Парадокс восстановления и процессы обслуживания

А.В. Зорин

ORCID: 0000-0003-3214-7384 email: andrei.zorine@itmm.unn.ru

ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Россия, г. Н.Новгород, пр. Гагарина, 23

22 апреля 2025 • QTS-2025

Введение. Постановка задачи

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины с абсолютно-непрерывной функцией распределения $B(x) = \mathbb{P}(X_1 < x)$,

$$S_0 = 0, \qquad S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \tag{1}$$

$N(t) = \max\{n \colon S_n \leqslant t\}$ — число восстановлений.

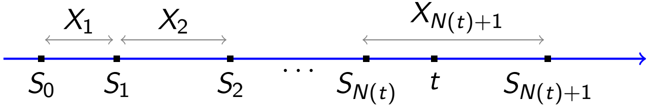


Рис.: Каков закон распределения $X_{N(t)+1}$?

Введение. Постановка задачи (прод.)

В известной монографии В.Феллера (Т. 2, Гл. XI, § 4) приведено следующее выражение для распределения $X_{N(t)+1}$:

$$\mathbb{P}(X_{N(t)+1} < u) = \int_{t-u}^{t} (B(u) - B(t-x))\, dU(x),$$

где

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B^{n*}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n < t)$$

Таким образом, распределение $X_{N(t)+1}$ может зависеть от t и отличается от $B(x)$.

Введение. Постановка задачи (прод.)

Вводят так называемые функционалы в процессе восстановления[1]

$$\gamma_r(t) = S_{N(t)+1} - t, \qquad \gamma_e(t) = t - S_{N(t)}$$

— оставшееся время до следующего после момента t восстановления и прошедшее время с последнего перед моментом t восстановления.

Известно, что процессы $\{\gamma_r(t); t \geqslant 0\}$ и $\{\gamma_e(t); t \geqslant 0\}$ являются марковскими. (В.Феллер, Т. 2, Гл. XI, §4: «Легко видеть, что три семейства случайных величин $t - S_{N(t)}$, $S_{N(t)+1} - t$, $S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$ суть однородные марковские процессы»)

[1] Скороход А.В. Элементы теории вероятностей и случайных процессов. Киев: Высшая школа, 1980.

Введение. Постановка задачи (прод.)

В чем состоит доказательство марковости процесса $\gamma_e(t)$, $t \geqslant 0$?
Какова вероятность скачка этого процесса на промежутке $[t, t+h)$, если $\gamma_e(t) = u > 0$?
Считается, что вероятность скачка выражается формулой

$$\frac{B'(u)}{1 - B(u)}\, h + o(h).$$

Популярное обоснование: поскольку $\gamma_e(t) = u > 0$ и закон распределения промежутка, накрывающего t, есть $B(x)$, то...
Но ведь этот закон для *случайного* промежутка распределения отличается от закона для каждого отдельного промежутка!

В известной докладчику литературе строгое доказательство этого факта не приводится.

Введение. Постановка задачи (прод.)

Будем использовать такое соображение: наличие скачка величины $\gamma_e(t)$ на промежутке $[t, t + h)$ означает, что $\gamma_r(t) < h$. Вычислим условную вероятность

$$\mathbb{P}(\gamma_r(t) < \Delta \mid \gamma_e(t) = x), \tag{2}$$

пользуясь методами теории восстановления.

Вероятность скачка

Рассмотрим совместное распределение

$$H_t(u, v) = \mathbb{P}(\gamma_e(t) > u, \gamma_r(t) > v). \tag{3}$$

Известны следующие свойства (см., напр., А.В. Скороход цит.выш.):

$$\mathbb{P}(\gamma_e(t) > v, \gamma_r(t) > u) = H_{t-v}(u + v), \tag{4}$$

где функция $H_t(u) = \mathbb{P}(\gamma_r(t) > u)$ связана с функцией восстановления $U(t)$ соотношением

$$H_t(u) = 1 - B(t + u) + \int_0^t (1 - B(t + u - \tau))\, dU(\tau). \tag{5}$$

Последнее соотношение легко интерпретируется с помощью формулы полной вероятности.

Вероятность скачка

Theorem

Пусть существует плотность $U'(t)$. Тогда имеет место равенство

$$\mathbb{P}(\gamma_r(t) < v \mid \gamma_e(t) = u) = \frac{B(u+v) - B(u)}{1 - B(u)}. \tag{6}$$

Доказательство.

В данном случае условную вероятность можно определить как предел:

$$\mathbb{P}(\gamma_r(t) < \Delta \mid \gamma_e(t) = x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{P}(x \leqslant \gamma_e(t) < x + h, \gamma_r(t) < \Delta)}{\mathbb{P}(x \leqslant \gamma_e(t) < x + h)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{H_{t-x}(x) - H_{t-x-h}(x+h) - H_{t-x}(x+\Delta) + H_{t-x-h}(x+h+\Delta)}{H_{t-x}(x) - H_{t-x-h}(x+h)}.$$

Знаменатель:

$$H_{t-x}(x) - H_{t-x-h}(x+h) = \int_{t-x-h}^{t-x} (1 - B(t-\tau))\, dU(\tau) \tag{7}$$

Считая, что существует плотность восстановлений $U'(\tau)$, получим:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(H_{t-x}(x) - H_{t-x-h}(x+h)\right) = (1 - B(x))U'(t-x).$$

Такая же сумма есть и в числителе (первые два слагаемые). Поэтому осталось разобраться с третьим и четвертым слагаемыми:

$$H_{t-x-h}(x+h+\Delta) - H_{t-x}(x+\Delta) = -\int_{t-x-h}^{t-x} (1 - B(t+\Delta-\tau))\, dU(\tau), \tag{8}$$

Вероятность скачка (прод.)

