

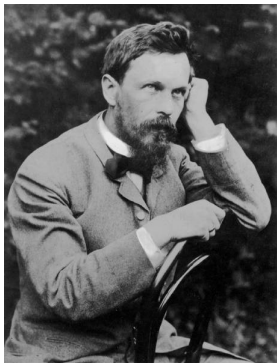
Маркированные марковские процессы и их применения

Vladimir Rykov, Nika Ivanova

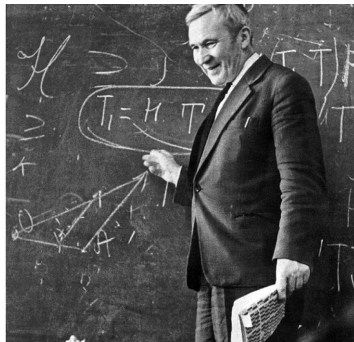
Школа ТМО — 2025

Введение I

Со времени А.А. Маркова основным объектом изучения стохастических систем стали марковские процессы, обобщение и развитие которых продолжается до наших дней. Огромный вклад в развитие теории марковских процессов, как и вообще всей теории случайных процессов, внёс А.Н. Колмогоров, который предложил также понятие процессов с дискретным вмешательством случая.



А.А. Марков 1856 - 1922



А.Н. Колмогоров 1903 - 1987

Развитие марковских процессов привело к различным их обобщениям:

- метод введения дополнительной переменной (Д. Кокс-1955),



D. Cox (1955). The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 51(3): 433–441.

- линейчатые (Ю.К. Беляев - 1962)



Y. K. Belyaev, “Linear Markov processes and their applications to reliability problems”, in *Proceedings of the VI All-Unuon Workshop on Probab. Theory and Math. Stat., Vilnius, Lithuania, (1962)*, pp.309–323.

- кусочно-линейные (И.Н. Коваленко - 1976) марковские процессы.



Kovalenko, I.N.: *Investigations on Analysis of Complex Systems Reliability*, p. 210. Naukova Dumka, Kiev (1976).

- Статья Цинлара дала толчок развитию ПМП



E. Cinlar (1969). On semi-Markov processes on arbitrary space. *Proc. Camb. Philos., Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1969 , 66, 381-392.

- В последнее время для моделирования широкого класса систем получило развитие моделирование систем дискретных событий (Discrete Events System – DES Modelling)
 -  P. Haas (2002) Stochastic Petry Nets: Modelling, Stability, Simulation. Springer Series in Operation Research. Springer 2002. 509p.
- и их мат. мод. — обобщённые полумарковские процессы (ОПМП),
 -  Glynn P. W. A GSMP formalism for discrete event systems // Proceedings of the IEEE. 1989. No. 1. Vol. 77. Pp. 14-23. DOI: 10.1109/5.21067
 -  Glynn Peter W. and Haas, Peter J.(2006). Laws of Large Numbers and Functional Central Limit Theorems for Generalized Semi-Markov Processes, // Stochastic Models, 22: 2, 201 — 231.
 -  PETER W. GLYNN, PETER J. HAAS (2015). On Transience and Recurrence in Irreducible Finite-State Stochastic Systems. // ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation, Vol. 25, No. 4, Article 25, Publication date: May 2015

- Введённое Смитом в 1955г. понятие регенерации получило широкое распространение в исследовании прикладных стохастических моделей,
 [Smith W. Regenerative stochastic processes Proc. of Royal Soc., Ser. A, The Royal society Publ. 1955. V. 232. P. 6–31.](#)
- её объединение с понятием марковской зависимости привело к созданию теории полурегенерирующих и разложимых полурегенерирующих процессов,
 [V. Rykov \(2010\) Decomposable semi-regenerative processes and their applications. LAMPERT Academic Publishing, 2010, 75pp.](#)
- Ренеративная структура моделей наряду с имтационным моделироваеим
 [S.Asmussen, P. Glynn. Stochastic Simulation. Algorithms and Analysis. Stochastic Modelling and Applied Probability. 57. Springer 2007., 476p.](#)
широко используется и в настоящее время для исследования сложных систем.

- Все перечисленные процессы представляют собой процессы с дискретным вмешательством случая (ПДВС), впервые упомянутые Колмогоровым (см. [1], стр. 140).



А. Н. Ширяев "Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели ФАЗИС, Москва 1998

- Однако этих методов часто оказывается недостаточно для реального вычисления основных характеристик сложных систем и в



Рыков В., Иванова Н. О надёжности восстанавливаемой дублированной системы с произвольными распределениями времени безотказной работы и восстановления её элементов // Материалы XXII-й Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Томск: Томский государственный университет. 2023. С. 335-340.

было введено понятие маркированного марковского процесса (ММП), которое является весьма общей математической моделью ПДВС и будет использовано для исследования двух достаточно сложных моделей.

Б.А. Севастьянов впервые показал нечувствительность стационарных вероятностей системы Эрланга к виду распределения времени обслуживания.



Севастьянов Б. А. Эргодическая теорема для марковских процессов и её приложение к телефонным системам с отказами // Теория вероятностей и её применение. — 1957. — т. 2, № 1. — с. 106—116.

В работах Б.В. и А.Д. установлена сходимость ф.р. времени безотк. работы дублированной системы к показательной при любых распр. в.б.р. и ремонта её элементов, что можно трактовать как асимптотическую нечувствительность её хар-тик к виду исх. распр.



Гнеденко Б. В. О ненагруженном дублировании // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1964. — № 4. — с. 3—12.



Гнеденко Б. В. О дублировании с восстановлением // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1964. — № 5. — с. 111—118.



Соловьёв А. Д. Асимптотическое распределение времени жизни дублированного элемента // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1964. — № 5. — с. 119—121.

В нескольких наших исследованиях мы расширили эти результаты.

Исследование чувствительности выходных характеристик стохастических систем к виду распределений и параметров исходной информации является важным аспектом их исследования, и в нашем докладе этому направлению также уделено определённое внимание.

Маркированный марковский процесс (ММП)

Под **ММП** будем понимать МП с дискретным параметром

$$Z(t) = \{(J(t), \mathbf{V}(t)), t = 0.1, \dots\},$$

по моментам времени $S(t)$ вмешательства случая,

$$S(t) = S(t - 1) + T_{J(t)}(t).$$

вычисление которых зависит от конкретной модели и уточняется позже. Здесь

- $T_{J(t)}(t)$ – интервал между моментами вмешательства случая, который вычисляется с помощью меток для конкретных моделей,
- $J(t)$ – состояния системы с множеством $\mathcal{J}$, $|\mathcal{J}| \leq \infty$,
- $\mathbf{V}(t)$ – набор случайных меток $\mathbf{V}(t) = \{\mathbf{V}_j(t) : j \in \mathcal{J}\}$, дополняющих процесс Z до марковского, которые принимают значения в измеримых пространствах $(E_j, \mathcal{E}_j)$.

Такой процесс задаётся:

- переходными вероятностями $p_{ij}(\mathbf{V}_i) = \mathbf{P}\{J(t+1) = j | J(t) = i, \mathbf{V}_i(t)\}$,
- операторами преобразования меток $\Phi_{ij}(\mathbf{V}_i)$ и
- набором последовательностей н.о.р. с.в. $\xi_t, \eta_t, (t = 1, 2, \dots)$ и их распределениями.

С.в. $\xi_t, \eta_t, (t = 1, 2, \dots)$ определяют исходную информацию о модели и задают основное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, на котором определяются все остальные компоненты процесса.

Настоящее сообщение не претендует на создание общей теории ММП и предназначено для демонстрации её работоспособности на двух примерах:

- СМО $(GI|GI|n, m)$
- и системы надёжности $< GI_{k \leq n} | GI | I >$.

При этом основное внимание уделяется

- разработке методов и процедур вычисления основных характеристик моделей,
- исследованию их свойств, таких как чувствительность к виду исходных распределений и их параметров.

О символике Кендалла-Башарина и её модификации

Со времени введения символики Кендалла



Kendall, D. G. "Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and Their Analysis by the Method of Embedded Markov Chains 1953, "Annals of Math. Stat. V.24, pp. 338-354

и её модификации Башариным (стр. 56)



Башарин Г. П., Харкевич А. Д., Шнепс М. А. Массовое обслуживание в телефонии М.: Наука, 1968, 247 с.

прошло много времени и в учебном пособии



В.В. Рыков, Д.В. Козырев. Основы теории массового обслуживания. "ИНФРА-М", 2016, 223с.

была предложена новая модификация.

О символике Кендалла-Башарина и её модификации

Так как каждая СМО задаётся:

- входящим потоком (α),
- механизмом обслуживания (β),
- структурой ($\gamma : m, n$) и
- дисциплиной обслуживания (δ),

то согласно этой системе обозначений каждая система обозначается набором из четырёх символов: $(\alpha | \beta | \gamma | \delta)$.

Символы α и β могут принимать значения M (Markov), D (Deterministic), E (Erlang), GI (General Independent), G (General), смысл которых состоит в указании свойств входящего потока и механизма обслуживания соответственно.

Символ γ указывает на структурные параметры системы: m —число мест для ожидания, n —число обслуживающих приборов.

Символ δ служит для указания дисциплины обслуживания и для прямого порядка обслуживания опускается.

Для указания открытой системы используются круглые “()”, а замкнутой системы — угловые скобки “<>”.

О системе $(GI|GI|n, m)$

Исследованию классической системы $(GI|GI|n, m)$ посвящены многочисленные работы, в том числе монография Козна [1] и публикации одного из авторов доклада [2], [3].



J.W. Cohen. The Single Server Queue (2nd ed.) // North-Holland, 1982.



V.V. Rykov. Study of the $GI/GI/1$ system by the method of decomposable regenerative processes I. // Izvestiya Akademii nauk SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika, 1983, No 6, P. 13-20.



