

I Международная научная конференция
"Школа теории массового обслуживания"
Томск, 21 - 26 апреля

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ С ЗАПРЕТАМИ

Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова

Институт прикладной математики ДВО РАН
e-mail: guram@iam.dvo.ru, mao1975@list.ru

Рассмотрим открытые и замкнутые сети массового обслуживания с запретами на переходы между узлами сети, определяющими протокол их работы. В графе переходных интенсивностей сетей выделим множество базовых вершин (пропорциональное числу ребер) и поставим вопрос об удалении некоторого его подмножества так, чтобы стационарное распределение марковского процесса, описывающего функционирование сети, сохранялось. Определим достаточные условия, при которых задача будет решена и докажем, что отношения числа оставшихся базовых вершин к общему числу вершин n сходится к $1/2$ при $n \rightarrow \infty$.

Граф переходных интенсивностей сети массового обслуживания определяет протокол ее работы и удаление его элементов приводит к уменьшению возможных переходов между состояниями сети. Такое изменение графа переходных интенсивностей означает изменение протокола работы сети массового обслуживания и связано, например, с решением задач о конструировании транспортной или компьютерной сети (см. [1 - 6]). Одним из способов изменения протокола работы сети является введение блокирующих вероятностей переходов между состояниями сети [7, 8]. Но этот способ не подразумевает введения запретов на переходы, что является актуальной прикладной задачей и требует связности графа переходных интенсивности [9 - 10].

Рассмотрим открытую сеть [11 - 16] с пуассоновским входным потоком интенсивности λ , m одноканальными узлами с интенсивностями обслуживания μ_i , $i = \overline{1, m}$. Перемещения заявок в сети задаются неразложимой маршрутной матрицей $\Theta = \|\theta_{ij}\|_{i,j=0}^m$, где θ_{ij} – вероятность перехода после обслуживания из i -го узла в j -ый, $\theta_{00} = 0$, узел 0 – внешний источник. Обозначим $\Lambda = (\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ единственное решение системы балансовых соотношений

$$\Lambda = \Lambda \Theta.$$

Число заявок в узлах сети описывается марковским процессом с множеством состояний $\mathbf{N} = \{\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) : n_1, \dots, n_m \geq 0\}$ и переходными интенсивностями:

$$L(\mathbf{n}, \mathbf{n} + \mathbf{e}_k) = \lambda \theta_{0k}, \quad L(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k, \mathbf{n}) = \mu_k \theta_{k0},$$

$$L(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k, \mathbf{n} + \mathbf{e}_i) = \mu_k \theta_{ki}, \quad 1 \leq k \neq i \leq m, \quad \mathbf{n} \in \mathbf{N}.$$

У элемента $\mathbf{e}_k$ из $\mathbf{N}$ k -я координата равна 1, остальные – 0.

Базовые графы открытой сети

Пусть $\Gamma(\mathbf{n})$ – граф с множеством вершин $V(\mathbf{n}) = \{\mathbf{n}, \mathbf{n} + \mathbf{e}_k, k=1, m\}$ и множеством ребер их соединяющих. Назовем вершину $\mathbf{n}$ базовой, соответствующий ей граф $\Gamma(\mathbf{n})$ базовым, а множество всех таких вершин $\mathbf{N}_0$ базовым множеством. В случае открытой сети $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N}$.

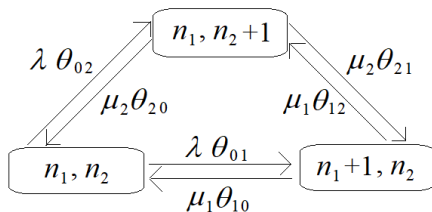


Рис. 1. Базовый граф открытой сети при $m = 2$.

Запреты на переходы в открытой сети

Для некоторого $\mathbf{N}_* \subseteq \mathbf{N}_0$ положим

$$\Gamma(\mathbf{N}_*) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}_*} \Gamma(n), \quad V(\mathbf{N}_*) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}_*} V(n).$$

Опишем сеть с запретами G_* , сопоставив ей граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$. В графе $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ отсутствие ребра $(n, n + e_k)$ означает, что в узел k извне заявки не поступают и после обслуживания в нем вовсе не уходят, а отсутствие ребра $(n + e_k, n + e_i)$ означает, что после обслуживания в узле k заявки не поступают в узел $i, k \neq i$.

Теорема 1. Если $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} < 1, i = \overline{1, m}, V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$, а граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ связный, то марковский процесс, описывающий функционирование сети G_* , эргодический и его стационарное распределение имеет вид

$$\pi(n) = C^{-1} \prod_{i=1}^m \rho_i^{n_i}, \quad C = \sum_{n \in \mathbf{N}} \prod_{i=1}^m \rho_i^{n_i}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (1)$$

Запреты на переходы в открытой сети

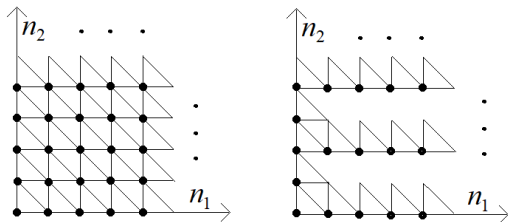


Рис. 2. Граф $\Gamma(\mathbf{N})$ (слева) и граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ (справа) при $m = 2$.