откуда

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(H_{t-x-h}(x+h+\Delta)-H_{t-x}(x+\Delta)\big)=-(1-B(x+\Delta))U'(t-x).$$

Окончательно,

$$\mathbb{P}(\gamma_r(t)<\Delta\mid\gamma_e(t)=x)=\frac{(1-B(x))-(1-B(x+\Delta))}{1-B(x)}=\frac{B(x+\Delta)-B(x)}{1-B(x)}.$$

Доказательство завершено.

Вероятность скачка (прод.)

Чтобы погрузить процесс восстановления в контекст теории массового обслуживания представим себе любую из следующих СМО:

- однолинейную СМО рекуррентным входным потоком и экспоненциальным обслуживанием
- однолинейную СМО с бесконечной очередью и произвольным временем обслуживания, так что очередь всега забита и основная характеристика системы — прошедшее время с начала очередного акта обслуживания.

Метод дополнительной переменной: история

При изложении метода дополнительной переменной обычно следует отсылка к статье Кокса (1954).
Сам Д.Р. Кокс в этой статье пишет: «The method is very well known in principle; an example of its use to solve a particulat proble is (5)» (статья R. Kronig'а 1943 года).
В качестве примера применения он берет систему M/G/1 и добавляет переменную — прошедшее время с начала обслуживания. Утверждает без доказательства: «The inclusion of the single supplimentary variable t_1 makes the process Markovian in continuous time, and we can write down the equations of the process by considering in the usual way the transitions occurring in δt».

Метод дополнительной переменной: история (прод.)

В первом издании известной монографии Б.В. Гнеденко и И.Н. Коваленко в 1966 году во вводной, общетеоретической части, рассматривался полумарковский процесс и прошедшее время с последнего изменения состояния. Однако эта теория не используется для исследования системы $M/G/1$ следуя Коксу, а (в главе 4) они вводят дополнительную компоненту в виде *оставшегося времени* обслуживания. Интересно, что начиная со второго издания в 1987 году эта глава переписана, процесс длины очереди убран и изучается подробно только вложенная цепь в моменты ухода требований.

При изложении теории по полумарковским и линейчатым процессам парадокс восстановления не упоминается, а формула вероятности скачка приводится как очевидная, следующая из того «факта», что накрывающий интервал имеет такое же распределение как и типичный интервал.

Метод дополнительной переменной: история (прод.)

В книге В.В. Калашникова *Mathematical methods in queueing theory* (Kluwer, 1994) в главе про метод дополнителной переменной справедливо отмечается, что (в модели M/G/1) «...the current service time S_t is longer that $E_s(t)$ and $R_s(t) = S_t - E_s(t)$. Note that S_t has not the d.f. $B(x)$, in general, as some additional demands, namely, $S_e > E_s(t)$ are imposed».

Но далее в вычислениях снова появляется это типовое время обслуживания: «Hence (denoting by s the generic service time),

$$\mathbb{P}(R_s(t) \leqslant y) = \mathbb{P}(s \leqslant E_s(t) + y \mid s > E_s(t)) =$$
$$= \frac{\mathbb{P}(E_s(t) < s \leqslant E_s(t) + y)}{\mathbb{P}(s > E_s(t))} = \frac{B(E_s(t) + y) - B(E_s(t))}{1 - B(E_s(t))}.»$$

Система M/G/1

Оказывается, строго вычислить вероятность скачка для такой дополнительной компоненты типа прошедшего времени с последнего события, когда известно это прошедшее время в момент t, уже составляет трудоемкую проблему. Мы продемонстрируем трудности на примере системы типа $M/G/1/\infty$.

Пусть в однолинейную систему поступает простейший поток с интенсивностью $\lambda > 0$, очередь без ограничений размера, длительности обслуживания требований н.о.р. с ф.р. $B(x)$. Требования обслуживаются в порядке поступления согласно дисциплине FIFO.

Пусть $L(t)$ — число требований в системе в момент t. Положим $L(0) = 0$.

Пусть $\gamma_e(t)$ — прошедшее с начала последнего перед t обслуживания (или 0 если в момент t очередь пуста), пусть $\gamma_r(t)$ — оставшееся время до ближайшего после t завершения обслуживания.

Система M/G/1 (прод.)