V.V. Rykov. Study of the $GI/GI/1$ system by the method of decomposable regenerative processes II. // Izvestiya Akademii nauk SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika, 1984, No 1, P. 126-132.

Однако основное внимание в этих исследованиях уделено изучению условий существования стационарного режима работы системы $(GI|GI|1)$, в то время как настоящее исследование посвящено, как сказано выше, численным методам исследования такой системы в наиболее общих условиях.

Описание системы. Основные обозначения и предположения

Рассмотрим СМО, $(GI|GI|n, m)$. Обозначим через

A_i, B_i ($i = 1, 2, \dots$) интервалы между моментами поступления требований в систему и длительности их обслуживания, (н.о.р. с.в.);

$$A(s) = \mathbf{P}\{A_i \leq s\}, \quad B(s) = \mathbf{P}\{B_i \leq s\},$$

$$a(s) = A'(s), \quad b(s) = B'(s),$$

$$\mu_A = \mathbf{E}[A_i], \quad \mu_B = \mathbf{E}[B_i].$$

Предполагается существование необходимого количества их моментов.

В дальнейшем с.в. обозначаются заглавными латинскими буквами $X, Y, \dots$, а их значения — малыми $x, y, \dots$, многомерные (векторные) с.в. и их значения —соответствующими полужирными буквами.

Построение мат. модели системы $(GI|GI|n, m)$ на основе ММП - I

В качестве мат. модели системы $(GI|GI|n, m)$ рассмотрим ММП

$$Z(t) = \{(J(t), \mathbf{V}(t)), t = 0, 1, \dots\} \quad (1)$$

по моментам $S(t)$ $t = 0, 1, \dots$ изменения её состояний,

$$S(t) = S(t-1) + T_{J(t)}(t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad S_0 = 0, \quad (2)$$

где интервалы между ними определяются метками (см. ниже) и равны

$$T_{J(t)}(t) = \min[X_{J(t)}(t), Y_{J(t)}^{(1)}(t)]. \quad (3)$$

В состоянии $J(t) = 0$ следует положить $Y_0^{(0)}(t) = \infty$.

Построение мат. модели системы $(GI|GI|n, m)$ на основе ММП - II

В последовательности Z компонента $J(t)$ – это последовательность состояний системы с множеством состояний $\mathcal{J} = (0, 1, 2, \dots, n + m)$,

Метки $\mathbf{V}_j(t) = (X_j(t), \mathbf{Y}_j(t))$ процесса в состоянии j на шаге t - это:

- остаточное время до момента поступления очередного требования $X_j(t)$ и
- набор остаточных длительностей обслуживания

$$\mathbf{Y}_j(t) = (Y_j^{(1)}(t), \dots, Y_j^{(j \wedge n)}(t)),$$

расположенных в порядке возрастания, где верхний индекс указывает порядковый номер метки, а нижний — номер состояния системы, переменная в скобках – это номер шага.

Предполагая, что начальным состоянием является поступление требования в свободную систему, когда начинаются интервал до поступления очередного требования и новое обслуживание, имеем

$$J(0) = 1, X_0(0) = A_0, Y_0^{(1)}(0) = B_0.$$

Важно отметить, что моменты поступления в систему нового требования после её освобождения являются моментами регенерации системы и процесса Z .

Построение мат. модели системы $(GI|GI|n, m)$ на основе ММП - III

Вероятности переходов на каждом шаге зависят от содержания меток на этом шаге, но от номера шага явно не зависят и равны

$$\begin{aligned} p_j(\mathbf{V}_j) &= \mathbf{P}\{J(t+1) = j+1 \mid J(t) = j\} = \mathbf{P}\{X_j(t) \leq Y_j^{(1)}(t)\}, \\ q_j(\mathbf{V}_j) &= \mathbf{P}\{J(t+1) = j-1 \mid J(t) = j\} = \mathbf{P}\{X_j(t) > Y_j^{(1)}(t)\}, \end{aligned} \quad (4)$$

а соответствующие переходы основной последовательности $J(t)$ представлены на графе, где $p_j = p_j(\mathbf{V}_j)$, $q_j = q_j(\mathbf{V}_j)$

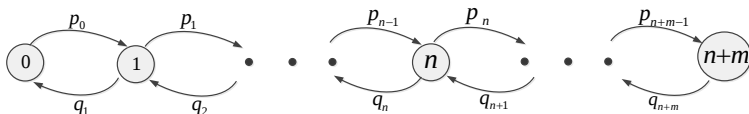


Рис.: Граф переходов компоненты $J(t)$

Исследование модели в непрерывном времени I

Используя соотношения (2, 3) можно рассчитать все основные ВВХ модели. Обозначим через $N(s)$ счётчик числа изменения состояний системы (вмешательства случаев) за календарное время s ,

$$N(s) = \min\{t : S(t) \leq s\}.$$

Тогда процесс числа требований в системе $L(s)$ в непрерывном времени s представляется через компоненту $J(t)$ последовательности $Z(t)$ в виде

$$L(s) = J(N(s)) \tag{5}$$

и представлен в виде непрерывных справа траекторий на рисунке 2, где также показаны первые период регенерации R_1 и момент регенерации $\tau_1 = S(4)$.

Исследование модели в непрерывном времени II

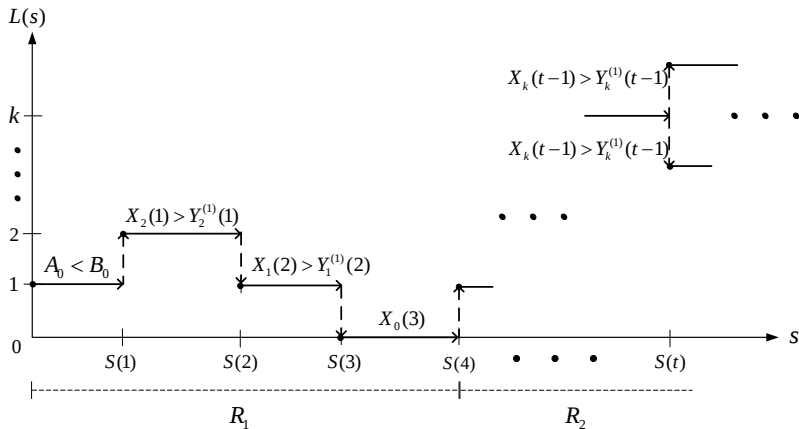


Рис.: Траектория процесса $L(s)$ в непрерывном времени

Исследование модели в непрерывном времени III

Определим последовательные (дискретные) моменты регенерации (перехода $1 \rightarrow 0$) τ_n :

$$\tau_{n+1} = \min\{t + 1 : t > \tau_n : J(t) = 0, J(t + 1) = 1\}, \quad \tau_0 = 0.$$

Тогда продолжительность n -ого периода регенерации R_n равна

$$R_n = S(\tau_n) - S(\tau_{n-1}) = \sum_{\tau_{n-1} < t \leq \tau_n} T_t(J(t)) = \sum_{\tau_{n-1} < t \leq \tau_n} \min[X_{J(t)}, Y_{J(t)}^{(1)}], \quad (6)$$

то есть распределение $F_R(t) = \mathbf{P}\{R \leq t\}$ и его моменты $m_R^{(i)} = \mathbf{E}[R^i]$ определяются метками процесса Z . При этом длительность Π_n составляет

$$\Pi_n = \sum_{\tau_{n-1} < t \leq \tau_n - 1} T_{J(t)}(t) = R_n - T_{\tau_{n-1}}(\tau_n - 1). \quad (7)$$

и также выражается в терминах меток.

Исследование модели в непрерывном времени IV

Стационарные вероятности состояний π_j в терминах меток равны:

$$\begin{aligned}\pi_j &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s 1_{\{L(u)=j\}} du = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \left[\sum_{k=1}^{K(s)} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} 1_{\{J(N(u))=j\}} du + \int_{\tau_{K(s)}}^s 1_{\{J(N(u))=j\}} du \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K(s)}{s} \frac{1}{K(s)} \sum_{k=1}^{K(s)} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} 1_{\{J(N(u))=j\}} du = \\ &= \frac{1}{\mu_R} \mathbf{E} \left[\sum_{t=1}^{\tau_1} T_{J(t)}(t) 1_{\{J(t)=j\}} \right],\end{aligned}\tag{8}$$

где $\mu_R = \mathbf{E}[R]$ — средняя продолжительность периода регенерации и $K(s) = \min\{k : S(\tau_k) \leq s\}$ — счетчик количества регенераций до момента времени s .

Условие существования стационарного режима

Для использования регенеративной структуры последовательности Z необходимо проверить условия ее положительной возвратности.

Заметим, что положительная возвратность последовательности $\{Z(t), t \geq 0\}$, и следовательно существование её (и системы) стационарного режима обеспечивается конечностью числа шагов до регенерации $\mathbf{E}[\tau] < \infty$).

В свою очередь, условие $\mathbf{E}[\tau] < \infty$ в случае рассматриваемой (конечной при $m + n < \infty$) системы обеспечивается следующим простым и легко проверяемым условием на заданные исходные элементы системы (требования с положительной вероятностью обслуживаются быстрее, чем поступают):

$$\mathbf{P}\{A > B\} = \int_0^\infty B(x)A(dx) > 0. \quad (9)$$

Remark

Для существования стационарного режима при $m = \infty$ дополнительно к (9) необходимо наложить условие отрицательного сноса

$$\rho := \frac{b}{na} < 1.$$

В случае системы с неограниченным числом устройств, т.е., при $n = \infty$, условие (9) обеспечивает стационарность в предположении, что выполнены очевидные требования $a < \infty$, $b < \infty$.

Заметим, что условие (9) не является избыточным, так как в противном случае, в системе отсутствуют (классические) регенерации.

