Войтишек А.В.* Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Издат. центр «Академия», 2006.
5. *Войтишек А.В.* Функциональные оценки метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2007.
6. *Кабанихин С.И.* Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. Новосибирск: Наука, 1988.
7. *Новиков Н.С.* Численные алгоритмы решения уравнения И.М. Гельфанда – Б.М. Левитана – М.Г. Крейна: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Новосибирский государственный университет. Новосибирск, 2018.

Проблемы использования и внедрения цифровых финансовых активов в России на основе технологии распределенного реестра

П.В. Ересько, Е.В. Варламова, В.Е. Сенина

*ФГБОУ ВО «Саратовская государственная юридическая академия»,
г. Саратов, Россия*

Понятие «цифровых финансовых активов» в законодательстве возникло сравнительно недавно в связи с необходимостью внедрения и использования криптовалюты в России. Весной 2019 года в ряде стран был определен правовой статус Bitcoin и криптовалют. Россия пока к ним не относится. Однако в 2019 году ожидается создание закона о криптовалюте в России. Очевидно, что в России не могут причислить криптовалюты к другим электронным деньгам напрямую. Зато могут создать систему, которая поможет это сделать косвенно. В конце марта 2018 г. в Госдуму РФ был внесен проект закона о криптовалюте. В нижнюю палату парламента на рассмотрение поступил проект Федерального закона «О цифровых финансовых активах», который вводит понятия криптовалют и токенов, а также определяет ключевые различия между ними. Под цифровыми финансовыми активами в соответствии с Проектом ФЗ «О цифровых финансовых активах» (январь 2018 года), прошедшим первое чтение, понимают «имущество в электронной форме, созданное с использованием криптографических средств» [1]. В том же проекте к цифровым финансовым активам относят криптовалюту и токен.

Блокчейн рассматривают как «вариант реализации сети распределенных реестров, в котором данные о совершенных транзакциях структурируются в виде цепочки (последовательности) связанных блоков транзакций. Стоит отметить, что не все сети распределенных реестров функционируют на базе технологии блокчейн» [2]. Так, например, протокол Ripple подразумевает потранзакционный процессинг без формирования блоков.

К цели данной работы авторы относят выявление и анализ проблем использования и внедрения цифровых финансовых активов в России на основе технологии распределенного реестра.

В 2008 году человек (или группа людей) под псевдонимом Сатоши Накамото (Satoshi Nakamoto) [3] опубликовал файл с описанием протокола и принципа работы новой платежной системы. Через год была за-

кончена разработка протокола и появился код программы-клиента. Так была запущена сеть Bitcoin, основанная на технологии блокчейн. В 2009 году появилась первая криптовалюта – биткойн, ставшая самой первой и самой распространенной криптовалютой в мире.

Блокчейн представляет собой цепочку блоков (от англ. blockchain), а их совокупность – базу данных, дублированную на множестве серверов в сети Интернет. База данных постоянно обновляется, и в ней появляются новые и новые цепочки зашифрованной информации о покупках, продажах и обменах денежных средств. Каждая цепочка содержит заголовок блока, ключ предыдущего блока, ключ текущего блока и непосредственно само тело блока. Тело блока формируется при помощи упорядоченных записей (транзакций). Сформированный блок проверяется зарегистрированными участниками операции в сети, при этом для идентификации операции участники используют криптографические ключи. Если участник финансовой сделки согласен с транзакцией, то он присоединяется к концу цепочки, после чего внести изменения в блок уже невозможно. После завершения цепочки база данных обновляется во всех своих копиях, расположенных на серверах сети Интернет, и майнерами начинается формирование новой цепочки. Технология блокчейн удобна тем, что если и возможно взломать один блок, изменить информацию, то ничего, по сути, не изменится в базе данных, так как нужно будет менять тогда информацию по всем блокам (в каждой новой цепочке есть информация о предыдущей цепочке). Такой факт изменения данных невозможен для описанной технологии, так как внесенные изменения будут заметны другим участникам сделки. Кроме того, применяется алгоритм шифрования с использованием цифровой подписи. Обоснованность и аргументированность денежной операции, то есть ее валидность, определяется проверкой цепочки базы данных на наличие используемых денежных средств в исходном блоке. Если денежная сумма, используемая в транзакции, подтверждается наличием исходного блока, то операция признается валидной. На рынке существует более тысячи видов криптовалют, большинство из которых основано на технологии блокчейн.

В связи с особенностями технологии блокчейн возникают проблемы использования и внедрения цифровых финансовых активов в России. В первую очередь, формирование законодательной базы по использованию цифровых финансовых активов, и в данной статье авторами производится анализ сложившейся ситуации в правовом поле применения цифровых финансовых активов. К проблемам цифровых финансовых

активов следует отнести использование электронных денег на основе технологии блокчейн на денежном рынке в России и в мире; масштабируемость; защиту прав потребителей; волатильность и безопасность. Потеря логина и/или пароля от он-лайн кошелька обернется финансовой потерей, так как восстановить доступ к электронному кошельку вряд ли получится. Кроме того, возврат денежных средств при ошибочном переводе на другой биткоин-кошелек, могут осуществить только с согласия владельца электронного кошелька. К проблемам криптовалют также можно отнести тот факт, что криптовалюта ничем не обеспечена и может обесцениться, а то и вовсе исчезнуть в любой момент. Иногда криптовалюту олицетворяют с «мыльным пузырем», который может в любой момент лопнуть.

Криптовалюта используется в ряде стран в качестве законного средства платежа. Так, например, в Японии с марта 2016 года bitcoin является законным платежным средством, где также учитывается налог на покупку. В Германии в 2013 году биткоины были классифицированы как частные деньги и признаны в качестве расчетной денежной единицы, продажа биткоинов облагается НДС, а любая прибыль от операций с биткоинами – подоходным налогом. По законодательству США криптовалюта отнесена к классу физических товаров, по законам КНР – это цифровой товар. Криптовалюта внедрена в Германии, Великобритании, Финляндии, Швеции, Гондурасе, на островах Маврикий и Мэн и ряде других стран [4]. В Китае операции с биткоинами разрешены для физических лиц, но запрещены для банков. Наибольшие производственные мощности в области майнинга находятся в Китае. Швейцария для Bitcoin-стартапов является одной из самых благоприятных стран, для криптовалюты используются те же правила, что и для других признанных иностранных валют. В Венесуэле майнеры преследуются. В Великобритании биткоин не облагается НДС, для целей налогообложения криптовалюта рассматривается как иностранная валюта. В США криптовалюты считаются товаром, некоторые токены, выпущенные в ходе ICO, могут считаться ценными бумагами. В Сингапуре, Канаде, Гонконге некоторые токены, выпущенные в ходе ICO, также могут считаться ценными бумагами.

Банк России по-прежнему против легализации криптовалют в РФ как денежного средства и считает недопустимыми частные деньги. «Мы против частных денег, в какой бы форме они ни были – материальной или виртуальной. Криптовалюты – это частные цифровые деньги», – считает Набиуллина [5].

В России на 2018 год пока не выработана единая позиция относительно криптовалют и никаких ограничений на использование биткоинов на данный момент нет.

В информации Банка России от 04.09.2017 подтверждается позиция, высказанная Банком России от 2014 года, и сообщается, что «совместно с заинтересованными федеральными органами государственной власти Банк России осуществляет мониторинг рынка криптовалют и вырабатывает подходы к определению и регулированию криптовалют в Российской Федерации» [6].

На настоящий момент введение на территории Российской Федерации других денежных единиц кроме признанного рубля и выпуск денежных суррогатов, кроме рубля, запрещаются согласно ст. 27 Федерального закона N 86-ФЗ «О Центральном банке Российской Федерации (Банке России)» [7].

В 2016 году был разработан Проект Федерального закона «О внесении изменений в Уголовный кодекс Российской Федерации и Уголовно-процессуальный кодекс Российской Федерации» по статье 187.1 об обороте денежных суррогатов, где указывается ответственность «за изготовление (выпуск), приобретение в целях сбыта, а равно сбыт денежных суррогатов штрафом от пятисот тысяч рублей или лишение свободы» [8]. Но проект не был внесен в Государственную Думу Федерального Собрания Российской Федерации.

В России в настоящее время биткоин не имеет правового статуса, а также правовой статус не определен для криптовалют, ICO и майнинга. На 2019 год не выработана единая позиция относительно криптовалют и никаких ограничений на использование биткоинов на данный момент нет.

Несмотря на то, что криптовалюта популярна и многие бы в России захотели бы попытаться заработать с помощью этой схемы, по мнению авторов, не стоит сразу переходить на систему денежных средств с использованием криптовалют.

Проблемы применения криптовалюты связаны с часто изменяемой ценой за единицу; введением новых видов криптовалют; потерей популярности некоторых видов криптовалют. Цена на бирже криптовалюты определяется спросом и предложением. Например, появлением криптокотиков в одноименной игре CryptoKitties, основанной на технологии блокчейн, упрощенной модели технологии распределенных ресурсов. Поэтому код, характеристики и последовательность появления (все ходы записаны в цифровом коде) криптокотиков нельзя подделать. В 2017 году

было совершено 340481 сделок, в декабре 2018 года – уже более 495832 сделок, а на момент выхода статьи – уже более 562616 сделок по данным сайта продаж CryptoKitties [9] и продано 452314 уникальных котят. При этом средняя стоимость составляла в 2017 году – \$15.92, на декабрь 2018 – \$11,77, а в апреле 2019 года – \$ 48.67, и нет никакой гарантии, что через год этот вид будет стоить столько же или попросту исчезнет из видов электронной валюты.

Курс биткоина по данным международной биржи [10] 27 мая 2017 года превысил отметку 3000 долларов, а уже 13 декабря 2017 года наблюдался пик роста стоимости биткоина 1 BTC/USD – \$17226,38. Практически через год 21 ноября 2018 года происходит уменьшение курса в четыре раза по сравнению с показателем 13 декабря 2017 года, и курс биткоина составляет 1 BTC/USD – \$4628,4. На 30 апреля 2019 года 1 BTC = 338 633 RUB, а 1 RUB = 0.0000030 BTC [11]. Интересно, что сейчас уже имеются различные сервисы, обновляющие курс биткоина и других криптовалют в он-лайн режиме, позволяющие оценить риски продажи и приобретения криптовалюты.