Процесс $\{(L(t), \gamma_e(t)); t \geqslant 0\}$ является марковским (очень хочется надеяться), поэтому при выводе дифференциальных уравнений для распределения вероятностей в момент t необходимо знать вероятность завершения обслуживания на промежутке $[t, t+h)$, если известно, что $L(t) = x > 0$ и $\gamma_e(t) = u > 0$.
Пусть средствами имитационного моделирования, для фиксированного t получена выбрка (x_i, u_i, v_i), $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ случайного вектора $(L(t), \gamma_e(t), \gamma_r(t))$ по n независимым реализациям процесса. Как можно оценить *условные вероятности*

$$\mathbb{P}(\gamma_r(t) > v \mid L(t) = x, \gamma_e(t) = u),\ x = 1, 2, \ldots, \quad \mathbb{P}(\gamma_r(t) > v \mid L(t) > 0, \gamma_e(t) = u)\,?$$

(Хотим знать обе, т.к. часто при выводе дифференциальных уравнений в ходе

рассуждений на физическом уровне строгости подменяют первое условие вторым.)
Вспомним, что, например,

$$\mathbb{P}(\gamma_r(t) > v \mid L(t) = x, \gamma_e(t) = u) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\mathbb{P}(\gamma_r(t) > v, L(t) = x, u \leqslant \gamma_e(t) < u + \Delta)}{\mathbb{P}(L(t) = x, u \leqslant \gamma_e(t) < u + \Delta)}$$

Система M/G/1 (прод.)

```
run.sim = function(Tmax=10,
b=0.35, X0=0)
{
 Qsz = X0
 tloc= 0
 srv.beg.t = 0
 while( tloc < Tmax){
  if (Qsz==0) {
   tloc = tloc + rexp(1, 1.0)
   if(tloc>=Tmax)
    srv.beg.t = Tmax
   else {
    Qsz = 1
   }
  }
  else {
   srv.beg.t = tloc
   service.t =
      runif(1, min=0, max=2*b)
   if(tloc+service.t<Tmax)
    Qsz = Qsz - 1 +
       rpois(1, service.t)
   else
    Qsz = Qsz + rpois(1, Tmax-tloc)
    tloc = tloc + service.t
  }
 }
 return(c( Qsz, Tmax-srv.beg.t,
tloc-Tmax) )
}
```

Система M/G/1 (прод.)

Пусть таблица (кадр данных, data frame) `sim.res` содержит выборку значений (x_i, u_i, v_i), $i = 1, 2, \ldots, n$. Команда построения гистограммы для величины накрывающего момент t акта обслуживания:

```
hist( (sim.res[2,]+sim.res[3,])[sim.res[1,]>0], pr=TRUE, col="blue")
```

Гистограммы условных плотностей рисуются с помощью перехода от значений u_i к содержащим их интервалам равномерного разбиения диапазона значений (выбрано разбиение на $144 = 12^2$ интервалов).

```
for ( K0 in 1:3)
  aggregate(
  sim.res[3,sim.res[1,]==K0],
  by=list(cut(sim.res[2,sim.res[1,]==K0],
        br=seq(0,2*b1, length.out=145))),
  function(x){hist(x, pr=TRUE,lwd=1.2,col="blue")} )
```

Система M/G/1 (прод.)

```
aggregate(
  sim.res[3,sim.res[1,]>0],
  by=list(cut(sim.res[2,si,.res[1,]>0],br=seq(0,2*b1, length.out=145))),
  function(x){hist(x, pr=TRUE,lwd=1.2,col="blue")} )
```

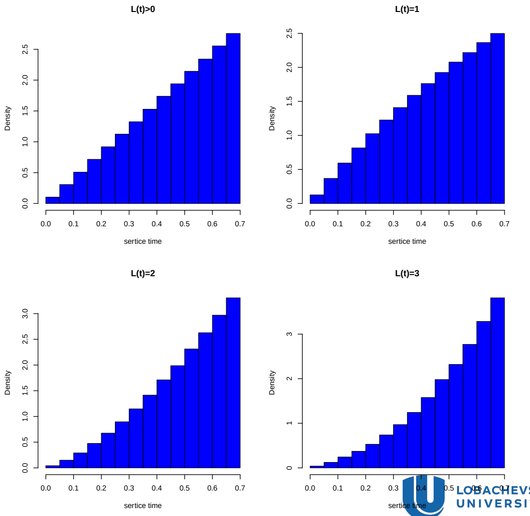
Будем генерировать данные при $\lambda = 1$, $b = \int_0^\infty t\,dB(t) = 0.35$, объем $n = 10{,}000{,}000$.

Система M/G/1 (прод.)