Remark

Заметим, что процесс незавершенной в состоянии $J(t)$ работы,

$$W_{J(t)}(t) = \sum_{1 \leq i \leq J(t) \wedge n} Y_j^{(i)} + \sum_{1 \leq i \leq [J(t) - n]^+} B_i,$$

также регенерирует в момент поступления нового требования в пустую систему.

Постановка задачи

Исследуются основные ВВХ системы $(G|G|n, m)$:

- период регенерации R , его распределение $F_R(s) = \mathbf{P}\{R \leq s\}$ и моменты $m_k(R) = \mathbf{E}[R^k]$;
- период занятости Π , его распределение $F_\Pi(s) = \mathbf{P}\{\Pi \leq s\}$ и моменты $m_k(\Pi) = \mathbf{E}[\Pi^k]$;
- стационарные вероятности состояний $\pi_j = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{L(s) = j\}$;
- число N требований в системе и его моменты $m_k(N) = \sum_{0 \leq j \leq n+m} j^k \pi_j$;
- длины очереди Q и её моменты $m_k(Q) = \sum_{0 \leq j \leq n+m} (j - n)^+{}^k \pi_j$;
- распределение и моменты длительностей ожидания W и пребывания V требований в системе.

Преобразование меток при переходе из j в $j + 1$ и $j - 1 (\geq 0)$ представлены в следующей теореме.

Теорема I

При переходе $j \rightarrow j + 1$ метки преобразуются следующим образом:

$$X_{j+1}(t+1) = A_{t+1}; \quad (10)$$

при $j < n$ и $i = \overline{1, n-j}$:

$$Y_{j+1}^{(i)}(t+1) = \begin{cases} Y_j^{(i)}(t) - X_j(t) & \text{при } i < l, \\ B_{t+1} & \text{при } i = l \\ Y_j^{(i+1)}(t) - X_j(t) & \text{при } i > l, \end{cases} \quad (11)$$

где $l = \max\{i : Y_j^{(i)}(t) - X_j(t) \leq B_{t+1}\}$; при $j \geq n$

$$Y_{j+1}^{(i)}(t+1) = Y_j^{(i+1)}(t) - X_j(t) \quad (i = \overline{1, n-j}). \quad (12)$$

Аналогично, при переходе $j \rightarrow j - 1$ метка X_{j-1} преобразуется следующим образом:

$$X_{j-1}(t+1) = X_j(t) - Y_j^{(1)}(t); \quad (13)$$

Теорема II

преобразование метки Y_j при переходе $j \rightarrow j - 1$ зависит от состояния и имеет вид:
при $j \leq n$

$$Y_{j-1}^{(i)}(t+1) = Y_j^{(i+1)}(t) - Y_j^{(1)}(t) \quad (i = \overline{1, j}); \quad (14)$$

при $j > n$

$$Y_{j-1}^{(i)}(t+1) = \begin{cases} Y_j^{(i)}(t) - Y_j^{(1)}(t) & \text{при } i < l, \\ B_{t+1} & \text{при } i = l, \\ Y_j^{(i+1)}(t) - Y_j^{(1)}(t) & \text{при } i > l, \end{cases} \quad (15)$$

где $l = \max\{i : Y_j^{(i)}(t) - Y_j^{(1)}(t) \leq B_{t+1}\}$.

Доказательство в приложении.

Вычисление характеристик в терминах меток I

Пользуясь регенеративной структурой процесса Z расчет основных QoS характеристик системы осуществляется путем их оценки с помощью имитации достаточно большого числа (допустим K) траекторий процесса Z до момента первой регенерации $S(\tau_1) \doteq R_1 \doteq R$.

Таким образом, помечая верхним индексом k соответствующие характеристики вдоль k -й траектории, на основе формул (6, 7, 8) получаем оценки

- ФР периода занятости и его первый момент,

$$\hat{F}_\Pi(x) = \frac{1}{K} \sum_{1 \leq k \leq K} 1_{\{\Pi^{(k)} \leq x\}} \text{ и } \hat{\mu}_\Pi = \frac{1}{K} \sum_{1 \leq k \leq K} \Pi^{(k)};$$

- ФР периода регенерации и его первый момент,

$$\hat{F}_R(x) = \frac{1}{K} \sum_{1 \leq k \leq K} 1_{\{R^{(k)} \leq x\}} \text{ и } \hat{\mu}_R = \frac{1}{K} \sum_{1 \leq k \leq K} R^{(k)};$$

Вычисление характеристик в терминах меток II

- стационарных вероятностей состояний,

$$\hat{\pi}_j = \frac{1}{\hat{\mu}_R} \hat{S}_j^{(k)}(\cdot) = \frac{\sum_{1 \leq k \leq K} \hat{S}_j^{(k)}(\cdot)}{\sum_{1 \leq k \leq K} \hat{R}^{(k)}(\cdot)}$$

где

$$\hat{S}_j^{(k)}(\cdot) = \sum_{1 \leq t \leq \tau_1^{(k)}} \hat{T}_j(t) 1_{\{J(t)=j\}}$$

оценка времени, проведенного процессом $Z(N(s))$ в состоянии j в течение 1-го периода регенерации по k -й траектории, а $\hat{R}^{(k)}$ - оценка длительности периода регенерации вдоль k -й траектории;

- все остальные стационарные характеристики вычисляются путем замены в формулах раздела “Постановка задачи” вероятностей π_j на их оценки $\hat{\pi}_j$.

Другое направление применений ММП являются задачи надёжности.

Далее этот метод используется для исследования восстанавливаемой системы k -из- n с произвольным числом ремонтирующих устройств и произвольными распределениями времени безотказной работы (в.б.р.) и ремонта её компонентов, $\langle GI_{k \leq n} | GI | l \rangle$ ($l < k$).

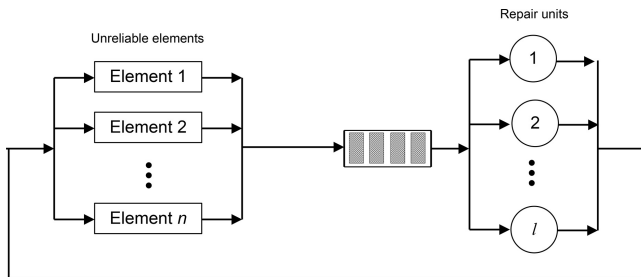


Рис.: Система $\langle GI_{k \leq n} | GI | l \rangle$

Описание системы. Обозначения и предположения

Рассмотрим систему $\langle G|_{k \leq n}|G||I \rangle$ ($I < k$). Обозначим через A_i, B_i ($i = 1, 2, \dots$) в.б.р. и ремонта элементов системы, н.о.р. с.в. с ф.р.

$$A(s) = \mathbf{P}\{A_i \leq s\} \text{ и } B(s) = \mathbf{P}\{B_i \leq s\}$$

соответственно, п.р.

$$a(s) = A'(s) \text{ и } b(s) = B'(s)$$

и математическими ожиданиями

$$a = \mathbf{E}[A_i] \text{ и } b = \mathbf{E}[B_i].$$

В дальнейшем, как правило, случайные величины обозначаются заглавными латинскими буквами $X, Y, \dots$, а их значения — малыми $x, y, \dots$, а многомерные (векторные) с.в. и их значения обозначаются соответствующими полужирными буквами.

Постановка задачи

С помощью предложенного подхода будем исследовать различные как нестационарные, так и стационарные характеристики модели, такие как:

- время до первого отказа системы R_0 , его распределение

$$F_{R_0}(s) = \mathbf{P}\{R_0 \leq s\} \text{ и его среднее значение } \mu_{R_0} = \mathbf{E}[R_0];$$

или

- функцию надёжности

$$R_0(s) = \mathbf{P}\{R_0 > s\};$$

- время между отказами R , его распределение

$$F_R(s) = \mathbf{P}\{R \leq s\} \text{ и его среднее значение } \mu_R = \mathbf{E}[R];$$

- или функцию надёжности между отказами

$$R(s) = \mathbf{P}\{R > s\};$$

Построение мат. модели системы $\langle G|_{k \leq n}|G||I \rangle$ на основе ММП

Математической моделью системы $\langle G|_{k < n}|G||I \rangle$ является ММП

$$Z(t) = \{(J(t), \mathbf{V}(t)), t = 0, 1, \dots\} \quad (16)$$

по моментам $S(t)$ $t = 0, 1, \dots$ изменения её состояний

$$S(t) = S(t-1) + T_{J(t)}(t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad S_0 = 0, \quad (17)$$

где $T_{J(t)}(t)$ интервал между моментами изменения состояний, который определяется метками (см далее):

$$T_{J(t)}(t) = \min[X_{J(t)}^{(1)}(t), Y_{J(t)}^{(1)}(t)]. \quad (18)$$

Здесь $J(t)$ – последовательность состояний системы с множеством состояний $\mathcal{J} = (0, 1, 2, \dots, k)$, где состояние j означает число компонентов системы, находящихся в состоянии отказа.

Метки $\mathbf{V}_j(t) = (\mathbf{X}_j(t), \mathbf{Y}_j(t))$ процесса в состоянии j на шаге t означают:

- набор остаточных в.б.р. $\mathbf{X}_j(t) = (X_j^{(1)}(t), \dots, X_j^{(n-j)}(t))$ и
- и набор их остаточных длительностей ремонта $\mathbf{Y}_j(t) = (Y_j^{(1)}(t), \dots, Y_j^{(j \wedge l)}(t)),$

расположенных в порядке возрастания, где верхний индекс указывает порядковый номер метки, а нижний — номер состояния системы, переменная в скобках — это номер шага.