Теорема 2. Если $\Pi(2k) = \{\mathbf{n} \in \mathbf{N} : 0 \leq n_1, \dots, n_m \leq 2k\}$, то

$$\frac{|\mathbf{N}_* \cap \Pi(2k)|}{|\mathbf{N}_0 \cap \Pi(2k)|} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Теорема 3. Удаление из множества $\mathbf{N}_*$ вершины нарушает или равенство $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$ или связность графа $\Gamma(\mathbf{N}_*)$.

Пусть $\{\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) : n_1, \dots, n_m \geq 0, \|\mathbf{n}\| = n_1 + \dots + n_m,$
 $\mathbf{N} = \{\mathbf{n} : \|\mathbf{n}\| \leq 2K + 1\}, \mathbf{N}_0 = \{\mathbf{n} \in \mathbf{N} : \|\mathbf{n}\| \leq 2K\}.$

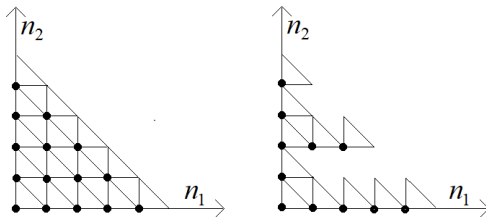


Рис. 3. Граф $\Gamma(\mathbf{N})$ (слева) и граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ (справа) при $m = 2$.

Теорема 4. Справедливо соотношение $\frac{|\mathbf{N}_*|}{|\mathbf{N}_0|} \rightarrow \frac{1}{2}, K \rightarrow \infty.$

Теорема 5. Удаление из множества $\mathbf{N}_*$ вершины нарушает или равенство $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$ или связность графа $\Gamma(\mathbf{N}_*)$.

Пусть в замкнутой сети циркулирует $2K + 1$ заявок между m , $m > 2$, узлами. Перемещения заявок задаются неразложимой маршрутной матрицей $\Theta = \|\theta_{ij}\|_{i,j=1}^m$. Тогда для любого $B > 0$ решение $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ системы балансовых соотношений $\Lambda = \Lambda\Theta$ при условии $B = \sum_{i=1}^m \lambda_i > 0$ существует и единственно.

Число заявок в узлах сети описывается марковским процессом с множеством состояний $\mathbf{N} = \{\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) : n_i \geq 0, \|\mathbf{n}\| = 2K + 1\}$ и переходными интенсивностями:

$$L(\mathbf{n} + \mathbf{e}_i, \mathbf{n} + \mathbf{e}_k) = \mu_i \theta_{ik}, \quad 1 \leq i \neq k \leq m, \quad \mathbf{n} + \mathbf{e}_i, \mathbf{n} + \mathbf{e}_k \in \mathbf{N}.$$

Переход к новым переменным для замкнутой сети

Пусть $\mathbf{N}_0 = \{n \in \mathbf{N} : n_m > 0\}$ и $\Gamma(n)$, $n \in \mathbf{N}_0$, – базовый граф с множеством вершин $V(n) = \{n, n - e_m + e_i, 1 \leq i < m\}$ и множеством ребер их соединяющих. В этом случае $V(\mathbf{N}_0) = \mathbf{N}$. Сопоставим каждой точке множества $n = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbf{N}$ точку $n' = (n_1, \dots, n_{m-1}, 0)$ и определим множества $\mathbf{N}' = \{n' : \|n_k\| \leq 2K + 1\}$, $\mathbf{N}'_0 = \{n' \in \mathbf{N}' : \|n_k\| \leq 2K\}$. Формулы для переходных интенсивностей преобразуются:

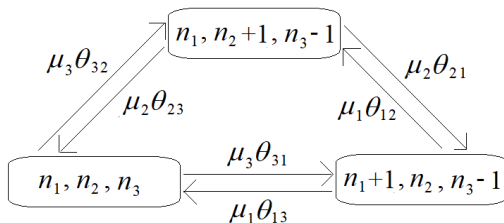
$$L(n', n' + e_i) = \mu_m \theta_{mi}, \quad L(n' + e_i, n') = \mu_i \theta_{im}, \quad L(n' + e_i, n' + e_k) = \mu_i \theta_{ik}.$$


Рис. 3. Рисунок базового графа для замкнутой сети при $m = 3$.

Запреты на переходы для замкнутой сети

Пусть $\mathbf{N}_* \subset \mathbf{N}_0$. Аналогично случаю открытой сети можно описать замкнутую сеть G_* с запретами, сопоставив ей граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$.