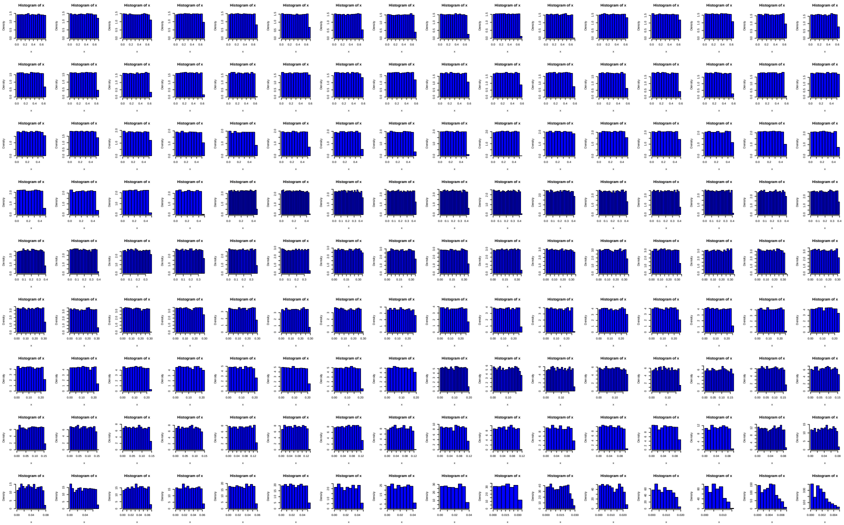
Гистограммы распределения величины

$$\gamma_e(t) + \gamma_r(t)$$

при условиях $L(t) > 0$, $L(t) = 1$, $L(t) = 2$, $L(t) = 3$.
Момент $t = 5$.
Исходное распределение времени обслуживания — равномерное на $[0, 2b]$ при $b = 0.35$.

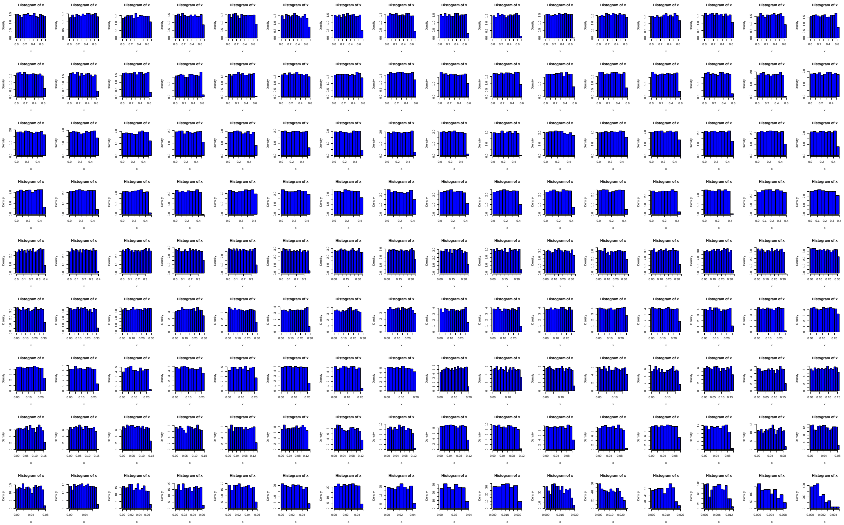


Система M/G/1 (прод.)



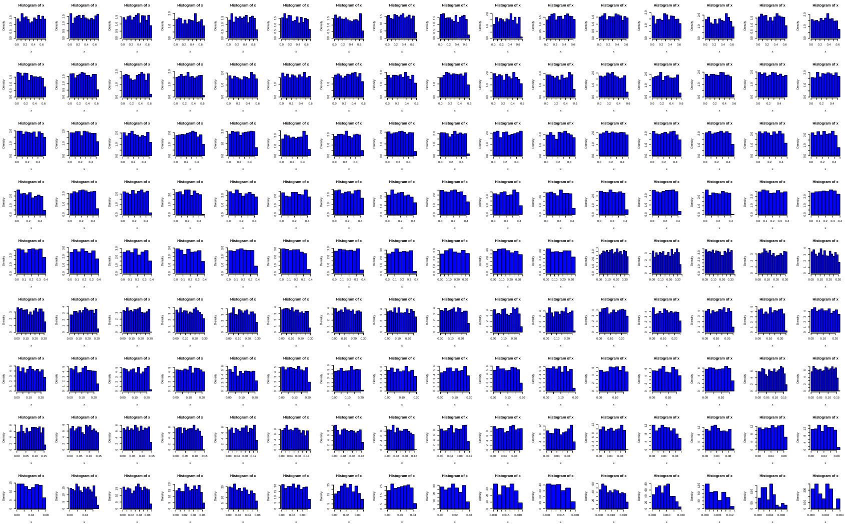
Гистограммы условных распределений $\gamma_r(t)$, $L(t) = 1$

Система M/G/1 (прод.)



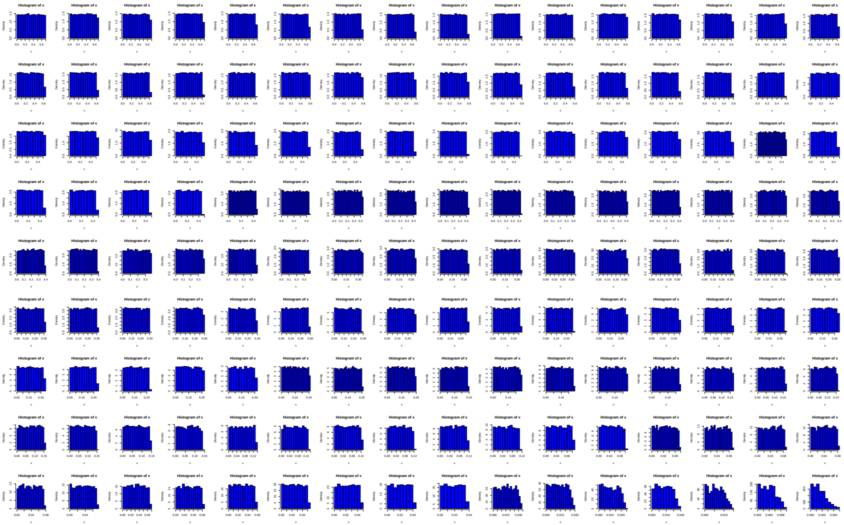
Гистограммы условных распределений $\gamma_r(t)$, $L(t) = 2$

Система M/G/1 (прод.)