Заметим, что на любом шаге t в состоянии $J(t) = 0$ величину $Y_0^{(0)}(t)$ следует доопределить положив $Y_0^{(0)}(t) = \infty$. Полагая, что в начальном состоянии на шаге $t = 0$ все элементы системы исправны, $J(0) = 0$, метки определим как

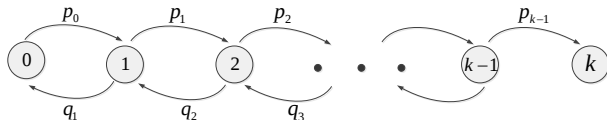
$$X_0^{(i)}(0) = A^{(i)}, \quad (i = \overline{1, n}), \quad Y_0^{(0)}(0) = \infty,$$

где набор с.в. $A^{(i)}$ представляет собой компоненты вариационного ряда для выборки n н.о.р. с.в. $A_i \in A(\cdot)$ — в.б.р. компонентов системы.

Продолжение II

В последующем процесс оказывается в состоянии $j = 0$ с некоторым набором меток, содержание и распределение которых будет вычислено позже.

Возможные переходы основной последовательности $J(t)$, работающей до первого отказа (с поглощением в состоянии k) представлены на графе переходов,



где вероятности переходов основной марковской цепи $p_j = p_j(\mathbf{V}_j)$, $q_j = q_j(\mathbf{V}_j)$, от номера шага явно не зависят и вычисляются в зависимости от содержания меток по формулам

$$\begin{aligned} p_j(\mathbf{V}_j) &= \mathbf{P}\{J(t+1) = j+1 \mid J(t) = j\} = \mathbf{P}\{X_j^{(1)}(t) \leq Y_j^{(1)}(t)\}, \\ q_j(\mathbf{V}_j) &= \mathbf{P}\{J(t+1) = j-1 \mid J(t) = j\} = \mathbf{P}\{X_j^{(1)}(t) > Y_j^{(1)}(t)\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Theorem

При переходе из состояния j в состояние $j + 1 \leq k$, то есть при отказе очередного элемента, метка $\mathbf{X}_j$ преобразуются следующим образом:

$$X_{j+1}^{(i)}(t+1) = X_j^{(i+1)}(t) - X_j^{(1)}(t); \quad (20)$$

$i = \overline{1, n-j-1}$, а преобразование метки $\mathbf{Y}_j$ зависит от состояния системы и при $j < l$ для всех $i = \overline{1, j \wedge l}$ имеет вид:

$$Y_{j+1}^{(i)}(t+1) = \begin{cases} Y_j^{(i)}(t) - X_j^{(1)}(t) & \text{при } i < r, \\ B_{t+1} & \text{при } i = r, \\ Y_j^{(i+1)}(t) - X_j^{(1)}(t) & \text{при } i > r, \end{cases} \quad (21)$$

где $r = \max\{i : Y_j^{(i)}(t) - X_j^{(1)}(t) \leq B_{t+1}\}$; а при $l \leq j \leq k$ равно

$$Y_{j+1}^{(i)}(t+1) = Y_j^{(i+1)}(t) - X_j^{(1)}(t) \quad (i = \overline{1, n-j-1}). \quad (22)$$

Theorem

Аналогично, при переходе из состояния $j \geq 1$ в состояние $j - 1$ при $X_j^{(1)}(t) > Y_j^{(1)}(t)$, то есть при восстановлении одного из элементов системы, компоненты $X_{j-1}^{(i)}$ метки $\mathbf{X}_{j-1}$ преобразуются следующим образом:

$$X_{j-1}^{(i)}(t+1) = X_j^{(i)}(t) - Y_j^{(1)}(t) \quad (i = \overline{1, n-j}), \quad (23)$$

преобразование метки $\mathbf{Y}_j$ при переходе из состояния j в состояние $j - 1$ зависит от исходного состояния и имеет вид: при $j \leq l$

$$Y_{j-1}^{(i)}(t+1) = Y_j^{(i+1)}(t) - Y_j^{(1)}(t) \quad (i = \overline{1, j}); \quad (24)$$

при $l < j \leq k$

$$Y_{j-1}^{(i)}(t+1) = \begin{cases} Y_j^{(i)}(t) - Y_j^{(1)}(t) & \text{при } i < r, \\ B_{t+1} & \text{при } i = r, \\ Y_j^{(i+1)}(t) - Y_j^{(1)}(t) & \text{при } i > r, \end{cases} \quad (25)$$

где $r = \max\{i : Y_j^{(i)}(t) - Y_j^{(1)}(t) \leq B_{t+1}\}$.

Вычисление и анализ характеристик надёжности модели

Вычисление основных характеристик надёжности модели производится с помощью многократной (скажем K -кратной) имитации траектории процесса Z на основе преобразования меток.

Основой применения метода имитационного моделирования является регенеративная структура модели и

- (a) положительная возвратность процесса Z с одной стороны,
- (б) достижимость состояния k из любого начального состояния с вероятностью 1.

Как и для предыдущей модели для этого достаточно конечности среднего времени периода регенерации, $E[R] < \infty$.

Как и для предыдущей модели, следуя методике мажорирования процесса Z можно показать, что для этого достаточно выполнения условия

$$P\{A < B\} > 0. \quad (26)$$

Вычисление характеристик в терминах меток

Для вычисления времени до первого отказа R можно воспользоваться моментами изменения состояний системы или интервалами между ними до момента $S(\tau)$ первого посещения $\tau = \min\{t : J(t) = k\}$ поглощающего состояния k ,

$$R = S(\tau) = \sum_{t \geq 1} T_{J(t)}(t) 1_{\{J(t) \leq k\}} = \sum_{t \geq 1} \min \left[X_{J(t)}^{(1)}, Y_{J(t)}^{(1)} \right] 1_{\{J(t) \leq k\}},$$

где величины $S(\cdot)$ и $T_{J(t)}(t)$ были введены соотношениями (17, 18).

Тогда аналогично предыдущей модели для K траекторий процесса Z до момента первого отказа системы функция надежности и среднее время жизни системы будут выражаться в терминах меток как

$$\hat{F}_R(x) = \frac{1}{K} \sum_{1 \leq k \leq K} 1_{\{R^{(k)} \leq x\}} \text{ и } \hat{\mu}_R = \frac{1}{K} \sum_{1 \leq k \leq K} R^{(k)}.$$

Целью настоящего сообщения является демонстрация возможности предложенной конструкции на рассмотренных двух примерах.

Далее эти возможности будут представлены на численных примерах.

Приведённые примеры и их численный анализ показывают широкие возможности предложенной конструкции. Поэтому дальнейшие исследования предполагают:

- исследование условий положительной возвратности ММП,
- разработку стандартных процедур и средств реализации ММП,
- исследование других моделей с помощью ММП:
 - расчет стационарных вероятностей для модели k -из- n ,
 - моделей обслуживания с “взрывным” потоком,
 - тандем систем,
 - ресурсных систем,
 - RQ -систем,
 - управляемых систем,
 - систем с реальным трафиком и рекуррентным процессом его обработки.

Численные примеры и анализ чувствительности

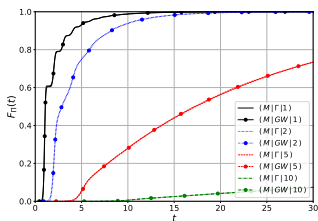
В экспериментах используются распределения Гамма (Γ) и Гнеденко-Вейбулла (GW).

	$GW(\alpha, \beta)$	$\Gamma(\alpha, \beta)$
α – параметр формы, β – параметр масштаба		
ф.р.	$F(t) = 1 - e^{-(t/\beta)^\alpha}$	$F(t) = 1 - \frac{\Gamma(\alpha, t\beta)}{\Gamma(\alpha)}$
ф.р.	$f(t) = \frac{\alpha e^{-(t/\beta)^\alpha} (t/\beta)^{\alpha-1}}{\beta}, t > 0$	$f(t) = \frac{\beta^\alpha e^{-t/\beta} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, t > 0$
мат. ожид.	$\mu_T = \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$	$\mu_T = \frac{\alpha}{\beta}$
дисперсия	$\sigma_T^2 = \beta^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \mu_T^2$	$\sigma_T^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$
коэф. вар.	$v = \frac{\sigma_T}{\mu_T}$	$v = \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha}$
параметры	$\alpha, \beta = \frac{\mu_T}{\Gamma(1 + 1/\alpha)}$	$\alpha = v^{-2}, \quad \beta = \mu_T v^2$

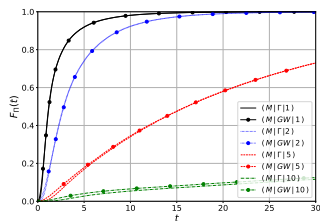
Далее для среднего μ и коэффициента вариации v различных времен будут использоваться нижние индексы, соответствующие этим с.в., A , B и Π .