Теорема 5. Если $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$, а граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ связный, то марковский процесс, описывающий функционирование сети G_* , эргодический и его стационарное распределение имеет вид

$$\pi(\mathbf{n}) = C^{-1} \prod_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{n_i}, \quad C = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}} \prod_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{n_i}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Запреты на переходы в замкнутой сети

Выберем суженное множество базовых вершин $\mathbf{N}_*$ в виде:

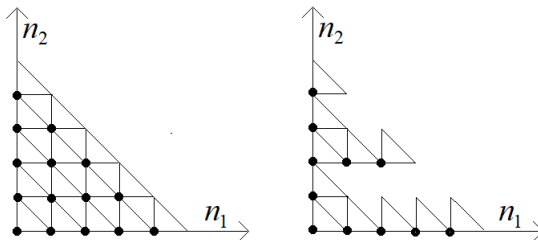


Рис. 3. Граф $\Gamma(\mathbf{N})$ (слева) и граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ (справа) при $m = 3$.

Теорема 6. Удаление из множества $\mathbf{N}_*$ вершины нарушает или равенство $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$ или связность графа $\Gamma(\mathbf{N}_*)$.

Теорема 7. Справедливо соотношение $\frac{|\mathbf{N}_*|}{|\mathbf{N}_0|} \rightarrow \frac{1}{2}, K \rightarrow \infty$.

Обобщение моделей открытой и замкнутой сетей

Пусть $|\mathbf{N}_*| < \infty$, тогда мультипликативные теоремы для открытой и замкнутой сетей можно распространить на случай

$\mu_i = \mu_i(\mathbf{n})$, $i = 1, \dots, m$.

Теорема 8. Если $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$, а граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ связный, то марковский процесс, описывающий функционирование сети с запретами, эргодический и его стационарное распределение имеет вид

$$\pi(\mathbf{n}) = C^{-1} \prod_{k_1=0}^{n_1} \frac{\lambda_1}{\mu_1(k_1, n_2, \dots, n_m)} \times \dots \times \prod_{k_m=0}^{n_m} \frac{\lambda_m}{\mu_m(n_1, \dots, n_{m-1}, k_m)},$$
$$\frac{\lambda_i}{\mu_i(0, n_2, \dots, n_m)} = 1, \dots, \frac{\lambda_i}{\mu_i(n_1, n_2, \dots, n_{m-1}, 0)} = 1.$$

В частности, задание $\mu_i(\mathbf{n}) = \min(r_i, n_i)\mu_i$ соответствует переходной интенсивности для r_i - канального узла $i = 1, \dots, m$.

-  1. Квитко К.Б. Сравнительный анализ международных транспортных систем: инфраструктура, рейтинги, транспортные коридоры // Транспортные системы и технологии. 2020. Т. 6, № 1. С. 15–29.
-  2. Комов М.С. Современные тенденции развития и значение международных транспортных коридоров на рынке транспортных услуг // Экономика и предпринимательство. 2022. № 6(143). С. 243–246.
-  3. O'Hara J. Toward a Commodity Enterprise Middleware: Can AMQP enable a new era in messaging middleware? A look inside standards-based messaging with AMQP // Queue. 2007. V. 5. No. 4. P. 48–55.
-  4. Gudehus T., Kotzab H. Comprehensive Logistics. Heidelberg: Springer Science+Business Media, 2012.

-  5. Vinoski S. Advanced Message Queuing Protocol // IEEE Internet Computing. 2006. V. 10. No. 6. P. 87–89.
-  6 Balsamo S., De Nitto V. A survey of Product-form Queueing Networks with Blocking and their Equivalences // Annals of Operations Research. 1994. V. 48. P. 31–61.
-  7 Balsamo S., Clo M.C. A Convolution Algorithm for Product-form Queueing Networks with Blocking // Annals of Operations Research. 1998. V. 79. P. 97–117.
-  8. Boucherie R.J., van Dijk N.M. On the arrival theorem for product form queueing networks with blocking // Performance Evaluation. 1997. V. 29. P. 155–176.
-  9. Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А. Новые мультипликативные теоремы для сетей массового обслуживания // Проблемы передачи информации. 2005. Т. 41. № 2. С. 111–122.

-  10. Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А. Вероятностное распределение в сетях массового обслуживания с переменной структурой // Проблемы передачи информации. 2006. Т. 42. № 2. С. 101–108.
-  11. Jackson, J.R. Networks of Waiting Lines. Oper. Res. 1957, 5(4), 518 - 521.
-  12. Gordon, K.D.; Newell, G.F. Closed Queuing Systems with Exponential Servers. Oper. Res. 1967, 15(2), 254 - 265.
-  13. Башарин Г.П., Толмачев А.Л. Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем. Итоги науки и техники, сер. "Теория вероятностей". М.: ВИНТИ, 1983.

-  14. Gelenbe E. Product-Form Queueing Networks with Negative and Positive Customers //
- 15. Nelson R. The Mathematics of Product-Form Queueing Networks // ACM
-  16. Balbo G., Marin A., Olliaro D., Sereno M. Computational Algorithms for the Product Form Solution of Closed Queueing Networks with Finite Buffers and Skip-Over Policy // arXiv:2409.08075v1 [cs.PF]. 2024.

Благодарим слушателей за внимание!