Гистограммы условных распределений $\gamma_r(t)$, $L(t) = 3$

Система M/G/1 (прод.)



Гистограммы условных распределений $\gamma_r(t)$, $L(t) > 0$

Система M/G/1 (прод.)

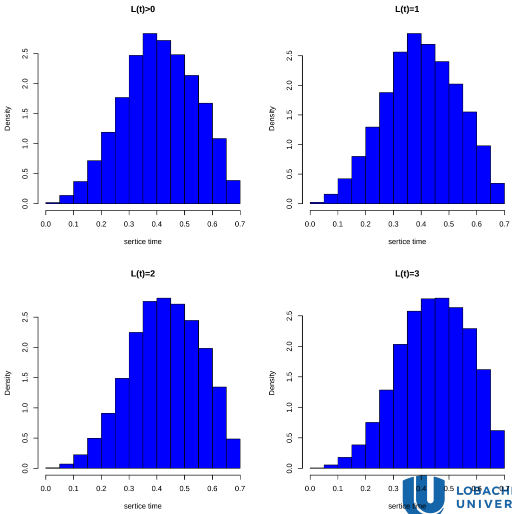
Гистограммы распределения величины

$$\gamma_e(t) + \gamma_r(t)$$

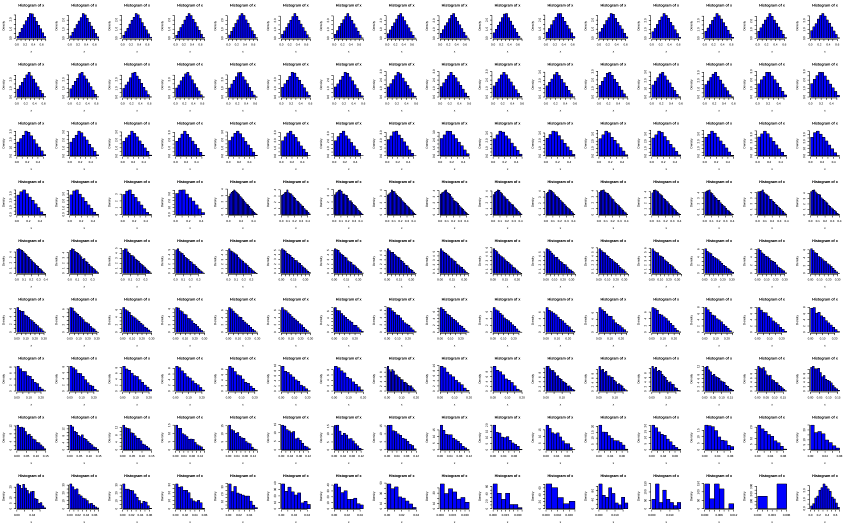
при условиях $L(t) > 0$, $L(t) = 1$, $L(t) = 2$, $L(t) = 3$.

Момент $t = 5$.

Исходное распределение времени обслуживания — треугольное (Симпсона) на $[0, 2b]$ при $b = 0.35$.

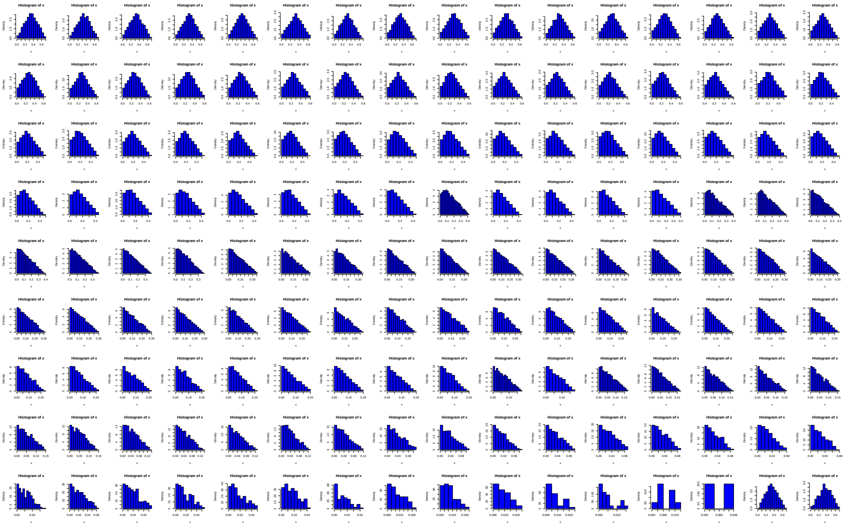


Система M/G/1 (прод.)