Система $(M|GI|n)$ I

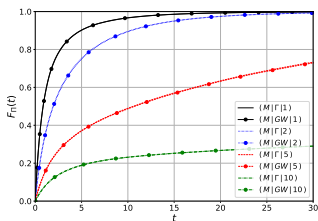
$n = 1, 2, 5, 10$, $\mu_A = 2$, $\rho = \frac{\mu_B}{n \cdot \mu_A} = 0.5$, $\mu_B = 1, 2, 5, 10$



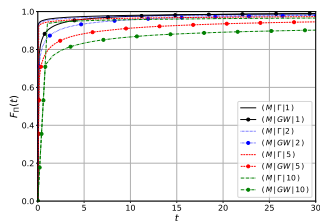
a) $v_B = 0.1$



b) $v_B = 0.5$



c) $v_B = 1$



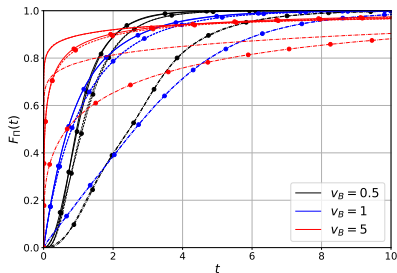
d) $v_B = 10$

Таблица: $\hat{\mu}_\Pi$ системы $(M|GI|n)$ для $B(\cdot) \sim \Gamma / GW$

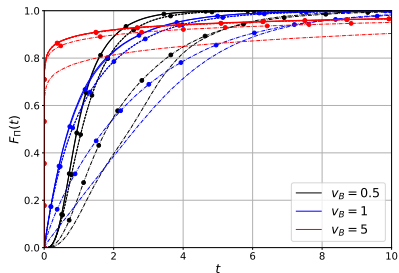
$\hat{\mu}_\Pi$	$n = 2$	$n = 5$	$n = 10$
$\nu_B = 0.1$	4.1674 / 4.1787	23.5357 / 23.4804	298.6871 / 299.0505
$\nu_B = 0.5$	4.1047 / 4.1043	23.2388 / 23.1257	297.1719 / 296.7376
$\nu_B = 1$	4.0125 / 4.0245	22.8843 / 23.0876	295.5491 / 296.3262
$\nu_B = 10$	4.0356 / 3.8161	23.0863 / 22.1556	305.3809 / 301.4704

Система $(GI|GI|3, 5)$ I

$\mu_A = 2$, $\mu_B = 2$ and $v_A = v_B = 0.5, 1, 5$
 solid: $v_A = 0.5$, dashed: $v_A = 1$, dash-dotted: $v_A = 5$



a) $A(\cdot) \sim \Gamma$, $B(\cdot) \sim GW$ – curves with markers; $B(\cdot) \sim \Gamma$ – with no markers.



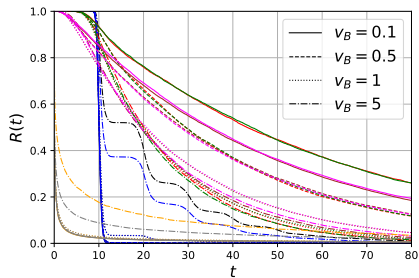
b) $B(\cdot) \sim \Gamma$, $A(\cdot) \sim GW$ – curves with markers; $A(\cdot) \sim \Gamma$ – with no markers.

Таблица: QoS системы $(GI|GI|3, 5)$

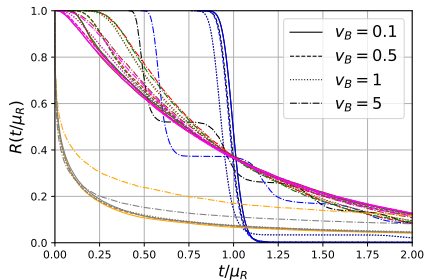
QoS		$A(\cdot) \sim \Gamma, B(\cdot) \sim \Gamma / A(\cdot) \sim \Gamma, B(\cdot) \sim GW$			$A(\cdot) \sim GW, B(\cdot) \sim \Gamma$		
		$\nu_B = 0.5$	$\nu_B = 1$	$\nu_B = 5$	$\nu_B = 0.5$	$\nu_B = 1$	$\nu_B = 5$
$\nu_A = 0.5$	$\hat{\mu}_J$	0.5018 / 0.4997	0.4979 / 0.5002	0.5077 / 0.5026	0.5015	0.5001	0.5240
	$\hat{\mu}_Q$	$2 \cdot 10^{-6} / 2 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5} / 7 \cdot 10^{-5}$	0.0127 / 0.0078	$2 \cdot 10^{-5}$	10^{-3}	0.0143
	$\hat{\mu}_V$	$4 \cdot 10^{-6} / 4 \cdot 10^{-6}$	$10^{-3} / 10^{-3}$	0.0253 / 0.0155	$4 \cdot 10^{-5}$	0.0002	0.0286
	$\hat{\mu}_W$	1.0037 / 0.9993	0.9958 / 1.0003	1.0153 / 1.0053	1.0029	1.0003	1.0481
$\nu_A = 1$	$\hat{\mu}_J$	0.5019 / 0.5014	0.5047 / 0.5051	0.5148 / 0.5195	0.5000	0.5055	0.5127
	$\hat{\mu}_Q$	0.0021 / 0.0024	0.0031 / 0.0032	0.0177 / 0.0128	0.0021	0.0031	0.0168
	$\hat{\mu}_V$	0.0042 / 0.0047	0.0063 / 0.0063	0.0354 / 0.0257	0.0043	0.0062	0.0337
	$\hat{\mu}_W$	1.0037 / 1.0027	1.093 / 1.0102	1.0296 / 1.0389	1.0000	1.0109	1.0254
$\nu_A = 5$	$\hat{\mu}_J$	0.5209 / 0.5207	0.5165 / 0.5152	0.5164 / 0.4832	0.6287	0.6166	0.5286
	$\hat{\mu}_Q$	0.1872 / 0.1874	0.1732 / 0.1729	0.0903 / 0.0940	0.1644	0.1502	0.0653
	$\hat{\mu}_V$	0.3743 / 0.3748	0.3465 / 0.3459	0.1805 / 0.1880	0.3288	0.3005	0.1306
	$\hat{\mu}_W$	1.0418 / 1.0415	1.0330 / 1.0304	1.0329 / 0.9664	1.2574	1.2332	1.0573

Система $\langle \Gamma_{5<10} | G | 1 \rangle$

$\mu_A = 10, \mu_B = 1. \nu_A = 0.1, 0.5, 1, 3; B(\cdot) \sim \Gamma, GW, \nu_B = 0.1, 0.5, 1, 5.$



В масштабе t



В масштабе μ_R

$\nu_A = 0.1$: черный – $B \sim \Gamma$, синий – $B \sim GW$

$\nu_A = 0.5$: красный – $B \sim \Gamma$, зеленый – $B \sim GW$

$\nu_A = 1$: коричневый – $B \sim \Gamma$, розовый – $B \sim GW$

$\nu_A = 3$: оранжевый – $B \sim \Gamma$, серый – $B \sim GW$

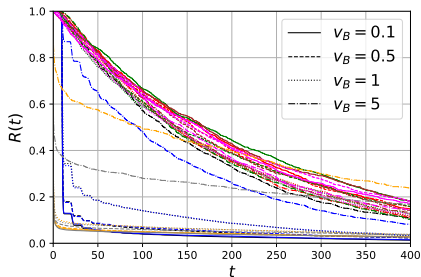
$\nu_A =$	0.1		0.5		1		3	
$B \sim$	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$\nu_B = 0.1$	10.065	10.069	61.197	60.623	48.379	49.746	2.024	1.871
$\nu_B = 0.5$	10.260	10.304	40.059	40.288	39.967	39.487	2.061	2.005
$\nu_B = 1$	10.865	10.879	25.466	25.752	27.949	28.182	2.270	2.267
$\nu_B = 5$	21.142	17.600	25.148	24.712	25.451	26.114	10.632	5.582

Таблица: Среднее время жизни μ_R

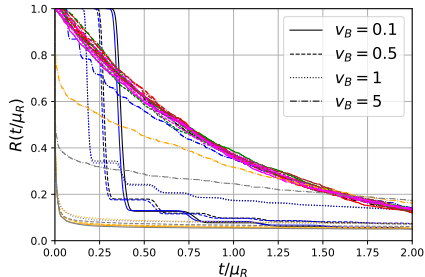
$\nu_A =$	0.1		0.5		1		3	
$B \sim$	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$\nu_B = 0.1$	0.222	0.258	0.924	0.900	0.951	0.960	8.648	8.178
$\nu_B = 0.5$	0.458	0.529	0.842	0.853	0.932	0.931	8.509	8.106
$\nu_B = 1$	0.443	0.436	0.724	0.732	0.899	0.897	7.598	7.750
$\nu_B = 5$	0.725	0.731	0.677	0.703	0.821	0.845	3.024	4.527

Таблица: Коэффициент вариации ν_R времени жизни

Система $\langle \Gamma_{5<10} | G | 3 \rangle$



В масштабе t



В масштабе μ_R

$v_A = 0.1$: черный – $B \sim \Gamma$, синий – $B \sim GW$

$v_A = 0.5$: красный – $B \sim \Gamma$, зеленый – $B \sim GW$

$v_A = 1$: коричневый – $B \sim \Gamma$, розовый – $B \sim GW$

$v_A = 3$: оранжевый – $B \sim \Gamma$, серый – $B \sim GW$

Система $\langle \Gamma_{5<10} | G | 3 \rangle \Pi$

$\nu_A =$	0.1		0.5		1		3	
$B \sim$	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$\nu_B = 0.1$	27.346	28.515	224.189	236.483	231.703	227.693	32.138	31.289
$\nu_B = 0.5$	36.926	38.464	218.784	214.494	212.219	232.047	32.013	41.233
$\nu_B = 1$	56.533	56.546	195.805	193.731	190.473	191.829	44.670	44.214
$\nu_B = 5$	180.81	148.757	188.397	187.313	193.361	204.229	278.97	188.02

Таблица: Среднее время жизни μ_R

$\nu_A =$	0.1		0.5		1		3	
$B \sim$	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$\nu_B = 0.1$	3.536	3.487	0.958	0.927	0.952	1.036	5.616	5.789
$\nu_B = 0.5$	3.115	3.138	0.952	1.038	0.979	1.011	5.699	5.143
$\nu_B = 1$	2.202	2.177	0.972	1.015	0.979	0.974	4.596	4.674
$\nu_B = 5$	0.968	1.123	0.914	0.937	0.889	0.957	1.590	2.211

Таблица: Коэффициент вариации ν_R времени жизни

На основе теоретических результатов численными методами проведёно исследование характеристик производительности и надёжности некоторых частных примеров многосерверной системы с конечным буффером и системы надёжности.

Численные примеры демонстрируют различные результаты относительно влияния и независимости от исходных распределений и их параметров.