Обвал криптовалюты возможен по разным причинам, например существенным колебаниям в стоимости, наличием большого количества биткоинов у ограниченной группы инвесторов.

По теме исследования были подготовлены тестовые вопросы. Опросы проводились с помощью их размещения на различных Интернет-площадках, в том числе с помощью Google Forms, социальной сети VK, anketolog.ru и других, и обрабатывались с помощью информационных технологий анализа данных [12]. Голосование было анонимным. Все желающие могли в нем участвовать. Проведенное исследование показало, что с понятием криптовалюты знакомы немногие, использование электронных денег, технологии блокчейн вызывает большой интерес и высокую готовность населения к вложениям в цифровые финансовые активы. Ситуация внедрения криптовалюты в мире и, в частности в России, со временем будет только улучшаться. У криптовалюты есть будущее, так как большинство стран заинтересованы в цифровых финансовых активах и планируют в будущем внедрять криптовалюту.

В заключение можно сказать, что пока не будут ликвидированы все проблемы использования и внедрения цифровых финансовых активов в России на основе технологии распределенного реестра и пока криптовалюта не войдет в законную силу нельзя использовать криптовалюту в качестве законного денежного средства платежа, то имеется огромный риск вложения денежных средств в криптовалюту, так как не исключены случаи потери электронных денег без возможности их восстановления.

В будущем, возможно, все заинтересованные страны перейдут на систему криптовалюты, и нас всех в экономической сфере ждет новый этап купли-продажи с использованием цифровых финансовых активов.

Использование технологии распределенного реестра – одно из решений проблемы многократного расходования денежных средств. Итак, технология распределенного реестра позволит ограничить объем эмиссии, блокчейн нельзя подделать, он непротиворечив, открыт, может быть анонимен, его почти невозможно обрушить, и он децентрализован.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Проект* Федерального закона № 419059-7 «О цифровых финансовых активах» (ред., принятая ГД ФС РФ в I чтении 22.05.2018) // Доступ из справ.-правовой системы «КонсультантПлюс».
2. *Развитие* технологии распределенных реестров URL: https://www.cbr.ru/content/document/file/36007/reestr_survey.pdf (дата обращения: 29.04.2019).
3. *Nakamoto S.* Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System. URL: <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf> (перевод статьи Сатоши Накамото. Биткоин: цифровая пиринговая наличность // Coinspot [21.12.2013]. URL: <https://coinspot.io/technology/bitcoin/perevod-stati-satoshi-nakamoto/>) (дата обращения: 29.04.2019).
4. *Бауэр В.П.* Проблемы на пути создания унифицированной цифровой платформы цифровой экономики. М.: РАЕН. 39 с. URL: http://raen.info/upload/000/files/project/47_68-2/25.pdf (дата обращения: 28.04.2019).
5. *Центробанк* выступил против легализации криптовалют в России (по материалам РИА Новости) URL: <https://ria.ru/economy/20171005/1506246580.html> (дата обращения: 28.04.2019).
6. *Информация* Банка России от 04.09.2017 «Об использовании частных «виртуальных валют» (криптовалют)» // Вестник Банка России. № 80. 14.09.2017. С. 3.
7. *Федеральный закон* от 10.07.2002 № 86-ФЗ (ред. от 28.11.2018) «О Центральном банке Российской Федерации (Банке России)» // Собрание законодательства РФ. 15.07.2002. № 28. Ст. 2790.
8. *Проект* Федерального закона «О внесении изменений в Уголовный кодекс Российской Федерации и Уголовно-процессуальный кодекс Российской Федерации» (подготовлен Минфином России). URL: <http://regulation.gov.ru/> (дата обращения: 28.03.2016).
9. *CryptoKitties.* URL: <https://kittysales.herokuapp.com/> (дата обращения: 30.04.2019).
10. *Международная биржа* криптовалют URL: <https://exmo.me/> (дата обращения: 29.04.2019).
11. *Калькулятор* – справочный портал. URL: <https://www.calc.ru/Bitcoin-k-rublyu-online.html> (дата обращения: 30.04.2019).
12. *Ересько П.В., Варламова Е.В.* Информационные технологии анализа данных в политологии // Совершенствование методологии познания в целях развития науки: сб. статей X Междунар. науч.-практич. конф. (28 октября 2017 г., г. Уфа): в 2 ч. Ч. 2 Уфа: Аэтерна, 2017. С. 19–23.

О выборе типа распределения для характеристик процесса роторно-конвейерного доения

В.А. Зорин¹, С.Н. Стребуляев¹, О.А. Тареева²

¹ *Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, Россия*

² *Нижегородский государственный инженерно-экономический университет,
г. Княгинино, Россия*

Статья посвящена статистическому анализу характеристик молокоотдачи поголовья коров на конвейерно-кольцевых доильных установках.

Первая доильная установка типа «карусель» на базе доильного кольцевого конвейера «Ротолактор» была создана в США в 1929 году, после чего ученые других зарубежных стран и России работали над усовершенствованием и повышением производительности аналогичных доильных систем.

В работе рассматриваются результаты процесса доения стада коров за несколько дней на доильной установке карусельного типа в ООО «Ждановское» Кстовского района Нижегородской области. Максимальное время одного оборота конвейера связано с наличием в стаде групп животных, имеющих различные индивидуальные характеристики. Для анализа этих характеристик необходимо использование методов теории вероятностей и математической статистики. Этот анализ позволит построить адаптивный алгоритм управления скоростью вращения с учетом индивидуальных характеристик каждой коровы за предыдущую дойку. В работе изложены результаты расчетов для проверки гипотез статистического анализа массивов, данных о скорости доения и времени выдаивания стада коров. Рассматриваются гипотезы Г-распределения, нормального и логнормального распределения случайных величин об индивидуальных характеристиках животных.

Постановка задачи

В качестве материала использованы данные о времени и скорости выдаивания коров, полученные в ООО «Ждановский» Нижегородской области. Для анализа характеристик использованы методы теории проверки статистических гипотез. Вся проверка основана на использовании критерия согласия К. Пирсона. Хотя в научной литературе, посвящен-

ной статистическим исследованиям известны и другие критерии – критерии А.Н. Колмогорова, Н. В. Смирнова, критерий отношения правдоподобия и другие [1–3]. Для анализа характеристик на ЭВМ в работе использована система аналитических вычислений Maple [4]. Результаты более детальных исследований приведены в [5].

В настоящей работе с использованием известных зависимостей анализировались гипотезы о распределении указанных характеристик: Г-распределение, нормальное распределение и логарифмически нормальное распределение [1, 2]. В дальнейшем в работе использованы обозначения из [1]. Из физической постановки задачи естественно предполагать, что скорость доения V (г/с) и время доения T (с) являются абсолютно непрерывными неотрицательными случайными величинами. В дальнейшем в работе использованы основные факты по применению критерия согласия К. Пирсона.

Для проверки гипотезы о распределении $F(t)$ с помощью критерия К. Пирсона был использован метод моментов для оценки параметров по выборке рассматриваемой функции.

Для каждой из трех гипотез о теоретическом распределении рассматриваемых случайных величин V и T с помощью этого критерия проверяется их степень меры согласия с рассматриваемыми выборками, наблюдая n раз значение величины V : $v_1 \dots v_n$ и аналогично для T . Для каждой из гипотез была использована оценка математического ожидания и дисперсии, то есть их оценки. Для этих гипотез составлялась система уравнений метода моментов.

Из приведенной системы находим решения для оценки моментов каждого из рассматриваемых распределений и вычисляем численные значения критерия К. Пирсона

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(r_i - n \cdot P_i)^2}{n \cdot P_i}$$

На первом этапе проверялась гипотеза H_0 , по которой $F(t)$ есть функция гамма-распределения. Как известно, величина χ^2 приближается к случайной величине χ_ϕ^2 (χ^2 -распределение с ϕ степенями свободы). При этом $\phi = m - 1 - l$, где l – количество оцениваемых параметров, m – число интервалов группировки выборки.

Для проверки гипотезы H_0 рекомендуется отвергнуть эту гипотезу, если вычисленная величина $\chi^2 > C$. Величина C находится по таблицам распределения χ^2 с ϕ степенями свободы, приведенными в [3]. При этом

должно выполняться неравенство

$$P(X^2 > C | H_0) \leq \alpha, \quad (1)$$

где α – так называемый уровень значимости критерия. Выбор α делается близким к нулю ($\alpha \approx 0.05$).

Если вычисленные значения χ^2 критерия К. Пирсона больше эталонного значения $C_{кр}$, то проверяемая гипотеза отвергается и, в противном случае, принимается.

Аналогичные исследования проводились для проверки гипотезы нормального распределения и логарифмически нормального законов.