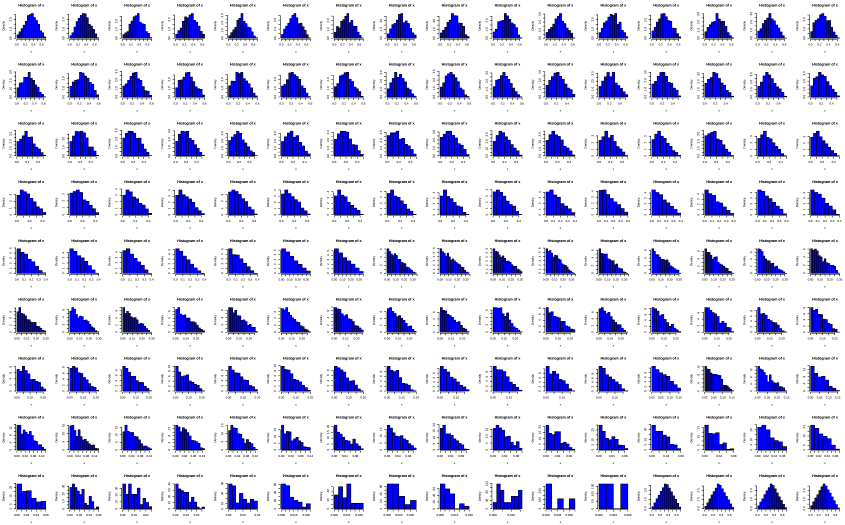
Гистограммы условных распределений $\gamma_r(t)$, $L(t) = 1$

Система M/G/1 (прод.)



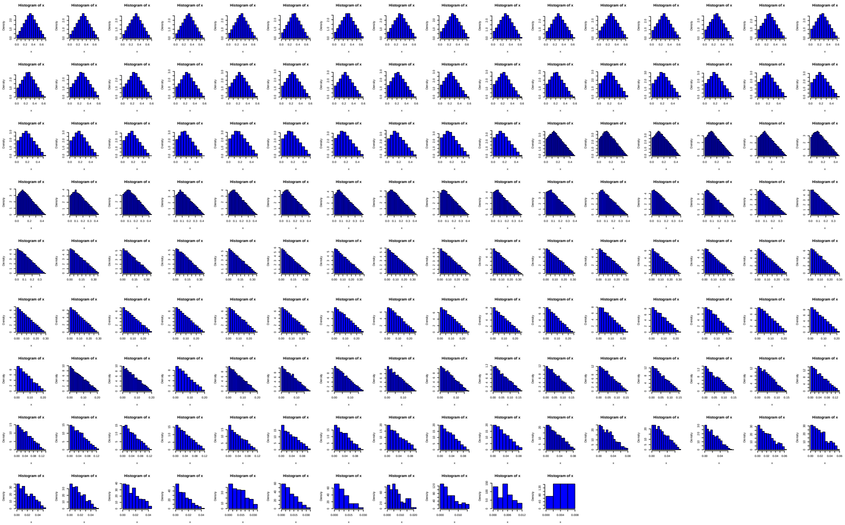
Гистограммы условных распределений $\gamma_r(t)$, $L(t) = 2$

Система M/G/1 (прод.)



Гистограммы условных распределений $\gamma_r(t)$, $L(t) = 3$

Система M/G/1 (прод.)



Гистограммы условных распределений $\gamma_r(t)$, $L(t) > 0$

Система M/G/1 (прод.)

Следующие случайные величины считаются заданными или определяются явно:

- моменты поступления требований, $\tau_n^{(i)}$, $n = 1, 2, \ldots$ таковы, что $(\tau_n^{(i)} - \tau_{n-1}^{(i)})$, $n = 1, 2, \ldots$ суть независимые, с показательным распределением с параметром λ и $\tau_0^{(i)} = 0$ (верхний символ i означает input, «входные»);
- длительности обслуживания S_n, $n = 1, 2, \ldots$ — н.о.р. с ф.р. $B(x)$;
- длительности ожидания (рекуррентные уравнения Линдли) и моменты выхода

$$W_1 = 0, \quad W_n = \max\{0, W_{n-1} + S_{n-1} - (\tau_n^{(i)} - \tau_{n-1}^{(i)})\}, \tag{9}$$

$$\tau_n^{(o)} = \tau_n^{(i)} + W_n + S_n, \tag{10}$$

то есть первое требование не ждет, поступает в пустую систему;

Система M/G/1 (прод.)

- считающий процесс входного потока

$$\eta(t) = \max\{n\colon \tau_n^{(i)} \leqslant t\}, \quad t \geqslant 0, \tag{11}$$

это классический процесс Пуассона с непрерывными справа траекториями, $\eta(t)$ считает требованияна $[0, t]$;

- считающий процесс выходного потока

$$\xi(t) = \max\{n\colon \tau_n^{(o)} \leqslant t\}, \quad t \geqslant 0; \tag{12}$$

(верхний индекс o означает output, «выходной»), также непрерывен справа.