Естественно, на основе численного анализа отдельных примеров нельзя делать абсолютных выводов относительно вида и величины чувствительности, но приведённые результаты показывают необходимость проведения более тщательного анализа характеристик СМО и систем надёжности с учетом неэкспоненциальных распределений и вторых моментов.

Далее представлен дополнительный материал к исследованию системы $(GI|GI|n, m)$.

Доказательство к теореме о преобразовании меток для системы $(G|G|n, m)$

Действительно, переход $j \rightarrow j + 1$ на шаге t происходит при поступлении требования. При этом метка $X_{j+1}(t + 1)$ принимает значение времени до поступления нового требования A_{t+1} , подтверждая формулу (20).

Одновременно остаточные длительности обслуживания $Y_j^{(i)}$ уменьшаются на величину X_j . Кроме того, при наличии свободных обслуживающих приборов, то есть при $j < n$, в компоненты $Y_{j+1}^{(i)}$ метки $\mathbf{Y}_{j+1}$ на одну из позиций i между метками $Y_j^{(i-1)}$ и $Y_j^{(i)}$ добавляется новая компонента, соответствующая длительности B_{t+1} обслуживания вновь поступившего требования, при этом метки предшествующие $i - 1$ -ой занимают те же позиции, а метки следующие за вновь поступившей сдвигаются на одну позицию вправо, что доказывает формулу (21).

Если же все приборы заняты, то есть при $j \geq n$, то вновь поступившее требование становится в очередь и компоненты $Y_j^{(i)}(t)$ метки $\mathbf{Y}_j(t)$ сдвигаются на величину $X_j(t)$, что доказывает формулу (22).

Аналогично, переход $j \rightarrow j - 1$ на шаге t возможен только при $j > 1$ и происходит при окончании обслуживания одного из требований. При этом время $X_j(t)$ до поступления очередного требования уменьшается на величину $Y_j^{(1)}(t)$, что доказывает формулу (23).

Преобразование метки $\mathbf{Y}_j(t)$ при переходе $j \rightarrow j - 1$ зависит от состояния системы: если ожидающие требования отсутствуют, то есть при $j \leq n$, компоненты вектора $\mathbf{Y}_j(t)$ просто уменьшаются на величину $Y_j^{(1)}(t)$, что доказывает формулу (24).

Однако при наличии ожидающих требований, то есть при $j > n$, одно из них поступает на обслуживание и компоненты вектора $\mathbf{Y}_j(t)$ после сдвига на величину $Y_j^{(1)}(t)$ дополняются длительностью обслуживания B_{t+1} вновь принятого к обслуживанию требования, которое занимает одну из позиций в соответствии с формулой (25). Таким образом все формулы (20) – (25) доказаны.

В этих выражениях с.в. A_t и B_t являются независимыми от прошлого $\mathcal{F}_t = \sigma\{Z(s) : s \leq t\}$ процесса Z . Таким образом, полученные выражения показывают, что последовательность меток вычисляется рекуррентно с помощью независимых от прошлого процесса $Z(t)$ с.в., то есть набор меток образует в пространстве меток марковскую цепь специального вида.

Опираясь на полученные преобразования меток вычислим теперь их переходные вероятности (ядра).

Вычисление переходных вероятностей меток

Определим операторы сдвигов Sh и пополнения Ad на значения $\mathbf{v}_j = (x_j, \mathbf{y}_j)$ меток $\mathbf{V}_j$, полагая,

$$\begin{aligned}x^i(Sh[\mathbf{x}_n, x]) &= x^i - x, \text{ при } i = \overline{1, n}; \\x^i(Ad[\mathbf{x}_n, x]) &= \begin{cases} x^i & \text{для } i < l, \\ x & \text{для } i = l, \\ x^{i+1} & \text{для } i > l, \end{cases}\end{aligned}$$

где $l = \max\{i : x^i < x\}$.

Через $P_j(\mathbf{v}_j, C_{j+1})$ и $Q_j(\mathbf{v}_j, C_{j-1})$ обозначим переходные вероятности (ядра) преобразований меток при переходе из состояния j в состояния $j+1$ и $j-1$,

$$\begin{aligned}P_j(\mathbf{v}_j; C_{j+1}) &= \mathbf{P}\{X_j \leq Y_j^{(1)}, \mathbf{V}_{j+1} \in C_{j+1} | \mathbf{V}_j = \mathbf{v}_j\}; \\Q_j(\mathbf{v}_j; C_{j-1}) &= \mathbf{P}\{X_j > Y_j^{(1)}, \mathbf{V}_{j-1} \in C_{j-1} | \mathbf{V}_j = \mathbf{v}_j\}.\end{aligned}$$

Заметим, что при переходе основного процесса из одного состояния в другое только одна из компонент приобретает новое значение. Это позволяет определить ядра на специальных множествах, при описании которых будем пользоваться обозначениями

$$\Delta_j^i Sh[\mathbf{y}_j, x_j] = (y_j^{i-1} - x_j, y_j^i - x_j], \quad \Delta_j^i Sh[\mathbf{y}_j, y_j^1] = (y_j^{i-1} - y_j^1, y_j^i - y_j^1];$$

$$\Delta_j^i B(Sh[\mathbf{y}_j, y_j^1]) = B(y_j^i - y_j^1) - B(y_j^{i-1} - y_j^1);$$

$$\Delta_j^i B(Sh[\mathbf{y}_j, x_j]) = B(y_j^i - x_j) - B(y_j^{i-1} - x_j).$$

При переходе $j \rightarrow j + 1$ при $j < n$, положим

$$C_{j+1}^{(i)}(\mathbf{v}_j, x) = \{\mathbf{v}_{j+1} : Ad[Sh[\mathbf{v}_j, x_j], A_{t+1} \in [0, x], B_{t+1} \in \Delta_j^i(Sh[\mathbf{y}_j, x_j])]\};$$

Аналогично, при $j \geq n$ положим

$$C_{j+1}(\mathbf{v}_j) = \{\mathbf{v}_{j+1} : A_{t+1} \in [0, x], Sh[\mathbf{y}_j, x_j]\}.$$

При переходе $j \rightarrow j - 1$ при $j \leq n$ положим

$$C_{j-1}(\mathbf{v}_j) = \{\mathbf{v}_{j-1} : Sh[\mathbf{v}_j, y_j^1]\}.$$

Аналогично, при $j > n$ положим

$$C_{j-1}^{(i)}(\mathbf{v}_j) = \{\mathbf{v}_{j-1} : Ad[Sh[\mathbf{v}_j, y_j^1], B_{t+1} \in \Delta_j^i(Sh[\mathbf{y}_j, y_j^1])]\}.$$

Лемма

Ядра преобразования меток при переходе $j \rightarrow j + 1$ имеют вид: при $j < n$

$$P_j(\mathbf{v}_j; C_{j+1}) = \begin{cases} A(x) \times \Delta B_j^i(Sh[\mathbf{y}_j, x_j]) & \text{для } C_{j+1} = C_{j+1}^{(i)}(\mathbf{v}_j), \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

при $j \geq n$

$$P_j(\mathbf{v}_j; C_{j+1}) = \begin{cases} A(x) & \text{для } C_{j+1} = C_{j+1}(\mathbf{v}_j, x), \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (27)$$

Аналогично, при переходе $j \rightarrow j - 1$ при $j \leq n$,

$$Q_j(\mathbf{v}_j; C_{j-1}) = \begin{cases} 1_{\{Ad[\mathbf{v}_j, y_j^1] \in C_{j-1}\}} & \text{для } C_{j-1} = C_{j-1}(\mathbf{v}_j), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (28)$$

при $j > n$

$$Q_j(\mathbf{v}_j; C_{j-1}) = \begin{cases} \Delta B_j^i(Sh[\mathbf{y}_j, y_j^1], e_j(1)) & \text{для } C_{j-1} = C_{j-1}(\mathbf{v}_j), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (29)$$

Опираясь на ядра P_j и Q_j преобразования меток, выпишем уравнения для их мер $\mu_j(t, \cdot) = \mathbf{P}\{\mathbf{V}_j(t) \in \cdot\}$ в терминах преобразований меток P_j и Q_j

$$\mu_j(t+1, \cdot) = \int \mu_{j-1}(t, d\mathbf{v}_{j-1}) P_{j-1}(\mathbf{v}_{j-1} \cdot) + \int \mu_{j+1}(t, d\mathbf{v}_{j+1}) Q_{j+1}(\mathbf{v}_{j+1} \cdot),$$

которые в операторных обозначениях могут быть переписаны в виде

$$\mu_j(t+1, \cdot) = \mu_{j-1} P_{j-1}(t, \cdot) + \mu_{j+1} Q_{j+1}(t, \cdot).$$

В предположении об абсолютной непрерывности распределений с.в. A и B меры меток процесса Z также абсолютно непрерывны,

$$\mu_j(t; C) = \int_C \cdots \int f_j(t; x, y^1, \dots, y^{j \wedge n}) dx \prod_{1 \leq i \leq j \wedge n} dy^i,$$

где функции $f_j(t, \mathbf{v}_j)$ представляют собой плотности распределений меток процесса Z .