В дальнейшем производим вычисления статистики χ^2 К. Пирсона для отдельных видов гипотез. Для этого проводим анализ статистических характеристик двух массивов – массива времени и массива скорости доения, приведенных на рис. 1, 2. Анализ для каждой выборки и для каждого из рассмотренных выше типов распределений проводился на ЭВМ с использованием системы аналитических вычислений Maple.

```
FF := array(1..79, 1..2, [[1, 633], [2, 388], [3, 303], [4, 571], [5, 367], [6, 454], [7, 300], [8, 305], [9, 253], [10, 330], [11, 381], [12, 569], [13, 301], [14, 496], [15, 265], [16, 505], [17, 318], [18, 551], [19, 275], [20, 325], [21, 395], [22, 428], [23, 389], [24, 421], [25, 607], [26, 859], [27, 562], [28, 480], [29, 267], [30, 488], [31, 272], [32, 262], [33, 304], [34, 331], [35, 421], [36, 440], [37, 384], [38, 393], [39, 322], [40, 635], [41, 503], [42, 515], [43, 799], [44, 439], [45, 306], [46, 261], [47, 257], [48, 422], [49, 451], [50, 500], [51, 259], [52, 446], [53, 782], [54, 548], [55, 487], [56, 428], [57, 262], [58, 741], [59, 199], [60, 435], [61, 442], [62, 265], [63, 302], [64, 388], [65, 488], [66, 424], [67, 849], [68, 266], [69, 448], [70, 311], [71, 261], [72, 446], [73, 364], [74, 377], [75, 546], [76, 915], [77, 368], [78, 543], [79, 422]])
```

Рис. 1. Выборка времени выдаивания, дневная дойка 15.12.2015 г.

```
FF := array(1..79, 1..2, [[1, 13], [2, 26], [3, 30], [4, 15], [5, 29], [6, 22], [7, 28], [8, 11], [9, 40], [10, 19], [11, 23], [12, 12], [13, 18], [14, 16], [15, 20], [16, 22], [17, 19], [18, 12], [19, 37], [20, 24], [21, 25], [22, 21], [23, 26], [24, 30], [25, 17], [26, 17], [27, 23], [28, 24], [29, 41], [30, 19], [31, 27], [32, 14], [33, 27], [34, 32], [35, 21], [36, 25], [37, 26], [38, 23], [39, 21], [40, 26], [41, 10], [42, 15], [43, 24], [44, 20], [45, 22], [46, 36], [47, 18], [48, 9], [49, 22], [50, 18], [51, 28], [52, 34], [53, 16], [54, 18], [55, 21], [56, 22], [57, 41], [58, 11], [59, 4], [60, 18], [61, 24], [62, 22], [63, 17], [64, 14], [65, 22], [66, 17], [67, 11], [68, 34], [69, 26], [70, 29], [71, 37], [72, 18], [73, 40], [74, 25], [75, 15], [76, 22], [77, 18], [78, 7], [79, 14]])
```

Рис. 2. Выборка скорости выдаивания, дневная дойка 15.12.2015 г.

Для указанных выборок проводится вычисление статистики χ^2 Карла Пирсона с использованием специально разработанного алгоритма и программного обеспечения. Результаты математического моделирования приведены в таблице ниже.

Значение статистики критерия К. Пирсона для различных гипотез

Виды распределений			
	нормальное	гамма	логнормальное
Время выдаивания			
χ^2	6.59	3.18	58.64
Скорость выдаивания			
χ^2	4.17	1.54	70.45

При проверке гипотез сравнивалось значение χ^2 с критическими значениями $S_{кр}$, согласно [3]. Это значение, подчиняющееся числу степеней свободы m (в нашем случае $m = 3$) и при уровне значимости $\alpha = 0.05$ критерия К. Пирсона, находится из таблицы χ^2 -распределений. Численно получено более хорошее согласие Г-распределения, чем нормального и логнормального распределений [6].

График рассмотренных плотностей распределений и гистограммы приведены на рис. 3 (для скорости доения) и рис. 4 (для времени выдаивания). Полученные графики подтверждают сказанное выше.

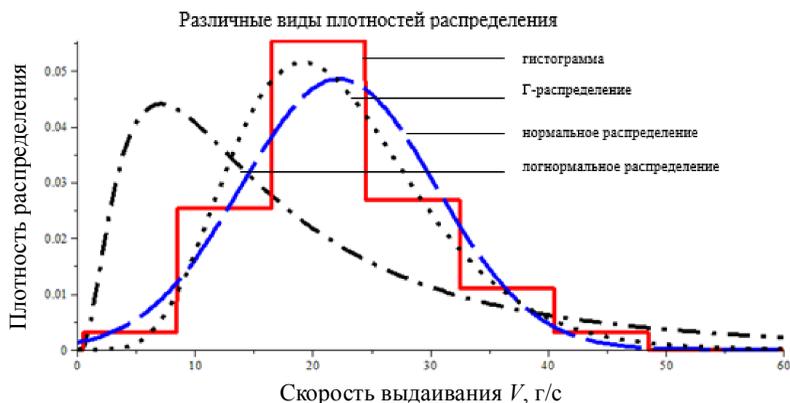


Рис. 3. График рассмотренных плотностей распределений и гистограмма скорости выдаивания



Рис. 4. График рассмотренных плотностей распределений и гистограмма времени выдаивания

Таким образом, из анализа полученных вычислительным экспериментом результатов следует, что наиболее предпочтительным является Г-распределение.

Заключение

Выбор правильной гипотезы распределения изучаемых процессов позволит в дальнейшем более точно охарактеризовать специфику дойного стада. Это позволит разработать адаптивный алгоритм, гарантирующий повышение производительности процесса доения. Полученные в работе результаты анализа натурального эксперимента и их обработки с использованием методов статистики и описание жизненного цикла информационной биологической системы коровы позволяют создать наиболее эффективные алгоритмы управления скоростью вращения доильной установки и повышения ее производительности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков А.А. Математическая статистика: учебник. М.: Наука, 1984. 472.
2. Джонсон Н.А., Хоу С., Балакришнин Н. Одномерные непрерывные распределения: пер. 2-го англ. изд. М.: БИНОМ, 2012. 703 с.
3. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 2003. 416 с.

4. *Стребуляев С.Н., Васин Д.Ю.* Использование системы аналитических вычислений Maple для решения задач прикладной математики: учебное пособие. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2007. 170 с.
5. *Зорин В.А., Стребуляев С.Н., Тареева О.А.* Использование методов математической статистики при выборе типа распределения для характеристик процесса роторно-конвейерного доения // Вестник НГИЭИ. 2019. № 2 (93). С. 5–18.
6. *Цой Ю.А.* Процессы и оборудование доильно-молочных отделений животноводческих ферм. М.: ГНУ ВИЭСХ, 2010. 424 с.

Методика исследования синхронизации параметров сердечно-сосудистой системы человека с параметрами космической погоды с применением компьютерных технологий*

**В.А. Молчанов¹, С.Н. Самсонов², С.С. Паршина³,
П.Г. Петрова⁴, А.А. Стрекаловская⁴**

¹ Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

² Институт космических исследований и аэронавтики им. Ю.Г. Шафера СО РАН, г. Якутск, Россия

³ Саратовский государственный медицинский университет им. В.И. Разумовского, г. Саратов, Россия

⁴ Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, г. Якутск, Россия

Известно, что в России от сердечно-сосудистых заболеваний ежегодно умирает от 500 тыс. до 1.5 млн. человек, при этом во время геомагнитных возмущений число вызовов «Скорой помощи» к кардиологическим пациентам возрастает на 15–20 % [1]. Рост числа инфарктов миокарда и инсультов при геомагнитных возмущениях связан с изменением напряженности магнитного поля на Земле в результате активных процессов на Солнце и в магнитосфере Земли.

Исследование динамики состояния миокарда добровольцев при изменении геомагнитной возмущенности позволило ввести показатель «эффект синхронизации» [2], который отражает совпадение между максимумами коэффициента симметрии зубца Т (КСТ) электрокардиограммы (ЭКГ) в фазовом пространстве и Кр-индекса, отражающего уровень геомагнитной возмущенности. Вместе с тем в имеющихся публикациях анализ синхронизации КСТ-Кр до настоящего времени имеет описательный характер, что требует создания математических моделей, позволяющих подтвердить достоверность полученной связи. Подобные модели позволят с высокой вероятностью выявить и другие параметры космической погоды, влияющие на состояние сердечно-сосудистой системы человека.

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 18-415-140002 p_a.

Основные результаты

Мониторинг состояния сердечно-сосудистой системы проводился в рамках многоширотного синхронного биофизического эксперимента «Гелиомед-2» одновременно в авроральных (п. Тикси – 11 чел.), субавроральных (г. Якутск — 2 группы по 18 и 15 чел.) и средних (г. Саратов — 31 чел.) широтах. Средний возраст добровольцев составил в различных группах: 51.3 ± 3.8 года (Тикси), 43.0 ± 2.5 года (Якутск-1), 21.6 ± 1.7 года (Якутск-2), и 40.6 ± 2.2 года (Саратов).

Длительность мониторинга составила 60 дней в весенний период (март-апрель) 2017 г. Осуществлялся ежедневный контроль состояния процессов реполяризации миокарда желудочков по данным ЭКГ с оценкой коэффициента симметрии зубца Т (КСТ) с помощью аппарата «Фазаграф» (Украина). Данный метод хорошо зарекомендовал себя в скрининге ишемической болезни сердца и в оценке влияния параметров космической погоды, в частности солнечной активности, на морфологические параметры сердечной мышцы [3, 4].

Геоманитная активность оценивалась по 11 показателям космической погоды: Кр-индексу, скорости ветра, T, f, P₀, BX, BY, BZ, SW Proton Density, SW Plasma Speed, Flow pressure, которые определялись ежедневно в течение всего периода наблюдения.

Разработана оригинальная методика исследования эффекта синхронизации максимумов процессов реполяризации миокарда желудочков (по данным коэффициента симметрии зубца Т электрокардиограммы) с максимумами параметров космической погоды.

В качестве количественной меры близости между максимумами рядов состояния миокарда добровольцев и максимумами рядов параметров космической погоды выбрано среднее значение расстояний (в днях) между этими максимумами.

Анализ полученных данных. Для статистической оценки параметров анализируемых выборок определяется вид их распределения. При построении теоретической модели распределений полученных выборок используются следующие методы:

- графические методы проверки визуальной нормальности с помощью построения гистограмм, специальных диаграмм полученных данных и качественной оценки того, что данные были получены из нормального распределения;

- статистические методы применения тестов, которые вычисляют статистику по экспериментальным данным и количественно определяют

ют вероятность того, что данные были получены из нормального распределения. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики взяты из работ [5, 6]. Все расчеты получены с помощью компьютерных программ на языке программирования Python.

Визуальная проверка нормальности. Для качественной проверки нормальности анализируемых выборок рассматривались такие графики данных, как гистограммы, ядерные оценки плотности (KDE, или Kernel Density Estimation) и графики квантилей (Q-Q plots, или Quantile-Quantile plots) [7]. Результаты такого визуального анализа в нашем случае показывают, что все рассматриваемые распределения достаточно хорошо аппроксимируются графиком нормального распределения.

Например, гистограмма и ядерная оценка плотности распределения расстояний от дней максимумов значений КСТ первого добровольца до ближайшего дня максимума значения Кр-индекса представлены на рис. 1.