Тогда число требований в системе в момент t равно

$$L(t) = \eta(t) - \xi(t)$$

и $\{L(t); t \geqslant 0\}$ — процесс с непрерывными справа траекториями. Тогда прошедшее и оставшееся временя для обслуживания требования, находящегося на приборе в момент t определены как

$$\gamma_e(t) = \max\{0,\ t - (\tau^{(i)}_{\xi(t)+1} + W_{\xi(t)+1})\}, \qquad \gamma_r(t) = \tau^{(o)}_{\xi(t)+1} - t.$$

Обозначим

$$G_n(t,x) = \mathbb{P}(\tau_n^{(o)} < t, L(\tau_n^{(o)}) = x), \quad g_n(t,x) = \frac{d}{dt} G_n(t,x).$$

Theorem

Имеют место соотношения ($u > 0$, $v > 0$):

$$\mathbb{P}(L(t) = x, \gamma_e(t) > v, \gamma_r(t) > u) =$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{t-v} (1 - B(t+u-y)) \frac{(\lambda(t-y))^{x-1}}{(x-1)!} \, dy +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(\int\limits_0^{t-v} \Bigg(\lambda e^{-\lambda(t-y)} \int\limits_y^{t-v} (1 - B(u+t-z)) \frac{(\lambda(t-z))^{x-1}}{(x-1)!} \, dz \Bigg) d_y G_n(y,0) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{x} \int\limits_0^{t-v} \Bigg((1 - B(u+t-y)) \frac{(\lambda(t-y))^{x-l}}{(x-l)!} e^{-\lambda(t-y)} \Bigg) d_y G_n(y,l) \Bigg).$$

Доказательство. Имеем:

$$\mathbb{P}(L(t) = x, \gamma_e(t) > v, \gamma_r(t) > u) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\xi(t) = n, L(t) = x, \gamma_e(t) > v, \gamma_r(t) > u) =$$

$$= \mathbb{P}(\tau_1^{(o)} > t, L(t) = x, \gamma_e(t) > v, \gamma_r(t) > u) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_n^{(o)} \leqslant t < \tau_{n+1}^{(o)}, L(t) = x, \gamma_e(t) > v, \gamma_r(t) > u).$$

Система M/G/1 (прод.)

Первое слагаемое:

$$\mathbb{P}(\tau_1^{(o)} > t, L(t) = x, \gamma_e(t) > v, \gamma_r(t) > u) =$$

$$= \mathbb{P}(\tau_1^{(o)} > t, L(t) = x, \gamma_e(t) > v, \gamma_r(t) > u) =$$

$$= \mathbb{P}(\tau_1^{(i)} < t - v, \tau_1^{(i)} + S_1 > t + u, \tau_x^{(i)} \leqslant t < \tau_{x+1}^{(i)}) =$$

$$= \int\limits_0^{t-v} \lambda e^{-\lambda y}(1 - B(t + u - y))\frac{(\lambda(t-y))^{x-1}}{(x-1)!} e^{-\lambda\cdot(t-y)}\, dy =$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{t-v} (1 - B(t + u - y))\frac{(\lambda(t-y))^{x-1}}{(x-1)!}\, dy.$$

Общий член:

$$\mathbb{P}(\tau_n^{(o)} \leqslant t < \tau_{n+1}^{(o)}, L(t) = x, \gamma_e(t) > v, \gamma_r(t) > u) =$$
$$= \sum_{l=0}^{x} \mathbb{P}(\tau_n^{(o)} \leqslant t < \tau_{n+1}^{(o)}, L(\tau_n^{(o)}) = l, L(t) = x, \gamma_e(t) > v, \gamma_r(t) > u)$$

При $l = 0$ получаем (помним обозначение $G_n(t, x) = \mathbb{P}(\tau_n^{(o)} < t, L(\tau_n^{(o)}) = x)$):

$$\mathbb{P}(\tau_n^{(o)} \leqslant t < \tau_{n+1}^{(o)}, L(\tau_n^{(o)}) = 0, L(t) = x, \gamma_e(t) > v, \gamma_r(t) > u) =$$
$$= \mathbb{P}(\tau_n^{(o)} \leqslant t < \tau_{n+1}^{(o)}, \eta(\tau_n^{(o)}) = \xi(\tau_n^{(o)}) = n, L(t) = x, t - (\tau_{n+1}^{(i)} + W_{n+1}) > v, \tau_{n+1}^{(o)} - t > u) =$$
$$= \ldots = \int_0^{t-v} \left(\lambda e^{-\lambda(t-y)} \int_y^{t-v} (1 - B(u + t - z)) \frac{(\lambda(t-z))^{x-1}}{(x-1)!} \, dz \right) d_y G_n(y, 0).$$

Система M/G/1 (прод.)