Theorem

П.р. меток процесса Z в соседних состояниях $j-1, j, j+1$ на двух последующих шагах t и $t+1$ связаны соотношениями: при $j \leq n$

$$\begin{aligned} f_j(t+1; x_j, \mathbf{y}_j) &= \sum_{1 \leq i \leq j} a(x_j) b(y_j^i) \left(B(y_j^i) - B(y_j^{i-1}) \right) \int_{u \leq y_j^1} f_{j-1}(t; u, \mathbf{y}_j^i + u) du + \\ &+ \int_{u \leq x_j} f_{j+1}(t; x_j + u, u, \mathbf{y}_j + u) du; \end{aligned} \quad (30)$$

при $j > n$

$$\begin{aligned} f_j(t+1; x_j, \mathbf{y}_j) &= a(x_j) \int_{u \leq x_j} f_{j-1}(t; u, \mathbf{y}_j^i + u) du + \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq j} b(y_j^i) \left(B(y_j^i) - B(y_j^{i-1}) \right) \int_{u \leq y_j^1} f_{j+1}(t; x_j + u, u, \mathbf{y}_j + u) du \end{aligned} \quad (31)$$

где использованы обозначения

$$\mathbf{y}_j^i = (y_j^1, \dots, y_j^{i-1}, y_j^{i+1}, \dots, y_j^{j \wedge n}).$$

Алгоритм вычисления характеристик производительности системы $(GI|GI|n, m)$

Вычисление характеристик модели опирается на метод имитационного моделирования, при этом операторы сдвига $Sh[\mathbf{v}_j, v]$ и пополнения $Ad[\mathbf{v}_j, v]$ применяются к реализациям с.в.:

$$\begin{aligned} Sh[\mathbf{v}_j, v] &\equiv \{\mathbf{v}_{sh} : v_{sh}^i = v_j^i - v, (i = \overline{1, j}, v \leq v_j^1)\} \\ Ad[\mathbf{v}_j, v] &\equiv \{\mathbf{v}_{ad}(v) : v_{ad}^i(v) = v_j^i \text{ при } i < l, v_{ad}^l(v) = v, \\ &\quad v_{ad}^{l+1}(v) = v_j^l \text{ при } i > l (i = \overline{1, j-1})\}, \end{aligned}$$

где $l = \max\{i : v_j^i < v\}$.

Напомним, что при применении этих операторов к переменной x_j и массиву $\mathbf{y}_j$ они имеют размерности 1 и $n + m$ соответственно.

Исходные данные.

Целые n, m, K – число реализаций модели, k – счетчик числа реализаций. Распределения $A(\cdot), B(\cdot)$ случайных величин A_i, B_i , соответствующие средние (a, b) и коэффициенты вариации (v_a, v_b) .

Подготовить счётчики: $\nu_j = 0$ ($j = \overline{0, m+n}$) – число посещений состояний $j = \overline{1, m+n}$; и массивы: $\Pi = [0] * K$ – время до возвращения системы в состояние 0 (продолжительность периода регенерации); $t_1, \dots, t_{m+n}$ – длительности пребывания системы в состояниях $j = \overline{1, m+n}$.

Начало.

Положить $j = 0, k = 1$ и вычислить начальное состояние системы в виде $x_0 = A_0, y_0 = \{y_0^1 = \infty\}$.

Шаг 1. Если $k < K$, то переход на Шаг 2, в противном случае переход на Шаг 6.

Шаг 2. Если $j = 0$, Считать $t_j := t_j + x_j, \nu_j := \nu_j + 1, j := j + 1$. Вычислить $x_j = A_j, y_j = Ad[B]$.

Перейти на шаг 5.

Алгоритм. Продолжение

Шаг 3. Пока $0 < j < n + m$, повторять:

если $x_j \leq y_j^1$:

положить $t_j := t_j + x_j$, $\nu_j := \nu_j + 1$, $\Pi_k := \Pi_k + x_j$ $j := j + 1$;

вычислить $x_j = A_j$;

если $j \leq n$, то $y_j = Ad[Sh[y_{j-1}, x_{j-1}], B]$

иначе $j > n$, то $y_j = Sh[y_{j-1}, x_{j-1}]$

если $x_j > y_j^1$:

положить $t_j := t_j + y_j^1$, $\nu_j := \nu_j + 1$, $\Pi_k := \Pi_k + y_j^1$, $j := j - 1$;

вычислить $x_j = Sh[x_{j-1}, y_{j-1}^1]$;

если $j \leq n$, то $y_j = Sh[y_{j-1}, x_{j-1}]$

иначе $j > n$, то $y_j = Ad[Sh[y_{j-1}, x_{j-1}], B]$

Если $j = 0$, то положить $Y_j^{(1)} = \infty$ и перейти на Шаг 2. Если $j = n + m$, то перейти на Шаг 4. Иначе Шаг 3 повторяется, пока верно условие $0 < j < n + m$.

Шаг 4. Если $j = n + m$,

если $x_j \leq y_j^1$:

вычислить $x_j = A_j$; $y_j = Sh[y_{j-1}, x_{j-1}]$; Повторить Шаг 4 сначала.

если $x_j > y_j^1$:

положить $t_j := t_j + y_j^1$, $\nu_j := \nu_j + 1$, $\Pi_k := \Pi_k + y_j^1$, $j := j - 1$;

вычислить $x_j = Sh[x_{j-1}, y_{j-1}^1]$, $y_j = Ad[Sh[y_{j-1}, y_{j-1}^1], B]$.

Перейти на шаг 3.

Шаг 5. Сбор статистики:

- заполнение массива $\nu_j := \nu_j + 1$,
- заполнение массива Π значениями Π_k ,
- заполнение массива $t_1, \dots, t_{n+m}$.

Положить $k := k + 1$. Перейти на шаг 3.

Шаг 6. Обработка статистики:

- вычисление оценок распределения числа посещений состояний $\hat{\nu}_j$,
$$\hat{\nu}_j = \frac{\nu_j}{\sum_{j \leq k} \nu_j},$$
- вычисление оценок распределения вероятностей состояний $\hat{\pi}_j$, $\hat{\pi}_j = \frac{t_j}{\sum t_j}$,
- вычисление эмпирической функции распределения периода занятости
$$\hat{F}_{\Pi}(t) = \frac{1}{K} \Pi_k, \quad \Pi_k \leq t \leq \Pi_{k+1},$$
- оценки среднего значения периода занятости системы, $\hat{m}_{\Pi} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Pi_k$,
- вывод результатов.

СТОП.

Первая модель Эрланга, $M|M|1$

Положим среднее время между поступлениями требований $a = 2$, нагрузка на прибор $\rho = 0.5, 0.8, 0.95$, среднее время обслуживания вычисляется как $b = a\rho$.

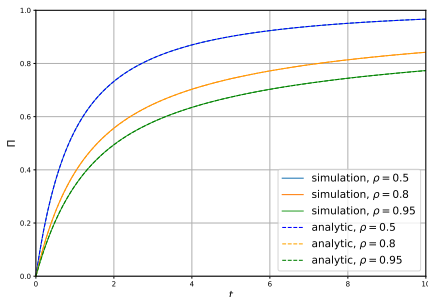


Рис.: Функция распределения периода занятости системы $M|M|1$ при изменении ρ

Аналитика / Алгоритм	$\rho = 0.5$	$\rho = 0.8$	$\rho = 0.95$
μ_{Π}	2 / 2.0026	8 / 8.0038	38 / 37.7064
ν_{Π}	1.7321 / 1.7321	3 / 2.9996	6.2445 / 6.2199

Система $M|GI|1$

Положим $n = 1$, $m = 10^4$, $a = 2$, $v_b = 0.1, 0.5, 1, 10$, $\rho = 0.5, 0.8, 0.95$, тогда $b = \rho \cdot a = 1, 1.6, 1.9$.

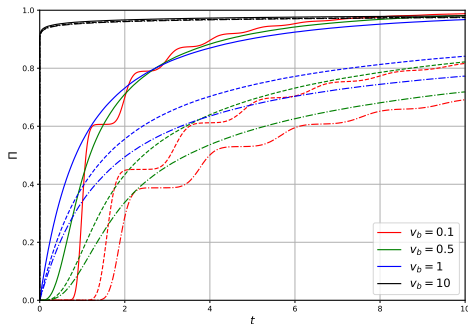


Рис.: Ф.р. периода занятости системы $M|GI|1$ при изменении v_b и ρ

- цвет линии определяет значение коэффициента вариации времени обслуживания v_b (в соответствии с легендой рисунка),
- тип линии определяет значение нагрузки ρ : сплошная для $\rho = 0.5$, пунктирная для $\rho = 0.8$ и штрихпунктирная для $\rho = 0.95$.

Таблица: Характеристики периода занятости, μ_{Π}

Γ / GW	$\rho = 0.5$	$\rho = 0.8$	$\rho = 0.95$
Аналитика	2	8	37.99
$v_b = 0.1$	2.0032 / 1.9991	8.0563 / 8.0169	37.5108 / 37.7269
$v_b = 0.5$	2.0062 / 2.0034	8.0093 / 8.0229	38.2819 / 38.0612
$v_b = 1$	1.9947 / 1.9976	7.9947 / 7.9713	38.5953 / 38.1866
$v_b = 10$	2.0202 / 1.9476	7.9357 / 8.4624	38.8837 / 31.2089

Таблица: Характеристики периода занятости, v_{Π}

Аналит./ Γ/GW	$\rho = 0.5$	$\rho = 0.8$	$\rho = 0.95$
$v_b = 0.1$	1.01 / 1.01 / 1.01	2.01 / 2.03 / 2.04	4.38 / 4.38 / 4.37
$v_b = 0.5$	1.22 / 1.23 / 1.22	2.29 / 2.27 / 2.29	4.90 / 4.94 / 4.91
$v_b = 1$	1.73 / 1.74 / 1.74	3 / 2.96 / 2.98	6.25 / 6.26 / 6.51
$v_b = 10$	14.2 / 13.7 / 14.1	22.5 / 22.9 / 21.9	44.9 / 38.9 / 35.4

Система $M|G|1$, продолжение

Характеристики системы $M|G|1$, аналитика

	$\rho = 0.5$			$\rho = 0.8$			$\rho = 0.95$		
	m_N	m_V	m_W	m_N	m_V	m_W	m_N	m_V	m_W
$v_b = 0.1$	0.7525	0.505	1.505	2.416	3.232	4.832	10.0652	18.2305	20.13405
$v_b = 0.5$	0.8115	0.625	1.625	2.8	4	5.6	12.2312	22.5625	24.4625
$v_b = 1$	1	1	2	4	6.4	8	19	36.1	38
$v_b = 10$	25.75	50.5	51.5	162.4	323.2	324.8	912.475	1823.05	1824.95