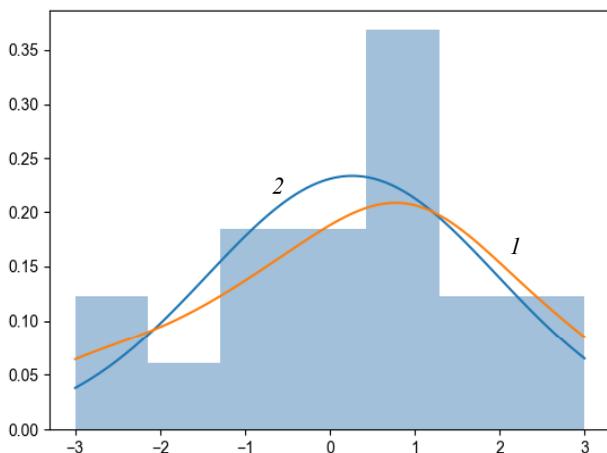


Рис. 1. Гистограмма, ядерная оценка плотности (кр. 1) и стандартная кривая Гаусса (кр. 2) – для визуального сравнения распределений

Тесты статистической нормальности. Для проверки нормальности рассматриваемых выборок применялись известные статистические тесты, специально разработанные для проверки нормальности распределения данных, такие, как тест Шапиро – Уилка, тест Д'Агостино, тест Андерсона – Дарлинга и тест Колмогорова – Смирнова (см. [5, 7]).

Результаты такого тестирования статистической нормальности показывают, что почти для всех рассматриваемых распределений по всем тестам принимается гипотеза H_0 о нормальности распределения и только для небольшого числа распределений гипотеза H_0 по одному из тестов отклоняется.

Оценка параметров анализируемых распределений данных. Согласно [5], в качестве состоятельной, несмещенной и эффективной оценки генеральной средней анализируемого распределения рассматривается выборочная средняя, в качестве состоятельной и несмещенной оценки дисперсии анализируемого распределения – исправленная выборочная дисперсия. Интервальная оценка рассматриваемых распределений получается с помощью t-распределения Стьюдента [5], которое дает доверительный интервал, покрывающий генеральную среднюю с доверительной вероятностью.

Например, для первого добровольца получены следующие точечные оценки генеральной средней и дисперсии распределения расстояний от дней максимумов значений коэффициента симметрии зубца Т его электрокардиограммы до ближайшего дня максимального значения Кр-индекса: выборочное среднее = 0.26, стандартное отклонение = 1.71 и генеральная средняя с доверительной вероятностью 0.95 покрывается доверительным интервалом (–0.58, 1.11).

Средние значения распределений расстояний от дней максимумов значений КСТ первых пяти добровольцев до дней максимумов 11 параметров космической погоды приведены в таблице.

Средние значения распределений расстояний

Кр	Скор.в.	T	f	Po	BX	BY	BZ	SW	SWP	Flow
0.26	–0.17	0.25	–0.11	–0.25	–0.65	–0.33	–0.26	0.47	–0.28	–0.06
–0.19	–0.11	–0.42	–0.1	0.29	0.53	0.19	–0.12	0.14	–0.24	–0.12
0.3	–0.2	–0.2	0.2	0.0	–0.2	0.32	0.15	0.29	0.33	0.26
1.0	–0.15	0.5	0.0	0.27	–0.33	0.64	0.07	0.69	0.33	0.5
0.29	0.09	0.05	0.17	0.24	–0.24	–0.05	–0.1	0.0	0.29	0.14

Заключение

Полученные результаты статистического анализа данных показывают, что средние значения распределений расстояний от дней максимумов значений КСТ добровольцев до ближайшего дня максимума рассмотренных параметров космической погоды незначительно отличаются

ся от значения ноль, соответствующего совпадению дней максимумов процессов реполяризации миокарда желудочков пациентов с днями максимумов параметров космической погоды:

а) разброс средних значений этих распределений в пределах одного дня свидетельствует о том, что дни максимумов процессов реполяризации миокарда желудочков (по данным коэффициента симметрии зубца Т электрокардиограммы) добровольцев в среднем отличаются не более чем на один день от дней ближайших максимумов рассмотренных параметров космической погоды;

б) разброс стандартных отклонений этих распределений в пределах одного-двух дней свидетельствует о том, что дни максимумов процессов реполяризации миокарда желудочков (по данным коэффициента симметрии зубца Т электрокардиограммы) добровольцев отклоняются от их средних значений не более чем на два дня;

в) доверительные интервалы с доверительной вероятностью 0.95 покрывают генеральные средние этих распределений и содержат значение ноль, показывающее совпадение дней максимумов процессов реполяризации миокарда желудочков пациентов с днями максимумов рассмотренных параметров космической погоды,

г) результаты анализа данных мониторинга на основе методов машинного обучения применяются в классификации добровольцев и в прогнозировании всплесков значений КСТ добровольцев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самсонов С.Н., Петрова П.Г., Стрекаловская А.А., Манькина В.И., Томский М.И., Алексеев Р.З. Связь солнечных и геофизических возмущений с сердечно-сосудистыми заболеваниями // Наука и образование. № 2 (50). 2008. С. 50–55.
2. Паршина С.С., Самсонов С.Н., Манькина В.И. и др. Особенности групповой реакции сердечно-сосудистой системы на изменение космической погоды // Новые информационные технологии в медицине, биологии, фармакологии и экологии: материалы Междунар. конф. IT + M&Ec`2015. 2015. С. 316–322.
3. Файнзильберг Л.С. Информационная технология для диагностики функционального состояния оператора // Управляющие системы и машины. 1998. № 4. С. 40–45.
4. Вишнеvский В.В., Файнзильберг Л.С., Рагульская М.В. Влияние солнечной активности на морфологические параметры ЭКГ сердца здорового человека // Биомедицинские технологии и радиоэлектроника. 2003. № 3. С. 3–11.
5. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. М.: Физматлит, 2006.
6. Хардле В. Прикладная непараметрическая регрессия. М.: Мир, 1993.
7. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Сравнительный анализ критериев проверки отклонения распределения от нормального закона // Метрология. 2005. № 2. С. 3–23.

Оценивание параметра непродлевающегося мёртвого времени случайной длительности в обобщённом асинхронном потоке событий

Л.А. Нежелская, А.А. Першина

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

В связи с интенсивным развитием сетей связи модель простейшего потока событий перестала быть адекватной реальным информационным потокам. Требования практики послужили стимулом к рассмотрению дважды стохастических потоков [1, 2] в качестве математической модели реальных потоков событий в компьютерных сетях.

Многие авторы рассматривают математические модели потоков событий, когда события потока доступны наблюдению. В реальности же зарегистрированное событие создает период мёртвого времени [3], в течение которого другие события потока становятся ненаблюдаемыми. При этом, чтобы оценить потери потока, необходимо оценить значение его длительности. Период ненаблюдаемости потока может продолжаться некоторое фиксированное время, а также может быть случайным. Задачи по оценке параметров и состояний потока событий в условиях мёртвого времени фиксированной длительности, рассматривались в работах [4, 5].

Достаточно открытым остается вопрос изучения потоков событий, когда мёртвое время является случайной величиной. Здесь отметим работу [6], в которой решается задача оценки параметров асинхронного потока событий в условиях случайного мертвого времени, и работу [7], в которой находятся формулы для начальных моментов общего периода ненаблюдаемости в пуассоновском потоке событий при продлеваемом случайном мёртвом времени. В настоящей статье рассматривается обобщённый асинхронный поток событий (обобщённый ММРР-поток) в условиях непродлевающегося случайного мёртвого времени, распределённого по равномерному закону. Методом моментов находится параметр равномерного распределения, приводятся результаты статистического эксперимента.

Постановка задачи

Рассматривается обобщенный асинхронный дважды стохастический поток событий, сопровождающий процесс которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i , $i = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе (из второго в первое) может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром α_i , $i = 1, 2$. При переходе процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе инициируется с вероятностью p ($0 \leq p \leq 1$) дополнительное событие во втором состоянии. Наоборот, при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью q ($0 \leq q \leq 1$) дополнительное событие в первом состоянии. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс. После каждого зарегистрированного события в момент времени t_k наступает период мёртвого времени случайной длительности, так что другие события исходного потока, наступившие в течение этого периода мёртвого времени (периода ненаблюдаемости), недоступны наблюдению и не вызывают его продления (непродлевающееся мёртвое время). Принимается, что случайная длительность мёртвого времени распределена по равномерному закону с плотностью $p(T) = 1/T^*$, $0 \leq T \leq T^*$.

Рассматривается стационарный режим функционирования ненаблюдаемого потока событий (переходными процессами на полуинтервале наблюдения $(t_0, t]$, пренебрегаем). Необходимо в момент времени t на основании выборки t_1, t_2, \dots, t_n наблюдаённых моментов наступления событий оценить методом моментов T^* (ММ-оценка).