Для положительных l,

$$\mathbb{P}(\tau_n^{(o)} \leqslant t < \tau_{n+1}^{(o)}, L(\tau_n^{(o)}) = l, L(t) = x, \gamma_e(t) > v, \gamma_r(t) > u) =$$

$$= \int\limits_0^{t-v} \left((1 - B(u + t - y)) \frac{(\lambda(t-y))^{x-l}}{(x-l)!} e^{-\lambda(t-y)} \right) d_y G_n(y, l)$$

Собирая всё вместе, получим утверждение теоремы. $\square$

Система M/G/1 (прод.)

Следствие

Пусть существуют плотности $g_n(y,i) = \frac{d}{dy} G_n(y,l)$. *Тогда*

$$P(\gamma_r(t) > u \mid L(t) = x, \gamma_e(t) = v) = \frac{1 - B(u+v)}{1 - B(u)}, \quad x = 1, 2, \dots; \tag{13}$$

$$\mathbb{P}(\gamma_r(t) > u \mid L(t) > 0, \gamma_e(t) = v) = \frac{1 - B(u+v)}{1 - B(u)}. \tag{14}$$

Доказательство. Обозначим

$$H_{t,x}(u,v) = \mathbb{P}(L(t) = x, \gamma_e(t) > v, \gamma_r(t) > u)$$

Система M/G/1 (прод.)

Заметим, что

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\gamma_r(t) > u \mid L(t) = x, \gamma_e(t) = v) = \\
&\qquad = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{P}(L(t) = x, v \leqslant \gamma_e(t) < v + h, \gamma_r(t) > u)}{\mathbb{P}(L(t) = x, v \leqslant \gamma_e(t) < v + h)} = \\
&\qquad\qquad = \lim_{h\to 0} \frac{H_{t,x}(u, v) - H_{t,x}(u, v + h)}{H_{t,x}(0, v) - H_{t,x}(0, v + h)}.
\end{aligned}
$$

Система M/G/1 (прод.)

Используя явные выражения для $H_{t,x}(u,v)$ из предыдущей теоремы, получим асимптотические формулы:

$$H_{t,x}(u,v) - H_{t,x}(u,v+h) = \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_{t-v-h}^{t-v} (1 - B(t+u-y)) \frac{(\lambda(t-y))^{x-1}}{(x-1)!}\, dy +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(h \cdot \Bigg(\int\limits_{0}^{t-y} \Bigg(\lambda e^{-\lambda(t-y)} (1 - B(u+v)) \frac{(\lambda v)^{x-1}}{(x-1)!} \Bigg) d_y G_n(y,0) \Bigg) + o(h) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{x} \int\limits_{t-v-h}^{t-v} \Bigg((1 - B(u+t-y)) \frac{(\lambda(t-y))^{x-l}}{(x-l)!}\, e^{-\lambda(t-y)} \Bigg) d_y G_n(y,l) \Bigg),$$

Система M/G/1 (прод.)

Поэтому величина $h^{-1}(H_{t,x}(u,v) - H_{t,x}(u,v+h))$ при $h \to 0$ стремится к

$$(1 - B(u+v)) \cdot \Bigg(\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda v)^{x-1}}{(x-1)!} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(\frac{(\lambda v)^{x-1}}{(x-1)!} \int\limits_0^{t-v} \lambda e^{-\lambda(t-y)}\, d_y G_n(y,0) + \sum_{l=1}^{x} \frac{(\lambda v)^{x-l}}{(x-l)!} g_n(t-v,l) \Bigg) \Bigg).$$

Здесь можно подставить также $u = 0$, как нужно в знаменателе. Заметим, что второй сомножитель не содержит u! В итоге,

$$\lim_{h \to 0} \frac{H_{t,x}(u,v) - H_{t,x}(u,v+h)}{H_{t,x}(0,v) - H_{t,x}(0,v+h)} = \frac{1 - B(u+v)}{1 - B(u)}.$$

Система M/G/1 (прод.)

Чтобы найти условную вероятность $\mathsf{P}(\gamma_r(t) > u \mid L(t) > 0, \gamma_e(t) = v)$, надо отдельно просуммировать по $x \geqslant 1$ числители и знаменатели. Поскольку первый сомножитель не содержит x, а вторые сомножители идентичны, снова произойдут очевидные сокращения и получим

$$\mathsf{P}(\gamma_r(t) > u \mid L(t) > 0, \gamma_e(t) = v) = \frac{1 - B(u+v)}{1 - B(v)}\,.$$

Заключение

Выводы

- Распределение акта обслуживания, который имеет место в момент t, *отличается* от распределения $B(x)$
- Условное распределение оставшегося времени обслуживания как при фиксированном истекшем времени, так и при фиксированных длине очереди и истекшем времени, имеет вид *как если бы задавалось ф.р.* $B(x)$
- Полученные другими исследователями системы дифференциальных уравнений (и их дальнейший анализ), по-видимому, верны, хотя их вывод содержит сомнительное утверждение.

Литература

- Скороход А. В. Элементы теории вероятностей и случайных процессов. Киев: Высшая школа, 1980. 344 с.
- Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т. 2. М.: Мир, 1984. 738 с.
- Cox D. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of Cambridge Philosiphical Society. 1955. V. 50. P. 433–441.
- Kalashnikov V. V. Mathematical methods in queueing theory. Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1994. 377 p.

Спасибо за внимание!

Вопросы?