Характеристики системы $M|G|1$, $\rho = 0.5$

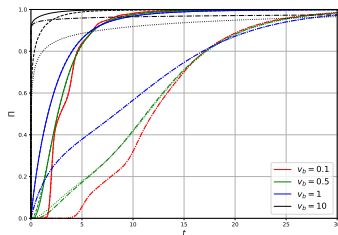
	m_N		m_V		m_W	
	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$v_b = 0.1$	0.7524	0.7548	0.5043	0.5075	1.5041	1.5095
$v_b = 0.5$	0.8129	0.8098	0.6257	0.6198	1.6259	1.6195
$v_b = 1$	0.9949	0.9985	0.9924	0.9988	1.9898	1.9969
$v_b = 10$	25.2813	22.5527	49.5701	44.1154	50.5627	45.1053

Характеристики системы $M|G|1$, $\rho = 0.8$

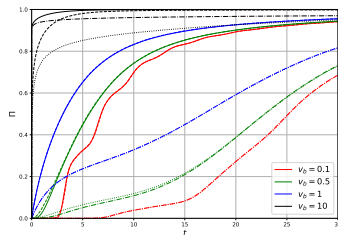
	m_N		m_V		m_W	
	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$v_b = 0.1$	2.4127	2.4133	3.2244	3.2254	4.8254	4.8266
$v_b = 0.5$	2.7957	2.8158	3.9915	4.0305	5.5913	5.6316
$v_b = 1$	4.0097	3.9786	6.4211	6.3584	8.0193	7.9573
$v_b = 10$	162.191	176.425	322.804	351.239	324.381	352.850

Система $M|GI|n$

Положим $n = 2, 5$, $a = 2$, $\rho = \frac{b}{n \cdot a} = 0.5, 0.8$; при $n = 2$ среднее $b = 2, 3.2$, а при $n = 5$ среднее $b = 5, 8$.



а) $\rho = 0.5$



б) $\rho = 0.8$

Рис.: Ф.р периода занятости системы $M|GI|n$ при изменении B и v_b

- цвет линии определяет значение коэффициента вариации времени обслуживания v_b (в соответствии с легендой рисунка),
- тип линии определяет распределение времени обслуживания и количество обслуживающих устройств: сплошная и пунктирная линии при $n = 2$ для $B \sim \Gamma$ и $B \sim GW$ соответственно; штрихпунктирная и штриховая $n = 5$ для $B \sim \Gamma$ и $B \sim GW$ соответственно.

Таблица: Характеристики периода занятости системы $M|G|n$

	$\mu\pi$				$\nu\pi$			
	$\rho = 0.5$		$\rho = 0.8$		$\rho = 0.5$		$\rho = 0.8$	
	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$n = 2$								
$\nu_b = 0.1$	3.5563	3.5526	11.0128	11.0853	0.6062	0.6093	1.3811	1.4103
$\nu_b = 0.5$	3.2697	3.2559	10.0214	9.9712	0.7968	0.7993	1.6671	1.7021
$\nu_b = 1$	2.6454	2.6293	7.7487	7.7199	1.2468	1.2443	2.5541	2.5457
$\nu_b = 10$	0.1431	0.4417	0.2661	0.9279	24.9326	7.9837	57.1961	49.9863
$n = 5$								
$\nu_b = 0.1$	12.053	12.8893	28.4182	28.3752	0.4652	0.4623	0.5944	0.5859
$\nu_b = 0.5$	11.9302	11.9465	25.6019	25.5093	0.5809	0.5932	0.7094	0.7283
$\nu_b = 1$	9.8682	9.9089	19.1872	19.2678	0.8809	0.8808	1.0634	1.0632
$\nu_b = 10$	3.7737	3.329	4.8044	4.4648	7.2108	3.5659	6.8007	3.0617

Характеристики системы $M|G|n, \rho = 0.5$

$n = 2$						
	m_N		m_V		m_W	
	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$v_b = 0.1$	1.0819	1.0820	0.3019	0.3032	2.1637	2.1641
$v_b = 0.5$	1.0777	1.0756	0.3467	0.3456	2.1553	2.1511
$v_b = 1$	1.0706	1.0622	0.4805	0.4721	2.1412	2.1244
$v_b = 10$	0.8479	0.8435	1.5177	1.2204	1.6959	1.6869
$n = 5$						
$v_b = 0.1$	2.2418	2.2419	0.1098	0.1097	4.4836	4.4838
$v_b = 0.5$	2.1449	2.1456	0.1053	0.1066	4.2898	4.2913
$v_b = 1$	1.9110	1.9155	0.0944	0.0961	3.8220	3.8309
$v_b = 10$	0.8907	0.8926	0.0009	0.0025	1.7814	1.7852

Характеристики системы $M|G|n, \rho = 0.8$

$n = 2$						
	m_N		m_V		m_W	
	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$v_b = 0.1$	2.5996	2.6356	2.2726	2.3390	5.1992	5.2712
$v_b = 0.5$	2.8193	2.8457	2.7490	2.8017	5.6386	5.6915
$v_b = 1$	3.4717	3.4889	4.1817	4.2207	6.9434	6.9779
$v_b = 10$	7.9110	40.7975	15.4439	80.5925	15.8220	81.5949
$n = 5$						
$v_b = 0.1$	3.8867	3.8721	1.2556	1.2277	7.7735	7.7441
$v_b = 0.5$	3.7567	3.7719	1.2746	1.3119	7.5134	7.5438
$v_b = 1$	3.4217	3.4509	1.3653	1.4052	6.8433	6.9019
$v_b = 10$	1.0213	1.0737	0.0447	0.0401	2.0425	2.1475

Алгоритм вычисления характеристик надежности системы $(G|_{k \leq n} | G|/I)$

Подготовка: Ввести исходные данные: целые n, k . M – число реализаций модели, I – количество обслуживающих устройств. Задать распределения $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ случайных величин A_i , B_i , соответствующие средние $\mu_A = a$, $\mu_B = b$) и коэффициенты вариации ν_A , ν_B).

Подготовить счётчики: $\nu_j = (\nu_1, \dots, \nu_k)$ – число посещений состояний $j = \overline{1, k}$; m – счётчик числа реализаций; и массивы: $R = [0] * M$ – время до отказа системы, $t_1, \dots, t_k$ – длительности пребывания системы в состояниях $j = \overline{1, k}$.

Начало.

Положить $j = 0$, $m = 1$. Моделировать n реализаций с.в. $A \in A(\cdot)$ и вычислить начальное состояние системы в виде вариационного ряда из этой выборки

$$\mathbf{x}_0 = \{x_0^i \ (i = \overline{1, n}) : x_0^1 \leq x_0^2 \leq \dots \leq x_0^n\}, \quad \mathbf{y}_0 = \{y_0^1 = \infty\}.$$

Шаг 1. Если $m < M$, то переход на Шаг 2, в противном случае – на Шаг 6.

Шаг 2. Считать $t_j := t_j + x_0^1$, $\nu_j := \nu_j + 1$, $R_m := R_m + x_0^1$, $j := j + 1$.

Вычислить $\mathbf{x}_j = Sh[\mathbf{x}_{j-1}]$, $\mathbf{y}_j = Ad[B]$. Переход на Шаг 3.

Шаг 3. Пока $0 < j < k$, повторять:

если $x_j^1 \leq y_j^1$:

положить $t_j := t_j + x_j^1$, $\nu_j := \nu_j + 1$, $R_m := R_m + x_0^1$, $j := j + 1$;

вычислить $\mathbf{x}_j = Sh[\mathbf{x}_{j-1}, x_{j-1}^1]$, $\mathbf{y}_j = Sh[\mathbf{y}_{j-1}, y_{j-1}^1]$;

если $j \leq l$,

то $\mathbf{y}_j = Ad[B]$;

если $x_j^{(1)} > y_j^{(1)}$:

положить $t_j := t_j + y_j^1$, $\nu_j := \nu_j + 1$, $R_m := R_m + y_j^1$, $j := j - 1$;

вычислить

если $j = 0$:

$\mathbf{x}_j = Ad[Sh[\mathbf{x}_{j-1}, y_{j-1}^1], A]$, $\mathbf{y}_j = \{y_j^1 = \infty\}$. Переход на Шаг 2;

иначе $j \neq 0$:

$\mathbf{x}_j = Ad[Sh[\mathbf{x}_{j-1}, y_{j-1}^1], A]$;

если $j < l$,

$\mathbf{y}_j = Sh[\mathbf{y}_{j-1}, y_{j-1}^1]$;

иначе $j \geq l$ или $l = 1$,

$\mathbf{y}_j = Ad[Sh[\mathbf{y}_{j-1}, y_{j-1}^1], B]$.

Шаг 4. Если $j = k$, то положить $j = 0$ и перейти на Шаг 5.

Шаг 5. Сбор статистики:

- заполнение массива ν_j ,
- заполнение массива R значениями R_m ,
- заполнение массива $t_1, \dots, t_k$.

Положить $m := m + 1$. Перейти на Начало.

Шаг 6. Обработка Статистики:

- вычисление распределения числа ν_j посещений состояний j ,

$$\hat{\nu} = \frac{\nu_j}{\sum_{j \leq k} \nu_j},$$

- вычисление эмпирической функции надежности R ,

$$\hat{R}(t) = 1 - \frac{1}{M} R_m, \quad R_m \leq t < R_{m+1},$$

- среднего времени жизни системы,

$$\mu_R = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M R_m,$$

- вывод результатов.

СТОП.