ММ-оценка параметра T^*

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k > 0$). Плотность вероятности значений длительности k -го интервала есть $p_{T^*}(\tau_k) = p_{T^*}(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k , т.е. момент наступления события

есть $\tau = 0$. В [4] получено выражение для плотности $p(\tau|T)$, когда длительность мёртвого времени является детерминированной величиной:

$$p(\tau|T) = 0, \quad 0 \leq \tau < T; \quad p(\tau|T) = \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + [1 - \gamma(T)]z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, \quad \tau \geq T;$$

$$\gamma(T) = [z_2 - (\lambda_1 + p\alpha_1)\pi_1(T) - (\lambda_2 + q\alpha_2)\pi_2(T)] / (z_2 - z_1); \quad (1)$$

$$\pi_1(T) = \pi_1 + [\pi_2 - \pi_2(0|T)]e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T}, \quad \pi_2(T) = 1 - \pi_1(T);$$

$$\pi_2(0|T) = (p_{12} + \delta\pi_2[1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T}]) / (1 - \delta e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T}),$$

$$\delta = (\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2) / z_1z_2;$$

$$\pi_1 = \alpha_2 / (\alpha_1 + \alpha_2), \quad \pi_2 = 1 - \pi_1; \quad p_{12} = \alpha_1(\lambda_2 + p\alpha_2) / z_1z_2;$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2) \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)} \right].$$

Тогда плотность $p_{T^*}(\tau)$ примет вид (для упрощения индекс T^* опустим):

$$p(\tau) = \int_{(T)} p(T)p(\tau|T)dT = \begin{cases} p_1(\tau) = \int_0^{\tau} p(T)p(\tau|T)dT, & 0 \leq \tau < T^*; \\ p_2(\tau) = \int_0^{T^*} p(T)p(\tau|T)dT, & \tau \geq T^*. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя в (2) выражение (1), учитывая, что $p(T) = 1/T^*$, находим

$$p_1(\tau) = A_1 + A_2(\tau)e^{-z_1\tau} + A_3(\tau)e^{-z_2\tau}, \quad 0 \leq \tau < T^*; \quad (3)$$

$$p_2(\tau) = B_1(\tau)e^{-z_1\tau} + B_2(\tau)e^{-z_2\tau}, \quad \tau \geq T^*; \quad (4)$$

$$A_1 = 1/T^*; \quad A_2(\tau) = -c[z_2(\alpha_1 + \alpha_2) - a + b \cdot f_1(\tau) / z_2(\alpha_1 + \alpha_2)];$$

$$A_3(\tau) = c[z_1(\alpha_1 + \alpha_2) - a + b \cdot f_2(\tau) / z_1(\alpha_1 + \alpha_2)];$$

$$B_1 = -c\{[z_2(\alpha_1 + \alpha_2) - a](1 - e^{-z_1T^*}) + b \cdot f_1(T^*) / z_2(\alpha_1 + \alpha_2)\};$$

$$B_2 = c\{[z_1(\alpha_1 + \alpha_2) - a](1 - e^{-z_2T^*}) + b \cdot f_2(T^*) / z_1(\alpha_1 + \alpha_2)\};$$

$$a = \alpha_1(\lambda_2 + q\alpha_2) + \alpha_2(\lambda_1 + p\alpha_1); \quad c = 1/T^*(z_2 - z_1)(\alpha_1 + \alpha_2);$$

$$b = \alpha_1 \alpha_2 (\lambda_1 + p \alpha_1 - \lambda_2 - q \alpha_2) (\lambda_1 + q \alpha_1 - \lambda_2 - p \alpha_2);$$

$$f_1(y) = \int_{e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)y}}^1 \frac{x^{-z_1}}{x^{\alpha_1 + \alpha_2} (1 - \delta x)} dx; \quad f_2(y) = \int_{e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)y}}^1 \frac{x^{-z_2}}{x^{\alpha_1 + \alpha_2} (1 - \delta x)} dx, \quad y = \tau, \quad y = T^*.$$

Получим оценку T^* методом моментов [8]. Математическое ожидание длительности τ интервала между соседними событиями есть

$$M(\tau | T^*) = \int_0^{\infty} \tau p(\tau) d\tau = \int_0^{T^*} \tau p_1(\tau) d\tau + \int_{T^*}^{\infty} \tau p_2(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Подставляя в (5) выражения (3), (4), получаем

$$\begin{aligned} M(\tau | T^*) &= a_1 + (T^*/2) - (a_2/z_2 T^*) \int_0^{T^*} \tau f_1(\tau) e^{-z_1 \tau} d\tau - \\ &- (a_2/z_1 z_2) [1 + (1/z_1 T^*)] e^{-z_1 T^*} f_1(T^*) + (a_2/z_1 T^*) \int_0^{T^*} \tau f_2(\tau) e^{-z_2 \tau} d\tau + \\ &+ (a_2/z_1 z_2) [1 + (1/z_2 T^*)] e^{-z_2 T^*} f_2(T^*), \end{aligned} \quad (6)$$

$$a_1 = [\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 - (p + q) \alpha_1 \alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2] / z_1 z_2 (\alpha_1 + \alpha_2),$$

$$a_2 = b / (z_2 - z_1) (\alpha_1 + \alpha_2)^2,$$

где $f_i(\tau), f_i(T^*), i = 1, 2$, определены в (3), (4); z_1, z_2 – в (1).

Подчеркнём, что при $T^* = 0$ из (6) следует

$$M(\tau | T^*) = (\alpha_1 + \alpha_2) / z_1 z_2 (1 - \delta) > 0,$$

что совпадает с формулой, приведённой в [9].

Пусть $\tau_1 = t_2 - t_1, \dots, \tau_n = t_{n+1} - t_n, \tau_1 > 0, \dots, \tau_n > 0$ – последовательность измеренных в течение полуинтервала наблюдения $(0, t]$ значений длительностей интервалов между соседними событиями. Тогда статистика $C_1 = (1/n) \sum_{k=1}^n \tau_k$ есть оценка $\hat{M}(\tau)$ математического ожидания (6). В этом случае уравнение моментов для T^* выпишется в виде $M(\tau | T^*) = C_1$. Можно показать, что уравнение моментов имеет единственное решение.

Результаты статистических экспериментов

С целью установления качества получаемых оценок параметра T^* методом моментов поставлен статистический эксперимент.

Отдельный j -й эксперимент ($j = 1, \dots, N$) заключается в следующем:

1) При заданных значениях $\lambda_i, \alpha_i, i = 1, 2, p, q, T^*, Tm$ осуществляется имитационное моделирование наблюдаемого потока; выходом имитационной модели является последовательность значений $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$;

2) численно решается уравнение $M(\tau | T^*) = C_1$, т.е. находится оценка \hat{T}_j^* ;

3) осуществляется повторение N раз шагов 1, 2. Результатом алгоритма является выборка $(\hat{T}_1^*, \dots, \hat{T}_N^*)$, на основании которой вычисляются

$$\hat{M}(\hat{T}^*) = (1/N) \sum_{j=1}^N \hat{T}_j^*,$$

$$\hat{V}(\hat{T}^*) = (1/N) \sum_{j=1}^N [\hat{T}_j^* - T^*]^2.$$

T^* – известное из имитационной модели значение параметра.

При проведении статистического эксперимента выбраны следующие параметры имитационной модели $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.5, p = 0.5, q = 0.5, T^* = 1$. Ниже приведены результаты эксперимента ($N = 100$).

Результаты статистического эксперимента

Tm	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	0.9985	1.0029	0.9981	0.9884	0.9940	0.9897	0.9963	0.9907	0.9951	0.9973
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0.0089	0.0040	0.0026	0.0017	0.0019	0.0015	0.0012	0.0011	0.0008	0.0009

Анализ численных результатов показывает, что в смысле введённого критерия (выборочная вариация оценки \hat{T}^*) стационарный режим устанавливается при $Tm \geq 500$ ед. времени.

Заключение

По результатам проведённого исследования можно сделать следующие выводы: 1) аналитически показано, что уравнение моментов имеет единственное решение; 2) метод моментов обеспечивает приемлемые оценки параметра T^* .

ЛИТЕРАТУРА

1. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчёта фрагментов сетей связи // Изв.АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
2. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // J. Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
3. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск: Университетское, 1988. 256 с.
4. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлеваемом мёртвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
5. Nezhel'skaya, L.A. Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Sciences. 2014. V. 487. P. 342–350.
6. Васильева Л.А. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях присутствия мёртвого времени // Вестник Томского государственного университета. 2002. № S1-1. С. 9–13.
7. Глухова Е.В., Терпугов А.Ф. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий при наличии продлевающегося мёртвого времени // Изв. вузов. Физика. 1995. Т. 38. № 3. С. 22–31.
8. Шуленин В.П. Математическая статистика. Ч. 1. Томск: Изд-во НТЛ, 2012. 540 с.
9. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Асинхронный дважды стохастический поток с иницированием лишних событий // Дискретная математика. 2011. Т. 23. № 2. С. 59–65.

Оценивание параметров плотности вероятности значений длительности интервала между событиями в коррелированном обобщенном синхронном потоке второго порядка

Л.А. Нежелская, Е.Ф. Сидорова

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Наиболее актуальные исследования, связанные с проектированием, последующим внедрением и обслуживанием информационно-вычислительных систем и сетей различной конфигурации, математическими моделями которых выступают системы и сети массового обслуживания, возникают в первую очередь в рамках рассмотрения случайных входящих потоков событий (сообщений, заявок) [1, 2].

Усложнение структуры цифровых систем интегрального обслуживания, разнообразие программного и аппаратного обеспечения, интеграция различных систем связи выявили необходимость построения новых математических моделей входящих потоков в виде дважды стохастических потоков событий, исследованию которых посвящены работы [3–7]. При их непосредственном изучении выделяют два основных класса задач – оценивание состояний потока [6, 8, 9] и оценивание его параметров [7, 10] по наблюдаемым моментам наступления событий.

В настоящей статье проводится дальнейшее исследование коррелированного обобщенного синхронного потока второго порядка [6] в рамках оценки параметров плотности вероятности значений длительности интервала между событиями потока согласно методу моментов [11].

Постановка задачи

Рассматривается функционирующий в стационарном режиме обобщенный синхронный поток второго порядка (поток), сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$ является кусочно-постоянным с двумя состояниями S_1 и S_2 ; здесь и далее S_i понимается как i -е состояние $\lambda(t)$ и имеет место при $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$, $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$.

Длительность интервала между событиями потока в i -м состоянии определяется случайной величиной $\eta_i = \min(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$, где случайные

величины $\xi_i^{(1)}$ и $\xi_i^{(2)}$ независимы и распределены по законам $F_i^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$ и $F_i^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha_i t}$ соответственно. В момент наступления события потока в зависимости от того, какое значение приняла случайная величина η_i , $i = 1, 2$, процесс $\lambda(t)$ переходит из i -го состояния в j -е, $i \neq j$, или остается в i -м состоянии, $i = j$, с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i)$ либо $P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$; $P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i) + P_1^{(1)}(\lambda_i | \lambda_i) = 1$, $P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i) + P_1^{(2)}(\lambda_i | \lambda_i) = 1$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. Таким образом, длительность интервала между событиями потока в i -м состоянии скрытого марковского процесса $\lambda(t)$ является случайной величиной с экспоненциальной функцией распределения $F_i(t) = 1 - e^{-(\lambda_i + \alpha_i)t}$, $i = 1, 2$.

Цель настоящего исследования в том, чтобы определить явный вид плотности вероятности длительности интервала между моментами наступления событий в коррелированном потоке и оценить ее параметры методом моментов при условии, что на интервале наблюдения (t_0, t) последовательность наблюдаемых моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ порождает вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$.

Вывод плотности вероятности

Определим плотность вероятности длительности k -го интервала $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ между соседними событиями t_k и t_{k+1} , $k = 1, 2, \dots$, в исследуемом потоке как $p(\tau_k)$. Ввиду того, что рассматривается стационарный режим функционирования потока, для любого $k \geq 1$ справедливо равенство $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau \geq 0$. Вследствие этого момент наступления события t_k без ограничения общности можно положить равным нулю или, что эквивалентно, момент наступления события есть $\tau = 0$.

Рассмотрим $p_{ij}(\tau)$ – условную вероятность того, что в течение интервала $(0, \tau)$ произойдет несопряженный с наступлением события переход процесса $\lambda(\tau)$ из состояния S_i в состояние S_j , $i, j = 1, 2$.

Лемма 1. Условные вероятности $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в коррелированном обобщенном синхронном потоке второго порядка имеют вид

$$p_{11}(\tau) = e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, p_{12}(\tau) = 0, p_{21}(\tau) = 0, p_{22}(\tau) = e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}, \tau \geq 0.$$

Лемма 2. Плотности вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, того, что без наступления событий на $(0, \tau)$ и наступления события в момент τ процесс $\lambda(\tau)$ перейдет на этом интервале из состояния S_i в состояние S_j , $i, j = 1, 2$, в коррелированном потоке событий определяются формулами

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{11}(\tau) &= (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \\ \tilde{p}_{12}(\tau) &= (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}, \\ \tilde{p}_{22}(\tau) &= (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2)) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}.\end{aligned}$$

Лемма 3. Вероятности перехода $\lambda(\tau)$ из состояния S_i в состояние S_j , $i, j = 1, 2$, за время, которое пройдет от $\tau = 0$ до момента наступления очередного события потока, определяются формулами

$$\begin{aligned}p_{11} &= (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)) (\lambda_1 + \alpha_1)^{-1}, \\ p_{12} &= (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)) (\lambda_1 + \alpha_1)^{-1}, \\ p_{21} &= (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)) (\lambda_2 + \alpha_2)^{-1}, \\ p_{22} &= (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2)) (\lambda_2 + \alpha_2)^{-1}.\end{aligned}$$

Рассмотрим $\pi_i(0)$ – условную стационарную вероятность того, что $\lambda(\tau)$ в момент $\tau = 0$ пребывает в i -м состоянии при условии, что $\tau = 0$ есть момент наступления события, $i = 1, 2$; $\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$.

Лемма 4. Условные финальные вероятности $\pi_i(0)$, $i = 1, 2$, в коррелированном потоке задаются выражениями

$$\pi_1(0) = \gamma_1 (\gamma_1 + \gamma_2)^{-1}, \quad \pi_2(0) = \gamma_2 (\gamma_1 + \gamma_2)^{-1}, \quad (1)$$

где $\gamma_i = (\lambda_i + \alpha_i) [\lambda_j P_1^{(1)}(\lambda_i | \lambda_j) + \alpha_j P_1^{(2)}(\lambda_i | \lambda_j)]$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$.

Леммы 2 и 4 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. В коррелированном потоке плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями принимает вид

$$p(\tau) = \gamma (\lambda_1 + \alpha_1) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} + (1 - \gamma) (\lambda_2 + \alpha_2) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}, \quad \tau \geq 0, \quad (2)$$

$\gamma = \pi_1(0)$, где $\pi_1(0)$ определяется в (1).

Отметим, что (2) есть плотность гиперэкспоненциального распределения; в дальнейшем принимается $(\lambda_1 + \alpha_1) \neq (\lambda_2 + \alpha_2)$.

Оценивание параметров плотности вероятности методом моментов

Оценить методом моментов двенадцать неизвестных параметров исследуемого коррелированного потока (или восемь с учетом ограничений на задание вероятностей переходов), располагая лишь информацией о виде плотности $p(\tau)$, как будет видно ниже, не представляется возможным; будем оценивать неизвестные параметры плотности (2).

Замечание. Рассматриваемый поток событий является в общем случае коррелированным, т.е. длительности интервалов между моментами наступления событий в потоке являются зависимыми случайными величинами. В этой связи указанная зависимость не позволяет говорить о состоятельности получаемых методом моментов оценок и говорить об их качестве приходится лишь на основе результатов *имитационного моделирования* в смысле того или иного критерия качества оценивания.

Рассмотрим статистики $C_l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k^l$, $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ – значение длительности интервала между моментами t_k и t_{k+1} . Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ – выборка из распределения $p(\tau | \gamma, z_1, z_2) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}$, зависящего от трех неизвестных параметров $z_1 = (\lambda_1 + \alpha_1)$, $z_2 = (\lambda_2 + \alpha_2)$, $\gamma = \pi_1(0)$; без ограничения общности доопределим $z_1 > z_2$. Теоретический

начальный момент l -го порядка $M \tau^l = \int_0^{\infty} \tau^l p(\tau | \gamma, z_1, z_2) d\tau$ в силу

близости теоретической и эмпирической функций распределения при достаточно большом n близок к соответствующему выборочному моменту – статистике C_l того же порядка. Таким образом, для оценки z_1, z_2, γ необходимо иметь три уравнения моментов $M \tau^l = C_l, l = \overline{1, 3}$.

Теоретический начальный момент порядка l задается формулой

$$M \tau^l = \int_0^{\infty} \tau^l [\gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}] d\tau = l! \frac{\gamma}{z_1^l} + l! \frac{(1 - \gamma)}{z_2^l}, \quad l = \overline{1, 3},$$

на основании которой запишем систему трех уравнений моментов относительно оценок $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}$ с учетом преобразований в виде

$$\begin{aligned} \gamma z_2 + (1 - \gamma) z_1 - C_1 z_1 z_2 = 0, \quad C_1 (z_1 + z_2) - C_2 z_1 z_2 / 2 = 1, \\ C_2 (z_1 + z_2) - C_3 z_1 z_2 / 3 = 2 C_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Решая (3) с учетом условия $z_1 > z_2$, находим

$$\hat{z}_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} + \sqrt{\left(\frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} \right)^2 - 4 \frac{6(2C_1^2 - C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3}} \right\},$$

$$\hat{z}_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} - \sqrt{\left(\frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} \right)^2 - 4 \frac{6(2C_1^2 - C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3}} \right\}. \quad (4)$$

Оценка $\hat{\gamma}$ определяется однозначно из первого уравнения (3)

$$\hat{\gamma} = \hat{z}_1(1 - C_1\hat{z}_2)(\hat{z}_1 - \hat{z}_2)^{-1}. \quad (5)$$

Итак, система (3) имеет единственное решение $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}$.

Рассмотрим далее представление γ как отношение $\gamma = \gamma_1(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1}$, $1 - \gamma = \gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1}$, где $\gamma_i = (\lambda_i + \alpha_i)[\lambda_j P_1^{(1)}(\lambda_i | \lambda_j) + \alpha_j P_1^{(2)}(\lambda_i | \lambda_j)]$, $i, j = 1, 2, i \neq j$. В результате имеем $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ – выборку из распределения $p(\tau | \gamma, z_1, z_2) = \gamma_1(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1} z_1 e^{-z_1 \tau} + \gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1} z_2 e^{-z_2 \tau}$, зависящего от четырех неизвестных параметров $z_1 = (\lambda_1 + \alpha_1)$, $z_2 = (\lambda_2 + \alpha_2)$ ($z_1 > z_2$), γ_1, γ_2 . В этом случае запишем четыре уравнения моментов

$$\begin{aligned} \gamma_1 z_2 + \gamma_2 z_1 - C_1(\gamma_2 + \gamma_1) z_1 z_2 &= 0, \quad C_1(z_1 + z_2) - C_2 z_1 z_2 / 2 = 1, \\ C_2(z_1 + z_2) - C_3 z_1 z_2 / 3 &= 2C_1, \quad C_3(z_1 + z_2) - C_4 z_1 z_2 / 4 = 3C_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Теорема 2. Система (6) относительно неизвестных параметров $z_1, z_2, \gamma_1, \gamma_2$ плотности вероятности $p(\tau)$ несовместна.

Последнее определяет невозможность оценивания методом моментов более трех параметров плотности (2) в коррелированном потоке.

Заключение

В настоящей статье получен явный вид плотности вероятности значений длительности интервала между событиями коррелированного дважды стохастического потока (2). Методом моментов найдены оценки параметров задаваемой (2) плотности: \hat{z}_1, \hat{z}_2 в виде (4), $\hat{\gamma}$ в виде (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Basharin G. P., Gaidamaka Yu. V., Samouylov K. E.* Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks // *Automatic Control and Computer Sciences*. 2013. V. 47. No. 2. P. 62–69.
2. *Vishnevsky V. M., Semenova O. V., Dudin A. N., Klimenok V. I.* Approximate method to study M/G/1-type polling system // *Quality Technology & Quantitative Management (QTQM)*. 2012. V. 9. No. 2. P. 211–228.
3. *Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А.* О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*. 1980. № 1. С. 55–61.
4. *Neuts M.F.* A versatile Markov point process // *J. Applied Probability*. 1979. V. 16. P. 764–779.
5. *Lucantoni D. M.* New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // *Communications in Statistics Stochastic Models*. 1991. V. 7. P. 1–46.
6. *Нежелская Л.А., Сидорова Е.Ф.* Оптимальная оценка состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка в условиях неполной наблюдаемости // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2018. № 45. С. 30–41.
7. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.* Estimation of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method // *Telecommunications and Radio Engineering*. 1996. V. 50. No. 1. P. 56–63.
8. *Леонова М.А., Нежелская Л.А.* Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
9. *Nezhelskaya L.* Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // *Communications in Computer and Information Science*. 2014. V. 487. P. 342–350.
10. *Okamura H., Dohi T., Trivedi K. S.* Markovian arrival process parameter estimation with group data // *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*. 2009. V. 17. No. 4. P. 1326–1339.
11. *Малинковский Ю. В.* Теория вероятностей и математическая статистика (часть 2. Математическая статистика). Гомель: УО «ГТУ им. Ф. Скорины», 2004. 146 с.

Оценка параметров плотности вероятности длительности интервала между событиями в рекуррентном полусинхронном потоке второго порядка методом моментов

Л.А. Нежелская, Д.А. Тумашкина

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

В телекоммуникационных системах, спутниковых сетях связи и глобальных компьютерных сетях функционируют информационные потоки сообщений [1, 2], адекватными математическими моделями которых являются дважды стохастические потоки событий [3–6].

В настоящей работе рассматривается полусинхронный поток событий второго порядка. Приводится явный вид плотности вероятности значений длительности интервала между моментами наступления событий потока, явный вид совместной плотности вероятности значений длительностей смежных интервалов и выписываются условия рекуррентности. Для рекуррентного потока решается задача оценивания параметров плотности методом моментов.

Постановка задачи

Рассматривается стационарный режим функционирования полусинхронного потока событий второго порядка (поток), сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$ является кусочно-постоянным с двумя состояниями S_1 и S_2 . Далее под i -м состоянием процесса понимается состояние S_i , если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$; $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$.

Длительность интервала между событиями потока в S_1 определяется случайной величиной $\eta = \min(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$, где случайная величина $\xi^{(1)}$ имеет функцию распределения $F_1^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$, случайная величина $\xi^{(2)} - F_1^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t}$; $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ – независимые случайные величины.

В момент наступления события потока процесс $\lambda(t)$ переходит из состояния S_1 в S_j либо с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_1)$, либо с вероятностью

стью $P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_1)$, $j=1, 2$, в зависимости от значения случайной величины η . Здесь $\sum_{j=1}^2 P_1^{(k)}(\lambda_j | \lambda_1) = 1$, $k=1, 2$.

Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 есть случайная величина с функцией распределения $F_2(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$. В течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_2 . Процесс $\lambda(t)$ является скрытым марковским, наблюдаются только моменты наступления событий t_1, t_2, \dots .

Требуется найти явный вид совместной плотности вероятности значений длительностей смежных интервалов и для рекуррентного потока оценить параметры плотности методом моментов.

Вид плотности $p(\tau)$ и совместной плотности $p(\tau_1, \tau_2)$

Обозначим $p(\tau_k)$ – плотность вероятности значений длительности интервала между событиями t_k и t_{k+1} , где $\tau_k = t_{k+1} - t_k$. В силу стационарного режима функционирования потока, $p(\tau_k) = p(\tau)$ для всех $k=1, 2, \dots$, $\tau \geq 0$. Поэтому момент t_k наступления события потока есть $\tau = 0$.

Лемма 1. *Условные финальные вероятности $\pi_i(0)$, $i=1, 2$, в полусинхронном потоке событий второго порядка имеют вид*

$$\begin{aligned} \pi_1(0) &= \frac{\alpha_2[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)]}{\lambda_2[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] + (\lambda_1 + \alpha_1)\alpha_2}, \\ \pi_2(0) &= \frac{(\lambda_2 + \alpha_2)[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)]}{\lambda_2[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] + (\lambda_1 + \alpha_1)\alpha_2}, \\ \pi_1(0) + \pi_2(0) &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Теорема 1. *Плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в коррелированном полусинхронном потоке второго порядка определяется выражением*

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \quad \tau \geq 0, \tag{2}$$

$$\gamma = \frac{\pi_1(0)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2) - \alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)}, \quad z_1 = \lambda_1 + \alpha_1, \quad z_2 = \lambda_2 + \alpha_2,$$

$$(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0,$$

где вероятность $\pi_1(0)$ определена в (1).

Рассмотрим два смежных временных интервала (t_1, t_2) , (t_2, t_3) со значениями длительностей $\tau_1 = t_2 - t_1$ и $\tau_2 = t_3 - t_2$ соответственно. При этом совместная плотность вероятности есть $p(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$ [6].

Теорема 2. Полусинхронный поток событий второго порядка в общем случае является коррелированным и совместная плотность вероятности значений длительностей смежных интервалов имеет вид

$$p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2) + \left(1 - \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)}{\lambda_1 + \alpha_1}\right) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \alpha_2} \times$$

$$\times \gamma(1 - \gamma) \left[z_1 e^{-z_1 \tau_1} - z_2 e^{-z_2 \tau_1} \right] \left[z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2} \right], \quad (3)$$

где $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, γ , z_1 , z_2 , $p(\tau_k)$ определены в (2) для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$.

Условия рекуррентности полусинхронного потока второго порядка

Рассмотрим случаи, когда поток является рекуррентным. Анализируя (3), заметим, что совместная плотность факторизуется $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$, если:

1) $[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] / (\lambda_1 + \alpha_1) = 1$, при этом из (1) и (2) получим $p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}$, где $\gamma = -\alpha_2 / [(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)]$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$, $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$;

2) $\lambda_2 = 0$, при этом $p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}$, где $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \alpha_2$, $\gamma = [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) - \alpha_2] / (\lambda_1 + \alpha_1 - \alpha_2)$.

Условие $\gamma(1 - \gamma) = 0$ дает простейший поток событий. Для рекуррентного потока оценим параметры плотности в случаях 1) и 2).

Оценивание параметров плотности методом моментов

Рассмотрим статистики $C_l = (1/n) \sum_{k=1}^n \tau_k^l$, где $\tau_k = t_{k+1} - t_k$. Пусть имеется выборка $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ из распределения $p(\tau | z_1, z_2, \gamma)$, зависящего от трех неизвестных параметров z_1, z_2, γ . Пусть

$M(\tau^l) = \int_0^{\infty} \tau^l p(\tau | z_1, z_2, \gamma) d\tau$ – начальный теоретический момент l -го порядка. Тогда он близок к соответствующему выборочному моменту – статистике C_l при достаточно больших n . Для первых трех начальных моментов имеют место уравнения моментов $M(\tau^l) = C_l$, $l = 1, 2, 3$.

Учитывая вид плотности (2), получим

$$M(\tau^l) = l! \gamma / z_1^l + l!(1-\gamma) / z_2^l, \quad l = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Система (4) после необходимых преобразований примет вид

$$z_1 z_2 C_1 - z_2 \gamma - z_1 (1-\gamma) = 0, \quad (z_1 + z_2) C_1 - z_1 z_2 C_2 / 2 = 1, \quad (5)$$

$$(z_1 + z_2) C_2 - z_1 z_2 C_3 / 3 = 2 C_1.$$

Решая систему уравнений (5), получим состоятельные оценки $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}$ параметров плотности $p(\tau)$ [7]

$$\hat{z}_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{2(C_3 - 3C_1 C_2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} \pm \sqrt{\left(\frac{2(C_3 - 3C_1 C_2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} \right)^2 + 4 \frac{6(C_2 - 2C_1^2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3}} \right), \quad (6)$$

$$\hat{\gamma} = \hat{z}_1 (1 - C_1 \hat{z}_2) / (\hat{z}_1 - \hat{z}_2), \quad \hat{z}_2 \neq \hat{z}_1.$$

Результаты численных расчетов

С целью установления качества оценивания проведены статистические эксперименты с использованием имитационной модели потока [8]. По формулам (6) вычисляются оценки $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}$; находятся выборочные средние $\hat{M}(\hat{\theta}) = (1/N) \sum_{k=1}^N \hat{\theta}^{(k)}$ и выборочные вариации $\hat{V}(\hat{\theta}) = (1/N) \sum_{k=1}^N (\hat{\theta}^{(k)} - \hat{\theta})^2$, где $\theta \in \{z_1, z_2, \gamma\}$, $\hat{\theta} \in \{\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}\}$.

В статистическом эксперименте рассматривается поток при выполнении первого условия рекуррентности. Здесь $P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) = 1$, $P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1) = 0$. При $T_m = 700$ ед. времени, $N = 100$, параметрах $\lambda_2 = 0,8$, $\alpha_2 = 1$ устанавливается зависимость $\hat{M}(\hat{\theta})$, $\hat{V}(\hat{\theta})$ от значений $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1 = 4, 6, 8, 10, 12$, при этом положим $\lambda_1 = \alpha_1$. Результаты эксперимента приведены в табл. 1–3.

Таблица 1

Результаты статического эксперимента для z_1

z_1	4	6	8	10	12
$\hat{M}(\hat{z}_1)$	4.3279	6.1566	8.0599	10.0345	11.9817
$\hat{V}(\hat{z}_1)$	0.1156	0.0254	0.0041	0.0020	0.0007

Таблица 2

Результаты статического эксперимента для z_2

z_1	4	6	8	10	12
$\hat{M}(\hat{z}_2)$	2.1543	2.0167	1.9552	1.8959	1.8463
$\hat{V}(\hat{z}_2)$	0.1347	0.0593	0.0382	0.0066	0.0021
z_2	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8

Таблица 3

Результаты статического эксперимента для γ

z_1	4	6	8	10	12
$\hat{M}(\hat{\gamma})$	-0.7388	-0.3967	-0.2133	-0.1570	-0.1142
$\hat{V}(\hat{\gamma})$	0.0999	0.0278	0.0035	0.0022	0.0006
γ	-0.4545	-0.2380	-0.1612	-0.1219	-0.0980

Анализ численных результатов в таблицах 1–3 показывает, что с увеличением параметра z_1 , значение $\hat{V}(\hat{\theta})$ уменьшается, так как условия различимости состояний процесса $\lambda(t)$ улучшаются.

Заключение

В настоящей работе получен явный вид $p(\tau_1, \tau_2)$ и для рекуррентного потока построены оценки параметров плотности методом моментов. Алгоритм вычисления оценок реализован на языке программирования C# в среде Visual Studio 2013. Проведены статистические эксперименты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: Изд-во Белорусского государственного университета, 2000. 175 с.
2. Basharin G.P., Gaidamaka Yu.V., Samouylov K.E. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47. No. 2. P. 62–69.
3. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № S6. С. 232–239.
4. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № S1-1. С. 24–29.
5. Nezhelskaya L., Tumashkina D. Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 912. P. 93–105.
6. Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного МАР-потока событий и условия рекуррентности потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 57–67.
7. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика (часть 2. Математическая статистика). Гомель: УО “ГТУ им. Ф. Скорины”, 2004. 146 с.
8. Нежелская Л.А., Тумашкина Д.А. Имитационная модель полусинхронного потока второго порядка // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая. Томск: Издательский Дом ТГУ, 2016. Т. 299. С. 109–114.

СОДЕРЖАНИЕ

ГРАФЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ДИСКРЕТНЫХ АВТОМАТОВ

Абросимов М.Б. О специальных деревьях с наибольшим расстоянием между центром и центроидом	3
Золоторевич Л.А. Аппаратная защита цифровых устройств	9
Ибрагимова Э.И. Сбалансированные знаковые графы и их применение.....	15
Матросова А.Ю., Провкин В.А., Андреева В.В. Маскирование неисправностей полюсов логических схем с использованием частичных функций.....	21
Мещерякова О.В. Пример синтеза синхронизирующей последовательности автомата, минимальной по весу	26
Молчанов В.А., Фарахутдинов Р.А. Линейное упорядочивание конечных автоматов	31
Разумовский П.В., Абросимов М.Б. О генерации неизоморфных k -раскрасок графа методом Рида – Фараджера.....	37
Рипинен А.А. Минимальные примитивные расширения неособых графов	42
Солдатенко А.А. Верхнее оценивание стоимости оптимального маршрута в сети с ограничением	47
Соловьев В.М., Сперанский Д.В. Диагностические эксперименты на алгоритмических моделях цифровых устройств ISCAS	53
Соловьев В.М., Сперанский Д.В. Об одном эволюционном алгоритме синтеза тестов для цифровых устройств	59
Чернышова Г.Ю., Пиунова Е.И. Реализация модифицированного алгоритма Fuzzy ELECTRE II для многокритериальных задач принятия решений	65
Шапошников К.С., Сагаева И.Д., Сидоров С.П. Анализ сложных сетевых структур на примере социальной сети «Twitter»	71
Шапошников К.С., Сагаева И.Д., Сидоров С.П. Генерация сложных сетевых структур на основе оптимизированной модели с предпочтительным присоединением	75

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ТЕЛЕТРАФИКА

Galileyskaya A. On the Total Amount of the Occupied Resources in the Multi-resource QS with Renewal Arrival Process.....	80
Kerobyan Kh., Kerobyan R., Covington R. The nonpreemptive and preemptive priority queues $M_k G_k 1$ with k classes of customers and catastrophes.....	86
Kerobyan R., Kerobyan Kh., Covington R. Infinite-server queue model $MMAP_k(t) G_k \infty$ with time varying marked MAP arrivals and catastrophes.....	92
Meikhanadzhyan L.A., Bakhareva A.V., Razumchik R.V. The output process of the $M/G/1$ non-preemptive LIFO resampling queue.....	98
Rumyantsev A., Peshkova I. Artificial Regeneration Based Regenerative Estimation of Multiserver Systems Performance	101
Sztrik J., Tóth Á., Pintér Á., and Bács Z. Simulation of finite-source retrial queues with two-way communications to the orbit.....	104
Zaghouni M.H., Sztrik J. and Uka A. Reliability Analysis of Cognitive Radio Networks	110
Алиев И.А. Расчет характеристик системы обслуживания-запасания с разнотипными заявками и конечной орбитой для повторных заявок.....	115
Астахова Т.Н., Верзун Н.А., Колбанев М.О., Шамин А.А. Свойство связности всепроникающих сенсорных сетей	121
Атенсия И., Лебедев Е.А., Пономарев В.Д., Ливинская А.В. Об оптимальном выборе параметров для систем с повторными вызовами.....	126
Бобкова О.С., Жукова Е.В., Моисеева С.П., Шкуркин А.С. Анализ СМО $MMP/P/M/\infty$ в различных предельных условиях.....	131
Вавилов В.А. Исследование функционирующей в случайной среде RQ-системы с вызываемыми и возвратными заявками	137
Глуздов А.Д., Зорин А.В. Оптимизация смены режимов обслуживания двух конфликтных потоков по циклическому алгоритму с однократным продлением.....	143
Гуркова В.М., Заварзин А.С., Осипов О.А. Задача распределения нагрузки в сети массового обслуживания с делением и слиянием требований	149
Дудин С.А., Дудин А.Н., Дудина О.С. Нахождение характеристик производительности системы обслуживания $VMAP/PH/1$	

с ограниченным разделением процессора и дисциплиной частичного принятия запросов	153
Дудина О.С., Дудин А.Н., Дудин С.А. Построение процесса, описывающего состояние системы обслуживания $M/M/1$ с ограниченным разделением процессора и дисциплиной частичного принятия запросов	159
Захаренкова Т.Р., Задорожный В.Н. Эффективные методы снижения вероятности потерь заявок в системах с очередями и степенными хвостами распределений	165
Зимин М.П., Моисеев А.Н., Бронер В.И. Применение отрицательного биномиального распределения для аппроксимации стационарного распределения числа заявок в системе $M/M/1$	171
Зорин А.В. Анализ процесса обслуживания по алгоритму с петлей с помощью остановленного случайного блуждания	177
Клименок В.И., Дудин А.Н. Ненадежная управляемая система массового обслуживания с резервным прибором	183
Копать Д.Я., Маталыцкий М.А. Нахождение ожидаемых доходов в G -сети с обходами заявками систем обслуживания	189
Кочеганов В.М. Классификация состояний марковской цепи в модели тандема с циклическим управлением с продлением	195
Краснов А., Никольский Д. Фазовые портреты и парциальные корреляторы потока агрегатов сетевого трафика	201
Кудрявцев Е.В., Федоткин М.А. Исследование переходного процесса адаптивного управления потоками неоднородных требований путем имитационного моделирования	207
Лапатин И.Л., Назаров А.А. Исследование выходящего потока в RQ -системе $M/GI/1$	213
Мехбалиева Э.В. О задаче включения медленного сервера	218
Михеев П.А., Приступа П.В., Сущенко С.П. Доступная полоса пропускания транспортного соединения с селективным режимом повтора в нагруженном тракте передачи данных	222
Назаров А.А., Квач А.С., Штрик Я. Исследование замкнутой RQ -системы $M/GI/1/N$ с вызываемыми заявками	229
Назаров А.А., Капустин Е.В. Исследование RQ -системы $M M 1$ с двумя орбитами и отрицательными заявками методом асимптотического анализа	235
Назаров А.А., Пауль С.В., Лизюра О.Д. Асимптотический анализ RQ -системы $MMPP M 1$ с разнотипными вызываемыми заявками	239

Назаров А.А., Пауль С.В., Лизюра О.Д. RQ-система с неординарным входящим потоком и разнотипными вызываемыми заявками.....	245
Никольский И.М. Исследование энергоэффективности цепочечной маршрутизации в сенсорных сетях	250
Осипов О.А., Рогачко Е.С. Анализ сети массового обслуживания с делением и слиянием требований и переходами фрагментов требований между системами	254
Полин Е.П., Моисеева С.П. Анализ вероятностных характеристик гетерогенной СМО вида $MR M_s \infty$ с параметрами обслуживания, зависящими от состояния вложенной цепи Маркова	260
Пройдакова Е.В. Моделирование адаптивной системы обслуживания и управления конфликтными транспортными потоками	265
Тананко И.Е., Фокина Н.П. Метод анализа ненадежной сети массового обслуживания с управлением маршрутизацией и с задержкой информации об изменении ее структуры	271
Фёдорова Е.А., Фархадов М.П. Характеристическая функция числа заявок на орбите в RQ-системе M/M/1 с отрицательными заявками и буфером	277
Фокина Н.П., Тананко И.Е. Сеть массового обслуживания с нестационарной структурой и задержкой восстановления систем.....	281
Чернышова Е.Н., Лисовская Е.Ю. Двумерная гауссовская аппроксимация суммарных объемов занятого ресурса с ММРР-входящим потоком заявок и их параллельным обслуживанием.....	287
Шкленник М.А., Моисеев А.Н., Морозова А.С. Метод марковского суммирования для исследования потока повторных обращений в системах $M GI \infty$	293

ПРИКЛАДНОЙ ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ

Imomov A.A., Meyliyev A.Kh. Remarks on the Markov Branching Processes with mean one and infinite variance.....	299
Imomov A.A., Tukhtayev E.E. Remarks on Galton-Watson Branching Processes with infinite variance and Immigration component	305
Бадрызлов В.А. Исследование финального среднего веса вершин в растущих случайных графах с нелинейным правилом предпочтительного связывания.....	310
Баранова И.В. Множества двудольных множеств событий и их применение в задачах анализа данных	316

Булгакова Т.Е., Войтишек А.В. Об использовании «ядерных» оценок плотностей при рандомизации математических численных моделей.....	322
Булгакова Т.Е., Войтишек А.В. Применение рандомизированных функциональных алгоритмов для решения одной задачи с «вычислимым» ядром интегрального уравнения.....	329
Ересько П.В., Варламова Е.В., Сенина В.Е. Проблемы использования и внедрения цифровых финансовых активов в России на основе технологии распределенного реестра.....	335
Зорин В.А., Стребуляев С.Н., Тареева О.А. О выборе типа распределения для характеристик процесса роторно-конвейерного доения.....	341
Молчанов В.А., Самсонов С.Н., Паршина С.С., Петрова П.Г., Стрекаловская А.А. Методика исследования синхронизации параметров сердечно-сосудистой системы человека с параметрами космической погоды с применением компьютерных технологий.....	347
Нежелская Л.А., Першина А.А. Оценивание параметра непродлевающегося мёртвого времени случайной длительности в обобщённом асинхронном потоке событий.....	352
Нежелская Л.А., Сидорова Е.Ф. Оценивание параметров плотности вероятности значений длительности интервала между событиями в коррелированном обобщенном синхронном потоке второго порядка.....	358
Нежелская Л.А., Тумашкина Д.А. Оценка параметров плотности вероятности длительности интервала между событиями в рекуррентном полусинхронном потоке второго порядка методом моментов.....	364

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Научное издание

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
(ИТММ-2019)**

**Материалы
XVIII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
26–30 июня 2019 г.**

Часть 2

Редактор *Н.И. Шидловская*
Дизайн, верстка *Д.В. Фортеса*

ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 06.06.2019.
Формат 60 × 84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 21.86. Уч.-изд. л. 24.48. Тираж 100 экз. Заказ № 14.
